ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ФАН ДОКТОРИ ИЛМИЙ ДАРАЖАСИНИ БЕРУВЧИ 14.07.2016.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

ШАРИПОВ АНВАРЖОН СОЛИЕВИЧ

Қатламали кўпхилликлар изометриялари Гуруҳи

01.01.04 – Геометрия ва топология
(физика-математика фанлари)

ДОКТОРЛИК ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2016

УДК: 513.8

Докторлик диссертацияси автореферати мундарижаси
Оглавление автореферата докторской диссертации
Content of the abstract of doctoral dissertation

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ФАН ДОКТОРИ ИЛМИЙ ДАРАЖАСИНИ БЕРУВЧИ 14.07.2016.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

Шарипов Анваржон Солиевич

ҚАТЛАМАЛИ КЎПХИЛЛИКЛАР ИЗОМЕТРИЯЛАРИ ГУРУҲИ

01.01.04 – Геометрия ва топология
(физика-математика фанлари)

ДОКТОРЛИК ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2016

Докторлик диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида 30.09.2014/B2014.5.FM132 рақам билан рўйхатга олинган.

Докторлик диссертацияси Ўзбекистон миллий университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://ik-fizmat.nuu.uz) ва «ZIYONET» таълим ахборот тармоғида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий маслаҳатчи:	**Нарманов Абдигаппар Якубович** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Vakhtang Lomadze** физика-математика фанлари доктори, профессор (Тбилиси Давлат университети, Грузия)
	Бешимов Рузиназар Бебутович физика-математика фанлари доктори
	Рахимов Абдугафур Абдумаджидович физика-математика фанлари доктори, профессор
Етакчи ташкилот:	**Олий таълимнинг Федерал давлат бюджет таълим ташкилоти «Удмурт Давлат университети»** (Россия Федерацияси).

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги 14.07.2016.FM.01.01 рақамли Илмий кенгашнинг « ___ » ____________ 2016 й. соат _____даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (99871)227-12-24, факс: (99871)246-53-21, (99871)246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Докторлик диссертацияси билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (______ рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (99871) 246-02-24).

Диссертация автореферати 2016 йил «____» _______________куни тарқатилди
(2016 йил «____» _______________ даги _______ рақамли реестр баённомаси).

А.А. Абдушукуров
Фан доктори илмий даражасини берувчи
Илмий кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор

Ғ.И. Ботиров
Фан доктори илмий даражасини берувчи
Илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.н.

Р.Б. Бешимов
Фан доктори илмий даражасини берувчи
Илмий кенгаш ҳузуридаги илмий семинар
раиси ўринбосари, ф.-м.ф.д.

Кириш (докторлик диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида илмий-техник тараққиётнинг тез суръатлар билан ривожланиши фундаментал тадқиқотларнинг янги усулларини яратиш ва олинган натижаларни амалиётга тадбиқ қилишни талаб этмоқда. Амалиёт талабларидан келиб чиқиб, дифференциал тенгламалар ва дифференциал топологиянинг туташ соҳасида француз олимлари томонидан қатламали кўпхилликлар назариясининг фундаментал асослари яратилди. Компакт қатламаларнинг турғунлиги, қатламларнинг лимит тўпламлари инвариант тўпламлиги исботланди. Қатламали кўпхилликларнинг топологик ва геометрик хоссалари тадқиқ этиладиган қатламаларнинг сифатий назарияси АҚШ ва Россия олимлари томонидан тадқиқ қилинди. Шу билан бирга, қатламали кўпхилликлар назариясини амалиётга тадбиқ этиш геометриянинг муҳим вазифаларидан бири бўлиб қолмоқда.

Мустақиллик йилларида мамлакатимизда табиий ва аниқ фанларга эътибор сезиларли даражада кучайтирилди, хусусан қатламалар назариясининг методлар ва натижаларини оптимал бошқарув ҳамда динамик системалар назарияларига тадбиқ қилишга алоҳида эътибор қаратилди. Бу соҳада бошқарув системалари учун турғунликнинг етарлилик шартлари олинди, эгрилиги номанфий фазоларда риман субмерсиялари ҳосил қилган қатламаларининг секцион эгриликлари номанфий эканлиги исботланди ва вектор майдонларнинг геометрияси тадқиқ этиш бўйича салмоқли натижаларга эришилди.

Бугунги кунда жаҳонда олиб борилаётган кўпхилликда берилган вектор майдонлар оиласи орбитасининг геометрияси йўналишидаги тадқиқотлар динамик полисистемалар ҳамда оптимал бошқарув назарияси билан боғлиқ тадқиқотларда муҳим аҳамиятга эга. Бу борада мақсадли илмий тадқиқотларни, жумладан қатламалар назарияси бўйича олинган натижаларни кўпхилликлардаги динамик полисистемалар ҳолатлар фазосининг структурасини аниқлашга кенг татбиқ этиш муҳим вазифалардан бири ҳисобланади: қатламалар назариясининг усулларини динамик полисистемалар, оптимал бошқарув назарияси ва бошқа соҳаларнинг турли масалаларига тадбиқ қилиш; риман кўпхилликларида берилган субмерсиялар ҳосил қилувчи қатламалар геометриясини тадқиқ қилиш; номанфий секцион эгриликка эга бўлган сиртларда риман қатламалари геометриясини тадқиқ этиш. Юқорида келтирилган илмий-тадқиқотлар йўналишида бажарилаётган илмий изланишлар мазкур диссертация мавзусининг долзарблигини изоҳлайди.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2006 йил 7 августдаги ПҚ-436-сон «Фан ва технологияларни ривожлантиришни мувофиқлаштириш ва бошқаришни такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ва 2014 йил 8 июлдаги ПҚ-2204-сон «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академияси тузилмасини янада мақбуллаштириш ҳамда республика академик илм-фани ва олий таълимнинг интеграциясини мустаҳкамлаш чора-тадбирлари тўғрисида»ги Қарорларида ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа меъёрийҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи[1].

Қатламалар назарияси, асосан қатламаларнинг топологик ва геометрик хоссалари тадқиқ этиладиган қатламаларнинг сифатий назарияси, компакт қатламларнинг локал ва глобал турғунликлари, турғунлик теоре-маларини компакт бўлмаган қатламлар учун умумлаштириш, сингуляр риман қатламалар, тўлиқ геодезик ва риман қатламалари геометрияси, коўлчами бирга тенг қатламалар топологияси бўйича илмий изланишлар етакчи хорижий давлатларнинг илмий марказлари ва олий таълим муассасалари, жумладан, Страсбург университети (Франция), Гренобл университети (Франция), Париж университети (Франция), Монтпеллер университети (Франция), Иллиноис университети (АҚШ), Калифорния университети (АҚШ), Индиана университети (АҚШ), Принстон университети (АҚШ), Уорик университети (Буюк Британия), Лондон университети (Буюк Британия), Токио университети (Япония), Тохоку университети (Япония), Киото университети (Япония), Москва давлат университетларида (Россия) олиб борилмоқда.

Қатламаларнинг топологик ва геометрик хоссалари тадқиқ этиладиган қатламаларнинг сифатий назарияси ва сингуляр риман қатламаларининг хоссаларини тадқиқ этишга оид дунёда олиб борилаётган тадқиқотлар натижасида қатор долзарб масалалар ечилган, жумладан, қуйидаги илмий натижалар олинган: қатламаларнинг компакт қатламларининг локал ва глобал турғунликлари, ҳамда Киллинг вектор майдонларининг орбиталари сингуляр риман қатламаларини ҳосил қилиши исботланган (Страсбург университети, Гренобл университети, Париж университети, Монтпеллер университети, Франция); қатлама субмерсия ёрдамида ҳосил қилинган бўлса, унинг учун Эресман боғланиши субмерсия учун Эресман боғланиши тушунчасига эквивалентлиги исботланган, ҳамда тўлиқ геодезик ва риман қатламалари Эресман боғланишига эга бўлиши кўрсатилган (Иллиноис университети, Калифорния университети, Индиана университети, Принстон университети, АҚШ); силлиқ вектор майдонлар оилаларининг ҳар бир орбитаси силлиқ кўпхиллик бўлиши ҳамда кўпхилликнинг орбиталарга бўлиниши сингуляр қатлама ҳосил қилиши исботланган (Уорик университети, Лондон университети, Буюк Британия); уч ўлчамли кўпхилликдаги коўлчами бирга тенг қатлама компакт бўлмаган хос қатламининг локал турғунлиги исботланган, қатламлар тўпламининг қисман тартибланганлиги ва қатламлар

[1] Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи: Actualite Sci. Indust.; C.R.Acad. Sci. Paris; https://www.math.uni-muenster.de/u; Proc. Fifth Canad. Math. Congress; Ann. of Math.;Успехи математических наук, www.mathnet.ru/umn; Математические заметки, www.mathnet.ru/mz; www.ams.org/bull; Progress in Mathematics; https://projecteuclid.org/euclid.ijm; Ann. Math.; Topology; http://link.springer.com; Journal of mathematical Physics, analysis, geometry; http://www.foliations.org манбалар асосида ишлаб чиқилган.

топологияси орасидаги боғлиқлик ўрнатилган (Токио университети, Тохоку университети, Киото университети, Япония); уч ўлчамли сферадаги коўлчами бирга тенг ҳар бир қатлама компакт қатламга эгалиги исботланган (Москва давлат университети, Россия).

Дунёда бугунги кунда, риман кўпхилликларида берилган қатламали кўпхилликлар геометрияси ва топологиясини тадқиқ этиш бўйича бир қатор, жумладан: номанфий секцион эгриликка эга бўлган сиртларда риман қатламалари геометриясини тадқиқ қилиш, қатламали кўпхилликлар изометриялари группасининг структурасини ўрганиш, риман субмерсиялари ҳосил қилган қатламаларнинг геометрик характеристикаларини, қатламали кўпхилликдаги геодезик чизиқларнинг хоссаларини аниқлаш, динамик системалар ва оптимал бошқарув назарияларида қатламалар геометриясини қўллаш, эришувчанлик (бошқарилувчанлик) тўпламларининг геометриясини ҳамда кўп қийматли акслантириш сифатида вақтга узлуксиз боғлиқлигини тадқиқ этиш каби устувор йўналишларда илмий-тадқиқот ишлари олиб борилмоқда.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Қатламалар назариясини шакллантириш ва ривожлантиришда C. Ehresmann, G. Reeb, H. Lawson, P. Molino, A. Haefliger, R. Langevin, H. Rosenberg, G. Lamoureux каби француз математиклари катта ҳисса қўшдилар. Қатламалар назариясининг асосчиларидан бири Ж. Рибнинг (G. Reeb) асосий илмий ишлари қатламаларнинг сифатий назариясига бағишланган. Ж.Риб томонидан, агар компакт қатлам чекли фундаментал группага эга бўлса, у ҳолда бу қатламнинг унга диффеоморф бўлган қатламлардан иборат атрофи мавжудлиги исботланган. Ш.Эресманнинг (C. Ehresmann) ишларида эса, тўла риман кўпхиллигидаги риман ва тўла геодезик қатлама Эресман боғланишига эгалиги кўрсатилган.

Қатламали кўпхилликдаги изометриялар группасини тадқиқ қилиш қатламали кўпхилликлар назариясининг янги масаласидир. Қатламали кўпхилликлар изометрияси тушунчаси профессор А.Я. Нарманов томонидан киритилган. Қатламаларнинг маълум бир синфи учун кўпхиллик изометрияси бўлмайдиган қатламали кўпхиллик изометрияси мавжудлиги исботланган. Қатламали кўпхилликлар изометриялари группаси қатламали кўпхилликлар диффеоморфизмлари группасига қисм группа бўлади. Қатламали кўпхилликлар диффеоморфизмлари группаси С.Х. Арансоннинг илмий ишларида ўрганилган. У томонидан бундай диффеоморфизмларнинг топологик қўшма бўлишининг зарурий ва етарлилик шартлари олинган. Компакт кўпхилликлар учун диффеоморфизмлар группасининг турли хил қисм группалари P. L. Antonelli, D. Burghelea, P. J. Kahnлар томонидан ўрганилган.

Замонавий геометриянинг асосий масалаларидан бири геодезик чизиқларнинг лимитини тадқиқ қилишдан иборат. Риман кўпхиллиги геодезик чизиқларининг лимити геодезик чизиқ бўлиши риман геометриясининг кудратли қуролидир. Қатламали кўпхилликнинг геодезик чизиғи қатламда ётиши ва келтирилган риман метрикасига нисбатан геодезик чизиқ бўлгани учун бу масала қатламали кўпхилликлар учун қийинлашади.

С. Хелгасоннинг ишларида геодезик чизиқлар ва риман кўпхилликлари изометриялари группаси ҳақида ажойиб теоремалар исботланган. Хусусан, у томонидан риман кўпхиллиги изометриялари группаси компакт-очиқ топологияда топологик группа эканлиги исботланган. Бундан ташқари, у риман кўпхиллигида берилган изометриялар кетма-кетлиги бир нуқтада яқинлашса, шу кўпхилликнинг бирор изометриясига компакт-очиқ топологияда яқинлашувчи берилган кетма-кетликнинг қисмий кетма-кетлиги мавжудлигини исботлаган.

Сингуляр риман қатламалари тушунчаси P. Molino томонидан киритилган, ҳамда А.Я. Нарманов, Н.И. Жукова ва бошқа муаллифлар томонидан сингуляр риман қатламасининг геометрик ва топологик хоссалари ўрганилган. P. Molino сингуляр қатлама риман қатламаси бўлса, у ҳолда кўпхилликнинг риман метрикаси нормал қатламанинг ҳар бир қатламида трансверсал метрика ҳосил қилишини кўрсатган. Тўла кўпхилликлар учун бу шарт сингуляр қатлама риман бўлишининг зарурий ва етарли шарти эканлиги А.Я. Нарманов томонидан исботланган.

Шунга қарамасдан, кўпхиллик компакт бўлмаган ҳолда унинг диффеоморфизмлар группаси, қатламали кўпхиллик изометриялари группаси компакт-очиқ топологияга нисбатан топологик группа бўлиши, қатламали кўпхиллик геодезик чизиқлари кетма-кетлигидан лимитдаги қатламнинг геодезик чизиғига яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик ажратиш мумкинлиги исботланмаган ҳамда қатламали кўпхиллик қатламларининг Гаусс эгриликлари ўзгармас бўладиган қатламалар синфи топилмаган эди.

Диссертация мавзусининг диссертация бажарилаётган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Ўзбекистон миллий университетининг 1.Ф.1.1.9 «Экстремал бошқарувлар, эришувчанлик тўпламларининг функционал ва топологик хоссалари ва тўлиқ бошқарилувчи системаларнинг турғунлиги» (2003-2007), ОТ-Ф1-096 «Динамик полисистемалар назарияси масалаларини ечиш учун геометрик ва топологик методлар ишлаб чиқиш ва яратиш» (2007-2011), Ф4-04 «Қатламали кўпхилликларнинг геометрияси ва топологияси» (2012-2016) мавзулардаги илмий-тадқиқот лойиҳалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади қатламали кўпхилликларнинг геометрияси ва топологиясини, қатламали кўҳилликлар изометриялари группасининг структурасини ва секцион эгрилиги ўзгармас бўлган қатламали кўпхилликларни тадқиқ қилиш ҳамда олинган натижаларни бошқарув системаларининг эришувчанлик тўпламларини тадқиқ қилишда ва эришувчанлик тўпламларининг бошланғич нуқтага узлуксиз боғлиқлигини исботлашда қўллашдан иборат.

Тадқиқот вазифалари:

қатламали кўпхилликлар геодезик чизиқларининг асосий хоссаларини аниқлаш;

компакт кўпхилликлар гомеоморфизмлари группаси учун маълум бўлган классик натижани компакт бўлмаган кўпхилликлар учун исботлаш;

қатламали кўпхилликлар изометриялари группасининг геометриясини янги F - компакт-очиқ топологияда тадқиқ қилиш;

қатламаларнинг қатламлари ўзгармас Гаусс эгрилигига эга кўпхилликлардан иборат бўлишининг шартларини топиш;

риман кўпхиллигида берилган вектор майдонлар системаси эришувчанлик (бошқарувчанлик) тўпламининг структурасини аниқлаш.

Тадқиқотнинг объекти қатламали риман кўпхилликлари, қатламали кўпхилликларнинг геодезик чизиқлари, силлиқ вектор майдонлар оиласининг орбиталари, динамик системаларнинг эришувчанлик тўплами ва бошқарилувчанлик соҳалари, риман субмерсиялари ҳосил қилган қатламалардан иборат.

Тадқиқотнинг предмети қатламали кўпхиллик изометриялари группаси, қатламали кўпхиллик геометрияси ва топологияси, субмерсия ҳосил қилган қатлама, вектор майдонлар орбиталари геометрияси ва сингуляр қатламалар тадқиқотидан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида локал ва нолокал дифференциал геометрия, қатламалар топологияси, қатламалар назарияси ва динамик системалар назариясининг геометрик ҳамда топологик усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

ихтиёрий силлиқ кўпхилликнинг гомеоморфизмлар группаси компакт–очиқ топологияда топологик группалиги исботланган;

қатламали кўпхиллик изометриялари группаси компакт–очиқ топологияда топологик группа ҳосил қилиши исботланган;

қатламали кўпхиллик изометриялари кетма-кетлиги ҳар бир қатламдаги биттадан нуқтада яқинлашса, у ҳолда бу кетма-кетликдан $F-$ компакт–очиқ топологияда қатламали кўпхиллик изометрияларига яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик ажратиш мумкинлиги кўрсатилган;

қатлама риман субмерсияси билан берилган бўлса, у ҳолда бу қатлама қатламлари Гаусс эгрилиги ўзгармас кўпхилликлардан иборатлиги исботланган;

қатламали кўпхилликнинг геодезик чизиқлари лимити геодезик чизиқ бўлиши кўрсатилган;

қатламали кўпхиллик изометрияси мавжуд бўлиб, лекин кўпхиллик изометрияси бўлмайдиган қатламанинг мавжудлиги исботланган;

махсус кўринишдаги вектор майдонлар системаси учун эришувчанлик тўпламининг компактлиги ва кўп қийматли «нуқта-эришувчанлик тўплами» акслантириш сифатида узлуксизлиги исботланган;

маълум қийматдан ошмаган вақтдаги эришувчанлик тўплами ёпиғининг компактлиги ва маълум синф вектор майдонлари учун эришувчанлик тўплами вақтга узлуксиз боғлиқлиги кўрсатилган;

чизиқли системалар учун эришувчанлик (бошқарилувчанлик) тўпламлари бир хил ўлчамли текисликлар билан устма-уст тушишининг шартлари топилган.

Тадқиқотнинг амалий натижаси номанфий эгриликли кўпхилликлардаги динамик системалар ҳолатлар фазосининг эгрилигини аниқлашда, ҳамда бошқарув системаларининг эришувчанлик тўпламлари ҳосил қилган қатламаларнинг геометриясини ўрганишда қўлланилиши мумкинлигидан иборат.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги қатламали кўпхилликлар геометрияси ва топологияси ҳамда вектор майдонлар орбиталарининг геометриясини ўрганишда қатламалар назарияси, риман геометрияси, дифференциал топологиянинг теоремалари ва усулларини қўллаш билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти вектор майдонлар учун эришувчанлик тўпламининг компактлиги ва кўп қийматли акслантириш сифатида узлуксизлиги бўйича олинган натижалар динамик системалар ҳолатлар фазосининг эгрилигини аниқлашга имконият яратиши билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти тадқиқ қилинаётган объектлар синфини сезиларли равишда кенгайиши чизиқли системалар учун эришувчанлик (бошқарилувчанлик) тўпламлари структурасини аниқлашга хизмат қилади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Диссертация тадқиқоти жараёнида олинган илмий натижалар қуйидаги йўналишларда амалиётга жорий қилинган:

вектор майдонлар учун эришувчанлик тўпламининг компактлиги ва кўп қийматли акслантириш сифатида узлуксизлиги бўйича олинган натижалар Россия таълим вазирлиги ва Россия Федерацияси фани ва фундаментал тадқиқотлар фондининг 12-01-00195 рақамли «Детерминик ва стохастик жараёнлар динамикасини позицион бошқариш масалалари ҳамда кўп иштирокчили дифференциал ўйинлар» илмий лойиҳасини бажаришда динамик системалар траекторияларининг ва ҳолатлар фазосининг структурасини ўрганиш имконини берган (Удмурт давлат университетининг 2016 йил 25 августдаги 7873-8965/20 сон маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши динамик системалар ҳолатлар фазосининг эгрилигини аниқлашга ва бошқарилувчи системаларнинг эришувчанлик тўпламининг геометриясини ўрганишга хизмат қилган;

ўзгармас Гаусс эгриликли тўла риман кўпхилликларидаги қатлама риман субмерсиясидан ҳосил қилинган бўлса, у ҳолда бу қатлама қатламлари ўзгармас Гаусс эгриликли кўпхилликлардан иборатлиги бўйича олинган натижалар Россия Федерацияси Фанлар Академиясининг илмий тадқиқотлар фондининг 1.3.1.3 рақамли «Яратиш усуллари, Ер ҳақидаги математик моделларни тадқиқ қилиш ва идентификациялаш» илмий лойиҳасини бажаришда динамик системалар ҳолатлар фазосининг структурасини ўрганиш имконини берган (Россия Федерацияси Фанлар Академиясининг Сибир бўлими Ҳисоблаш математикаси ва математик геофизика институтининг 2016 йил 24 августдаги 15301/12-2711 сон маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши номанфий эгриликли кўпхилликлардаги динамик системалар ҳолатлар фазосининг структурасини ўрганишга хизмат қилган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Тадқиқотнинг натижалари илмий-амалий анжуманларда муҳокама қилинган, жумладан: «Геометрия бўйича мактаб-семинар» (Абрау-Дюрсо, Россия, 2006), «Ёш математикларнинг янги теоремалари» (Наманган, 2006, 2009), «Динамик системалар назарияси ва нокоррект масалалардаги янги йўналишлар» (Самарқанд, 2007), «Математика, механика ва информатиканинг замонавий муаммолари» (Тошкент, 2008), «Қатламалар, динамик системалар ва махсусликлар назарияси» (Самарқанд, 2009), «Сиртларнинг ва кўпёқликларнинг метрик геометрияси» (Москва, Россия, 2010), «Локал аналитик геометрия» (Лаҳор, Покистон, 2012), «Амалий математика ва информацион технологияларнинг долзарб муаммолари –ал-Хоразмий 2012» (Тошкент, 2012), «Геометриянинг долзарб муаммолари ва унинг тадбиқлари» (Тошкент, 2014), «Эҳтимоллар назариясининг лимит теоремалари ва унинг тадбиқлари» (Наманган, 2015), «Бошқарув назарияси ва математик моделлаштириш» мавзусидаги Умумроссия конференциясида (Ижевск, Россия, 2015), «Математик физика ва замонавий анализнинг турдош масалалари» (Бухоро, 2015), «Анализнинг долзарб муаммолари» (Қарши, 2016), «Замонавий топология муаммолари ва тадбиқлари» (Тошкент, 2016) каби анжуманларда маъруза кўринишида баён этилган ҳамда апробациядан ўтказилган. Тадқиқотнинг натижалари Ўзбекистон Миллий университетининг «Геометрия ва топологиянинг замонавий муаммолари» (2000-2016), «Функционал анализ ва унинг татбиқлари» (2014-2015), «Комплекс анализнинг замонавий масалалари» (2015) каби илмий семинарларида, Ўзбекистон Миллий университети қошидаги Математика институтининг «Операторлар алгебралари ва уларнинг тадбиқлари» (2015) илмий семинарида, Наманган муҳандислик-педагогика институти «Олий математика» кафедрасининг (2016) илмий семинарида муҳокама қилинган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилиниши. Диссертация мавзуси бўйича жами 43 та илмий иш чоп этилган, шулардан Ўзбекистон Республикаси Олий аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 16 та мақола, жумладан 6 та хорижий ва 10 та республика журналларида нашр этилган.

