

**O`ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O`RTA MAXSUS TA`LIM VAZIRLIGI
NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI
FIZIKA- MATEMATIKA FAKULTETI
MATEMATIKA- INFORMATIKA YO`NALISHI
3- KURS 305- GURUH TALABASI**

*Jo`rayev Alijonning
Differensial geometriya
fanidan*

KURS ISHI

Mavzu: Evolyuva va evolventa

Annotatsiya

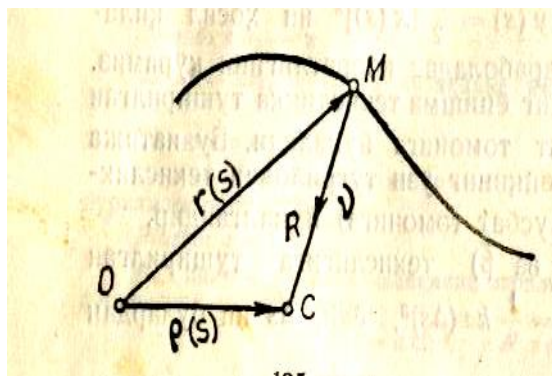
Ushbu kurs ishi Evolyuva va evolventa deb nomlanib unda tekislikdagi chiziqlarning evolyuta va evolventasi hamda chiziqning evolyuta va evolventasining xossalari to'g'risida tushunchalar berilgan va misollar yechib ko'rsatilgan. Kurs ishi oxirida mustaqil yechish uchun misol va masalalar keltirilgan.

Режа

1. Текисликдаги чизикнинг эвалютаси
2. Чизикнинг эвольвентлари
3. Эвалюта ва эвольвентанинг хоссалари

Текисликдаги чизикнинг эвалютаси

Агар $M(x, y)$ нукта берилган чизик бўйлаб ҳаракат қилинса, унга мос келган эгрилик маркази ҳам, умуман, ҳаракатда бўлиб, қанадай чизик чиза боради. Берилган чизикнинг эгрилик марказларининг *эвалютаси* деб аталади.



Агар чизиклар оиласини ўрамаси формулаларида X_3 ва Y_3 ни ўзгарувчи миқдорлар деб қарасак, у формулалар эвалютанинг параметрик тенгламаларини беради. Ўзгарувчи X_3 ва Y_3 ларни ξ ва η билан белгиласак, эвалютанинг тенгламалари

1-расм

$$\xi = x(y) - y'(t) \frac{x'^2(t) + y'^2(t)}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)},$$

$$\eta = y(t) + x'(t) \frac{x'^2(t) + y'^2(t)}{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}$$

(1)

бўлади.

Чизикнинг тенгламаси $y=f(x)$ шаклда берилган бўлса, $x'(t)=1, x''(t)=0$ бўлиб, (1) нинг кўриниши соддалашади.

$$\varepsilon = x - y' \frac{1 + y'^2}{y''}, \eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}. \quad (2)$$

Эвалютанинг хоссаларини ўрганиш учун, унинг тенгламасини вектор формада ёзамиз (1-расм).

$OM=r(s)$ бўлсин. M нуктадан эгрилик марказигача борган векторнинг $\overline{MC} = \overline{Rv}$ эканлигини § 42 да кўрган эдик. S параметр ўзгарганда, M нукта $r=r(s)$ чизик бўйлаб ҳаракат қилади. Шу билан бирга OC вектор ҳам ўзгара боради. шундай қилиб OC ва v векторлар, шунингдек R радиуси s параметрнинг функциялари эканлигини аниқланади. Агар OC векторни $\rho(s)$ билан белгиласак, эвалютанинг вектор формадаги тенгламаси:

$$\bar{\rho}(s) = r(s) + R(s) \bar{v}(s) \quad (3)$$

бўлади.

