Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги
Абу Райхон Беруний номидаги
Тошкент давлат техника университети

Т.М. Магрупов

ГРАФЛАР НАЗАРИЯСИ.

Ўқув қўлланма.

Тошкент 2005

Муаллиф: Т.М. Магрупов
УДК 519. 15.
Графлар назарияси ва унинг қўлланилиши
Ўқув қўлланма. Т.М. Магрупов. Тошкент давлат техника университети. Тошкент, 2005. 84 б.

Ўқув қўлланмада графлар назариясининг асосий тушунчалари ва хусусиятлари ёритилган. Ҳар бир бўлим масала ва машқлар билан якунланиб, ўқувчилар тамонидан дарсларни ўзлаштириш даражасини аниқлаш имконияти яратилган.

Келтирилган масалалар асосан қурилмалар ва уларни элементларини лойиҳалаш асосида кўриб чиқилган. Ўқув қўлланмаси келгуси фанларни ўзлаштириш учун объектларни ва жараёнларни тўғри тасвирлашга имкон беради.

Ўқув қўлланма 5521500 ва 5521900 йўналишлари бўйича ва бошқа техника соҳалари бўйича ўқиётган талабаларга амалий математиканинг махсус курси сифатида фойдаланишга мўлжалланган, аспирантлар ва магитратура талабалари илмий изланишларни олиб боришда фойдаланиши мумкин.

Абу Райхон Беруний номидаги Тошкент давлат техника университети илмий-услубий кенгаши қарорига биноан чоп этилди.

Тақризчилар: «   »

Кириш.

Графлар назарияси амалий математиканинг асосий қисмларидан бири бўлиб, объектларни ва унда содир бўладиган жараёнларни тасвирлашда қулайликлар туғдиради. Бу назария тушунчалари ва масалалари энг қийин кечадиган жараёнларни лойиҳалашда, масалан электрон қурилмаларни охирги авлодларини яратишда, уларни элемент асосларини анализ ва синтез қилишда ишлатилиши билан фан ва техника тараққиётида катта ўрин эгаллайди.

Ҳозирги кунда графлар назарияси нейротехнология асосларининг асосий математик аппарати бўлиб, уларни ички имкониятларини тўлиқ ёритишда хизмат қилмоқда.

Ҳулоса қилиб айтсак, графлар назарияси ва унинг масалаларини техника соҳасида қўлланилиши кўп қиррали ва кўп тармоқларни ички хусусиятларини ечишда катта имкониятлар яратади.

Шу сабабали ушбу ўқув қўлланмада графлар назариясининг асосий тушунчалари ва масалалари, уларни микроэлектрон техника элементлари ва қурилмаларини яратиш нуқтаи назаридан кўриб чиқилган.

I. АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАР.

1.1. Асосий аниқланишлар.

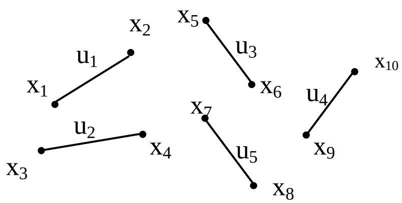
Текисликдаги ва фазодаги бирор х нуқтани чўққи деб белгиласак, икки нуқтани (x_1 ва x_2)ни боғловчи кесмани қобиқ деб белгилаймиз.

Чўққилар нуқта ёки думалоқ кўринишида берилади, қобиқ эса туташ нуқта ёки думалоққа мос келувчи чўққилардан ёки думалоқни боғловчи кесмадан иборат.

Ҳар бир қобиқ иккита чўққи билан аниқланади. Чўққиларни белгилаш учун $x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_m$, қобиқларни белгилаш учун эса $u_1, u_2, ..., u_j, ..., u_n$ ҳарфларидан фойдаланиш мумкин. Бу ҳолда қобиқ $u_j = (x_\alpha, x_\beta)$ билан белгиланади, $\alpha, \beta = 1, m$, лекин $\alpha \neq \beta$.

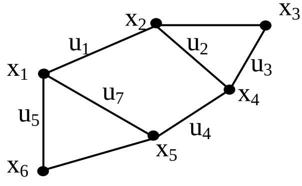
Бу ҳолда чўққилар тўпламини $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ (1.1-расм) холатида ва қобиқлар тўпламини эса $U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ (1.2-расм) ҳолатида тасвирлаш мумкин.