Диссертация тузилиши ва ҳажми. Диссертация таркиби кириш, тўртта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат. Диссертациянинг ҳажми 161 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида ўтказилган тадқиқотларнинг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **«Асосий тушунчалар ва ёрдамчи фактлар»** деб номланган биринчи боби ёрдамчи характерда бўлиб, диссертация мавзуси бўйича асосий тушунча ва ёрдамчи фактлар келтиришга бағишланган. У учта параграфдан ташкил топган.

Биринчи бобнинг биринчи параграфида силлиқ кўпхилликлар назарияси қисқа баён этилган, диссертацияда ишлатиладиган силлиқ кўпхилликларга доир зарур таърифлар ва ёрдамчи фактлар келтирилган. Силлиқ кўпхилликларга ва қисм кўпхилликларга мисоллар келтирилган.

Иккинчи параграфда силлиқ кўпхилликлардаги вектор майдонлар назарияси қисқа баён этилган, вектор майдонлар орбиталарининг асосий хоссалари келтирилган. Барча тушунчалар мисоллар билан ёритилган.

Учинчи параграф қатламалар назариясига оид асосий тушунчалар ва ёрдамчи фактларга бағишланган бўлиб, унда қатламалар назариясига оид таърифлар ва изланишларнинг натижалари келтирилган.

Бизга ўлчами n га тенг бўлган C^r синфга тегишли силлиқ M кўпхиллик ва бу кўпхилликнинг структурасини аниқловчи $A-$ максимал атлас берилган бўлсин, бу ерда $r \geq 0$. Агар $0 \leq s \leq r$ муносабат ўринли бўлса, M кўпхиллик C^s синфга ҳам тегишли бўлади. C^s синфга тегишли M кўпхилликдаги локал координаталар системасини A^s билан белгилаймиз.

Энди $0 \leq k \leq n$ тенгсизликни қаноатлантирувчи бутун k сон қарайлик.

Таъриф 1. Берилган M кўпхилликнинг чизиқли боғланишли қисм тўпламларидан иборат $F = \{L_\alpha; \alpha \in B\}$ оила қуйидаги учта шартни қаноатлантирса:

(F_1): $\bigcup\limits_{\alpha \in B} L_\alpha = M$;

(F_2): $\alpha \neq \beta$ шартни қаноатлантирувчи барча $\alpha, \beta \in B$ индекслар учун $L_\alpha \cap L_\beta = \varnothing$ муносабат ўринли;

(F_3): ҳар бир $p \in M$ нуқта учун $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in A^s$, $p \in U_\lambda$ шундай локал координаталарни танлаш мумкин бўлсаки, агар бирор $\alpha \in B$ учун $U_\lambda \cap L_\alpha \neq \varnothing$ муносабат ўринли бўлса, у ҳолда $\varphi_\lambda(U_\lambda \cap L_\alpha)$ тўпламнинг чизиқли боғланишлилик компоненталарини $\left\{\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right) \in \varphi_\lambda\left(U_\lambda\right):\right.$

$\left. x^{k+1}=c^{k+1},\, x^{k+2}=c^{k+2},...,\, x^{n}=c^{n} \right\}$ кўринишда ёзиш мумкин бўлса, M кўпхилликда k ўлчамли силлиқ қатлама берилган дейилади, бу ерда $c^{k+1},c^{k+2},...,c^{n}$ сонлар чизиқли боғланишлилик компонентларда ўзгармас сонлар.

Қаралаётган L_{α} тўплам F қатламанинг қатлами дейилади. Ушбу ҳолатда k ўлчамли C^{s} қатлама коўлчами $q=n-k$ га тенг бўлган C^{s} қатлама ҳам дейилади. Юқоридаги (F_1), (F_2) шартлар M кўпхиллик ўзаро кесишмайдиган қатламлардан иборатлигини, (F_3) шарт эса қатламлар локал маънода параллел текисликларга ўхшаш жойлашганлигини англатади. Агар (F_3) шарт бажарилса, $(U_{\lambda},\varphi_{\lambda})\in A^{S}$ координаталар атрофлари қатламланган дейилади, барча қатламланган координаталар атрофлари тўплами A_F^s билан белгиланади ва қатламланган координаталар атрофлари системаси дейилади.

Силлиқ M кўпхилликда F қатлама берилган бўлса, бундай кўпхиллик қатламали кўпхиллик дейилади ва (M,F) каби белгиланади.

Субмерсиялардан ҳосил қилинган қатламалар синфи қатламаларнинг муҳим синфларидан бири ҳисобланади.

Таъриф 2. Ранги максимал бўлган дифференциалланувчи $f:M\to B$ акслантириш учун $n>m$ шарт бажарилса, у субмерсия дейилади, бу ерда M,B ўлчамлари мос равишда n ва m га тенг бўлган силлиқ кўпхилликлар.

Геометрик нуқтаи назардан, тўла геодезик қатламалар ва Риман (метрик) қатламалари қатламаларнинг муҳим синфи ҳисобланади.

Таъриф 3. Берилган M - Риман кўпхиллигининг N қисм кўпхиллигига уринувчи M кўпхилликнинг геодезик чизиғи N кўпхилликда ётса, M - Риман кўпхиллигининг N қисм кўпхиллиги тўла геодезик кўпхиллик дейилади.

Таъриф 4. Бизга M - Риман кўпхиллигидаги F қатлама берилган бўлсин. Берилган қатламанинг қатламига битта нуқтада уринувчи геодезик чизиғи шу қатламада ётса, яъни ҳар бир қатлам тўла геодезик қисм кўпхилликдан иборат бўлса, F қатлама тўла геодезик дейилади.

Критик нуқталарга эга бўлмаган дифференциалланувчи функциялар сатҳ сиртлари ҳосил қилган қатламалар синфи коўлчами бирга тенг бўлган қатламаларнинг муҳим синфидир. Америкалик профессор Ph. Tondeur M^{n} Риман кўпхиллигида градиентининг узунлиги ҳар бир сатҳ сиртида ўзгармас, критик нуқталарга эга бўлмаган $f:M^{n}\to R^{1}$ функцияларнинг сатҳ сиртлари геометриясини ўрганган. Бундай функциялар сатҳ сиртлари ҳосил қилган қатламалар Риман (метрик) қатламаси бўлишини исботлаган.

Таъриф 5. Градиенти узунлиги сатҳ тўпламларининг боғланишлилик компонентасида ўзгармас бўлган $C^{2}(M,R^{1})$ синфга тегишли $f:M\to R^{1}$ функция метрик функция дейилади.

Таъриф 6. Бизга M Риман кўпхиллигида аниқланган F қатлама берилган бўлсин. Берилган F қатламанинг қатламига бирор нуқтада ортогонал бўлган M кўпхилликнинг геодезик чизиғи ўзининг барча нуқталарида F қатламанинг қатламларига ортогонал бўлса, у ҳолда M кўпхилликда берилган F қатлама Риман қатламаси дейилади.

Диссертациянинг **«Қатламали кўпхилликлар геометрияси»** деб номланган иккинчи боби қатламали кўпхилликлар геометрияси, субмерсия ҳосил қилган қатламали атласларни тадқиқ қилишга бағишланган. Риман субмерсиясидан ҳосил бўлган қатламаларнинг қатламлари ўзгармас Гаусс эгриликли кўпхилликлар бўлиши, қатламали кўпхилликнинг геодезик чизиқлари лимити, қатламанинг лимитдаги қатламининг геодезик чизиғи бўлиши ҳамда тўрт ўлчамли солкўпхиллигини беш ўлчамли евклид фазосига изометрик юклаб бўлмаслиги исботланган.

Субмерсиялар ҳосил қилган қатламалар синфи қатламаларнинг муҳим синфи ҳисобланади. Ранг ҳақидаги теоремага кўра ҳар қандай $f: M \to B$ субмерсия M кўпхилликда қатламлари $L_p = f^{-1}(p), p \in B$ қисм кўпхилликлардан иборат $k = n - m$ ўлчамли F қатламани ҳосил қилади, бу ерда n, m мос равишда M, B кўпхилликларнинг ўлчамлари ва $n > m$.

Бизга M кўпхилликда k ўлчамли силлиқ F қатлама берилган бўлсин. $L(p)$ орқали F қатламанинг p нуқтадан ўтувчи қатламини, T_pL орқали $L(p)$ қатламнинг p нуқтасидаги уринма фазосини, $H(p)$ орқали T_pL уринма фазонинг M кўпхилликнинг p нуқтасидаги уринма $T_pM, p \in M$ фазосигача ортогонал тўлдирувчисини белгилаймиз. Натижада TM уринма қатламанинг $TM = TF \oplus H$ муносабат ўринли бўладиган иккита қисм қатламалари $TF = \{T_pL : p \in M\}$, $H = \{H(p) : p \in M\}$ (силлиқ тақсимот) пайдо бўлади, бу ерда H қатлама TF қатламанинг TM даги ортогонал тўлдирувчисидир. Бу ҳолда ҳар бир $X \in V(M)$ вектор майдонни $X = X_v + X_h$, кўринишида тасвирлаш мумкин, бу ерда X_v, X_h- вектор майдонлар мос равишда X вектор майдоннинг TF, H даги ортогонал проекцияларидир.

Берилган X вектор майдон учун $X \in V(F)$ муносабат (яъни $X_h = 0$) ўринли бўлса, у вертикал вектор майдон дейилади. Агар берилган X вектор майдон учун $X \in V(\mathrm{H})$ муносабат (яъни $\mathrm{X}_v = 0$) ўринли бўлса, у горизонтал майдон дейилади. Субмерсиялар ичида Риман субмерсиялари деб аталувчи синфини алоҳида ажратиш мумкин.

Таъриф 7. Берилган $f: M \to B$ субмерсиянинг дифференциали df горизонтал векторларнинг узунлигини сақлаган ҳолда акслантирса, у ҳолда бу субмерсия Риман субмерсияси дейилади.

Биринчи параграфда Риман субмерсиялари ҳосил қилган қатламаларнинг секцион эгрилиги тадқиқ қилинган, жумладан, Риман субмерсиялари ҳосил қилган қатламаларнинг геометриясини ифодаловчи теорема исботланган. Риман субмерсиясидан ҳосил бўлган қатламаларнинг қатламлари ўзгармас Гаусс эгриликли кўпхилликлар бўлиши кўрсатилган.

Ph. Tondeurнинг[1] ишида ҳар бир вертикал X вектор майдон учун $X\left(|gradf|^2\right)=0$ муносабат ўринли бўладиган функциялар сатҳ сиртларининг геометрияси ўрганилган.

Биз $f: M \to B$ субмерсияларни B кўпхиллик бир ўлчамли бўлган ҳолда қараймиз, аниқроғи, $f: M \to R$ силлиқ функцияни қараймиз. Агар $Crit\{f\}$ - қаралаётган f функциянинг барча критик нуқталари тўплами бўлса, у ҳолда $M \setminus Crit\{f\}$ кўпхилликда қатламлари f функциянинг сатҳ сиртларидан иборат $n-1$ ўлчамли (ёки коўлчами бирга тенг бўлган) F қатлама ҳосил бўлади.

Теорема 1. Бизга M – ўзгармас эгриликли тўла риман кўпхиллиги ва $f: M \to R^1$ риман субмерсияси берилган бўлсин. У ҳолда, риман субмерсияси (f функция сатҳ сиртлари) ҳосил қилган F қатламанинг ҳар бир қатлами Гаусс эгрилиги ўзгармас кўпхиллик бўлади.

Иккинчи бобнинг иккинчи параграфи қатламали кўпхилликлар геодезик чизиқларининг геометриясини тадқиқ этишга бағишланган.

Риман кўпхиллиги қатламали кўпхиллик бўлган ҳолда, уларнинг геодезик чизиқлари қатламда ётиши ва улар қатламдаги келтирилган Риман метрикасига нисбатан геодезик чизиқ бўлиши бу масалани қийинлаштиради.

Кўпхилликдаги геодезик чизиқларнинг лимити ҳақидаги классик теореманинг умумлашмаси бўлган қуйидаги теорема исботланган.

Теорема 2. Бизга n ўлчамли M – силлиқ тўла риман кўпхиллигида k ўлчамли $(0<k<n)$ қатлама берилган бўлсин. У ҳолда

1) келтирилган риман метрикаси билан ҳар бир қатлам тўла риман кўпхиллиги бўлади.

2) агар L_m қатламларда $\gamma_m:(a,b)\to L_m$ геодезик чизиқлар кетма-кетлиги берилган бўлиб, бирор $s_0\in(a,b)$ учун $m\to\infty$ бўлганда $\gamma_m(s_0)\to p$, $\dot{\gamma}_m(s_0)\to v$ бажарилса, у ҳолда γ_m кетма-кетлик $L(p)$ қатламдаги $s=s_0$ да p нуқтадан v вектор йўналишида чиқувчи бирор $\gamma:(a,b)\to L(p)$ геодезик чизиққа нуқтавий яқинлашади.

Қуйидаги теоремада 2 - теореманинг иккинчи қисмини кучайтирамиз.

Теорема 3. Бизга n ўлчамли M – силлиқ тўла риман кўпхиллигида k ўлчамли $(0<k<n)$ қатлама берилган бўлсин. Бирор $s_0\in R^1$ учун $m\to\infty$ бўлганда $\gamma_m(s_0)\to p$ муносабат бажариладиган, L_m қатламларда келтирилган риман метрикасига нисбатан $\gamma_m: R^1\to L_m$ – геодезик чизиқлар кетма-кетлиги берилган бўлсин. У ҳолда $L(p)$ қатламдаги $s=s_0$ да p нуқтадан чиқувчи бирор $\gamma: R^1\to L(p)$ геодезик чизиққа нуқтавий яқинлашадиган γ_m кетма-кетликнинг γ_{m_l} қисмий кетма-кетлиги мавжуд.

---

[1] Tondeur Ph. Foliations on Riemannian manifolds// Springer Verlag, – New York, – 1988.

Риман фазоларини евклид фазоларига ёки бирор бошқа риман фазосига изометрик ботириш бу фазоларнинг янги қизиқарли геометрик хоссаларга эга қисм кўпхилликларини қуриш усулларидан биридир. Кўпхилликларни евклид ва бошқа фазоларга изометрик ботириш ва жойлаштириш нафақат дифференциал геометриянинг, балки Риман геометриясининг ҳам марказий муаммоларидан бири ҳисобланиб, бу соҳаларда турли нуқтаи назардан ўрганилади.

Изометрик ботириш назарияси чизиқли бўлмаган дифференциал тенгламалар системасини ечиш масаласи, ҳамда топологик муаммолар билан боғлиқ бўлиб, унда кенг миқёсда математик усулларни қўллаш билан биргаликда яққол геометрик ғоялар ҳам ишлатилади.

Учинчи параграф кўпхилликни евклид фазосига ботириш муаммосини тадқиқ қилишга бағишланган. Жумладан, тўрт ўлчамли Sol^4 кўпхиллигини беш ўлчамли евклид фазосига изометрик ботириш ҳақидаги масала қаралади.

Тўрт ўлчамли Sol^4 кўпхиллигида чапинвариант метрика $ds^2 = e^{-2t}(dx^2 + dy^2) + e^{4t}dz^2 + dt^2$ формула билан берилади.

Қуйидаги теорема исботланган.

Теорема 4. Тўрт ўлчамли Sol^4 кўпхиллигини беш ўлчамли R^5 евклид фазосига изометрик ботириб бўлмайди.

Ҳақиқий элементли ва детерминанти 1 га тенг бўлган 2×2 матрицалардан иборат уч ўлчамли Ли группаси

$$SL_2R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2,R) \middle| \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1 \right\}$$

каби, унинг универсал қопламаси эса $S\tilde{L}_2R$ билан белгиланади. Маълумки, $S\tilde{L}_2R$ тўплам ҳам Ли группасини ташкил қилади ва унда чап кўпайтмага нисбатан инвариант бўлган метрика киритиш мумкин.

Энди $S\tilde{L}_2R$ кўпхилликни

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + (dx + ydt)^2}{y^2}$$

чапинвариант метрика билан тўрт ўлчамли R^4 евклид фазосига изометрик ботириш масаласини тадқиқ қиламиз.

Теорема 5. Уч ўлчамли $S\tilde{L}_2R$ кўпхиллик тўрт ўлчамли R^4 евклид фазосига изометрик ботириб бўлмайди.

Диссертациянинг **«Қатламали кўпхилликлар изометриялари группаси»** деб номланган учинчи бобида қатламали кўпхилликларнинг изометриялари группаси тадқиқ қилинган. Жумладан, қатламали кўпхиллик изометрияси ва қатламали кўпхилликнинг барча изометриялари тўпламида қатламали компакт-очиқ топология ёки F-компакт-очиқ топология тушунчалари киритилади, қатламали кўпхилликнинг барча изометриялари тўплами F-компакт-очиқ топологияда саноқли базага эга бўлган Хаусдорф фазоси эканлиги, силлиқ чекли ўлчамли, боғланишли кўпхилликнинг гомеоморфизмлар группаси компакт-очиқ топологияга нисбатан топологик группа бўлиши, қатламали кўпхилликнинг барча изометрияларидан иборат қисмгруппа ҳам шу топологияда топологик группалар бўлиши, қатламали кўпхиллик изометриялари кетма-кетлиги ҳар бир қатламдаги биттадан нуқтада яқинлашса, у ҳолда бу кетма-кетликдан $F-$ компакт–очиқ топологияда қатламали кўпхиллик изометрияларига яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик ажратиш мумкинлиги исботлаган.

Учинчи бобнинг биринчи параграфида қатламали кўпхилликнинг изометрияси ва $G_F(M)$да қатламали компакт-очиқ топология ёки F-компакт-очиқ топология тушунчалари киритилади. Агар қатламанинг ўлчами кўпхиллик ўлчамига тенг бўлса, киритилган топология компакт-очиқ топология билан устма-уст тушади. Агар қатламанинг коўлчами кўпхиллик ўлчамига тенг бўлса, бу топологиядаги яқинлашиши нуқтавий яқинлашиш билан бир хил бўлади.

Бизга k ўлчамли F_1, F_2 қатламалар билан (M, F_1) ва (N, F_2) қатламали кўпхилликлар берилган бўлсин.

Таъриф 8. Бирор $\varphi : M \to N$ – C^r- диффеоморфизмда F_1 қатламадаги ихтиёрий L_α қатламнинг $\varphi(L_\alpha)$ акси F_2 қатламанинг қатлами бўлса, берилган (M, F_1) ва (N, F_2) жуфтликлар C^r- диффеоморф дейилади ва $(M, F_1) \approx (N, F_2)$ каби белгиланади.

Берилган (M, F_1) кўпхилликни (N, F_2) кўпхилликка акслантирувчи φ акслантириш қатламани сақловчи C^r - диффеоморфизм дейилади ва $\varphi : (M, F_1) \to (N, F_2)$ каби ёзилади.

Агар $M = N$ ва $F_1 = F_2$ муносабатлар ўринли бўлса, қатламали кўпхилликнинг диффеоморфизми берилган дейиш мумкин.