Эвалютага ўтказилган уринма векторининг йўналишини аниқлайлик бунинг учун, (3) дан s бўйича ҳосила оламиз.

$$\frac{d\bar{\rho}}{ds} = \bar{\tau} + \frac{dr}{ds} + \frac{dR}{ds} \bar{v} + R \frac{d\bar{v}}{ds}.$$

Текисликдаги чизик учун σ бурилма нолга тенглигидан, френенинг иккинчи формуласи

$$\frac{d\bar{v}}{ds} = -R\bar{\tau} \text{ бўлади. Шу сабабли}$$

$$\frac{d\bar{\rho}}{ds} = \bar{\tau} + \frac{dR}{ds} \bar{v} + R(-R\bar{\tau}).$$

Энди $R = \frac{1}{R}$ га мувофиқ, $\frac{d\bar{\rho}}{ds} = \bar{\tau} + \frac{dR}{ds} \bar{v} - \bar{\tau}$ ёки $\left| \frac{d\bar{\rho}}{ds} \right| = \left| \frac{dR}{ds} \right|$, (4)

Бу эса эвалютага ўтказилган уринма $r=r(s)$ чизикнинг нормали йўналганлигини билдиради. Тескарича, $r=r(s)$ чизикли ҳар бир нуқтасидаги нормали эвалютага уринма бўлади яни $r=r(s)$ нинг ҳар бир параметри нормаларининг ўрамаси бу чизикнинг эвалютасининг ташкил қилади.

Эвалютанинг иккинчи хоссасини билиш учун, (4) дан модуль оламиз $\left| \frac{d\vec{\rho}}{ds} \right| = \left| \frac{dR}{ds} \right| \cdot \left| \vec{v} \right|$ ёки

$\left| \frac{d\vec{\rho}}{ds} \right| = \left| \frac{dR}{ds} \right|$, бу ердан $\left| d\vec{v} \right| = |dR|$. Эвалютадаги ёй узунлигини s^* билан белгилаб, уни параметр

сифатида қабул қиламиз. Охирги тенгликни ds^* га бўламиз: $\left| \frac{d\vec{v}}{ds^*} \right| = \left| \frac{dR}{ds^*} \right|$. Аммо $\frac{d\vec{\rho}}{ds^*}$ эвалюта

уринмасининг бирлик векторини белгилайди. $\left(\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau} \right)$ каби). Шунинг учун $\left| \frac{d\vec{\rho}}{ds^*} \right| = 1$ ёки

$\left| d\vec{\rho} \right| = |ds^*|$. Демак $|ds^*| = |dR|$. Агар эвалютада R нинг ўсадигон томонини мусбат томон деб

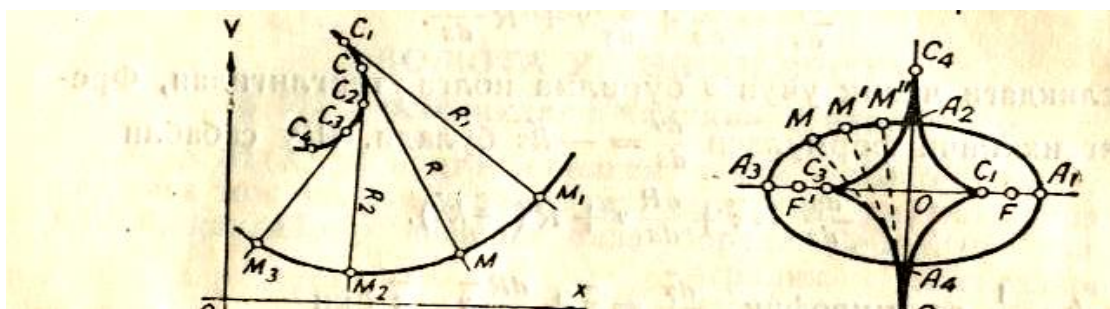
хисобласак, у ҳолда R ўсганда s^* ҳам ўсади ва тескарича. Шу сабабли, $ds^* = dR$ бўлади. Бу тенгликнинг иккала томонидан интеграл олсак, $s^* = R + \text{const}$ келиб чиқади.

Бундан, эвалюта ёйининг орттимаси эгрилик радиусининг ортирмасига тенг натижага келамиз (чизикнинг эгрилик радиуси монотон ўзгарган қисимларида). Бундан қуйдагини ҳосил қиламиз. $\Delta s^* = R$; $CC_1 - OC_1 - OC^* = \Delta s^*$;

$CC_1M_1 - CM = R_1 - R = \Delta R$ бўлиб, демак, $CC_1 = R_1 - R$ ёки R_1 бўлади. Шундай қилиб, R_1 эгрилик радиуси эвалютадаги CC_1 ёйи билан R эгрилик радиусининг йиғиндисига тенгдир. (126 чизма)

Мисол. 1. $r = \cos t i + b \sin t j$

Эллиписнинг параметрик тенгламаларини ёзамиз.