1-расм
Чўққилар тўплами.



1.2-расм
Қобиқлар тўплами.

Қобиқларни бир-бири билан боғлаш натижасида ҳосил бўлган чизма граф G деб аталади ва у қуйидаги кўринишда тасвирланади $G = \langle X, U \rangle$ (1.3-расм).



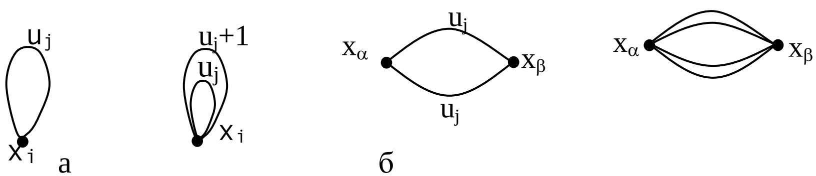
1.3-расм. Граф $G = \langle X, U \rangle$, $m=6$, $n=8$

Бу ерда $X=\{x_1,x_2,...,x_i,...,x_n\}$ – чўққилар тўплами; $U=\{u_1,u_2,...,u_j,...,u_m\}$ – қобиқлар тўплами.

Натижада: 1) Чўққилар тўплами X нинг ҳар бир элементи x_i $i=1,2,3,...,m$, шу тўпламга тегишли чўққи деб ҳисобланади ва $x_i \in X$ деб ифодаланади.

2) Қобиқлар тўплами U нинг ҳар бир элементи u_j $j=1,2,3,...,n$, шу тўпламга тегишла қобиқ деб ҳисобланади ва $u_j \in U$ деб ифодаланади.

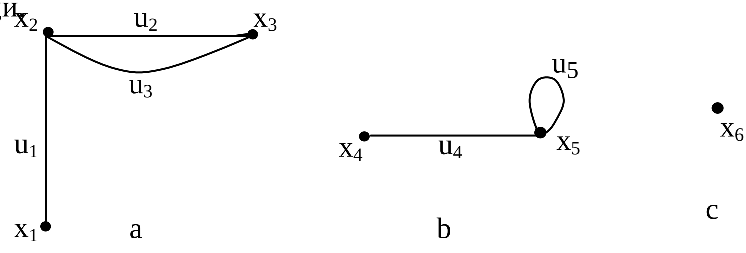
Агар $u_j=(x_i,x_i)$ бўлса, у ҳолда u_j тугунча деб аталади (1.4.а-расм). Қобиқларнинг бошланғич ва оҳирги чўққилари бир хил бўлса улар параллел қобиқлар дейилади (1.4.б-расм). Фақат чўққининг ўзи берилган бўлса, у ҳолис чўққи дейилади.



1.4-расм

Агар графда тугунча ва параллел қобиқлар бўлмаса улар оддий граф деб аталади (1.3-расм).

Масалан, агар $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$ ва $U=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$ бўлса ва $u_1=(x_1,x_2)$, $u_2=(x_2,x_3)$, $u_3=(x_2,x_3)$, $u_4=(x_4,x_5)$, $u_5=(x_5,x_5)$ у ҳолда граф $G=\langle X, U\rangle$ қуйидагича тасвирланади (1.5-расм). Бу графда u_2 ва u_3 параллел қобиқлар бўлса, u_5 – тугунчадир. Бу граф боғланмаганлик графи ёки боғланмаганлик компоненталари деб аталади, чунки учта боғланмаган графдан иборат: $G_1=\langle X_1,U_1\rangle$, $X_1=\{x_1,x_2,x_3\}$, $U_1=\{u_1,u_2,u_3\}$; $G_2=\langle X_2,U_2\rangle$, $X_2=\{x_4,x_5\}$, $U_2=\{u_4,u_5\}$; $G_3=\langle X_3,U_3\rangle$, $X_3=\{x_3\}$, $U_3=\{o\}$. Агар графда қобиқлар бўлмаса, у ноль граф деб аталади.