Таъриф 9. Қатламали (M, F) кўпхиллик $\varphi : M \to M$ диффеоморфизми-нинг $\varphi : L_\alpha \to \varphi(L_\alpha)$ қатламдаги келтирилгани изометриядан иборат бўлса, $\varphi : M \to M$ акслантириш қатламали (M, F) кўпхилликнинг изометрияси дейилади.

Бизга ҳар бири F қатламанинг бирор қатламида ётадиган $\{K_\lambda\}$ барча компакт тўпламлар оиласи ва M кўпхилликда $\{U_\beta\}$ барча очиқ тўпламлар оиласи берилган бўлсин. Ҳар бир $K_\lambda \subset L_\alpha$ ва U_β жуфтлик учун $f(K_\lambda) \subset U_\beta$ муносабат ўринли бўладиган барча $f \in G_F(M)$ акслантиришлар тўпламини қараймиз. Бу акслантиришлар тўпламини

$$[K_\lambda, U_\beta] = \{f : M \to M \mid f(K_\lambda) \subset U_\beta\}$$

каби белгилаймиз. Ушбу $[K_\lambda, U_\beta]$ кўринишдаги тўпламларнинг чекли сондаги кесишмасидан иборат $G_F(M)$ тўпламнинг қисм тўпламлари оиласини σ билан белгилаймиз. Маълум критерийга[1] кўра $G_F(M)$ тўпламда σ оила база бўладиган топология мавжуд ва бу топология ягона бўлади. Бу

[1] Бакельман И.Я., Вернер А.А., Кантор Б.Е. Введение в дифференциальную геометрию «в целом». – М.: Наука, − 1973, – С.440.

топологияни қатламали компакт-очиқ ёки $F-$компакт-очиқ топология деб атаймиз.

Теорема 6. F-компакт-очиқ топология билан $G_F(M)$ тўплам саноқли базага эга бўлган Хаусдорф фазоси бўлади.

Маълумки, агар кўпхиллик компакт бўлса ёки R^n билан устма-уст тушса, у ҳолда M кўпхилликнинг диффеоморфизмлар группаси $Diff(M)$ компакт-очиқ топологияга нисбатан топологик группа бўлади. Қуйидаги теорема ушбу натижанинг ихтиёрий силлиқ кўпхиллик учун умумлашмасидир.

Теорема 7. Бизга силлиқ чекли ўлчамли, боғланишли M кўпхиллик берилган бўлсин. У ҳолда унинг гомеоморфизмлар группаси $Homeo(M)$ компакт-очиқ топологияга нисбатан топологик группа бўлади. Хусусан, $Diff(M)$, $G_F(M)$ қисм группалар ҳам шу топологияда топологик группалар бўлади.

Қатламали кўпхилликнинг $G_F(M)$ изометриялар группаси умумий ҳолда кўпхилликнинг $G(M)$ изометриялар группасининг қисм группаси эмас, ва аксинча, кўпхилликнинг $G(M)$ изометриялар группаси ҳам қатламали кўпхилликнинг $G_F(M)$ изометриялар группасининг қисм группаси эмас. Лекин, албатта, бу группалар бўш бўлмаган кесишмага эга, яъни, $I \in G_F(M) \bigcap G(M) \neq \varnothing$. Табиийки, савол пайдо бўлади: айний акслантиришдан фарқли қатламали кўпхиллик изометриялари группасига тегишли, лекин кўпхиллик изометрияси бўлмайдиган акслантириш мавжудми?

Биз томонимиздан қатламали кўпхиллик изометриялари группасининг элементи бўладиган, лекин кўпхиллик изометриялари группасининг элементи бўлмайдиган қатламанинг мавжудлиги исботланган.

Теорема 8. Берилган (M,F) қатламали кўпхилликнинг $G_F(M)$ изометриялари группаси, (M,g) риман кўпхиллик $G(M)$ изометриялари группасининг элементи бўлмайдиган, элементни ўз ичига оладиган $f: M \to B$ субмерсия мавжуд.

Қуйидаги мисол кўрсатиб турибдики, теорема шартини қаноатлантирувчи содда мисоллар қуриш мумкин.

Кўпхиллик сифатида икки ўлчамли $M = R^2$ текисликни, ундаги қатлама эса

$$f(x,y) = x^2 - y$$

функциянинг сатҳ чизиқларидан ҳосил қилинган бўлсин деб олайлик.

Қатламали кўпхиллик изометрияси

$$\varphi(x,y) = (x, y + \lambda(x,y))$$

формула билан берилган бўлсин. Агар $\lambda-$ ўзгармас сон бўлса, бу акслантириш текисликнинг ҳам қатламали текисликнинг ҳам изометрияси бўлади. Агар $\lambda(x,y) = -f(x,y)$ муносабат ўринли бўлса, φ акслантириш текисликнинг изометрияси бўлмайди, лекин қатламали кўпхиллик изометрияси бўлади.

Ҳақиқатан, агар (x, y) нуқта $x^2 - y = c$ параболада ётиши маълум бўлса, у ҳолда $(x, y + \lambda(x, y))$ нуқта $x^2 - y = 2c$ параболада ётади. Бу акслантириш параболадаги чизиқлар узунликларини сақлайди.

Учинчи бобнинг иккинчи параграфида янги F -компакт-очиқ топологияда қатламали кўпхилликнинг изометриялар группасининг геометрияси тадқиқ қилинган.

Қатламали кўпхилликлар учун қуйидаги леммалар ва теорема исботланган.

Лемма 1. Бизга $A \subset L_\alpha$ тўпламда нуқтавий яқинлашувчи $\{f_m\} \in G_F^r(M)$ кетма-кетлик берилган бўлсин, бу ерда L_α – қаралаётган қатламанинг бирор қатлами. У ҳолда $\{f_m\}$ кетма-кетлик $\overline{A}$ тўпламда ҳам нуқтавий яқинлашувчи бўлади ($\overline{A}$ – A тўпламнинг L_α қатламдаги ёпиғи).

Лемма 2. Бизга $f_m(p)$ кетма-кетликнинг яқинлашувчи $f_{m_l}(p)$ қисм кетма-кетлиги мавжуд бўладиган L_α қатламдаги p нуқталар тўплами A берилган бўлсин. Агар A тўплам бўш бўлмаса, у ҳолда $A = L_\alpha$ муносабат ўринли бўлади.

Юқорида келтирилган леммалар қуйидаги теоремани исботлаш имконини беради.

Теорема 9. Бизга n ўлчамли M силлиқ тўла кўпхилликда k ўлчамли силлиқ F қатлама ва $f_m \in G_F^r(M), r \geq 0,\ m = 1,2,3,....$ кетма-кетлик берилган бўлсин. Ҳар бир L_α қатламда шундай $o_\alpha \in L_\alpha$ нуқта мавжуд бўлиб, $f_m(o_\alpha)$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлсин деб фараз қилайлик. У ҳолда f_m кетма-кетликнинг F-компакт-очиқ топологияда яқинлашувчи бўлган f_{m_l} қисмий кетма-кетлиги мавжуд.

Қатламалар назарияси динамик системалар назарияси, динамик полисистемалар назарияси ва бошқарув назарияларида кенг тадбиқларга эга. Вектор майдонлар оиласининг орбиталари ҳолатлар фазосини сингуляр қатлама деб аталувчи қатламларга ажратади.

Эришувчанлик тўплами (бошқарувчанлик тўплами) ва бошқарув тизимларининг инвариант тўпламлари оптимал бошқарувнинг сифатий назариясида муҳим объектлар ҳисобланади. Бошқарув тизимларининг инвариант тўпламлари системанинг ўнг қисми ёрдамида аниқланган вектор майдонлар оиласининг орбиталари билан устма-уст тушади.

Диссертациянинг **«Вектор майдонлар орбиталари геометрияси»** деб номланган тўртинчи боби вектор майдонларнинг орбиталарини тадқиқ қилишга бағишланган. Махсус кўринишдаги вектор майдонлар системаси учун эришувчанлик тўпламининг компактлиги ва «нуқта-эришувчанлик тўплами» кўп қийматли акслантиришнинг узлуксизлиги, маълум вақтдан ошмаган вақтдаги эришувчанлик тўплами ёпиғининг компактлиги ва маълум синф вектор майдонлари учун эришувчанлик тўплами вақтга узлуксиз боғлиқлиги исботланган, ҳамда чизиқли системалар учун эришувчанлик (бошқарилувчанлик) тўпламларининг турғун бўлиши шартлари топилган.

Тўртинчи бобнинг биринчи параграфида

$$X_u(x) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} f_i(x)u^i \tag{1}$$

кўринишдаги вектор майдонлар эришувчанлик тўпламларининг геометрияси тадқиқ қилинган, бу ерда $|u^i| \le 1,$ барча $i = 1, 2, ..., m$ лар учун $f_0(x), f_1(x), ..., f_m(x)$ - барча $x \in R^m$ нуқталар учун $|f_i(x)| \le M_i$ шартни қаноатлантирувчи вектор-функциялар, M_i – ўзгармас сонлар.

(1) тенглама билан аниқланган вектор майдонларга қуйидаги кўринишидаги бошқарув системалари мос келади:

$$\dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} f_i(x)u^i(t). \tag{2}$$

Ушбу

$$\dot{x}(t) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} f_i(x)u^i(t) \tag{3}$$

дифференциал тенгламалар системаси учун $[0;T]$ кесмада аниқланган бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими мавжуд бўладиган ўлчовли $u(t) = (u^1(t), u^2(t), ..., u^m(t))$ вектор-функция мавжуд бўлса, x^* нуқта x_0 нуқтадан T вақтда эришиш мумкин деб айтамиз, бунда $x(T) = x^*,$ $|u^i| \le 1,$ $\forall t \in [0;T]$ муносабатлар ўринли бўлади.

R^n фазонинг x_0 нуқтадан T вақтда эришиш мумкин бўлган нуқталари тўпламини $G_{x_0}(T)$ каби белгилаймиз. Таърифга кўра барча T лар учун $x_0 \in G_{x_0}(T)$ муносабатни ҳосил қиламиз.

Бу параграфда (1) система учун $G_{x_0}(T)$ эришувчанлик тўпламининг компактлиги ва T га узлуксиз боғлиқлиги исботланган.

Қуйидаги теоремалар исботланган

Теорема 10. Барча $T \ge 0$ лар учун $G_{x_0}(T)$ тўплам компакт тўпламдир.

Теорема 11. Ҳар бир $T \ge 0$ нуқтада $T \to G_{x_0}(T)$ акслантириш Хаусдорф метрикасида узлуксиз.

Тўртинчи бобнинг иккинчи параграфида эришувчанлик тўпламининг структураси тадқиқ этилади.

Қуйидаги кўринишдаги

$$\dot{x} = f(x,u), \; x \in R^n, \; u \in U \subset R^m, \tag{4}$$

бошқарув системаси қаралади. Бу ерда U тўплам R^m да компакт бўлган тўплам. Қаралаётган $f(x,u)$ вектор майдон ҳар бир $u \in U$ да C^∞ синфга тегишли ва f акслантириш барча аргументлари бўйича узлуксиз бўлсин. Бундан ташқари, системанинг ўнг томони

$$|f(x,u)| \le M|x| + N, \forall (x,u) \in R^n \times U, \tag{5}$$

шартни қаноатлантириши талаб қилинади (M ва N-ўзгармас катталиклар).

Ушбу $G_\eta(\le T)$ ва $G_\eta(T)$ тўпламларнинг хоссаларини ўрганиш оптимал бошқарувнинг сифатий назариясида муҳим ўрин эгаллайди.

Масалан, $G_\eta(\le T)$ тўпламнинг ёпиқлиги (ёки компактлиги) оптимал бошқарувнинг мавжудлиги ҳақидаги теоремаларнинг исботида асосий факторлардан бири ҳисобланади. Умуман олганда, $G_\eta(\le T)$ ва $G_\eta(T)$ тўпламлар ёпиқ бўлмаслиги мумкин.

Қуйидаги теорема ўринли.

Теорема 12. Ушбу $\overline{G}_\eta(\le T)$ ва $\overline{G}_\eta(T)$ тўпламлар компакт тўпламлардир.

Маълумки, R^n фазонинг компакт қисм тўпламларидан иборат $K(R^n)$ тўплам Хаусдорф метрикаси билан метрик фазодир. Тенгламалар системасининг ўнг томони (5) шартни қаноатлантирса, қуйидаги теоремалар ўринли

Теорема 13. Ушбу $T \to \overline{G}_\eta(\le T)$ ва $T \to \overline{G}_\eta(T)$ акслантиришлар узлуксиздир.

Теорема 14. Ҳар бир $T \ge 0$ учун $G_\eta(T)$ тўплам компакт бўлса, у ҳолда $G_\eta(\le T)$ тўплам ҳам компактдир.

Натижа 1. (3) тенгламалар системаси учун $G(\le T)$ тўплам компакт тўпламдир.

Бу параграфда

$$\dot{x} = Ax + Bu,\ x \in R^n, u \in R^m, \tag{6}$$

кўринишдаги чизиқли системалар ҳам қаралади. Бу ерда $A -$ $n \times n$ ўлчамли матрица, B – $n \times m$ ўлчамли матрица. Жоиз бошқарувлар $u:[0;T] \to R^m$, $0 < T < +\infty$ – ўлчовли чегараланган функциялар бўлсин деб фараз қилайлик.

Бошқарувнинг мақсади системани бирор $\eta \in R^n$ тайин ҳолатга келтиришдан иборат.

R^n фазода аниқланган аналитик вектор майдонлар тўпламини V каби белгилайлик. Маълумки бу тўплам Ли алгебраси бўлади, бунда X ва Y вектор майдонларнинг кўпайтмаси сифатида уларнинг Ли қавси $[X,Y]$ олинган. $X_u(x) = Ax + Bu$ вектор майдонларни қарайлик, $\{X_u : u \in R^m\}$ вектор майдонлар тўпламини D билан, D оилани ўз ичига олувчи минимал қисм Ли алгебрасини $A(D)$ билан белгилайлик.

Юқоридаги (6) системанинг x нуқтадан ўтувчи $L(x)$ орбитаси R^n фазонинг

$$y = X_l^{t_l}\left(X_{l-1}^{t_{l-1}}\left(\ldots X_1^{t_1}(x)\ldots\right)\right). \tag{7}$$

кўринишидаги барча нуқталари каби аниқланади. Бу ерда барча $i=1,2,...,l$ лар учун $X_i \in D, t_i -$ҳақиқий сонлар, $t \to X^t(x)$ эса $X \in D$ вектор майдоннинг $t=0$ да x нуқтадан ўтувчи интеграл чизиғи. Агар (7) муносабатдаги t_i лар мусбат сонлардан иборат бўлса, у ҳолда y нуқталар тўплами мусбат орбитани ҳосил қилади. Жоиз $u=u(t)$ бошқарувлар бўлакли ўзгармас функциялардан иборат бўлса, у ҳолда G_η мусбат орбита бўлади ва шунинг учун $G_\eta \subset L(\eta)$ муносабат барча $\eta \in R^n$ лар учун ўринли бўлади.

Агар $u=u(t)$ чегараланган ўлчовли функция, $x(t)$ (6) системага $x(0)=x_0$ бошланғич шарт билан мос келувчи траектория бўлса, у ҳолда ишда[1], кўрсатилганидек, $f(x(t),u(t))$ вектор майдон $L(x_0)$ кўпхилликка деярли барча нуқталарда уринади, шунинг учун $x_0 \in L(\eta)$ нуқтадан чиқувчи мос $x(t)$ траектория $L(\eta)$ да ётади. Натижада, ўлчовли жоиз бошқарувлар учун G_η эришувчанлик тўпламининг қисм тўплами бўлади. Юқоридаги (6) система учун G_η тўплам $L(\eta)$ билан устма-уст тушади.

Барча $x \in R^n$ лар учун $A_x\left(D\right)=\left\{X\left(x\right): X \in A\left(D\right)\right\}$ бўлсин. У ҳолда $A(D)-$ Ли алгебраси бўлганлигидан, $A_x\left(D\right)$ – вектор майдонлар тўплами x нуқтадаги векторлар фазосининг чизиқли қисм фазоси бўлади. Жумладан, ҳар бир $u \in R^m$ ва барча $x \in R^n$ учун $X_u\left(x\right) \in A_x(D)$ муносабат ўринли бўлади. Равшанки, барча $x \in R^n$ лар учун $0 \le \dim A_x D \le n$ муносабат бажарилади.

Навбатдаги теоремада ҳар бир орбитанинг текислик бўлиши учун етарли шартлар топилган.

Теорема 15. Барча $x \in R^n$лар учун $\dim A_x\left(D\right)=k$ $(0<k<n)$ бўлсин деб фараз қилайлик. У ҳолда барча $\eta \in R^n$ лар учун G_η тўплам k ўлчовли текислик бўлади.

Маълумки, (6) системанинг G_η бошқарувчанлик тўплами соҳа бўлиши учун

$$rank\left(B, AB, ..., A^{n-1}B\right)=n.$$

шартнинг бажарилиши зарур ва етарли.

Ушбу фактни эътиборга олиб 15-теоремадан қуйидаги натижа келиб чиқади

Натижа 2. Барча $x \in R^n$ лар учун $rank\left(B, AB, ..., A^{n-1}B\right) \le \dim A_x\left(D\right)$ муносабат ўринли.

Теорема 16. Қуйидаги $\left(B, AB, ..., A^{n-1}B\right)$ матрицанинг ранги $n-1$ га тенг бўлсин деб фараз қилайлик. У ҳолда барча орбиталар (эришувчанлик тўплами) $n-1$ ўлчамли текисликлар ёки ҳолатлар фазоси учта орбитанинг

[1] Аграчев А.А., Сачков Ю.Л. Геометрическая теория управления. – М.: физматлит, 2005. – 392 с.

бирлашмасидан иборат: орбиталардан иккитаси n ўлчамли, координаталар бошидан ўтадиган орбита эса $n-1$ ўлчамли текислик.

Бошқарувнинг сифатий назариясида силлиқ кўпхилликдаги бошқарув системасининг бошқарилувчи тўплами (ёки эришувчанлик тўплами) бўлакли ўзгармас бошқарувлар синфида бошқарув системаси билан ягона равишда аниқланадиган вектор майдонлар оиласининг манфий (мусбат) орбитаси билан устма-уст тушади.

P. Stefan қатлама тушунчасининг умумлашмаси бўлган сингуляр қатлама тушунчасини киритди ва орбиталар бирор сингуляр қатламанинг қатламлари бўлишини кўрсатди. Барча орбиталар бир хил ўлчамли бўлганда кўпхилликнинг орбиталарга бўлиниши қатламадан иборат бўлади. Бу эса қатламалар назариясининг методларини силлиқ системаларнинг орбиталари ва бошқарув тўпламларининг хоссаларини ўрганишга қўллаш имконини беради.

Тўртинчи бобнинг учинчи параграфида чизиқли системалар учун бошқарувчанлик тўпламининг бошланғич нуқтага узлуксиз боғлиқлиги масаласи қаралади. Кўп қийматли $\eta \to G_\eta$ функциянинг узлуксизлиги башқарув назариясида тўла бошқарувчан системаларнинг турғунлиги масаласини тадқиқ этишда муҳим ўрин тутади.

Хусусан, ушбу параграфда агар чизиқли системанинг орбиталари ҳосил қилган қатламалар регуляр бўлса, у ҳолда бошқарувчанлик тўплами бошланғич нуқтага узлуксиз боғлиқ эканлиги исботланган.

Таъриф 10. Ихтиёрий $\varepsilon>0$ ва ихтиёрий $R>0$ учун шундай $\delta>0$ сон мавжуд бўлиб, $\rho(\eta,\eta_0)<\delta$ муносабатдан

$$d\left(\bar{G}_{\eta_0}\cap B_R(\eta_0),\bar{G}_\eta\cap B_R(\eta_0)\right)<\varepsilon$$

тенгсизлик ўринлилиги келиб чиқса, $\eta \to G_\eta$ акслантириш η_0 нуқтада қуйидан ярим узлуксиз дейилади, бу ерда $\bar{G}_\eta$ тўплам G_η тўпламнинг R^n даги ёпиғи, $B_R(\eta_0)-$ маркази η_0 нуқтада радиуси R га тенг бўлган ёпиқ шар.

Таъриф 11. Ихтиёрий $\varepsilon>0$ ва ихтиёрий $R>0$ учун шундай $\delta>0$ сон мавжуд бўлиб, $\rho(\eta,\eta_0)<\delta$ муносабатдан

$$d\left(\bar{G}_\eta\cap B_R(\eta_0),\bar{G}_{\eta_0}\cap B_R(\eta_0)\right)<\varepsilon.$$

тенгсизлик ўринлилиги келиб чиқса, $\eta \to G_\eta$ акслантириш η_0 нуқтада юқоридан ярим узлуксиз дейилади

Таъриф 12. Берилган $\eta \to G_\eta$ акслантириш η_0 нуқтада ҳам қуйидан ҳам юқоридан ярим узлуксиз бўлса, бу акслантириш η_0 нуқтада узлуксиз дейилади.

Лемма 3. Ҳар бир $\eta\in R^n$ нуқтада $\eta \to G_\eta$ акслантириш қуйидан яримузлуксиз.

Қуйидаги теоремада қаралаётган акслантиришнинг юқоридан ярим узлуксиз бўлиши учун етарли шарт топилган.