$$\begin{aligned} x &= a \cos t, y = b \sin t. \\ \text{Эвалютанинг} \end{aligned}$$

тенгламасини ёзиш учун, x ва y унинг биринчи ва иккинчи ҳосилаларини оламиз.

$$x' = -a \sin t, y' = b \cos t, x'' = -a \cos t, y'' = -b \sin t.,$$

энди.

$$\begin{aligned} &= a \cos t - \frac{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}{ab} b \cos t = a \cos t - \frac{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}{a} \cos t = \frac{a^2 \cdot \cos t - a^2 \sin^2 t \cdot \cos t}{a} = \\ \xi &\frac{a^2 \cos t (1 - \sin^2 t) - b^2 \cos^3 t}{a} = \frac{a^2 \cos^3 t - b^2 \cos^3 t}{a} = \frac{(a^2 - b^2) \cos^3 t}{a}. \end{aligned}$$

$$\eta = b \sin t - \frac{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}{ab} a \sin t;$$

$$\text{Соддалштирганда } \eta = \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 t.$$

$$\text{демак } \xi = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t, \quad \eta = \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 t.$$

Шундай қилиб, эллипснинг эвалютаси – а с т р о и д а д и р,
(3- чизма)

2. $y = \ln x$ чизикнинг эвалютасини топамиз.

$$\xi = x - \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = x + \frac{x+1}{x} = \frac{2x^2 + 1}{x}.$$

$$\eta = \ln x + \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} \cdot 1 = \ln x - \frac{x^2 + 1}{1}.$$

Қуйдаги чизикларнинг эвалютаси аниқлансин,

$$3. y^2 = 2px.$$

$$\text{Жавоб, } y^2 = \frac{8}{27p}(x-p)^3.$$

$$4. xy = a^2.$$

Жавоб,

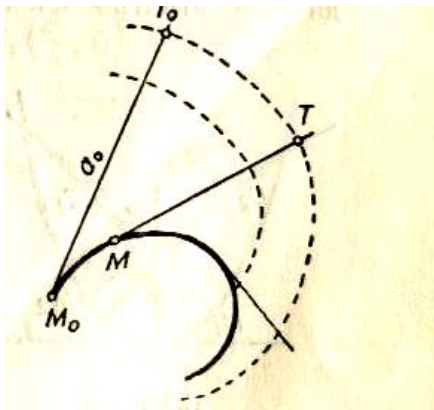
$$5. x = a \cos t + at \sin t, \quad y = a \sin t + at \cos t.$$

$$6. y = a \ln \cos \frac{x}{a}.$$

$$\text{Жавоб, } x = a(\arcsin u - u^{-1} \sqrt{1-u^2}), a \ln u = a + y.$$

Чизикнинг эвольвентлари

$\rho = \rho(s^*)$ чизик берилган бўлсин. Бунда s^* чизик ёйидир. M_0 нукта чизик ёйининг боши бўлсин. Демак, M_0 нуктада $s^* = 0$. Чизикнинг M_0 нуктасиндан ўтган уринманинг мусбат томонига $M_0 T_0$ кесмани қўямиз (128 чизма). Бунда a_0 нуктасида ҳам уринмани ўтказиб, унинг мусбат томонига $MT = a_0 - M_0 M$ кесмани қўямиз. $M_0 M$ ёй узунлиги s^* бўлгани учун $MT = a_0 - s^*$ дир. M нукта чизик бўйлаб, ҳаракат қилиб, M_0 дан узоқлашган сири MT нинг T учи маълум бир чизик чиза боради. Бу чизик эвольвента дейилади. Агар уринмадаги $M_0 T_0$ кесма узунлиги бўлса a_0 бўлмасдан b_0 бўлса T нукта бошқа эвольвентани чизади ва ҳаказо. Демак, берилган чизикнинг эвольвенталари чексиз қўп бўлиб, бир параметрли чизиклар оиласини ташкил қилади. Эвольвентага доир қуйдаги теоремани исботлаймиз.



Теорема. Берилган чизикқа ўтказилган уринма эвольвента учун нормаль бўлади.