1.5-расм

Иккита чўққи x_α ва x_β боғланган ҳисобланади, агар улар ихтиёрий U_i қобиқнинг туташ чўққилари бўлса $u_j=(x_\alpha, x_\beta)$, акс ҳолда улар боғланмаган ҳисобланади. Агар ихтиёрий иккита қобиқ u_l, u_k умумий чўққига эга бўлса, улар боғланган ҳисобланади. Қобиқлар u_j ҳар доим ўзининг x_α, x_β туташ чўққиларига инцендентдир, акс ҳолда инцендент эмас ҳисобланади. Масалан, граф G=<X, U> да (1.5-расм) қобиқ u_2, x_2 ва x_3 чўққиларига инцендент, x_2 ва x_3 чўққилар боғланган чўққилар дейилади, u_1 ва u_2 эса боғланган қобиқлар дейилади.

Берилган x_i чўққига инцендент қобиқлар сони чўққининг даражаси деб аталади ва λ (x_i) деб белгиланади, у ҳолда λ $(x_i)=N_{Xi}$ га тенг бўлади. Чўққиларнинг максимал ва минимал даражаси $max\,\lambda\,(x_i)$ ёки $min\,\lambda\,(x_i)$ билан белгилаш мумкин.

Айрим ҳолларда чўққининг даражаси валентлик деб аталади. Чўққининг даражаси «1» бўлса, у осилган чўққи дейилади. Осилган чўққига инцендент қобиқ осилган қобиқ дейилади. Агар чўққининг даражаси «0» бўлса у якка чўққи дейилади. Чўққидаги тугунча ҳар доим кўрилаётган чўққи учун «1» қийматга эга бўлади.

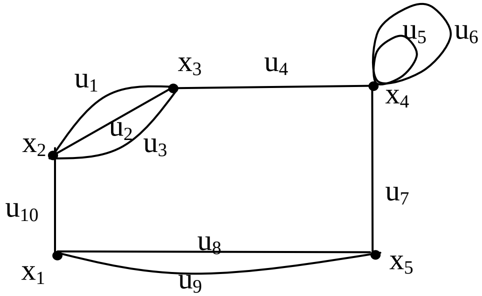
1.5-расмдаги G=<X, U> граф учун $\lambda(x_2)=3$, $\lambda(x_3)=2$, $\lambda(x_1)=1$, $\lambda(x_4)=1$, $\lambda(x_5)=2$, $\lambda(x_6)=0$ га тенг.

Бу ерда x_6 – ҳолис чўққи, x_1, x_4 – осилган чўққилар, u_1, u_4 – осилган қобиқлардир.

Графнинг ҳамма чўққилари даражасининг йиғиндиси тоқ қийматга эга бўлиб, у қобиқларни икки бароборига тенг.

$$\lambda(x_i)=2|U|$$

Шундай қилиб ҳар қандай графда жуфт даражага эга бўлган чўққилар сони тоқдир.

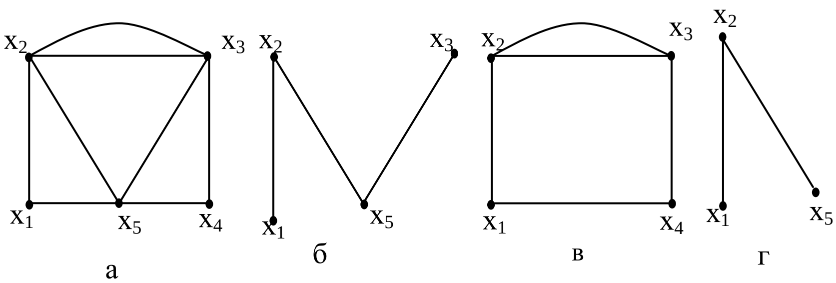


1.6-расм

Графда параллел қобиқлар ва тугунчалар сони бир нечта бўлиши мумкин. У ҳолда граф қуйидаги кўринишга эга бўлади (1.6-расм).