Теорема 17. Барча $x \in R^n$ лар учун $\dim A_x(D) = k$ бўлсин, бунда $A_x(D) = \{X(x) : x \in A(D)\}, 0 < k < n$. У ҳолда $\eta \to G_\eta$ акслантириш R^n фазонинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз.

Ҳақиқатан ҳам, бу теорема орбиталар ҳосил қилган қатлама k ўлчамли қатлама, бошқарувчанлик тўплами эса бу қатламанинг қатламлари бўлишини кўрсатади. Шундай қилиб, кўп қийматли «нуқта-қатлам» $\eta \to G_\eta$ акслантириш узлуксиз акслантиришдир.

ХУЛОСАЛАР

Дисстертацияда қатламали риман кўпхилликларининг изометриялари группалари тадқиқ қилинган. Қўйилган масалаларни ечиш учун қатламали кўпхилликларнинг топологик ва геометрик хоссалари ўрнатилган ҳамда риман субмерсияларининг геометрияси тадқиқ қилинган. Қатламага боғлиқ бўлган, янги F-компакт-очиқ топология тушунчаси киритилган. Қатламали кўпхилликлар изометриялари группаси компакт-очиқ топологияда ва F-компакт-очиқ топологияда тадқиқ қилинган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат.

1. Ҳар қандай кўпхилликнинг гомеоморфизмлар группаси компакт-очиқ топологияда топологик группа бўлишини таъкидлаш мумкин;

2. Қатламали кўпхилликнинг изометриялари группаси компакт-очиқ топологияда топологик группа бўлиши исботланган;

3. Агар қатламали кўпхилликнинг изометриялари кетма-кетлиги ҳар бир қатламнинг бирор нуқтасида яқинлашувчи бўлса, у ҳолда бу кетма-кетликдан F-компакт-очиқ топологияда яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик ажратиш мумкинлиги кўрсатилган;

4. Риман субмерсияси Гаусс эгрилиги ўзгармас бўлган қатламали кўпхилликни ҳосил қилишини таъкидлаш мумкин;

5. Қатламали кўпхиллик геодезик чизиқларининг лимити лимитдаги қатламнинг геодезик чизиғи бўлиши исботланган;

6. Тўрт ўлчамли Sol^4 кўпхилликни беш ўлчамли евклид фазосига ботириб бўлмаслиги кўрсатилган;

7. Қатламали кўпхиллик изометрияси группасининг элементи бўлиб, лекин кўпхиллик изометрияси группасининг элементи бўлмайдиган қатламанинг мавжудлиги исботланган;

8. Маълум бир синфга тегишли вектор майдонлар системасининг эришувчанлик тўплами компакт бўлиши ва унинг вақтга узлуксиз боғлиқлиги аниқланган;

9. Чизиқли бошқарув системасининг эришувчанлик тўплами (бошқарувчанлик тўплами) тайин ўлчамли текисликдан иборат бўлиши учун етарли шартлар топилган.

Муаллиф илмий маслаҳатчи профессор Нарманов Абдигаппар Якубовичга муаммоларнинг қўйилиши ва уларни муҳокама қилишда доимий фойдали маслаҳатлари ва қўллаб-қувватлаганлиги учун ўзининг чуқур миннатдорчилигини билдиради.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ 14.07.2016.FM.01.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ ДОКТОРА НАУК ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА

ШАРИПОВ АНВАРЖОН СОЛИЕВИЧ

ГРУППА ИЗОМЕТРИЙ СЛОЕНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

01.01.04 – Геометрия и топология
(физико-математические науки)

АВТОРЕФЕРАТ ДОКТОРСКОЙ ДИССЕРТАЦИИ

Ташкент – 2016

Тема докторской диссертации зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № 30.09.2014/B2014.5.FM132

Докторская диссертация выполнена в Национальном университете Узбекистана.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский) размещен на веб-странице Научного совета (http://ik-fizmat.nuu.uz/) и информационно-образовательном портале «ZIYONET» (www.ziyonet.uz).

Научный консультант:	**Нарманов Абдигаппар Якубович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Vakhtang Lomadze** доктор физико-математических наук, профессор (Тбилисский государственный университет, Грузия) **Бешимов Рузиназар Бебутович** доктор физико-математических наук **Рахимов Абдугафур Абдумаджидович** доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация:	**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Удмуртский государственный университет»** (Российская Федерация).

Защита диссертации состоится «____» _____________2016 года в ____ часов на заседании Научного совета 14.07.2016.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (99871)227-12-24, факс: (99871) 246-53-21, (99871)246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz.)

С докторской диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (99871)246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «____» _______________2016 года.
(протокол рассылки №________ от «____» _______________2016 года).

А.А. Абдушукуров
Председатель Научного совета по присуждению
ученой степени доктора наук, д.ф.-м.н., профессор

Г.И. Ботиров
Ученый секретарь Научного совета по присуждению
ученой степени доктора наук, к.ф.-м.н.

Р.Б. Бешимов
Заместитель председателя научного
семинара при Научном совете по присуждению
ученой степени доктора наук, д.ф.-м.н.

ВВЕДЕНИЕ (аннотация докторской диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. В связи с бурным развитием научно-технического прогресса в мире, требуются разработки новых методов фундаментальных исследований и внедрения полученных результатов в практику. Исходя из потребностей практики, на стыке дифференциальных уравнений и дифференциальной топологии французскими учеными созданы фундаментальные основы теории слоеных многообразий. Доказаны устойчивость компактных слоений и инвариантность предельных множеств слоев. Учеными США и России исследованы качественная теория слоений, в которой исследуются геометрические и топологические свойства слоеных многообразий. Вместе с этим применение теории слоеных многообразий на практике остается одной из важнейших задач геометрии.

После провозглашения независимости в нашей стране внимание к актуальным направлениям в области естественных и точных наук в ощущаемой степени увеличилось, в частности особое внимание уделяется приложению методов и результатов этой теории к теориям оптимального управления и динамических систем. В этой области получены достаточные условия стабильности для управляемых систем, доказана неотрицательность секционных кривизн слоев слоения, порожденных римановыми субмерсиями в пространствах с неотрицательными кривизнами и по исследованию геометрии векторных полей получены весомые результаты.

На сегодняшний день исследования, проводимые в мире по геометрии орбит семейства векторных полей на многообразии, являются важными для исследований, связанных с теориями динамических полисистем и оптимальных управлений. В этой области важной задачей являются широкие приложения целевых научных исследований по теории слоений для определении структуры фазового пространства динамических полисистем: применения методов теории слоений к теории динамических полисистем, оптимального управления; к различным задачам в других областях; исследование геометрии слоений, порожденных римановыми субмерсиями; исследование геометрии римановых слоений на поверхностях с неотрицательной секционной кривизной. Выполняемые научные исследования в вышеприведенных направлениях обосновывают актуальность темы настоящей диссертации.

Исследования данной диссертации в определенной степени служат решению задач, обозначенных в постановлениях Президента Республики Узбекистан ПП-436 от 7 августа 2006 года «О мерах по совершенствованию координации и управления развитием науки и технологии», а также ПП-2204 от 8 июля 2014 года «О мерах по дальнейшей оптимизации структуры Академии Наук Республики Узбекистан и укреплению интеграции академической науки и высшего образования Республики» и в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследования с приоритетными направлениями развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Обзор международных научных исследований по теме диссертации[1].

Научные исследования по теории слоений, качественной теории слоений, где в основном исследуются топологические и геометрические свойства, локальной и глобальной устойчивости компактного слоя слоения, обобщения теорем устойчивости для некомпактных слоев, сингулярным римановым слоениям, геометрии геодезических и римановых слоений, топологии слоений коразмерности один, ведутся в крупных научных центрах и высших учебных заведениях мира, в частности: в Университете Страсбурга (Франция), в Университете Гренобля (Франция), в Парижском университете (Франция), в Университете Монпелье (Франция), в Университете Иллинойса (США), в Университете Калифорния (США), в Университете Индиана (США), в Принстонском университете (США), в Уорвикском университете (Великобритания), в Университете Лондона (Великобритания), в Токийским университете (Япония), в Университете Тохоку (Япония), в Университете Киото (Япония), в Московском государственном университете (Россия).

В результате исследований по качественной теории слоений, где исследуются топологические и геометрические свойства слоев, и свойств сингулярных римановых слоений в мире, решены ряд актуальных проблем, в частности, получен следующий ряд результатов: доказаны теоремы о локальной и глобальной устойчивости компактных слоев слоения, а также показано, что семейство орбит векторных полей Киллинга порождают сингулярные римановы слоения (университет Страсбурга, университет Гренобля, Парижский университет, университет Монпелье, Франция). Доказано, если слоение порождено слоями субмерсии, то для него понятие связности Эресмана эквивалентно известному понятию связности Эресмана для субмерсии, а также показано вполне геодезические и римановы слоения обладают связностью Эресмана (университет Иллиноиса, Калифорнийский университет, университет Индианы, университет Принстона, США). Доказано, что каждая орбита семейства гладких векторных полей является гладким многообразием, и разбиение многообразия на орбиты порождает сингулярное слоение (университет Уорика, университет Лондона, Великобритания). Доказана, локальная стабильность некомпактного собственного слоя слоения коразмерности один на трехмерном многообразии, показана связь между частичной упорядоченности множества слоев и топологии слоев

---

[1] Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации: Actualite Sci. Indust.; C.R.Acad. Sci. Paris; https://www.math.uni-muenster.de/u; Proc. Fifth Canad. Math. Congress; Ann. of Math.;Успехи математических наук, www.mathnet.ru/umn; Математические заметки, www.mathnet.ru/mz; www.ams.org/bull; Progress in Mathematics; https://projecteuclid.org/euclid.ijm; Ann. Math.; Topology; http://link.springer.com; Journal of mathematical Physics, analysis, geometry; http://www.foliations.org, также использованы и другие источники.

(университет Токио, университет Тохоку, университет Киото, Япония). Доказано, что каждое слоение коразмерности один на трехмерной сфере обладает компактным слоем (Московский университет, Россия).

На мировом уровне осуществляется ряд научно-исследовательских работ в приоритетных направлениях по геометрии и топологии слоеных многообразий, а именно: исследование геометрии римановых слоений на поверхностях с неотрицательной секционной кривизной, изучение структуры группы изометрий слоеных многообразий, определение геометрической характеристики слоений, порожденных субмерсиями на римановом многообразии, свойств геодезических линий слоеного многообразия, применение геометрии слоений в теориях динамических систем и оптимальных управлений, исследование геометрии множества достижимости (управлямости), а также исследование непрерывной зависимости множества достижимости от времени как многозначного отображения.

Степень изученности проблемы. В формировании и развитии теории слоения большой вклад внесли французские математики такие, как C. Ehresmann, G. Reeb, H. Lawson, P. Molino, A. Haefliger, R. Langevin, H. Rosenberg, G. Lamoureux. Основные работы Ж. Риба (G. Reeb), одного из основоположников теории слоений, посвящены задачам качественной теории слоений. Ж. Рибом доказано, что если компактный слой имеет конечную фундаментальную группу, то существует такая окрестность этого слоя, которая состоит из слоев, диффеоморфных данному слою. В работах Ш.Эресмана (C. Ehresmann) показано, что римановы и геодезические слоения на полных римановых многообразиях обладают связаностью Эресмана.

Исследование группы изометрий слоеного многообразия является новой задачей в теории слоеных многообразий. Понятие изометрии слоеного многообразия было введено профессором А.Я. Нармановым. Им доказано, что для некоторого класса слоений существует изометрия слоеного многообразия, которая не является изометрией многообразия. Группа изометрий слоеного многообразия является подгруппой группы диффеоморфизмов слоеного многообразия. Группа диффеоморфизмов слоеного многообразия изучена в работах С.Х. Арансона. Им получено необходимое и достаточное условие топологической сопряженности таких диффеоморфизмов. Для компактных многообразий различные подгруппы, и группы диффеоморфизмов изучены P. L. Antonelli, D. Burghelea, P. J. Kahnом.

В современной геометрии одним из основных задач является исследование предела геодезических. Мощным оружием римановой геометрии является теорема о пределе геодезических линий риманова многообразия. В случае слоеных многообразий эта задача осложняется тем, что геодезическая линия слоеного многообразия лежит на слое и является геодезической относительно индуцированной римановой метрики слоя. В работах С. Хелгасона доказаны замечательные теоремы о геодезических и о группах изометрий риманова многообразия. В частности, им доказано, что группа изометрий риманова многообразия является топологической группой в компактно-открытой топологии. Кроме этого он доказал, что если на римановом многообразии задана последовательность изометрий которые сходятся в одной точке, тогда существует подпоследовательность этой последовательности, сходящаяся в компактно-открытой топологии к некоторой изометрии этого многообразия.

Сингулярные римановы слоения были введены P. Molino, геометрические и топологические свойства сингулярных римановых слоений также изучены в работах А.Я. Нарманова, Н.И. Жуковой и других авторов. P. Molino показал, что если сингулярное слоение является римановым, то риманова метрика многообразия порождает трансверсальную метрику на нормальном расслоении каждого слоя. Для полных многообразий А.Я. Нармановым доказано, что это условие является необходимым и достаточным для того, чтобы сингулярное слоение было римановым.

Несмотря на это, остается открытым вопрос о том является ли группа диффеоморфизмов некомпактных многообразий топологической группой, а также является ли группа изометрий слоеных многообразий топологической группой, относительно компактно-открытой топологии. Кроме того, оставался открытым вопрос о пределе геодезиеских слоеного многообразия, а также вопрос о кривизне слоений, порожденных римановыми субмерсиями.

Связь диссертационной работы с фундаментальными и прикладными исследованиями, с инновационными проектами, Государственными научно-техническими программами.

Диссертационное исследование проводились в рамках научно-исследовательских грантов Национального университета Узбекистана 1.Ф.1.1.9 «Функциональные и топологические свойства экстремальных управлений, областей достижимости и стабильность вполне управляемых систем» (2003- 2007), ОТ-Ф1-096 «Создание и разработка геометрических и топологических методов для решений задач теории динамических полисистем» (2007– 2011), ОТФ-01-04 «Геометрия и топология слоеных многообразий» (2012-2016).

Целью исследования являются исследования геометрии и топологии слоеных многообразий, структуры группы изометрий слоеных многообразий и геометрии слоеных многообразий постоянной секционной кривизны, а также применение полученных результатов к исследованию множества достижимости систем управления и в доказательстве непрерывной зависимости множества достижимости от начальной точки.

Задачи исследования:

установления основных свойств геодезических слоеных многообразий;

обобщение классического результата о группе гомеоморфизмов компактного многообразия для некомпактных многообразий;

исследование геометрии группы изометрий слоеного многообразия в новой F - компактно-открытой топологии;

нахождения условий, при котором слои слоеного многообразия являются многообразиями постоянной Гауссовой кривизны;

исследование структуры множества достижимости (множества управляемости) систем векторных полей, заданных на римановых многообразиях.

Объектом исследования являются слоеные римановы многообразия, геодезические линии слоеных многообразий, орбиты семейства гладких векторных полей, множество достижимости и области управляемости динамических систем, слоения, порожденные римановыми субмерсиями.

Предметом исследования являются исследования группы изометрий слоеного многообразия, геометрия и топология слоеного многообразия, слоения, порожденные субмерсиями, геометрия орбит векторных полей и сингулярных слоений.

Методы исследования. В диссертации применяются методы локальной и глобальной дифференциальной геометрии, методы теории слоений, а также геометрические и топологические методы теории динамических систем.

Научная новизна диссертационного исследования заключается в следующем:

доказано, что группа гомеоморфизмов любого гладкого многообразия является топологической группой в компактно-открытой топологии;

доказано, что группа изометрий слоеного многообразия является топологической группой в компактно-открытой топологии;

доказано, что если последовательность изометрий слоеных многообразий сходятся по одной точке на каждом слое, то из этой последовательности можно извлечь сходящую подпоследовательность к изометрию слоеного многообразия в $F-$ компактно-открытой топологии;

показано, что если слоение порождено римановой субмерсией, тогда слои этого слоения являются многообразиями постоянной Гауссовой кривизны;

доказано, что предел геодезических слоеного многообразия, является геодезической на предельном слое слоения;

доказано, существование слоения, для которого существует элемент группы изометрий слоеного многообразия, не являющийся элементом группы изометрий;

доказана компактность множества достижимости, и непрерывность многозначного отображения «точка - множество достижимости» систем векторных полей специального вида;

доказана компактность замыкания множества достижимости за время не превосходящее фиксированное время, и непрерывная зависимость множества достижимости от времени для векторных полей определенного класса;

найдены условия для того, чтобы множества достижимости (множества управляемости) совпадали с плоскостями фиксированной размерности для линейных систем.

Практические результаты исследования состоят в возможности применения для определения кривизны фазового пространства динамических систем на многообразиях неотрицательной кривизны, а также для исследования геометрии слоения, порожденного множествами достижимости системы управления.

Достоверность результатов исследования. При исследовании геометрии и топологии слоеных многообразий, а также при изучении геометрии орбит векторных полей достоверность обоснована применениями теорем и методов теории слоений, римановой геометрии и дифференциальной топологии.

Теоретическая и практическая значимость результатов исследования. Научное значение результатов исследования заключается в возможности использования компактности множества достижимости и непрерывность многозначного отображения для определения кривизны фазового пространства динамических систем.

Практическое значение диссертационного исследования заключается в том, что расширение класса исследуемых объектов позволяет определить структуры множества достижимости (множества управляемости) для управляемых систем.

Внедрение результатов исследования. Полученные в диссертации результаты были использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

результаты полученные о компактности множества достижимости векторных полей и по непрерывности многозначного отображения, были использованы в научном проекте 12-01-00195 «Задачи позиционного управления детерминированными и стохастическими динамическими процессами и дифференциальные игры со многими участниками» по фундаментальным исследованиям Министерства образования и науки Российской Федерации, применение этих научных результатов позволили описать структуру траекторий и фазового пространства динамических систем (Справка № 7873-8965/20 Удмуртского государственного университета от 25 августа 2016 года). Применение научного результата послужило решающим фактом по определению кривизны фазового пространства динамических систем и при изучении геометрии множеств достижимости управляемых систем;

результаты, полученные в диссертации показывают, что если слоение порождено римановой субмерсией на полном римановом многообразии с постоянной Гауссовой кривизной, то слои этого слоения являются многообразиями постоянной Гауссовой кривизной, эти результаты были использованы в научном проекте в рамках научных исследований по государственному гранту НИР 1.3.1.3 «Методы создания, исследования и идентификации математических моделей о Земле», применение этих результатов позволили изучить возможность структуры фазового пространства динамических систем (Справка № 15301/12-2711 Института Вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения российской академии наук от 24 августа 2016 года). Применение этих научных результатов способствовало определению структуры фазового пространства динамических систем на многообразиях неотрицательной кривизны.

Апробация работы. Основные результаты исследования обсуждались на научно-практических конференциях, в том числе: «В школе–семинаре по геометрии» (Абрау-Дюрсо, Россия, 2006), «Новые теоремы молодых математиков» (Наманган, 2006, 2009), «Новые направления в теории динамических систем и некорректных задач» (Самарканд, 2007), «Современные проблемы математики, механики и информатики» (Ташкент, 2008), «Foliations, Dynamic systems and Singularity theory» (Самарканд, 2009), «Метрическая геометрия поверхностей и многогранников» (Москва, Россия, 2010), «Locally analytical geometry» (Lahore, Pakistan, 2012), «Ал-Хорезми-2012» (Ташкент, 2012), «Актуальные вопросы геометрии и её приложения» (Ташкент, 2014), «Предельные теоремы теории вероятностей и их приложения» (Наманган, 2015), «Теория управления и математическое моделирование» (Ижевск, Россия, 2015), «Математическая физика и родственные задачи современного анализа» (Бухара, 2015), «Современные проблемы анализа» (Карши, 2016), «Проблемы современной топологии и её приложения» (Ташкент, 2016) выступления и доклады прошли широкую апробацию. Результаты исследования обсуждались в научных семинарах на математическом факультете при Национальном университете Узбекистана «Современные проблемы геометрии и топологии» (2000-2016), «Функциональный анализ и его приложения» (2014-2015), «Современные проблемы комплексного анализа» (2015), в научном семинаре «Операторные алгебры и их приложения» Института Математики при Национальном университете Узбекистана (2015), в научном семинаре кафедры «Высшая математика» Наманганского инженерно-педагогического института (2016).

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 43 научные работы, из них 16 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты докторских диссертаций, в том числе 6 из них опубликованы в зарубежных журналах и 10 в республиканских научных изданиях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 161 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обосновываются актуальность и востребованность темы диссертации, в соответствии с исследованиями в приоритетных направлениях развития науки и технологий Республики Узбекистан, даётся обзор международных научных исследований по теме диссертации, раскрываются степень изученности проблемы и связь с научным направлением Национального университета Узбекистан, формулируются цели и задачи, а также объект и предмет исследования, излагаются научная новизна и практические результаты исследования, обосновывается достоверность полученных результатов, раскрывается ее теоретическая и практическая значимость, приведен список внедрений в практику результатов исследования и опубликованных работ, даются сведения об апробации полученных результатов и структуре диссертации.

Первая глава диссертации, названная **«Основные сведения и вспомогательные факты»,** носит вспомогательный характер и посвящена изложению основных определений и вспомогательных фактов по теме данной диссертации. Она состоит из трех параграфов.

В первом параграфе первой главы кратко изложена теория гладких многообразий, приведены необходимые определения и вспомогательные факты, относящиеся к гладким многообразиям, используемые в диссертации. Приведены примеры гладких многообразий, подмногообразий.