Исбот. Берилган чизикнинг тенгламаси $\bar{\rho} = \bar{\rho}(s^*)$ бўлсин. Энди эвольвентанинг тенгламасини топамиз.

$$\overline{OT} = \overline{OM} + \overline{MT} = \bar{\rho}(s^*) + (a_0 - s^*) \bar{\nu}(s^*)$$

ёки қисқача,

4-расм

$$r = \bar{\rho} + (a_0 - s^*) \bar{\tau}.$$

ёки бу тенгликни дифференцияласак:

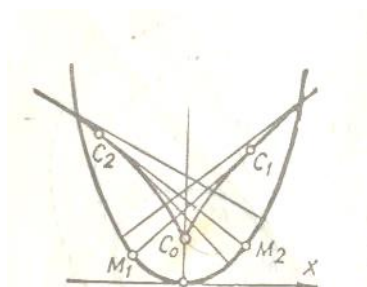
$$\frac{dr}{ds^*} = \frac{dr}{ds^*} - \bar{\tau} + (a_o - s^*) \frac{d\bar{\tau}}{ds^*} = (d_o - s^*) \bar{k}$$

Бунда k берилган чизикнинг эгрилиги $\bar{\nu}$ эса бу чизикнинг бирлик нормалидир. Демак, эвольвентанинг уринмаси берилган чизикнинг тегишли нуктасидаги нормалига параллел бўлади. Аксинча, эвольвентанинг T нуктасидаги нормали берилган чизикнинг M нуктасидаги уринмасига параллел бўлиб, буларнинг иккаласи ҳам T нуктадан ўтгани учун, бир-бирининг устиг тушади. Шу билан теорема исботланади.

Бундай, эвольвента учун берилган чизик эвалюта бўлади деган натижа келиб чиқади. $r = r(t)$ чизикнинг эвалютаси биргинадир. Аммо эвалютанинг эвольвенталари чексиз кўп бўлади. Эвалюта учун $r = r(t)$ чизик ҳам эвольвенталардан бири ҳисобланади.

Эвалюта ва эвольвентанинг хоссалари

Эвалютанинг махсус нукталари. Эвалютанинг юқорида баён этилган иккинчи хоссаси чизикнинг эгрилик радиуси монотон ўзгарувчи қисмида кучга эга эди. Чизикнинг эгрилик радиуси максимум ёки минимум қийматларини қабул қилган нукталарига (чизикнинг учларига) эвалютада биринчи типли махсус нукталар мос келади. Соф геометрик мулохазаларидан бу очикдан очик кўринади. (5-расм) чизигимизнинг M_0M_1 ва M_0M_2 қисмларига бу хоссани алоҳида қўлланишига тўғри келади.



$$M_1C_1 - M_0C_0 = C_0C_1, \quad M_2C_2 - M_0C_0 = C_0C_2 \quad \text{буларни}$$

қўшиш натижасида

$$C_1M_2 = M_1C_1 + M_2C_2 - 2M_0C_0$$

Хосил бўлади. Демак, хосса бутунлай тус олади.

Мисол тариқасида $y^2 = 2px$ параболани олайлик. Бу ердан (параметр сифатида у ни қабул қилиб):

5-расм

$$x = \frac{y}{2p}, \quad yy' = p = p, \quad y' = \frac{p}{y}, \quad y'' = -\frac{p^2}{y^2}$$

Бу қийматларни у 51 даги (2) формулаларга қўямиз:

$$\xi = p + \frac{3}{2p}y^2, \quad \eta = -\frac{y^3}{p}.$$

Булардан у ни чиқарсак, эвалютанинг тенгламаси хосил бўлади:

$$\eta^2 = \frac{8}{27p}(\xi - p)^3$$

Демак, эвалюта $c^2 = a^2 - b^2$. учи $\xi = p$ нуктада ётган ярим кубик параболалар. $\xi = p$ унинг биринчи типли қайтиш нуктасидир, у параболанинг учига мос келади: $\xi = p$ қийматда $\eta = 0$

Эллипс эвалютасига қайтайлик

$$\xi = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t, \quad \eta = -\frac{a^2 - b^2}{b} \sin^3 t,$$

Буларда t ни йўқотсак:

$$\left(\frac{a\xi}{c^2}\right)^{2/3} + \left(\frac{b\eta}{c^2}\right)^{2/3} = 1$$

хосил бўлади. Бунда $c^2 = a^2 - b^2$.

Эллипсининг A_1, A_2, A_3, A_4 учларига эвалютада биринчи типли тўртта қайтиш нуқталари C_1, C_2, C_3, C_4 мос келади. Масалан, $t=0$ қийматда $A_1(a, 0)$ нуқтага $C_1(\frac{c^2}{a}, 0)$ нуқта мос келади.