Во втором параграфе кратко изложена теория векторных полей на гладком многообразии, и приведены основные свойства орбит векторных полей. Все понятие оснащены примерами.

Третий параграф посвящен основным понятиям и вспомогательным фактам теории слоений. В нем приводится определения и результаты исследований по теории слоениям.

Пусть $M-$гладкое многообразие размерности n, $A-$ максимальный атлас, определяющий на M структуру гладкого многообразия класса C^r, где $r \geq 0$. Многообразие M является также многообразием C^s, если $0 \leq s \leq r$. Систему локальных криволинейных координат на C^s- многообразии M обозначим через A^s.

Пусть теперь целое k удовлетворяет неравенствам $0 \leq k \leq n$.

Определение 1. Семейство $F = \{L_\alpha ; \alpha \in B\}$ линейно связных подмножеств M называется k – мерным слоением класса C^r, если оно удовлетворяет следующим трем условиям:

(F_1): $\bigcup\limits_{\alpha \in B} L_\alpha = M$;

(F_2): для всех $\alpha, \beta \in B$ если $\alpha \neq \beta,$ то обязательно $L_\alpha \cap L_\beta = \varnothing$;

(F_3): для всякой точки $p \in M$ можно выбрать локальные координаты $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in A^{(s)}$, $p \in U_\lambda$, так что и если $U_\lambda \cap L_\alpha \neq \varnothing$ для некоторого $\alpha \in B$, то компоненты линейной связности множества $\varphi_\lambda(U_\lambda \cap L_\alpha)$ имеют вид

$$\left\{\left(x^1, x^2, ..., x^n\right) \in \varphi_\lambda\left(U_\lambda\right) : x^{k+1} = c^{k+1},\, x^{k+2} = c^{k+2}, ...,\, x^n = c^n\right\},$$

где числа $c^{k+1}, c^{k+2}, ..., c^n$ постоянны на компонентах линейной связности.

Множество L_α называется слоем слоения F. В описанной ситуации k мерное слоение C^s- слоение называется также C^s- слоением коразмерности

$q = n - k$. Условия (F_1), (F_2) означают, что M состоит из взаимно непересекающихся слоев. Условие (F_3) означает, что локально слои устроены как параллельные плоскости. Если выполняется условие (F_3) координатные окрестности $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in A^{(s)}$, называются расслоенными, а совокупность всех расслоенных координатных окрестностей обозначается через A_F^s называется системой расслоенных координатных окрестностей.

Если на многообразии M задано слоения F, то такое многообразие называем слоеным многообразием, и обозначим через (M,F). Окрестность U в определении называется расслоенной окрестностью.

Одним из важных классов слоения, является класс слоений, порожденные субмерсиями.

Определение 2. Дифференцируемое отображение $f : M \to B$ максимального ранга, где M, B- гладкие многообразия размерности n,m соответственно, при $n > m$, называется субмерсией.

С геометрической точки важными классами слоений являются вполне геодезические слоения и римановы (метрические) слоения.

Определение 3. Подмногообразие N риманова многообразия M называется вполне геодезическим, если каждая геодезическая многообразия M, касающаяся подмногообразия N, содержится в N.

Определение 4. Слоение F на римановом многообразии M называется вполне геодезическим, если каждая геодезическая, касательная к слою слоения F в одной точке, остаётся на этом слое, т.е. каждый слой является вполне геодезическим подмногообразием.

Важным классом слоений коразмерности один являются слоения, порожденные поверхностями уровня дифференцируемых функций без критических точек. Американский профессор Ph. Tondeur рассматривал функцию $f : M^n \to R^1$ без критических точек на римановым многообразии M^n, длина градиента которой постоянна на каждой поверхности уровня. Для таких функций он доказал, что слоение, порожденное поверхностями уровня такой функции является римановым (метрическим) слоением.

Определение 5. Функция $f : M \to R^1$ из класса $C^2\left(M, R^1\right)$ длина градиента, которой постоянна на компонентах связности множеств уровня, называется метрической функцией.

Определение 6. Слоение F на римановом многообразии M называется римановым, если каждая геодезическая, ортогональная в одной точке к слою слоения F, остаётся ортогональной к слоям F во всех своих точках.

Вторая глава диссертации, названная **«Геометрия слоеных многообразий»** посвящена исследованию геометрии слоеных многообразий, слоеный атлас которого порожден субмерсией. Доказаны, что слои, слоения порожденные римановыми субмерсиями, являются многообразиями постоянной Гауссовой кривизны, предел геодезических линий слоеного многообразия, является геодезической линии на предельном слое, а также невозможность изометрического погружения четырехмерного многообразия Sol пятимерное евклидово пространство.

Важным классом слоений является класс слоений порожденными субмерсиями. По теореме о ранге всякая субмерсия $f: M \to B$ порождает слоение F размерности $k = n - m$ на многообразии M, слоями которого являются подмногообразия $L_p = f^{-1}(p), p \in B$, где n, m размерности многообразий M, B соответственно и $n > m$.

Пусть $F-$ гладкое слоение размерности k на M. Обозначим через $L(p)-$ слой слоения F, проходящий через точку p, T_pL - касательное пространство слоя $L(p)$ в точке p, $H(p)-$ ортогональное дополнение T_pL в $T_pM, p \in M$. Возникают два подрасслоения (гладкие распределения) $TF = \{T_pL : p \in M\}$, $H = \{H(p) : p \in M\}$ касательного расслоения TM такие, что $TM = TF \oplus H$, где H является ортогональным дополнением TF. В этом случае каждое векторное поле $X \in V(M)$ можно представить в виде $X = X_v + X_h$, где X_v, X_h - ортогональные проекции X на TF, H соответственно.

Если $X \in V(F)$ (т.е. $X_h = 0$), то X назовем вертикальным полем. Если $X \in V(\mathrm{H})$ $(\mathrm{X}_v = 0)$, то X назовем горизонтальным полем. Из субмерсий особое можно выделить класс таких субмерсий называемые римановыми.

Определение 7. Субмерсия $f: M \to B$ называется римановой, если дифференциал отображения df сохраняет длину горизонтальных векторов

В первом параграфе исследуется секционные кривизны слоений, порожденной римановыми субмерсиями. Доказано, что если слоение порождено римановой субмерсией, тогда слои этого слоения являются многообразиями постоянной Гауссовой кривизны.

В работе[1] изучена геометрия поверхностей уровня функций, для которых $X\left(|gradf|^2\right) = 0$ для каждого вертикального векторного поля X.

Мы рассмотрим субмерсии $f: M \to B$, когда многообразие B является одномерным многообразием, а именно гладкую функцию $f: M \to R$. Если $Crit\{f\}$- множество критических точек функции f, то на многообразии $M \setminus Crit\{f\}$ возникают слоение F размерности $n-1$ (или коразмерности один), слоями которого являются поверхности уровня функции f.

Доказывается теорема, характеризующая геометрию слоения, порожденного римановой субмерсией. Поверхности уровня функций этого класса являются поверхностями постоянной Гауссовой кривизны.

Теорема 1. Пусть $M-$ полное риманово многообразие с постоянной кривизной и $f: M \to R^1$ риманова субмерсия. Тогда каждый слой слоения F

[1] Tondeur Ph. Foliations on Riemannian manifolds// Springer Verlag, – New York, – 1988.

порожденной римановой субмерсией (поверхность уровня функции f) является многообразием постоянной Гауссовой кривизны.

Второй параграф второй главы посвящен исследованию геометрии геодезических слоеных многообразий. В римановой геометрии важным является изучения свойств геодезические линий. В частности, известно, что если последовательность геодезических линий сходятся в одной точке, то существует подпоследовательность последовательности, которая сходится поточечно к некоторой геодезической линии в каждой точке.

Доказана следующая теорема, которая является обобщением классической теоремы о пределе геодезических линий на многообразия.

Теорема 2. Пусть M – гладкое полное риманово многообразие размерности n с гладким слоением размерности k, где $0<k<n$. Тогда

1) Каждый слой с индуцированной римановой метрикой является полным римановым многообразием.

2) Пусть $\gamma_m:(a,b)\to L_m$ - последовательность геодезических (относительно индуцированных римановых метрик) слоев L_m такая, что $\gamma_m(s_0)\to p$, $\dot{\gamma}_m(s_0)\to v$ при $m\to\infty$ для некоторого $s_0\in(a,b)$. Тогда последовательность γ_m поточечно сходится к геодезической $\gamma:(a,b)\to L(p)$ слоя $L(p)$, выходящая из точки p при $s=s_0$ в направлении вектора v.

В следующей теореме усиливается вторая часть теоремы 2.

Теорема 3. Пусть M – гладкое полное риманово многообразие размерности n с гладким слоением размерности k, где $0<k<n$.

Пусть $\gamma_m:R^1\to L_m$ – последовательность геодезических (относительно индуцированных римановых метрик) слоев L_m такая, что $\gamma_m(s_0)\to p$ при $m\to\infty$ для некоторого $s_0\in R^1$. Тогда существует подпоследовательность γ_{m_l} последовательности γ_m, которая поточечно сходится к некоторой геодезической $\gamma:R^1\to L(p)$ слоя $L(p)$, выходящая из точки p при $s=s_0$.

Изометрическое погружение риманового пространства в евклидово пространство или в другое риманово пространство является одним из способов построения подмногообразий этих пространств, обладающих новыми интересными геометрическими свойствами. Проблемы изометричных погружений и вложений многообразий в евклидовы и другие пространства являются одними из центральных проблем как в дифференциальной геометрии, так и в римановой геометрии, и изучаются в этих дисциплинах с самых разных точек зрения.

Теория изометрических погружений связана с трудными вопросами разрешимости нелинейных систем дифференциальных уравнений, а также с топологическими вопросами, в ней используются и наглядные геометрические идеи, наряду с привлечением широкого арсенала математических средств.

Третий параграф посвящен исследованию, проблему о погружении многообразий в евклидово пространство. Рассматривается вопрос о возможности погружения многообразий в евклидово пространство.

На четырёхмерном многообразии Sol^4 левоинвариантная метрика задается формулой

$$ds^2 = e^{-2t}(dx^2 + dy^2) + e^{4t}dz^2 + dt^2.$$

Доказана следующая

Теорема 4. Многообразия Sol^4 нельзя погрузить в пятимерное евклидово пространство.

Трехмерная группа Ли всех 2×2- матриц с вещественными элементами и определителем 1 обозначается через

$$SL_2R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2,R) \middle| \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1 \right\},$$

а $S\tilde{L}_2R$ обозначает её универсальную накрывающую. Известно, что $S\tilde{L}_2R$ тоже является группой Ли и допускает метрику, инвариантную относительно левого умножения.

Теперь исследуем вопрос о возможности изометрического погружения многообразия $S\tilde{L}_2R$ с левоинвариантной метрикой

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + (dx + ydt)^2}{y^2},$$

в четырехмерное евклидово пространство R^4.

Теорема 5. Трехмерное многообразие $S\tilde{L}_2R$ нельзя погрузить в четырехмерное евклидово пространство.

В третьей главе диссертации, названной **«Группа изометрий слоеных многообразий»** исследуется группа изометрий слоеных многообразий. В частности, вводятся понятия изометрии слоеного многообразия и на множестве всех изометрий слоеного многообразия введена слоеная компактно-открытая топология или F- компактно-открытая топология, доказаны, что множество всех изометрий слоеного многообразия является Хаусдорфовом пространством относительно F- компактно-открытой топологии, группа гомеоморфизмов гладкой связной многообразии конечной размерности является топологической группой относительно компактно-открытой топологии, подгруппа состоящей из всех изометрий слоеного многообразия тоже является топологической группой относительно этой топологии, если последовательность изометрий слоеного многообразия сходятся по одной точке каждого слоя слоения, тогда из неё можно выделить подпоследовательность сходящую к изометрию слоеного многообразия в F- компактно-открытой топологии.

В первом параграфе третьей главы вводится понятие изометрии слоеного многообразия и понятие слоеной компактно-открытой топологии или F- компактно-открытая топология в $G_F(M)$, которая зависит от слоения. Если размерность слоения совпадает с размерностью многообразия, то эта топология совпадает с компактно- открытой топологией, если коразмерность слоения совпадает с размерностью многообразия, то сходимость в этой топологии совпадает с поточечной сходимостью.

Пусть (M,F_1) и (N,F_2) слоеные многообразия со слоениями F_1,F_2 размерности k.

Определение 8. Если при некотором C^r- диффеоморфизме $\varphi: M\to N$ образ $\varphi(L_\alpha)$ любого слоя L_α слоения F_1 является слоем слоения F_2, то говорят, что пары (M,F_1) и (N,F_2) C^r- диффеоморфны и пишут $(M,F_1)\approx (N,F_2)$.

Отображение φ из (M,F_1) в (N,F_2) называется C^r - диффеоморфизмом, сохраняющим слоение и пишется в виде $\varphi:(M,F_1)\to(N,F_2)$.

В случае, когда $M=N$ и $F_1=F_2$, говорят о диффеоморфизме слоеного многообразия (M,F).

Определение 9. Диффеоморфизм $\varphi: M\to M$ слоеного многообразия называется изометрией слоеного многообразия (M,F), если сужение $\varphi: L_\alpha\to\varphi(L_\alpha)$ является изометрией.

Пусть $\{K_\lambda\}$ - семейство всех компактных множеств, где каждое K_λ принадлежит какому либо слою слоения F и пусть $\{U_\beta\}$ - семейство всех открытых множеств на M . Рассмотрим для каждой пары $K_\lambda\subset L_\alpha$ и любого U_β совокупность всех отображений $f\in G_F(M)$, для которых $f(K_\lambda)\subset U_\beta$. Эту совокупность отображений будем обозначать через

$$[K_\lambda,U_\beta]=\{f: M\to M \mid f(K_\lambda)\subset U_\beta\}.$$

Пусть σ- семество подмножеств $G_F(M)$, являющихся пересечениями конечного числа множеств вида $[K_\lambda,U_\beta]$. По известному критерию[1] в $G_F(M)$ существует топология, для которой семейство σ является базисом, причем эта топология единственна. Эту топологию будем называть слоеной компактно-открытой топологией или $F-$ компактно-открытой топологией.

Теорема 6. Множество $G_F(M)$ с F- компактно-открытой топологией является хаусдорфовым пространством со счетной базой.

Известно, что если многообразие компактно или совпадает с R^n, то группа диффеоморфизмов $Diff(M)$ гладкого многообразия M , является топологической группой в компактно-открытой топологии. Следующая теорема является обобщением этого результата для любого многообразия.

Теорема 7. Пусть M - гладкое связное многообразие конечной размерности. Тогда группа его гомеоморфизмов $Homeo(M)$ является топологической группой относительно компактно- открытой топологии. В

[1] Бакельман И.Я., Вернер А.А., Кантор Б.Е. Введение в дифференциальную геометрию «в целом». – М.: Наука, − 1973, – 440 С.

частности, подгруппы $Diff(M)$, $G_F(M)$ также являются топологическими группами в этой топологии.

Группа изометрий слоеного многообразия $G_F(M)$ в общем случае не является подгруппой группы изометрий многообразия $G(M)$, и наоборот группа изометрий многообразия $G(M)$ тоже не является подгруппой группы изометрий слоеного многообразия $G_F(M)$. Но конечно эти группы имеют непустое пересечение, т.е. $I \in G_F(M) \bigcap G(M) \neq \varnothing$. Следовательно, возникает вопрос о существовании отображений, которые входит в группу изометрий слоеного многообразия, но не является изометрией многообразия.

Нами доказано, что существует слоение, для которого существует элемент группы изометрий слоеного многообразия, не являющийся элементом группы изометрий.

Теорема 8. Существует $f: M \to B$ субмерсия, для которой группа изометрий $G_F(M)$ слоеного многообразия (M, F) содержит элементы, которые не являются элементами группы изометрий $G(M)$ риманова многообразия (M, g).

Следующий пример показывает, что такие субмерсии могут быть довольно простыми.

Рассмотрим на евклидовой плоскости $M = R^2$ с декартовыми координатами x, y слоение F, порожденное линиями уровня функции

$$f(x, y) = x^2 - y.$$

Мы построим изометрию слоеного многообразия $\varphi: M \to M$ по формуле

$$\varphi(x, y) = (x, y + \lambda(x, y)).$$

Если $\lambda -$ постоянное число, то это отображение является изометрией плоскости и изометрией слоеной плоскости. Если $\lambda(x, y) = -f(x, y)$, то отображение φ не является изометрией плоскости, но является изометрией слоеного многообразия.

Действительно, если (x, y) лежит на параболе $x^2 - y = c$, то точка $(x, y + \lambda(x, y))$ лежит на параболе $x^2 - y = 2c$. Это отображение сохраняет длину кривых на параболе.

Во втором параграфе третьей главы изучается геометрия группы изометрий слоеного многообразия в новой F- компактно-открытой топологии.

Для слоеных многообразий доказаны следующие леммы и теорема.

Лемма 1. Предположим, что $\{f_m\} \in G_F^r(M)$ - последовательность, которая поточечно сходится на множестве $A \subset L_\alpha$, где L_α - некоторый слой слоения F. Тогда $\{f_m\}$ также поточечно сходится на $\overline{A}$ (где $\overline{A}$ - замыкание множества A в L_α).

Лемма 2. Пусть A - множество точек p на слое L_α таких, что существует сходящаяся подпоследовательность $f_{m_l}(p)$ последовательности $f_m(p)$. Тогда если множество A непусто, то $A = L_\alpha$.

Вышеприведенные леммы позволяют доказать следующую теорему.

Теорема 9. Пусть M - полное гладкое многообразие размерности n с гладким слоением F размерности k, $f_m \in G_F^r(M), r \geq 0, m = 1,2,3,\ldots$. Предположим, что для каждого слоя L_α существует точка $o_\alpha \in L_\alpha$ такая, что последовательность $f_m(o_\alpha)$ сходится. Тогда существует подпоследовательность f_{m_l} последовательности f_m, сходящаяся в F-компактно- открытой топологии.

Теория слоений имеет широкие приложения в теории динамических систем, динамических полисистем и теории управления. Семейство орбит векторных полей образует разбиение фазового пространства на орбиты, которое называется сингулярным слоением.

Множество достижимости (множество управляемости) и инвариантные множества систем управления являются важными объектами в качественной теории оптимального управления. Инвариантные множества систем управления совпадают с орбитами семейства векторных полей, которые определяются правой частью системы управления.

Четвертая глава диссертации, названная **«Геометрия орбит векторных полей»** посвящена исследованию орбит векторных полей. Доказаны, компактность множества достижимости и непрерывность многозначного отображения «точка- множество достижимости» векторных полей специального вида, компактность замыкание множеств достижимости, и непрерывность многозначных отображений, ставящая каждому значению времени замыкание множества достижимости за время не более чем фиксированное время для векторных полей определенного класса, а также найдены условия устойчивости множества достижимости, для линейных систем.

В первом параграфе четвертой главы исследуется геометрия множества достижимости, семейства векторных полей вида

$$X_u(x) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} f_i(x)u^i \tag{1}$$

где $|u^i| \leq 1$ для всех $i = 1,2,\ldots,m, f_0(x), f_1(x),\ldots, f_m(x)$- гладкие вектор - функции, с ограничениями $|f_i(x)| \leq M_i$, для всех $x \in R^m, M_i$ - постоянные величины.

Векторным полям (1) соответствует систем управления следующего вида:

$$\dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} f_i(x)u^i(t). \tag{2}$$

Мы будем говорить, что точка x^* достижима из точки x_0 за время T, если существует измеримая вектор функция $u(t)=(u^1(t),u^2(t),...,u^m(t))$, такая, что задача Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t)=f_0(x)+\sum_{i=1}^{m}f_i(x)u^i(t) \tag{3}$$

с начальным условием $x(0)=x_0$ имеет решение определенное на $[0;T]$ причем $x(T)=x^*$, $\left|u^i\right|\le 1,\ \forall t\in[0;T]$.

Множество точек R^n, достижимых из x_0 за время T обозначим через $G_{x_0}(T)$. По определению получаем, что $x_0\in G_{x_0}(T)$ для всех T.

В этом параграфе доказаны компактность множества достижимости и непрерывная зависимость множества достижимости $G_{x_0}(T)$ от время T для системы (1).

Доказаны следующие теоремы

Теорема 10. Множество $G_{x_0}(T)$ является компактным множеством для всех $T\ge 0$.

Теорема 11. Отображение $T\to G_{x_0}(T)$ непрерывно в метрике Хаусдорфа в каждой точке $T\ge 0$.

Во втором параграфе четвертой главы исследуется структура множества достижимости.

Рассматривается система управления вида

$$\dot{x}=f(x,u),\ x\in R^n,\ u\in U\subset R^m, \tag{4}$$

где $U-$ компактное подмножество R^m. Предполагается, что при каждом $u\in U$ векторное поле $f(x,u)$ класса C^∞, а отображение f является непрерывным по совокупности переменных. Кроме того предполагается, что правая часть системы удовлетворяет условию

$$|f(x,u)|\le M|x|+N,\forall(x,u)\in R^n\times U, \tag{5}$$

где M и N - постоянные величины.

Изучение свойств множеств $G_\eta(\le T)$ и $G_\eta(T)$ являются важными вопросами в качественной теории оптимального управления.

Например, замкнутость (или же компактность) множества $G_\eta(\le T)$ является основным фактором в доказательстве теорем существования оптимального управления в том или ином смысле. В общем случае, конечно же, множества $G_\eta(\le T)$ и $G_\eta(T)$ не обязаны быть замкнутыми.