Шунингдек $t = \frac{\pi}{2}$ қийматда $A_2(0, b)$ нуқтага $C_2(0, \frac{c^2}{b})$ нуқта мос келади. Бу ерда

$$OC_1 = \frac{c^2}{a}, OC_3 = -\frac{c^2}{a}, OC_2 = -\frac{c^2}{b}$$

$$OC_4 = \frac{c^2}{b}. \text{ Равшанки.}$$

$$R_{\min} = c_1 A_1 = a - \frac{c^2}{a} = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{b^2}{a},$$

$$R_{\max} = c_2 A_2 = b - \frac{c^2}{b} = \frac{b^2 - c^2}{b} = \frac{a^2}{b},$$

Ҳақиқат, эгрилик радиусининг

$$R = \frac{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}{ab}$$

Формуласидан $t=0$ ва $t = \frac{\pi}{2}$ қийматларида A_1 ва A_2 нуқталардаги қийматлар ҳосил қилинади:

$$R_{A_1} = \frac{b^2}{a} \text{ ва } R_{A_2} = \frac{a^2}{b}$$

Булар юқоридаги қийматларнинг ўзидир.

Нуқта эллипсининг $A_1 A_2$ ёйини чизиб чикса, эгрилик маркази эвалютада $C_1 C_2$ ни чизади.

$a > b$ шу сабабли, $OC_1 < |OC_2|$ яъни $\frac{c^2}{a} < \frac{c^2}{b}$ ва $R_{A_1} < R_{A_2}$ дир. C_1 ва C_3 нуқталар ҳар вақт эллипс

ичида ётади (чунки $a^2 - b^2 < a^2$, $\frac{a^2 - b^2}{a} < a$) C_2 ва C_4 нуқталар эса эллипс ичида ёки ташқарисида

ётиши мумкин, бу $a^2 - b^2$ яъни a^2 га боғлиқдир.

Бу ерда:

$$C_1 C_2 = A_2 C_2 - A_1 C_1 = \frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a} = \frac{a^3 - b^3}{ab}.$$

Демак эллипс эвалютасининг бутун ёй узунлиги $4 \frac{a^3 - b^3}{ab}$ га тенг эллипс учларига мос келган

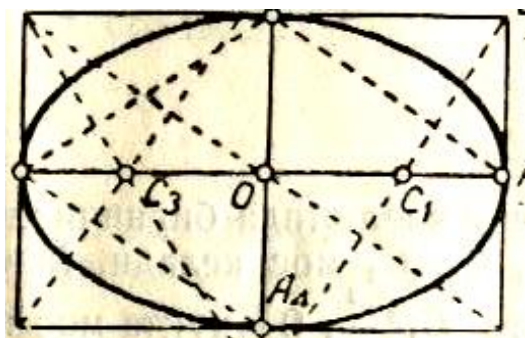
C_1 ва C_3 нуқталарнинг эллипсичида ётганлигига бошқача йўл билан ҳам ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Томонлари эллипс ўқларидан иборат тўғри тўрт бурчак ясаб (6- чизма) унинг бирор учидан (масалан, L дан) диагонаliga перпендикуляр тушурамиз. Бу перпендикуляр эллипс ўқларини C_1 ва C_2 эгрилик марказларида кесиб ўтади.

$$\text{Ҳақиқатдан } \frac{A_2 C_2}{a} = \frac{a}{b} \text{ демак,}$$

$$A_2 C_2 = \frac{a^2}{b}$$

6-рasm



Шунинг сингари, $\frac{A_1 C_2}{b} = \frac{b}{a}$, бунда $A_1 C_2 = \frac{a^2}{b}$

2). Эвалюта - ўрамидир. Биз биламизки, чизикнинг ўрамлари эвалютага уриниб боради. Демак, эвалютаси унинг нормаларининг ўрамасидир. Буни аналитик исботлаш ҳам қийин эмас.

Нормалнинг тенгламасини оламиз.

$$[X - x(t)]x'(t) + [Y - y(t)]y'(t) = 0$$

t нинг ҳар бир қийматида битта нормал мос келади, яъни нормаллар оиласи учун параметр ролини t ўйнайди. (1) ни t бўйича дифференциялаймиз:

$$[X - x(t)]x''(t) + [Y - y(t)]y''(t) - [x'^2(t)] = 0.$$

(1) ва (2) тенгламалардан X ва Y ни аниқласак,

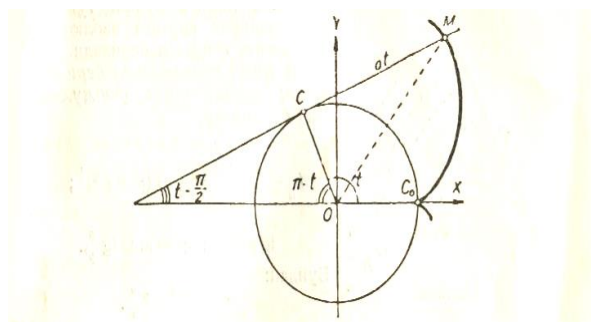
$$X = x - \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'} x',$$

Тенгламаларни, яъни эвалютани ҳосил қиламиз (бу ерда фақат ξ ва η ўрнига x ва y ёзилган).

3). Айлана эвольвентаси (7-чизма).

Берилган эвалюта бўйича чексиз кўп эвольвента топилишини юқорида кўрган эдик.

$R = R_0 + C_0 C$ бунда R_0 бошланғич M_0 нуқтадаги эгрилик радиусидир. Уни нолга тенг қилиб олсак, C_0 нуқтадан ўтувчи эвольвента ҳосил қилинади.



Айлана учун $R_0 = 0$ деб қабул қиламиз; у ҳолда эвольвента C_0 нуқтадан бошланиб,

$$R = CM = C_0 C \text{ бўлади. Бироқ } C_0 C = at.$$

7-расм

Демак, $R = at$. эвольвентадаги M нуқтанинг x ва y координаталарини t орқали ифодаalayмиз:

$$x = PP.y \overline{OM} = PP.x \overline{OC} + PP.x \overline{CM} = a \cos t + at \cos(t - \frac{\pi}{2}),$$

7-расм

$$y = PP.y \overline{OM} = PP.y \overline{OC} + PP.y \overline{CM} = a \cos(t - \frac{\pi}{2}) + at \cos(\pi - t)$$

$$\begin{aligned} x &= a(\cos t + t \sin t), \\ y &= a(\sin t - t \cos t). \end{aligned}$$

Айлана эвалютасининг параметрик тенгламалари шулардир. Бу чизик учун $t = 0$ га мос нуқта- ягона махсус нуқтадир. Чунки $t = 0$ да $x' = at \cos t$ ва $y' = at \sin t$ нинг иккаласи ҳам 0 га тенг.

4) эвалюта ва эвольвентатерминларининг маъноси, эгилган бирор линейка $C_0 C_1 C_2 C_3 C_4$ эгри чизик формасини олган бўлиб, унинг C_4 нуқтасида R_4 узунликдаги ипнинг бир учи боғланган бўлсин. Бу ип $C_0 C_1 C_2 C_3 C_4$ га ўралгандан кейин, ипнинг таранг тортиб туриб, халиги линейкадан бўшата борсак, унинг иккинчи учи (хатто ҳар нуқтаси) эвольвентани чиза боради. Демак, эвольвентани $M_0 M_1 M_2 M_3 M_4$ чизикнинг ёйилмаси деб қараши мумкин. Шу сабабли эвалюта – ёйилма, эвольвента эса-ёйувчидир.

5) Тишли ғилдираклар назарияси ҳамда эвалюта ва эвольвента ишлатилиб, улардан ишқаланишни камайтириш мақсадида ғилдирак тиши ва унинг тушадигон жойининг сиртига эвалюта ва эвольвента формаси берилади.

б) кутиб системасида берилган чизик эгрилигининг формуласи. Биз биламизки,

$$k_H = \frac{da}{ds} = \frac{\frac{d\varphi}{ds}}{\frac{ds}{d\varphi}} = (\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\rho}{\rho'}, \quad \mu = \operatorname{ars} \operatorname{tg} \frac{\rho}{\rho'}.$$

Бундан:

$$\frac{d\mu}{d\varphi} = \frac{\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + \rho'^2}.$$