Имеет места следующая теорема.

Теорема 12. Множества $\overline{G}_\eta(\le T)$ и $\overline{G}_\eta(T)$ являются компактными.

Известно, что множество $K(R^n)$ компактных подмножеств R^n с расстоянием Хаусдорфа является метрическим пространством. При выполнении условия (5) верна

Теорема 13. Отображения $T \to \overline{G}_\eta(\leq T)$ и $T \to \overline{G}_\eta(T)$ являются непрерывными.

Теорема 14. Пусть для любого $T \geq 0$ множества $G_\eta(T)$ компактны. Тогда множества $G_\eta(\leq T)$ также компактны.

Следствие 1. Множество $G(\leq T)$ для системы (1) является компактным множеством.

Далее в этом параграфе рассматривается линейная система вида

$$\dot{x} = Ax + Bu,\ x \in R^n, u \in R^m, \tag{6}$$

где A- матрица размерности $n \times n$, $B-$матрица размерности $n \times m$. Допустимыми управлениями являются измеримые ограниченные функции $u:[0;T] \to R^m, 0 < T < +\infty$.

Цель управления - приведение системы в некоторое фиксированное (целевое) состояние $\eta \in R^n$.

Обозначим через V множество аналитических векторных полей, определенных на R^n. Известно, что множество V является алгеброй Ли, в которой произведением векторных полей X и Y служит их скобка Ли $[X,Y]$. Положим $X_u(x) = Ax + Bu$ и обозначим через D множество векторных полей $\left\{X_u : u \in R^m\right\}$, а через $A(D)$ минимального подалгебру Ли, содержащую D.

Орбита $L(x)$ системы (6), проходящая через точку x, определяется как множество всех точек y из R^n вида

$$y = X_l^{t_l}\left(X_{l-1}^{t_{l-1}}\left(...X_1^{t_1}(x)...\right)\right). \tag{7}$$

где $X_i \in D,$ $t_i -$ действительные числа, $i = 1,2,...,l,$ $t \to X^t(x) -$ интегральная кривая векторного поля $X \in D$, проходящая через точку x при $t = 0$.

Если в (7) $t_i -$ положительные числа, то множество точек y образует положительную орбиту. Если допустимые управления - кусочно-постоянные функции, то G_η является положительной орбитой и поэтому $G_\eta \subset L(\eta)$ для всех $\eta \in R^n$.

Если $u = u(t) -$ ограниченная измеримая функция, $x(t)$- соответствующая траектория системы (6) с начальным условием $x(0) = x_0$, то как показана в работе[1], векторное поле $f(x(t),u(t))$ почти всюду касается многообразия $L(x_0)$, поэтому соответствующая траектория $x(t)$, исходящая из точки $x_0 \in L(\eta)$, лежит в $L(\eta)$. Следовательно, для измеримых допустимых управлений множество достижимости G_η также является

[1] Аграчев А.А., Сачков Ю.Л. Геометрическая теория управления. – М.: физматлит, 2005. – 392 с.

подмножеством $L(\eta)$. Ниже показано, что для системы (6) G_η совпадает с $L(\eta)$.

Пусть $A_x(D)=\{X(x): X\in A(D)\}$ для всех $x\in R^n$. Тогда, в силу того, что $A(D)$ - алгебра Ли, множество векторов $A_x(D)$ является линейным подпространством пространства векторов в точке x. В частности, $X_u(x)\in A_x(D)$ при каждом $u\in R^m$ и для всех $x\in R^n$. Ясно, что $0\le \dim A_x D\le n$ для всех $x\in R^n$.

В следующей теореме получены достаточные условия, при выполнении которых каждая орбита является плоскостью.

Теорема 15. Пусть $\dim A_x(D)=k$ для всех $x\in R^n$, где $0<k<n$. Тогда для всех $\eta\in R^n$ множества G_η являются $k-$ мерной плоскостью.

Известно, что множество управляемости G_η системы (6) является областью тогда и только тогда, когда

$$rank\left(B, AB, ..., A^{n-1}B\right)=n.$$

Используя этот факт из теоремы - 15 получим следующее:

Следствие 2. Имеет место следующее неравенство

$$rank\left(B, AB, ..., A^{n-1}B\right)\le \dim A_x(D)$$

для всех $x\in R^n$.

Теорема 16. Пусть ранг матрицы $\left(B, AB, ..., A^{n-1}B\right)$ равен $n-1$. Тогда либо все орбиты (множества достижимости) являются $(n-1)$ - мерными плоскостями, либо фазовое пространство является объединением трех орбит, две из которых n- мерны, одна орбита, проходящая через начало координат, является $n-1$- мерной плоскостью.

В качественной теории управления множество управляемости (или множество достижимости) системы управления на гладком многообразии в классе кусочно-постоянных управлений совпадает с отрицательной (положительной) орбитой семейства векторных полей, которое определяется системой управления однозначно.

P. Stefan[1] ввел понятие сингулярное слоение, которое является обобщением понятия слоения, и показал, что орбиты являются слоями некоторого сингулярного слоения. В случае, когда все орбиты имеют одинаковую размерность, разбиение M на орбиты является слоением, что позволяет привлечь методы теории слоений для изучения свойств орбит и множества управляемости гладких систем.

В третьем параграфе четвертой главы рассматривается вопрос о непрерывной зависимости множества управляемости от целевой точки, для линейных систем управления. Непрерывность многозначного отображения

---

[1] Stefan P. Accessible sets, orbits and foliations with singularities// Bull. of AMS, – 1974. – №6. – V.80.

$\eta \to G_\eta$ играет важную роль при исследовании задач стабильности вполне управляемых в теории управления.

В частности, в этом параграфе доказано, что если слоение, порожденное орбитами линейной системы, регулярно, то множество управляемости непрерывно зависит от целевой точки.

Определение 10. Отображение $\eta \to G_\eta$ называется полунепрерывным снизу в точке η_0, если для каждого $\varepsilon > 0$, и для каждого $R > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $\rho(\eta, \eta_0) < \delta$ то имеет место

$$d\left(\bar{G}_{\eta_0} \cap B_R(\eta_0), \bar{G}_\eta \cap B_R(\eta_0)\right) < \varepsilon,$$

где $\bar{G}_\eta$ - замыкание множества G_η в $R^n, B_R(\eta_0)-$замкнутый шар радиуса R с центром в точке η_0.

Определение 11. Отображение $\eta \to G_\eta$ называется полу-непрерывным сверху в точке η_0, если для каждого $\varepsilon > 0$ и для каждого $R > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $\rho(\eta, \eta_0) < \delta$, то имеет место

$$d\left(\bar{G}_\eta \cap B_R(\eta_0), \bar{G}_{\eta_0} \cap B_R(\eta_0)\right) < \varepsilon.$$

Определение 12. Отображение $\eta \to G_\eta$ называется непрерывным в точке η_0, если оно полунепрерывно снизу и сверху в точке η_0.

Лемма 3. Отображение $\eta \to G_\eta$ полунепрерывно снизу в каждой точке $\eta \in R^n$.

Получено достаточное условие полунепрерывности сверху вышеуказанного отображения.

Теорема 17. Пусть $\dim A_x(D) = k$ для всех $x \in R^n$, где $A_x(D) = \{X(x) : x \in A(D)\}, 0 < k < n$. Тогда отображение $\eta \to G_\eta$ непрерывно в каждой точке пространства R^n.

В самом деле, эта теорема показывает, что слоение порожденное орбитами является $k-$ мерным слоением, множества управляемости являются слоями этого слоения. Таким образом, многозначное отображение «точка - слой» $\eta \to G_\eta$ является непрерывным отображением.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации исследуются группы изометрий слоеных римановых многообразий. Для решения поставленных задач изучены топологические и геометрические свойства слоеных многообразий, исследована геометрия римановых субмерсий. Введено новое понятие, $F-$ компактно – открытой топологии, которая зависит от слоения. Исследованы группы изометрий слоеных многообразий в компактно-открытой топологии и в $F-$ компактно-открытой топологии.

Основные результаты исследования состоят в следующем.

1) установлено, что группа гомеоморфизмов любого многообразия является топологической группой в компактно-открытой топологии;

2) доказано, что группа изометрий слоеного многообразия является топологической группой в компактно-открытой топологии;

3) установлено если последовательность изометрий слоеных многообразий сходятся по одной точке на каждом слое, то из этой последовательности можно извлечь сходящую подпоследовательность к изометрию слоеного многообразия в $F-$ компактно-открытой топологии;

4) доказано, что риманова субмерсия порождает слоеное многообразие постоянной Гауссовой кривизны;

5) установлено предел геодезических линий слоеного многообразия, является геодезической линией на предельном слое слоения;

6) показано, что четырехмерное многообразия Sol^4 нельзя погрузить в пятимерное евклидово пространство;

7) доказано существование слоения, для которого существует элемент группы изометрий слоеного многообразия, не являющийся элементом группы изометрий;

8) доказано, что множества достижимости системы векторных полей определенного класса является компактным, и оно непрерывно зависит от времени;

9) найдено достаточное условие для линейных систем управления, при выполнении которого каждое множество достижимости (множество управляемости) является плоскостью фиксированной размерности.

Автор приносит свою глубокую признательность научному консультанту профессору Нарманову Абдигаппару Якубовичу за постановку проблем, ценные советы и полезные консультации в обсуждении и поддержку.

SCIENTIFIC COUNCIL 14.07.2016.FM.01.01 ON AWARD OF SCIENTIFIC DEGREE OF DOCTOR OF SCIENCES AT NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

SHARIPOV ANVARJON SOLIYEVICH

THE GROUP OF ISOMETRIES OF FOLIATED MANIFOLDS

01.01.04 – Geometry and topology
(Physical and Mathematical Sciences)

ABSTRACT OF DOCTORAL DISSERTATION

Tashkent – 2016

The subject of doctoral dissertation is registered in the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan with number № 30.09.2014/B2014.5.FM132.

Doctoral dissertation is carried out at National University of Uzbekistan.

Abstract of dissertation in three languages (Uzbek, Russian and English) is placed on web page of Scientific Council (http://ik-fizmat.nuu.uz) and information-educational portal «ZIYONET» (www.ziyonet.uz)

Scientific adviser:	**Narmanov Abdigappar Yakubovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor
Official opponents:	**Vakhtang Lomadze** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor (Tbilisi state university, Georgia)
	Beshimov Ruzinazar Bebutovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences
	Rakhimov Abdugafur Abdumadjidovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor
Leading organization:	**Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «Udmurt State University»** (Russian Federation).

Defense will take place «____» _____________2016 at ____ at the meeting of Scientific Council number 14.07.2016.FM.01.01 at National University of Uzbekistan (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar area, University str. 4, Ph.: (99871) 227-12-24, fax: (99871) 246-53-21, (99871) 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Doctoral dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered №______) (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar area, University str. 4, Ph.: (99871) 246-02-24).

Abstract of dissertation sent out on «____» __________ 2016 year.
(Mailing report №______ on «____» __________ 2016 year).

A.A. Abdushukurov
Chairman of Scientific Council on award of scientific degree of Doctor of Sciences D.F.M.S., professor

G.I. Botirov
Scientific Secretary of Scientific Council on award of scientific degree of Doctor of Sciences C.F.M.S.

R.B. Beshimov
Vice-chairman of Scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degree of Doctor of Sciences, D.F.M.S.

INTRODUCTION (abstract of doctoral dissertation)

Actuality and demand of the theme of dissertation. Due to the rapid development of scientific and technological progress in the world, required the development of new methods for fundamental research and implementation of the results into practice. According to the demand of practice on the intersection of differential equations and differential topology French scientists established fundamental foundations of the theory of foliated manifolds. It is proved the stability of compact foliations and that limit sets of leaves are invariant sets. Scientists of USA and Russia investigated qualitative theory of foliations, in which geometric and topological properties of foliated manifolds are investigated. Moreover, an application of theory of foliations to practice is one of the important problems of geometry.

After the declaring independence of our country attention to the actual directions in the field of natural and exact sciences has been significantly increased, in particular, especial attention is given to applications of methods and results of this theory to the theory of optimal control and dynamical systems. In this field are obtained sufficient condition of stability for controllable systems, proved non-negativity of sectional curvatures of leaves of foliations generated by Riemannian submersions in the spaces of non-negative curvature, besides are obtained valuable results on investigating geometry of vector fields.

Nowadays, researches in the world in the area of geometry of orbits of vector fields on manifold related to the theory of dynamical polysystems and optimal control and very important for them. In this field, the essential task is a wide application of targeted researches, in particular, applications of results obtained on foliations, generated by Riemannian submersions, to determine the structure of phase spaces of dynamical polisystem: application of methods of the theory of foliations to the theory of dynamical systems, optimal control and to various problems in other fields; investigation of geometry of foliations generated by Riemannian submersions; investigation of geometry of Riemannian foliations on surfaces of non-negative sectional curvature. Scientific researches on above-mentioned directions justify the relevance of the theme of current dissertation.

Research in this thesis to some extent are the challenges identified in the Republic of Uzbekistan Presidential Decree number PP-436 of 7 August 2006 «On measures to improve the coordination and management of the development of science and technology», as well as PP-2204 from July 8, 2014 «On measures to further optimize the structure of the Academy of sciences of the Republic of Uzbekistan and to strengthen the integration of academic science and higher education of the Republic» and other normative-legal acts of fundamental sciences.

Connection of research to priority directions of development of Science and Technologies of the Republic. This thesis was performed in accordance with the priority direction of development of Science and Technologies of the Republic of Uzbekistan IV. «Mathematics, Mechanics and Informatics».

Review of foreign scientific research on the theme of the dissertation[1].

Researchs on the theory of foliations, qualitative theory of foliations, which mainly investigated the topological and geometrical properties, local and global stability of compact leaf of foliation, generalization of the theorems of stability for non-compact leaves, singular Riemannian foliations, geometry of geodetic and Riemannian foliations, topology of foliations of codimesion one are conducted in major research centers and universities of the world, including: the University of Strasbourg (France), the University of Grenoble (France), University of Paris (France), the University of Montpellier (France), the University of Illinois (USA), the University of California (USA), the University of Indiana (USA), Princeton University (USA), the University of Warwick (UK), the University of London (UK), the University of Tokyo (Japan), Tohoku University (Japan), Kyoto University (Japan), Moscow state University (Russia).

As a result of studies on the qualitative theory of foliations, which examines topological and geometrical properties of the leaves, and the properties of singular Riemannian foliation in the world, were solved a number of problems, in particular, it is received the following number of results: theorems on the local and global stability of compact leaf of foliation as well as It is showed that a family of orbits of the Killing vector fields generate singular Riemannian foliation (University of Strasbourg, University of Grenoble, the University of Paris, University of Montpellier, France). It is proved, if the foliation generated by leaves of submersion, notion of Ehresmann connection is equivalent to the well-known notion of Ehresmann connection for submersion, and showed total geodesic and Riemannian foliations of complete manifolds have Ehresmann connection (University of Illinois, University of California, University of Indiana, Princeton University, USA). It is proved that a orbit of a family of smooth vector fields is a smooth manifold and the partition of manifold to the of the orbit produces a singular foliation (University of Warwick, University of London, UK). It is proved the local stability of noncompact proper leaf of codimension one foliation on a three-dimensional manifold, it is showed the relationship between the partially ordered set of leaves and topology of leaves (Tokyo University, Tohoku University, Kyoto University, Japan). It is proved that every foliation of codimension one on a three-dimensional sphere has a compact leaf (Moscow University, Russia).

At the global level, it carried out series of scientific-research works in priority directions in geometry and topology of foliated manifolds, namely: the study of geometry of Riemannian foliations on surfaces of nonnegative sectional curvature, the study of the structure of the isometry group of foliated manifold, geometric characteristics of the foliation generated by submersions on a Riemannian manifold, the properties of geodesic lines of foliated manifold, the use of geometry

---

[1] Review of foreign scientific research on the topic of the dissertation: Actualite Sci. Indust .; C.R.Acad. Sci. Paris; https://www.math.uni-muenster.de/u; Proc. Fifth Canad. Math. Congress; Ann. of Math;. Successes of Mathematical Sciences, www.mathnet.ru/umn; Mathematical Notes, www.mathnet.ru/mz; www.ams.org/bull; Progress in Mathematics; https://projecteuclid.org/euclid.ijm; Ann. Math .; Topology; http://link.springer.com; Journal of mathematical Physics, analysis, geometry; http://www.foliations.org, also used other sources.

of foliation theory in dynamical systems, and optimal control, the study of geometry of sets of attainability (controllability), as well as study of the continuous dependence of the attainable set from as multi valued map.

The degree of scrutiny of the problem. In the formation and development of the theory of foliations great contribution made by the French mathematicians such as C. Ehresmann, G. Reeb, H. Lawson, P. Molino, A. Haefliger, R. Langevin, H. Rosenberg, G. Lamoureux. The main works of G. Reeb, one of the founders of the theory of foliations, dedicated to problems of the qualitative theory of foliations. G. Reeb proved that if a compact leaf has a finite fundamental group, then there is a neighborhood of this leaf, which consists of leaves, diffeomorphic to the compact leaf. In the works C. Ehresmann shows that the Riemannian and total geodesic foliations on complete Riemannian manifolds have Ehresmann connection.

The research on group of isometries of a foliated manifold is a new problem in the theory of foliated manifolds. The notion of an isometry of a foliated manifold was introduced by professor A.Ya. Narmanov. He proved for a certain class of foliations there are isometries of foliated manifold, which is not an isometry of the manifold. The group of isometries of foliated manifold is a subgroup of the group of diffeomorphisms of a foliated manifold. The group of diffeomorphisms foliated manifold studied in the works of S.H. Aranson. He found out necessary and sufficient condition for the topological conjugacy of diffeomorphisms. For compact manifolds various subgroups and diffeomorphism groups are studied by P.L. Antonelli, D. Burghelea, P.J. Kahn.

In modern geometry, one of the main objectives is to study the limit of geodesic lines. A powerful weapon of Riemannian geometry is the theorem on the limit of the geodesic lines of a Riemannian manifold. In the case of a foliated manifold, this task is complicated by the fact that a geodesic line of foliated manifold lies on the leaf and it is a geodesic with respect to the Riemannian metric of the leaf. In the works of S. Helgason it is proved remarkable theorems on the geodesic lines and on groups of isometries of a Riemannian manifold. In particular, he proved that the group of isometries of a Riemannian manifold is a topological group in the compact-open topology. He also proved that if given a sequence of isometries which converge at one point, then there exists a subsequence which converges to some isometry of the manifold in the compact-open topology.

Singular Riemannian foliation were introduced P. Molino, geometric and topological properties of singular Riemannian foliations also studied in papers of A.Ya. Narmanov, N.I. Zhukova and other authors. P. Molino showed that if a singular foliation is Riemannian, then the Riemannian metric of manifold generates transversal metric on the normal bundle of each leaf. For complete manifolds A.Ya. Narmanov proved that this condition is necessary and sufficient for a singular foliation to be Riemannian.

Although it remains an open question as to whether the group of diffeomorphisms of non-compact manifolds topological group, and whether the group of isometries of the foliation of a topological group with respect to the compact-open topology. In addition, it left open the question of the limit of the geodesic lines foliated manifold, as well as the question of the curvature of the foliation generated by the Riemannian submersion.

Connection of the theme of the dissertation with the research works of the higher education institution, where the dissertation is carried out.

The dissertation research is conducted within the framework of research grants from the National University of Uzbekistan 1.F.1.1.9 «Functional and topological properties of extreme controls, areas of an attainability and stability of totally control systems» (2003- 2007), OT-F1-096 «Creation and development geometric and topological methods for solving problems of the theory of dynamical polysystem» (2007- 2011), OTF-01-04 «Geometry and topology foliated manifolds» (2012-2016).

The aims of the research are the investigations of the geometry and topology of the foliated manifolds, the structure of the group of isometries of foliated manifolds and the geometry of foliated manifolds of constant sectional curvature, and also application of the taken results for the investigations of the attainability set and establishing of the continuous dependence on the initial point of the attainability set.

Research problems of this work are following:

establishing the basic properties of geodesic lines foliated manifold;

generalization of the classical result of the group of homeomorphisms of a compact manifold for non-compact manifolds;

study the geometry of the group of isometries of a foliated manifold in a new the F -compact-open topology;

finding conditions under which the leaves of foliated manifold are manifolds of constant Gaussian curvature;

investigation of the structure of attainability set for systems of the vector fields given in the Riemannian manifolds.

The objects of the research work are the foliated Riemannian manifolds, geodesics of foliated manifolds, the orbit of the family of smooth vector fields, the attainability set and the domains of control of dynamical systems, foliations generated by the Riemannian submersion.

The subject of the research work are the study of the isometry group of a foliated manifold, geometry and topology of the foliated manifold, generated submersions, the geometry of the orbits of vector fields and singular foliations.

Methods of research work. The thesis used methods of local and global differential geometry, methods of the theory of foliations and geometric and topological methods of the theory of dynamical systems.

Scientific novelty of the research work is as follows:

It is proved that any group of homeomorphisms of a smooth manifold is a topological group in the compact-open topology;

It is proved that isometry group foliated manifold is a topological group in the compact-open topology;

it is showed that if a sequence of isometries foliated manifolds converge on at the point on each leaf, then this sequence can be extracted to a convergent subsequence of isometries of foliated manifold in the compact-open topology;

it is proved that if the foliation generated by Riemannian submersion, then leaves of foliation are manifolds of constant Gaussian curvature;

it is showed that the limit of the geodesic lines of foliated manifold is a geodesic line on the limit leaf of foliation;

It is proved the existence of the foliation, for which there is a isometry of foliated manifold which is non-isomety of the manifold;

It is proved the compactness of the attainability set, and the continuity of the multi valued mapping «the point - the attainability set» for a system of vector fields of a special form;

it is showed compactness of the closure of the attainable set for the time does not exceed a fixed time, and the continuous dependence of the attainable set from time for a certain class of vector fields;

it is found conditions in order to attainable set (the set of controllability) coincided with the fixed dimension planes for linear systems.