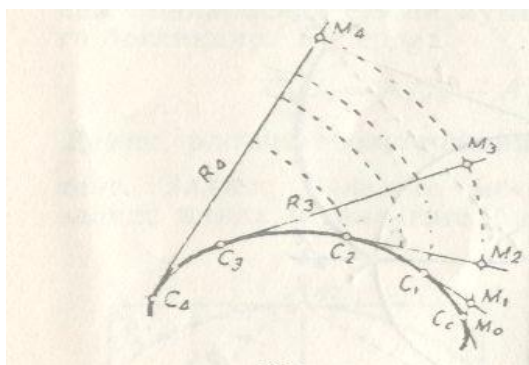
8-расм

Лекин $a = \varphi + \mu$, демак,

$$\frac{da}{d\varphi} = 1 + \frac{d\mu}{d\varphi} = 1 + \frac{\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + \rho'^2} = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + \rho'^2}.$$

Эгрилик эса:

$$k_H = \frac{da}{ds} = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + \rho'^2}$$



Мисол. Қуйдаги чизикларнинг эгрилиги топилсин: а) логарифмик спираль $\rho = e^{a\varphi}$ бундан $\rho' = ae^{a\varphi} = a\rho$, $\rho'' = a^2e^{a\varphi} = a^2\rho$, демак,

$$k_H = \frac{1}{\rho\sqrt{1+a^2}}$$

б) Кордиоида $\rho = a(1 + \cos \varphi)$.

$$\text{жавоб: } R_H = \frac{4}{3} \cos \frac{\varphi}{2}.$$

7) ошкормас $F(x, y) = 0$ тенглама билан берилган эгри чизикнинг эгрилиги ва эвалютаси.

Берилган чизикнинг эвалютаси-унинг нормаларининг ўрамасидир.

Нормал тенгламаси:

$$(X - x)F_y - (Y - y)F_x = 0$$

Бу тенглама параметр сифатида олинган x бўйича дифференциялаймиз ва x дан ференсиаллаймиз, ва $F_x + F_y y' = 0$ у холда қуйдаги тенглама хосил қилинади:

$$(X - x)(F_{xy}F_yF_{yy}F_x - F_{yy}F_x) + (Y - y)(F_{yx}F_x - F_{xx}F_y) = F_x^2 + F_y^2.$$

(2) ва (3) тенгламалардан

$$X - x = -\frac{F_x(F_x^2 + F_y^2)}{\Delta}, \quad Y - y = -\frac{F_y(F_x^2 + F_y^2)}{\Delta}$$

Ёки,

$$x = \xi = x - \frac{F_x(F_x^2 + F_y^2)}{\Delta}, \quad Y = \eta = y - \frac{F_y(F_x^2 + F_y^2)}{\Delta},$$

$$\text{Бунда, } \Delta = \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{yx} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}$$

Эгрилик эса, $k_H = \frac{\Delta}{(F_x^2 F_y^2)^{3/2}},$

Жумладан иккинчи тартибли

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

Чизик учун

$$k_H = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$(F_x^2 + F_y^2)^{3/2}$$

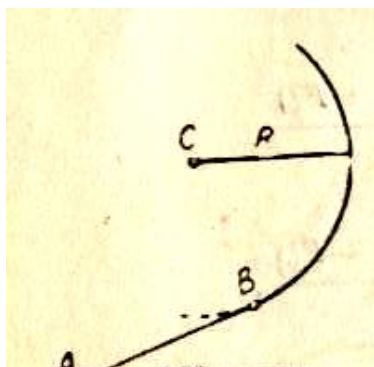
Ушбуни исботланг: $R_H = \frac{1}{k_H} = \frac{N^3}{p^2}$ бунда p -тартибли чизик (эллипс, гиперболла) параметри

$$(p = \frac{b^2}{a} \text{ ва } N - \text{ нормал узунлиги } (N = y\sqrt{1+y'^2}).$$

8) ўтимли чизик (переходная кривая). Эгрилик ва эгрилик радиуси тушунчалари инженерлик ишида тез-тез учраб туради. Масалан, темир йўл қурилишида ўтимли номли бир-бири билан уланган икки эгри чизик ишлатилади. Аввал АВ қисмида эгрилик радиуси чексиз, ВС қисмида эса R га тенгдир. Демак, В нуктада эгрилик радиуси ўзининг узликсизлигини йўқотади (гарчи уринма А дан С гача узликсиз ўзгарса ҳам). Поезд, трамвайнинг бурилиш вақтида силтаниб кетишига сабаб шудир. Бундай зарали таъсирдан қутилиш учун шундай (ўтимли) чизиклар ишлатиладики, уларнинг эгрилик радиуслари секин аста (чексиз катта қийматдан) камая бориб, уланиш жойида (В нуктада) ёпишма айлана радиусига тенг бўлади. Харакатланувчи жисмнинг массаси m тезлиги v ва тегишли эгрилик радиуси R бўлса, траекториянинг нормали бўйича йўналган марказдан қочма куч

$$F = \frac{mv^2}{R}$$

га тенг бўлади. Айтганларимиз бу формуладан бевосита кўриб туради: эгрилик радиусининг узликсизлиги узилган нукталарда куч ҳамузилиб кетади, бу эса силтанишга сабаб бўлади. (9- расм)



Одатда ўтимли чизик сифатида $y = \frac{1}{6a}x^3$ кубик параболалар олинади; Унинг эгрилик радиуси

$$R = \frac{a}{x} \left(1 + \frac{x^4}{4a^2}\right)^{\frac{3}{2}}, \text{ чунки } y' = \frac{1}{2a}x^2, \quad y'' = \frac{1}{a}x.,$$

Уланиш нуктасида (В да) $x = 0$. $y' = 0$ $R = \infty$ ва бўлиб, 9-расм

ўтимли чизик В нуктада АВ тўғри чизикқа уринади ва эгрилиги нолга тенг ($\frac{1}{R} = 0$) бўлади.

Машқлар.

1. Циклоида $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$.

циклоидага уринма ва нормаль ўтказсак Бу ерда:

$$x'^2 + y'^2 = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}; \quad x'y'' - x''y' = -2a^2 \sin^2 \frac{t}{2};$$

$$MC = R_H = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{x'y'' - x''y'} = \frac{8a^3 \sin^3 \frac{t}{2}}{-2a^2 \sin^2 \frac{t}{2}} = -4a \sin \frac{t}{2}.$$

Циклоиданинг биринчи тармоғи учун $0 < t < 2\pi$ ёки $0 < \frac{t}{2} < \pi$ бўлиб, демак,

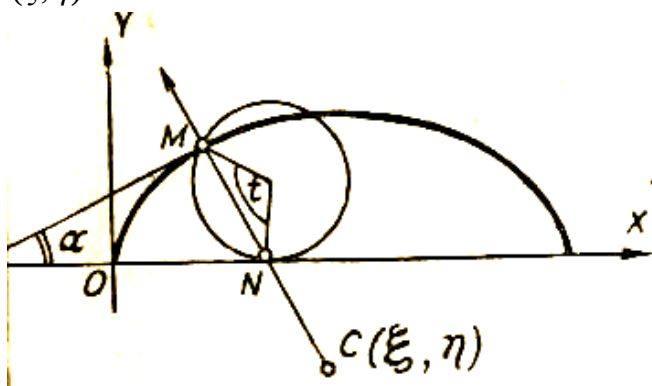
$MC = -4a \sin \frac{t}{2} < 0$, яъни эгрилик радиуси манфийдир. Бошқача айтганда C эгрилик маркази нормалнинг манфий томонида ётади. Иккинчи томонидан, нормал узунлиги

$$N = \frac{dy}{dx} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 2a \sin \frac{t}{2}.$$

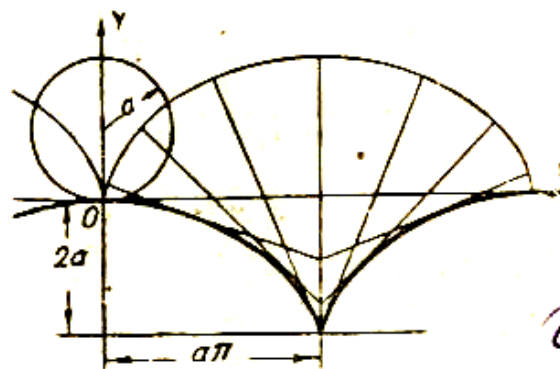
MN ва MC ни солиштирамиз $|MC| = 2MN$ яъни циклоиданинг эгрилик радиуси нормаль узунлигининг икки бараварига тенгдир. Бу ердан эгрилик марказларининг яшаш усулихосил қилинади. Бунинг учун эвалютани топамиз; сўнгра тегишли формулаларга x', y', x'', y'' нинг ифодаларини қўямиз

$$\xi = a(t + \sin t), \eta = -a(1 - \cos t).$$

(ξ, η)



10-расм



11-расм