Practical results of the research are as possibilities for applications, to determine the curvature of the phase space of dynamical systems on manifolds of negative curvature, as well as for investigation of geometry of foliations generated by the set reachability of control system**.**

The reliability of the research results. In the study of geometry and topology of foliated manifolds, as well as in the study of geometry of orbit of vector fields the accuracy is justified by the theory and methods of foliation theory, the Riemannian geometry and differential topology

The scientific and practical significance of the research results. The scientific value of the research results is the ability to use the compactness of the attainability and the continuity of the multivalued mapping to determine the curvature of the phase space of dynamical systems.

The practical significance of the research lies in the fact that the extension of the class of the objects to determine the structure of the reachable set (the set of controllability) for control systems.

Implementation of the research results. The results obtained in the thesis were used in the following research projects:

the results obtained on the compactness of the attainability set of vector fields and on the continuity of the multivalued mapping, have been used in the scientific project 12-01-00195 «The tasks of positional control deterministic and stochastic dynamic processes and differential games with many participants» for basic research of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation, the application of these research results have allowed to describe the structure of the trajectories and the phase space of dynamical systems (Certificate № 7873-8965 / 20 Udmurt state University on August 25, 2016). The application of scientific result was the decisive factor to determine the curvature of the phase space of dynamical systems and the study of the geometry of attainability sets of control systems;

the results obtained in the thesis show that if the foliation generated by Riemannian submersion on a complete Riemannian manifold with constant Gaussian curvature leaves of this foliation are manifolds of constant Gaussian curvature, these results were used in the research project in the framework of research on the state grant research 1.3.1.3 «Methods of creation, research and identification of mathematical models of the Earth», the application of these results allowed to explore the possibility of the structure of the phase space of dynamical systems (Reference number 15301 / 12-2711 Institute of Computational mathematics and Mathematical Geophysics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, of 24 August 2016). The application of these research results contributed to the definition of the structure of the phase space of dynamical systems on manifolds of negative curvature.

Approbation of the research results. The main results of the study were discussed at scientific conferences, including: «The school-seminar on geometry» (Abrau-Durso, Russia, 2006), «New theorems young mathematicians» (Namangan, 2006, 2009), «New directions in the theory of dynamical systems and ill-posed problems» (Samarkand, 2007), «Modern problems of mathematics, mechanics and informatics» (Tashkent, 2008), «Foliations, Dynamical systems and Singularity theory» (Samarkand, 2009), «Metric geometry of surfaces and polyhedra» ' (Moscow, Russia, 2010), «Locally analytical geometry» (Lahore, Pakistan, 2012), «Al-Khorezmiy 2012» (Tashkent, 2012), «Actual problems of geometry and its applications» (Tashkent, 2014), «Limit theorems of probability theory and their applications» (Namangan, 2015), «The control theory and mathematical modeling» (Izhevsk, Russia, 2015), «Mathematical physics and related problems of modern analysis» (Bukhara, 2015), «Modern problems of analysis» (Karshi, 2016), «The problem of modern topology and its applications» (Tashkent, 2016), speeches and reports passed wide approbation. Results of the study were discussed on scientific seminars on the faculty of Mathematics at the National University of Uzbekistan «Modern problems of geometry and topology» (2000-2016), «Functional analysis and its applications» (2014-2015), «Modern problems of complex analysis» (2015), on scientific seminar «Operator algebras and their applications» of the Institute of Mathematics at the National University of Uzbekistan (2015), on scientific seminar of chair «Higher mathematics» Namangan engineering-pedagogical institute (2016).

Publication of the research results. On the subject of the dissertation 43 research papers published, 16 of them are included in the list of scientific publications, proposed the Higher Attestation Commission of the Republic of Uzbekistan for Protection of doctoral theses, including 6 of them were published in foreign journals and 10 in national scientific journals.

The structure and volume of the dissertation. The dissertation consists of the introduction, four chapters, conclusion and bibliography. The total volume of the dissertation is 161 pages.

MAIN CONTENT OF THE DISSERTATION

In the introduction the actuality and demand of the theme of dissertation, connection of the research to priority directions of development of Science and Technologies of the Republic is stated, review of foreign scientific research on the theme of the dissertation and the degree of scrutiny of the problem are provided, the aim and problems are formulated, the object and the subject of research are described, scientific novelty and practical results of reseach are staded, the theoretical and practical significance of obtained results is revealed, the implementation of research results in practice, the list of published works and the dissertation structure are given.

The first chapter of the dissertation, entitled «**Understanding and supporting facts»** is auxiliary and is dedicated to the presentation of basic definitions and supporting evidence on this dissertation. It consists of three sections.

In the first paragraph of the first chapter in short form it is given elements of theory of smooth manifolds, the necessary definitions and supporting evidence relating to the smooth manifolds used in the thesis, examples of smooth manifolds, submanifolds are given.

In the second section briefly described the theory of vector fields on a smooth manifold, and basic properties of the orbits of vector fields. All notions are equipped with examples.

The third section is devoted to the basic concepts and auxiliary facts of the theory of foliations. It provides definitions and results of studies on the theory of foliations.

Let M be a smooth manifold of dimension n, $A-$ the maximum atlas defining on M structure of a smooth manifold of a C^r class, where $r \geq 0$. The manifold is also C^s-manifold, if $0 \leq s \leq r$. System of local curvilinear coordinates on C^s-manifold we will designate through A^s.

Let k be an integer, $0 \leq k \leq n$.

Definition 1. Let $F = \{L_\alpha; \alpha \in B\}$ be a family of arcwise connected subsets L_α of manifold M. We say that F is a k- dimensional C^r foliation of M if F satisfies the following.

(F_1): $\bigcup\limits_{\alpha \in B} L_\alpha = M$;

(F_2): $L_\alpha \cap L_\beta = \varnothing$ for $\alpha, \beta \in B$ with $\alpha \neq \beta$;

(F_3): for any a point $p \in M$, there exists a chart $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in A^{(s)}$ about p such that for L_α with $U_\lambda \cap L_\alpha \neq \varnothing$, $\alpha \in B$ each (arcwise) connected components of $\varphi_\lambda(U_\lambda \cap L_\alpha)$ is of the form

$$\left\{\left(x^1, x^2, ..., x^n\right) \in \varphi_\lambda\left(U_\lambda\right) : x^{k+1} = c^{k+1}, x^{k+2} = c^{k+2}, ..., x^n = c^n\right\},$$

where $c^{k+1}, c^{k+2}, ..., c^{n}$ are constants determined by the (arcwise) connected component.

We call L_{α} a leaf of the foliation F. A k-dimensional C^{s} foliation is also referred as a C^{s} codimension $n-k$ foliation or a C^{s} foliation of codimension $n-k$. This is a more conventional term and so we shall call F a C^{s} codimension q foliation, where $n-k=q$. By the conditions (F_1) and (F_2), M is covered by pairwise disjoint leaves, and by (F_3) the leaves are locally arranged as parallel planes. A chart $(U_{\lambda}, \varphi_{\lambda}) \in A^{(s)}$ which satisfies (F_3) is called a foliated chart or foliated neighborhood. The set of all foliated charts is called a foliated atlas and denoted by A_F^s.

A manifold M coupled with a foliation is called foliated manifold and often denoted by (M, F). The neighbourhood U in definition is called as the foliated neighbourhood.

One of important classes of foliations is the class of foliations, generated by submersions.

Definition 2. Let $f: M \to B$ be a differentiable map of maximal rank, where M, B a smooth manifolds of dimentions n, m respectively, $n > m$. Such maps are called submersions.

From the geometrical point of view, the important classes of foliation are totally geodesic and Riemannian (metric) foliation.

Definition 3. The submanifold N of Riemannian manifold M is called totally geodesic if each geodesic lines of M is tangent to N remains on this N.

Definition 4. The foliation *F* on Riemannian manifold *M* is called totally geodesic if each leaf of foliation *F* is a totally geodesic submanifold, i.e every geodesic is tangent to a leaf foliation *F* at one point, remains on this leaf.

Important class foliation are codimensions one foliation, generated by level surfaces of differentiable functions without critical points. American professor Ph. Tondeur considered function $f: M^n \to R^1$ without critical points on Riemannian manifold M^n for which length of a gradient is constant on each level surface. For such functions he has proven that foliation generated by level surfaces of such function, is a Riemannian (metric) foliation.

Definition 5. Function $f: M \to R^1$ of the class $C^2(M, R^1)$ for which length of a gradient is constant on connection components of level sets is called a metric function.

Definition 6. Foliation *F* on a Riemannian manifold *M* is called Riemannian if each geodesic, orthogonal at some point to a leaf of foliation *F*, remains orthogonal at all points to leaves of *F*.

The second chapter, entitled «**Geometry of foliated manifolds**» is devoted to the study of the geometry of foliated manifold, foliated atlas of which is generated by submersion. We prove that the leaves of the foliation generated by the Riemannian submersions are manifolds of constant Gaussian curvature, the limit of the geodesic lines foliated manifold is a geodesic line on the limit leaf, and the impossibility of an isometric immersion of four-dimensional manifold Sol into five- dimensional Euclidean space.

An important class of foliations is a foliation generated by submersions. By the theorem on the rank any submersion $f: M \to B$ generates a foliation F of dimension $k = n - m$ on a manifold M, leaves of which are submanifolds $L_p = f^{-1}(p), p \in B$, where n, m are dimensions of manifolds M and B, respectively.

Let F be a smooth foliation of dimension k on M. Denote by $L(p)$ a leaf of the foliation F passing through the point p, by T_pL tangent space of the leaf $L(p)$ at a point p, by $H(p)$ orthogonal complement of T_pL in $T_pM, p \in M$. There are two subfibrations (smooth distribution) $TF = \{T_pL : p \in M\}$, $H = \{H(p) : p \in M\}$ of tangent fibration TM such that $TM = TF \oplus H$, where H is the orthogonal complement of TF. In this case each vector field $X \in V(M)$ can be represented in the form $X = X_v + X_h$, where X_v, X_h are orthogonal projections of X onto TF and H, respectively.

If $X \in V(F)$ (i.e $X_h = 0$), then X is called a vertical field. If $X \in V(\mathrm{H})$ $(\mathrm{X}_v = 0)$, then X is called a horizontal field. From submersions one can choose the class of submersions called Riemannian.

Definition 7. The submersion $f: M \to B$ is called the Riemannian submersions if the differential df of mapping $f: M \to B$ preserves the length of horizontal vectors.

In the first section we investigate the sectional curvature foliations generated by submersions. It is proved that if the foliation generated by Riemannian submersion then leaves of this foliation are manifolds of constant Gaussian curvature.

In the paper[1] studied the geometry of the surface level of functions, for which it holds $X\left(|gradf|^2\right) = 0$ for each vertical vector field.

We consider a submersion $f: M \to B$ when B is one-dimensional manifold, namely a smooth function $f: M \to R$. If $Crit\{f\}$ is the set of critical points of function f, then on a manifold $M \setminus Crit\{f\}$ there exists a foliation of dimension $n-1$ (or codimension one), leaves of which are level surfaces of the function f.

We prove a theorem which characterizes the geometry of the foliation generated by Riemannian submersion. Level surfaces of functions of this class are surfaces of constant Gaussian curvature.

Theorem 1. Let M be a complete Riemannian manifold with constant curvature and $f: M \to B$ Riemannian submersion. Then each leaf of the foliation F is generated by Riemannian submersion (level surface of function f) is a manifold of constant Gaussian curvature.

[1] Tondeur Ph. Foliations on Riemannian manifolds// Springer Verlag, – New York, – 1988.

The second paragraph of the second chapter is devoted to the study of the geometry of the geodesic lines of foliated manifold. In Riemannian geometry it is important to study the properties of geodesic lines. In particular, it is known that if the sequence of geodesic lines converge at one point, there is a subsequence that converges pointwise to a geodesic line at each point.

We prove the following theorem, which is a generalization of the classical theorem on the limit of the geodesic lines on manifolds.

Theorem 2. Suppose that M is a smooth complete Riemannian manifold of dimension n with a smooth foliation of dimension k, where $0<k<n$. Then

1) Each leaf with the induced Riemannian metric is a complete Riemannian manifold.

2) Let $\gamma_m:(a,b)\to L_m$ be a geodetic sequence (with respect to the induced Riemannian metrics) of leaves L_m such that $\gamma_m(s_0)\to p$, $\dot{\gamma}_m(s_0)\to v$, $m\to\infty$ for some $s_0\in(a,b)$. Then the sequence γ_m converges pointwise to geodetic $\gamma:(a,b)\to L(p)$ of the leaf $L(p)$ starting from the point p when $s=s_0$ in the direction of the vector v.

The following theorem is amplified second part of theorem 2.

Theorem 3. Let M be a complete smooth Riemannian manifold of dimension n with a smooth foliation of dimension k, where $0<k<n$.

Let $\gamma_m:R^1\to L_m$ be a sequence of geodesies (relative to the induced Riemannian metrics) leaves L_m such that $\gamma_m(s_0)\to p$ when $m\to\infty$ for some $s_0\in R^1$. Then there exists a subsequence γ_{m_l} of the sequence γ_m, which converges pointwise to some geodesic $\gamma:R^1\to L(p)$ of the leaf $L(p)$, starting from the point p at $s=s_0$.

Isometric immersions of Riemannian spaces into Euclidean space or to another Riemannian space is one of the ways to build submanifolds having new interesting geometric properties. Problems of isometric immersions and embeddings of manifolds into Euclidean space, and the other is one of the central problems in differential geometry and the Riemannian geometry and studied in these disciplines from many different points of view.

The theory of isometric immersions linked to difficult questions of solvability of nonlinear systems of differential equations, as well as topological questions, in this theory it is used and intuitive geometric ideas. along with a wide arsenal of matematic means.

The third section is devoted to the study the problem of the immersion of manifolds into Euclidean space.

On the four-dimensional manifold Sol^4 the left-invariant metric is given by formula

$$ds^2=e^{-2t}(dx^2+dy^2)+e^{4t}dz^2+dt^2.$$

We prove the following

Theorem 4. The manifold Sol^4 can not be immersed into five-dimensional Euclidean space.

The three-dimensional Lie group of all 2×2 - matrixes with real elements and a determinant 1 is denoted through

$$SL_2R=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in GL(2,R)\middle|\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=1\right\},$$

and $S\tilde{L}_2R$ denotes it's universal covering. It is known that $S\tilde{L}_2R$ is a Lie group too, and admits a metric that is invariant under left multiplication.

Now we investigate a question of the possibility of an isometric immersion of the manifold $S\tilde{L}_2R$ with a left-invariant metric

$$ds^2 = \frac{dx^2+dy^2+(dx+ydt)^2}{y^2},$$

into the four-dimensional Euclidean space.

Theorem 5. The three-dimensional manifold $S\tilde{L}_2R$ can not be immersed in four-dimensional Euclidean space.

In the third chapter of the thesis, entitled **«The group of isometries of foliated manifolds»** explores the isometry group of foliated manifolds. In particular, it is introduced the notions of an isometry of a foliated manifold, and the topology on the set of all isometries foliated manifold which is called foliated compact-open topology, or $F-$compact-open topology, it is proved that the set of all isometries foliated manifold is a Hausdorff space is relative $F-$compact-open topology, the group of homeomorphisms of a smooth connected manifold of finite dimension is a topological group with respect to the compact-open topology, the subgroup consisting of all isometries foliated manifold is also a topological group with respect to this topology, if a sequence of isometries foliated manifold converge at one point of each leaf, then there exists a subsequence converging to isometric of foliated manifold in - the compact-open topology, it is proved the existence of the submersion for which there isometries of a foliated manifold, which is not an isometry of the manifold.

In the first section of the third chapter is introduced the notion of an isometric map of a foliated manifold and the notion of a foliated compact-open topology, or F - compact-open topology on $G_F(M)$, which depends on the foliation. If the dimension of the foliation coincides with the dimension of the manifold, this topology coincides with the compact-open topology, if the codimension of the foliation coincides with the dimension of the manifold, then the convergence in this topology coincides with the pointwise convergence.

Let (M,F_1) and (N,F_2) are foliated manifolds with foliations F_1,F_2 of dimension k.

Definition 8. If for some C^r-diffeomorphism $\varphi:M\to N$ the image $\varphi(L_\alpha)$ of any leaf L_α of the foliation F_1 is a leaf of the foliation F_2, then we say that the pairs (M,F_1) and (N,F_2) are C^r-diffeomorphic foliated manifolds and are denoted by $(M,F_1)\approx(N,F_2)$. In this case the mapping φ from (M,F_1) to (N,F_2) is called C^r-diffeomorphism, preserving foliation and is written as

$$\varphi:(M,F_1)\to(N,F_2).$$

In the case where $M=N$ and $F_1=F_2$, mapping φ is called a diffeomorphism of the foliated manifold (M,F).

Definition 9. A diffeomorphism $\varphi: M\to M$ of the class C^r $(r\geq 0)$, preserving foliation, is called an isometry of the foliated manifold (M,F), if it is an isometry on each leaf of the foliation F, i.e. for each leaf L_α of the foliation F, $\varphi: L_\alpha\to\varphi(L_\alpha)$ is an isometry.

Let $\{K_\lambda\}$ be a family of all compact sets, where each K_λ is a subset of some leaf of the foliation F and let $\{U_\beta\}$ be the family of all open sets on M. We consider, for each pair $K_\lambda\subset L_\alpha$ and U_β the set of all maps $f\in G_F(M)$, such that which $f(K_\lambda)\subset U_\beta$. This set of maps is denoted by

$$[K_\lambda,U_\beta]=\{f: M\to M \mid f(K_\lambda)\subset U_\beta\}.$$

Let σ be a family of subsets of $G_F(M)$ which are intersections of finite number of subsets of the form $[K_\lambda,U_\beta]$. According to well known criterion[1] in $G_F(M)$ there exists a topology, for which the family σ is the base, and this topology is unique. This topology we will call the foliated compact-open topology or, briefly the F-compact-open topology.

Theorem 6. The set $G_F(M)$ with the F-compact-open topology is a Hausdorff space with countable base.

It is known that if a manifold M is compact, or M coincides with R^n, the group of diffeomorphisms $Diff(M)$ of a smooth manifold M is a topological group in the compact-open topology. The following theorem is a generalization of this result for an arbitrary manifold.

Theorem 7. Let M be a smooth connected and finite-dimensional manifold. Then the group of homeomorphisms $Homeo(M)$ is a topological group with compact-open topology. In particular, the subgroups $Diff(M)$, $G_F(M)$ are also topological groups in this topology.

The group of an isometry of foliated manifold $G_F(M)$, in generally, is not a subgroup of isometry group of the manifold $G(M)$, and vice versa, i.e. the group of isometries of the manifold $G(M)$ is not a subgroup of the isometry group of a foliated manifold $G_F(M)$. But of course these groups have non-empty intersection, that is, $I\in G_F(M)\bigcap G(M)\neq\varnothing$. Hence, one can put the question on the existence of the maps which belongs to group of isometries of foliated manifold, but it does not belong to the group of isometres of manifold.

We have proved that there exists foliation for which there exists an element of group of isometries of foliated manifold, which is not an element of group of isometries.

[1] Bakelman I.J., Werner A., Kantor B.E. Introduction to differential geometry "as a whole" - M .: Nauka, - 1973, - 440 P.

Theorem 8. There is a submersion $f: M \to B$, for which the isometry group $G_F(M)$ of a foliated manifold (M,F) contains a maps, which are not elements of the isometry group $G(M)$ of a Riemannian manifold (M,g).

The following example shows that such submersion can be simple enough.

We consider on euclidean plane with Cartesian coordinates x, y foliation F, generated by level lines of function

$$f(x,y) = x^2 - y.$$

We will construct an isometry of foliated manifold $\varphi: M \to M$ under the formula

$$\varphi(x,y) = (x, y + \lambda(x,y)).$$

If λ it is constant, this map φ is an isometry of a plane and an isometry of the foliated plane. If $\lambda(x,y) = -f(x,y)$ map φ is not a plane isometry, but is an isometry of foliated manifold.

Really, if the point (x,y) lies on the parabola $x^2 - y = c$, then the point $(x, y + \lambda(x,y))$ lies on the parabola $x^2 - y = 2c$. This map preserving length of curves on a parabola.

In the second section of the third chapter we study the geometry of the isometry group of a foliated manifold in a new F-compact-open topology.

For foliated manifolds the following lemma and theorem are proved.

Lemma 1. Assume that a sequence $\{f_m\} \in G_F^r(M)$ converges pointwise on a set $A \subset L_\alpha$, where L_α – some leaf of the foliation F. Then $\{f_m\}$ also converges pointwise on $\overline{A}$ (where $\overline{A}$ is the closure of the set A in L_α).

Lemma 2. Let A be a set of points on a leaf L_α such that for each point $p \in A$ there exists a converging subsequence $f_{m_l}(p)$ of the sequence $f_m(p)$. If the set A is nonempty set, then $A = L_\alpha$.

The above lemmas enable us to prove the following theorem.

Theorem 9. Let M be a complete smooth $n-$dimensional manifold with the smooth $k-$dimensional foliation F, $f_m \in G_F^r(M), r \ge 0,\ m = 1,2,3,....$. Suppose, that for each leaf L_α there exists a point $o_\alpha \in L_\alpha$ such that the sequence $f_m(o_\alpha)$ is convergent. Then there exists a subsequence f_{m_l} of the sequence f_m which converges in a F-compact-open topology.

The theory of foliation has wide applications in the theory of dynamical systems, dynamical polysystems and control theory. The family of orbits of vector fields generates a partition of the phase space into the orbits, which is called a singular foliation.

The set of attainablity (the set of controllability) and invariant sets of control systems are important objects in the qualitative theory of optimal control. Invariant sets of control systems coincide with the orbits of the family of vector fields, which are determined by the right part of the control system.

The fourth chapter of the thesis, entitled **«Geometry of orbits of vector fields»** is devoted to the study of the orbits of vector fields. We prove the compactness of the attainability set, and the continuity of the multivalued mapping "point -the attainability set" for a system of vector fields of a special form, compactness closure of attainability sets, and continuous-valued mappings which associates each value of the time of the closure of the attainable set for no more than a fixed time for vector fields of a certain class, and found conditions of stability the set of attainablity for linear systems.

In the first section of the fourth chapter it is investigated the geometry of the attainable set for the family of vector fields of the form

$$X_u(x) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} f_i(x)u^i \tag{1}$$

where $\left|u^i\right| \le 1$ for all $i = 1, 2, ..., m$, $f_0(x), f_1(x), ..., f_m(x)$ are smooth vector functions with restrictions $\left| f_i(x) \right| \le M_i$ for all $x \in R^m$, M_i are constants.

Vector fields (1) correspond to the control systems of the following form:

$$\dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} f_i(x)u^i(t). \tag{2}$$

We say that the point x^* is attainable from a point x_0 in time T, if there exists a measurable vector function $u(t) = (u^1(t), u^2(t), ..., u^m(t))$, such that the Cauchy problem for a system of differential equations

$$\dot{x}(t) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} f_i(x)u^i(t) \tag{3}$$

with the initial condition $x(0) = x_0$ has a solution defined on $[0, T]$ such that $x(T) = x^*$, $\left|u^i\right| \le 1$, $\forall t \in [0; T]$.

The set of points of R^n which can be attaible from x_0 in time T denote by $x_0 \in G_{x_0}(T)$. By definition we set that $x_0 \in G_{x_0}(T)$ for all T.

In this section we prove the compactness of the attainablity set and the continuous dependence of the attainablity set $G_{x_0}(T)$ on the time T for the system (1).

We proved the following theorems

Theorem 10. The set $G_{x_0}(T)$ is a compact for all $T \ge 0$.

Theorem 11. The mapping $T \to G_{x_0}(T)$ is continuous in the metric of the Hausdorff at each point $T \ge 0$.

In the second section of the fourth chapter we investigate the structure of the set of attainablity.

We consider the type of control system of the form

$$\dot{x} = f(x, u), \; x \in R^n, \; u \in U \subset R^m, \tag{4}$$

where U is a compact subset of R^m. It is assumed that for every $u \in U$ the vector field $f(x, u)$ of class C^∞, and the mapping f is continuous in all the variables. In addition it is assumed that the right side of the system satisfies the condition

$$| f(x,u)|\leq M\,|x|+N, \forall (x,u)\in R^n\times U, \tag{5}$$

where M and N are constants.

Studying the properties of sets $G_\eta(\leq T)$ and $G_\eta(T)$ are important issues in the qualitative theory of optimal control.

For example, closedness (or compactness) of the set $G_\eta(\leq T)$ is a major factor in the proof of existence theorems for optimal control in one way or another. In general, of course, sets $G_\eta(\leq T)$ and $G_\eta(T)$ need not be closed.

The following theorem holds.

Theorem 12. The sets $\overline{G}_\eta(\leq T)$ and $\overline{G}_\eta(T)$ are compact.

It is known that the set $K(R^n)$ of compact subsets of R^n with the metric of Hausdorff is a metric space. When the condition (5) holds it is true the following

Theorem 13. The mappings $T\to\overline{G}_\eta(\leq T)$ and $T\to\overline{G}_\eta(T)$ are continuous.

Theorem 14. Suppose that for any $T\geq 0$ sets $G_\eta(T)$ are compact. Then so are the sets $G_\eta(\leq T)$.

Corollary 1. The set $G(\leq T)$ for system (1) is compact.

The rest of this section we consider the linear system of the form

$$\dot{x}=Ax+Bu,\ x\in R^n, u\in R^m, \tag{6}$$

where A is a matrix of dimension $n\times n$, B is a matrix of dimension $n\times m$. Bounded measurable functions $u:[0;T]\to R^m, 0<T<+\infty$ are admissible controls.

The goal of control is to bring the system to a target condition $\eta\in R^n$.

We denote by V the set of analytic vector fields defined on R^n. It is known that the set V is a Lie algebra, in which the product of vector fields X and Y is their Lie bracket $[X,Y]$. Put $X_u(x)=Ax+Bu$ and denote by D the set of vector fields $\{X_u : u\in R^m\}$, and by $A(D)$ a minimal Lie subalgebra containing D.

The orbit $L(x)$ of systems (6) passing through the point x is defined as the set of all points $y\in R^n$ of the form

$$y=X_l^{t_l}\left(X_{l-1}^{t_{l-1}}\left(...X_1^{t_1}(x)...\right)\right). \tag{7}$$

where $X_i\in D,$ t_i are real numbers, $i=1,2,...,l,$ $t\to X^t(x)$ is the integral curve of the vector field $X\in D$ passing through the point x at $t=0$.

If in (7) t_i are positive numbers, then the set of points y forms a positive orbit. If valid control are piecewise constant functions, then G_η is a positive orbit and thus $G_\eta\subset L(\eta)$ for all $\eta\in R^n$.

If $u=u(t)$ is a bounded measurable function, $x(t)$ is the corresponding trajectory of the system (6) with the initial condition $x(0)=x_0$, then as shown in the work[1] the vector field $f(x(t),u(t))$ is tangent of $L(x_0)$ almost everywhere, so

[1] Agracev AA Sachkov YL Geometric theory of control. - M .: FIZMATLIT, 2005. - 392 p.

the corresponding trajectory $x(t)$ emanating from the point $x_0 \in L(\eta)$ lies in $L(\eta)$. Consequently, for measurable attainable set of admissible controls G_η is also a subset of $L(\eta)$. Below we show that for the system (6) G_η is the same as $L(\eta)$.

Let $A_x(D) = \{X(x): X \in A(D)\}$ for all $x \in R^n$. Then, due to the fact that $A(D)$ is a Lie algebra, a set of vectors $A_x(D)$ is a linear subspace of vectors at a point x. In particular, $X_u(x) \in A_x(D)$ for each $u \in R^m$ and for every $x \in R^n$. It is clear that $0 \le \dim A_x D \le n$ for all $x \in R^n$.

In the following theorem we obtain sufficient conditions under which each orbit is plane.

Theorem 15. Let $\dim A_x(D) = k$ for all $x \in R^n$, where $0 < k < n$. Then for all $\eta \in R^n$ sets G_η are k-dimensional planes.

It is known that a set of controllability G_η of system (6) is an area if and only if

$$rank\left(B, AB, ..., A^{n-1}B\right) = n.$$

Using this fact from theorem 15, we get the following:

Corollary 2. The inequality

$$rank\left(B, AB, ..., A^{n-1}B\right) \le \dim A_x(D)$$

holds for all $x \in R^n$.

Theorem 16. Suppose that the rank of the matrix $\left(B, AB, ..., A^{n-1}B\right)$ is $n-1$. Then either all orbits (set of admissibility) are ($n-1$)-dimensional planes, or phase space is the union of three orbits, two of which n-dimensional, one orbit passing through the origin, is ($n-1$)-dimensional plane.

The qualitative theory of control controllability set (or attainable set) of control system on a smooth manifold in the class of piecewise constant control coincides with the negative (positive) orbit of the family of vector fields, which is determined by the control system uniquely.

P. Stefan[1] introduced the notion of the singular foliation, which is a generalization of the notion of the foliation, and showed that the orbits are the leaves of a singular foliation. In the case that all the orbits have the same dimension, partition M on orbits is a foliation, which allows attract foliation theory methods for studying the properties of the orbits and the set of smooth handling systems.

In the third paragraph of the fourth chapter it is considered the issue of the continuous dependence of the set of controllability of the target point for linear control systems. Continuity of a multivalued mapping $\eta \to G_\eta$ plays an important role in the study of the stability problems of complete controllability in the control theory. In particular, in this section it is proved that if the foliation generated by

[1] Stefan P. Accessible sets, orbits and foliations with singularities // Bull. of AMS, - 1974. - №6. - V.80.

orbits of linear system, is regular, then the set of controllability depends continuously on the target point.

Definition 10. The mapping $\eta \to G_\eta$ called lower semicontinuous at the point η_0, if for each $\varepsilon > 0$, and for each $R > 0$ there is such that $\delta > 0$ if $\rho(\eta, \eta_0) < \delta$ it takes place

$$d\left(\bar{G}_{\eta_0} \cap B_R(\eta_0), \bar{G}_\eta \cap B_R(\eta_0)\right) < \varepsilon,$$

where $\bar{G}_\eta$ - the closure of G_η in $R^n, B_R(\eta_0) -$closed ball of radius R centered at the point η_0.

Definition 11. The mapping $\eta \to G_\eta$ called upper semicontinuous at the point η_0, if for each $\varepsilon > 0$, and for each $R > 0$ there is such that $\delta > 0$ if $\rho(\eta, \eta_0) < \delta$ it takes place

$$d\left(\bar{G}_\eta \cap B_R(\eta_0), \bar{G}_{\eta_0} \cap B_R(\eta_0)\right) < \varepsilon.$$

Definition 12. The map $\eta \to G_\eta$ called continuous at the point η_0, if it is lower semicontinuous and upper semicontinuous at a point η_0.

Lemma 3. The mapping $\eta \to G_\eta$ is lower semicontinuous at each point $\eta \in R^n$.

A sufficient condition for the upper semicontinuity of the above mentioned map.

Theorem 17. Let $\dim A_x(D) = k$ for all $x \in R^n$, where $A_x(D) = \{X(x) : x \in A(D)\}$, $0 < k < n$. Then the mapping $\eta \to G_\eta$ is continuous at every point of the space R^n.

In fact, this theorem shows that the foliation generated by orbits is k-dimensional foliation, a sets of controllabity are leaves of this foliation. Thus, multi valued map «a point - a leaf» is a continuous map.

CONCLUSION

The dissertation examines the group of isometries foliated Riemannian manifolds. To solve the problems studied topological and geometrical properties of foliated manifolds, it is studied geometry Riemannian submersions. It is introduced a new notion of foliated compact-open topology, which depends on the foliation. We studied a group of isometries foliated manifolds in the compact-open topology and in the foliated compact-open topology.

The main results of investigation are as follows.

1) it is established that the group of homeomorphisms of any manifold is a topological group in the compact-open topology;

2) it is proved that the isometry group of a foliated manifold is a topological group in the compact-open topology;

3) it is established that if the sequence of isometries of foliated manifold converge on a one point on each leaf then this sequence can be extracted to a convergent subsequence isometries of foliated manifold in the compact-open topology;

4) it is proved that the Riemannian submersion produces foliated manifold of constant Gaussian curvature;

5) it is established that limit of geodesic lines of foliated manifold is a geodesic line on the limit leaf of foliation;

6) it is showed that the four-dimensional manifold can not be immersed into five-dimensional Euclidean space;

7) it is proved the existence of the foliation, for which there is a Isometry of foliated manifold which is non-isomety of the manifold;

8) it is proved that the set of reachable system of vector fields of a certain class is compact, and it is a continuous function of time;

9) it is found a sufficient condition for linear control systems under which each set of attainability (controllability set) is a plane of fixed dimension.

Author brings his deep appreciation to the scientific adviser Professor Narmanov Abdigappar Yakubovich for posing problems, valuable tips and helpful advices in the discussion and and support.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (I часть; I part)

1. Шарипов А.С. Об изометрии поверхностей изометричных по сечениям // ДАН РУз. – Ташкент, 1998. –№3. – С.5-8. (01.00.00; №7).

2. Шарипов А.С. О некоторых свойствах гиперповерхностей изометричных по сечениям R^4 // Узбекский математический журнал – Ташкент, 1998. – №3, – С.98-103. (01.00.00; №6).

3. Шарипов А.С. Об одном способе вложения двумерного многообразия M^2 *в* R^3 // Узбекский математический журнал – Ташкент, 2003. – №1. – С.76-81. (01.00.00; №6).

4. Нарманов А.Я., Шарипов А.С. О непрерывной зависимости множества управляемости от целевой точки // ДАН РУз. – Ташкент, 2004. – №1. – С.11-14. (01.00.00; №7).

5. Narmanov A.Ya., Sharipov A.S. On the group of foliation isometries // Methods of functional Analysis and topology – Kiev, 2009. – V.15. – P.195-200. (01.00.00; МДҲ № 4).

6. Нарманов А.Я., Шарипов А.С. О геодезических слоеного многобразия. // Вестник НУУз. – Ташкент, 2009. – №2. – С.52-54. (01.00.00; №8).

7. Нарманов А.Я., Шарипов А.С. О структуре множества достижимости // Узбекский математический журнал – Ташкент, 2009. – №3. – С.142-152. (01.00.00; №6).

8. Шарипов А.С. Восстановление выпуклого многогранника по заданным условным внешним кривизнам в вершинах // Вестник НУУз. – Ташкент, 2013, – №2, – С.209-213. (01.00.00; №8).

9. Нарманов А.Я., Шарипов А. С. О геометрии субмерсий // ДАН РУз. – Ташкент, 2014. – №2. – С.3-4. (01.00.00; №7).

10. Narmanov A.Ya. and Sharipov A.S. On the geometry of submersions // International journal of geometry – vol. 3 (2014), No.2, P. 51-56. (№ 12. Index Copernicus ICV=77,25).

11. Шарипов А.С. Об изометрическом вложении и погружении SOL многообразий // Вестник НУУз. – Ташкент, 2015, – №2/1, – С.104-107. (01.00.00; №8).

12. Sharipov A.S. On the geometry of the level surfaces, International Journal Physics and Mathematical Sciences, – 2015. – V. 5 (4) – P. 60-65. (01.00.00; Осиё №6).

13. Шарипов А.С. О невозможности изометрического погружения многообразия SL_2R в евклидово пространство // Вестник НУУз. – Ташкент, 2015, – № 2/2. – С.85-88. (01.00.00; №8).

14. Narmanov A.Ya. and Sharipov A.S. On the geometry of foliated manifolds // Bulletin of Mathematics and Statistics Research Vol.4.Issue.2.2016 (April-June) P. 56-62. (№ 5, Global Impact factor, GIF=0,458)

15. Шарипов А.С. Об изометрии слоеных многообразий// Eurasian Union of Scientists, №3 (24) 2016, p.160-161. (№ 5. Global Impact factor, GIF=0,388).

16. A.S.Sharipov On the impossibility of an isometric immersion of some manifolds in Euclidean space// Bulletin of Mathematics and Statistics Research Vol.4.Issue.3.2016 (July-Sept.) P. 86-91. (№ 5, Global Impact factor, GIF=0,458)

II бўлим (II часть; II part)

17. Нарманов А.Я., Шарипов А.С. О структуре множества достижимости // Вестник Тамбовского университета, серия естественные и технические науки –Тамбов, 2007. – Т.12. – С.501-503.

18. Нарманов А.Я., Шарипов А.С. Некоторые приложения теории слоения в задачах управления. Вестник Удмурдского Университета – Ижевск, 2008. – №2, – С.93-96.

19. Sharipov A.S., Narmanov A.Ya. On the isometries of foliated manifold // TWMS Jour. Pure and Appl. Math. – Baku, 2011. – V.2. – №1. – P.127-133.

20. Шарипов А.С. О группе изометрий слоеного многообразия // Вестник Удмурдского Университета. Математика. Механика. Компьютерные науки – Ижевск, 2014. – №1. – С.118-122.

21. Шарипов А.С. О свойстве цилиндрического отображения поверхностей изометричных по сечениям // Сб.науч. статей молодых ученых и студентов –Ташкент: «Университет», 1998. – №2, – С.10-13.

22. Шарипов А.С. О свойствах разверток многогранника сохраняющих изометрию по сечениям и кривизны // Депонированная рукопись, ГФНТИ при ГКНТ РУз. – №2704-Уз 99, – С.23.

23. Шарипов А.С. Поверхности изометричные по сечениям и их свойства // Депонированная рукопись, ГФНТИ при ГКНТ РУз, – №2705-Уз 99, – С.28.

24. Шарипов А.С. Об одном условии вложения двумерного многообразия M^2 *в* R^3 // Тезисы докладов. Вторая международная конференция. Посвящена 80-летию проф. Л.Д. Кудрявцева. Функциональные пространства – Москва, 2002. – С.122.

25. Нарманов А.Я., Шарипов А.С. О геометрии множества достижимости // Материалы международной школы-семинара по геометрию и анализа посв. памяти Н.В.Ефимова – Ростов на Дону, 2004. – С.268-269.

26. Нарманов А.Я., Шарипов А.С. О структуре множества управляемости // Геометрический анализ и его приложения – Москва, 2004. – С.187-188.

27. Нарманов А.Я., Шарипов А.С. О геометрии множества достижимости нелинейных систем управления Тезисы докладов // Международная геометрическая школа-семинар памяти Н.В.Ефимова – Ростов-на-Дону, 2006. – С.63-64.

28. Нарманов А.Я., Шарипов А.С. О группах изометрий слоений на многообразиях // Материалы республиканской конференции «Новые теоремы молодых математиков-2006» – Наманган, 2006. – 1 ч., – С.101.

29. Нарманов А.Я., Шарипов А.С. О структуре множества достижимости некоторой динамической системы управления // Материалы международной конференции посвященной памяти Ш.Ярмухамедова «Новые направления в теории динамических систем и некорректных задач» – Самарканд, 2007. – С.67-68.

30. Нарманов А.Я., Шарипов А.С. Об одной группе изометрий слоения // Материалы республиканской научной конференции «Современные проблемы математики, механики и информационных технологий»: пос. 90- летию НУУз им. М.Улугбека – Ташкент, 2008. – С.203-205.

31. Нарманов А.Я., Шарипов А.С. О пределе геодезических слоеного многообразия // Материалы международной школы-семинара по геометрию и анализа посв. памяти Н.В.Ефимова – Ростов на Дону, 2008. – С.

32. Нарманов А.Я., Шарипов А.С. Об изометрических отображений слоения // Международная конференция «Современные проблемы математики, механики и их приложений» посвященная 70-летию ректора МГУ академика В.А.Садовничего, 30 марта-02 апреля 2009 года –Москва: МГУ, 2009. – С.396-397.

33. Narmanov A.Ya., Sharipov A.S. On the isometries of foliated manifold // Abstracts of the third congress of the world mathematical society of Turkic countries– Almaty, 2009. – P.70.

34. Нарманов А.Я., Шарипов А.С. О пределе геодезических кривых слоеного многообразия // «Ҳозирги замон математикаси ва уни ўқитишнинг долзарб муаммолари»: Тез. Док. Рес. науч. конф. 8-9 ноября, 2010. –Ташкент, 2010. – С.45-46.

35. Нарманов А.Я., Шарипов А.С. О пределе геодезических линий слоеного многообразия // «Метрическая геометрия поверхностей и многогранников»: Тез. докл. межд. науч. Конф. 18-21 августа 2010 –Москва, 2010. – С.8-9.

36. Шарипов А.С. О восстановлении выпуклого многогранника по заданным значениям условной кривизны в вершинах // «Математика фани ва уни ўқитишнинг долзарб муаммолари»: Тезисы докладов Республиканской науч. конф. 8 - 9 ноября 2011. –Андижан, 2011. – С.72-73.

37. Шарипов А.С. Об одном изометрическом вложении // Материалы международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информационной технологии – Аль - Хорезми –2012» – Ташкент, 19-22 декабря, 2012. – С. 63.

38. Шарипов А.С. О группе изометрий слоеного многообразия // Тезисы докладов международной конференции «Геометрия в Одессе - 2014» – Одесса, 26 мая-31 мая 2014. – стр.63.

39. Шарипов А.С. Об одном свойстве субмерсий // Материалы научной конференции «Актуальные вопросы геометрии и её приложения», Ташкент 27-28 октября 2014, С.242-243.

40. Шарипов А.С. О геометрии слоеных многообразий // Материалы Всероссийской конференции с международным участием «Теория управления и математическое моделирование» посвященной памяти профессора Н.В.Азбелева и профессора Е.В.Тонкова, Ижевск, 2015 г., июнь, С.334-336.

41. Шарипов А.С. Об изометричном вложении и погружении многообразий // Материалы Республиканской научной конференции «Математическая физика и родственные задачи современного анализа» г. Бухара, 2015 г., 26-27 ноября.

42. Narmanov A.Ya, Sharipov A. S. On the geometry of foliated manifolds, Анализнинг долзарб муаммолари, Илмий конференция материаллари, Қарши шаҳри, 2016 йил, 22-23 апрель, 298-302 бетлар.

43. Шарипов А.С. Об изометрии слоеных многообразий// Тезисы докладов конференции с участием зарубежных ученых «Проблемы современной топологии и её приложения» Ташкент, 2016 г., 5-6 мая, с.263-265.