1.2. Граф бўлаклари

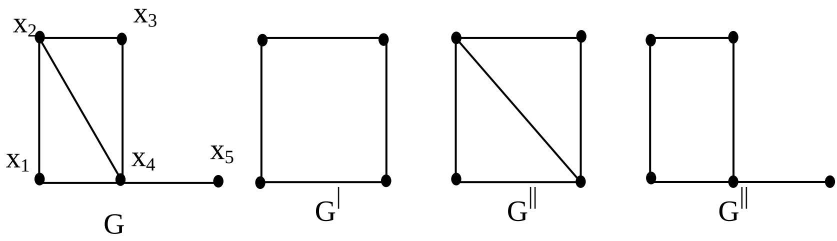
Граф $G=<X, U>$ да $G^{|}=<X^{|}, U^{|}>$ G графнинг бўлаги бўлади, агар $X^{|}$ ва $U^{|}$, X ва U тўпламларига нисбатан тўпламалар бўлаги бўлса. Бу ҳолда (x_{α}, x_{β}) қобиқ $U^{|}$ қобиқлар тўплами бўлагига қарашли дейилади, агар x_{α}, x_{β} чўққилар $X^{|}$ чўққилар тўпламига қарашли бўлса. Демак $x_{\alpha}, x_{\beta} \in X^{|}$, $X^{|}=\{x_1,x_2,x_3,...,x_k\}$ ва $x_{\alpha}, x_{\beta} \in X$, $X=\{x_1,x_2,...,x_m\}$, у ҳолда $X^{|} \subset X$ бўлиб $X=\{X^{|} \cap X^{||}\}$, бу ерда $X^{||}=\{x_k,x_{k+1},...,x_{k1}\}$ ҳолатида бўлади ва $k+k_1=m$ қийматига тенг бўлади (1.7-расм).



1.7-расм. Граф ва унинг бўлаклари кўриниши.
а - граф G, б – граф бўлаги $G^{|}$, в – граф асоси $G^{||}$, г – холис чўққили граф $G^{|||}$

Граф $G^{|}$ граф G нинг бўлаги деб айтилади, агар $X^{|} \subseteq X$, $U^{|} \subset U$. Агар $G^{|}$ граф G нинг бўлаги бўлса, у ҳолда $G^{|}$ G га қарашли дейилади. Граф бўлаги $G^{|}$ граф асоси ҳисобланади, агар $X^{|}=X$ бўлса. Агар $G^{|}$ граф бўлагининг чўққилар тўпламини H деб белгиласак ва унинг қобиқлар тўплами G графнинг қобиқлар тўплами билан мос келса, уларнинг икки тугаш чўққилари H га қарашли бўлса, у ҳолда $G^{|}$, H чўққилар тўплами билан қамраб олинган граф бўлаги $G=<H, U>$ дейилади.

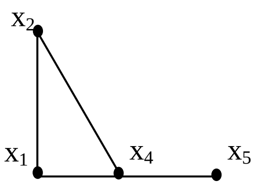
1.8-расмда G- граф ва унинг учта граф бўлаклари $G^{|}$, $G^{||}$, $G^{|||}$ тасвирланган, улар ичида $G^{||}$ – қамраб олинган ва $G^{|||}$ – асосли граф бўлагидир.



1.8 – расм.

Граф бўлаги турларидан айримлари чўққиларни олиб ташлаш орқали ифодаланади. Агар x_i, G графнинг чўққиси бўлса, у ҳолда бу чўққига инцендент бўлган ҳамма қобиқларни олиб ташласак, G_{Xi} графига эга бўламиз.

Масалан, 8-расмдаги G графидан X_3 чўққисини олиб ташлангандан сўнг G^{IV} граф бўлагини кўриш мумкин, $G^{IV}=(X^{IV}, U^{IV})$, $X^{IV}=X\backslash x_i$ (1.9-расм).



1.9 – расм

Натижада граф бўлаги деб G графнинг шундай қисмига $G^{|}$ айтиладики, унинг қўшимча қисми $G^{||}$ нинг қобиқлари G графга тегишли бўлиб, $G^{|}$ графда иштирок этмайди.

$$G^{||}= G- G^{|}$$

Бу ҳолда граф бўлаги $G^{|}$ граф G нинг қоплайдиган қисми ёки граф бўлаги (суграф) деб аталади.

Граф бўлаклари G_1 ва G_2, G графнинг икки бўлаги бўлсин, бу бўлакларни йиғиндиси қуйидагича аниқланади

$$G = G_1 \bigcup G_2$$

Улар қобиқлардан иборат бўлиб, G_1 ёки G_2 га тегишлидир. Шу тарзда уларни кесишуви

$$R = G_1 \bigcap G_2$$

Графда бўлакларнинг сони кўп бўлса, уларнинг йиғиндиси ва кесишуви қуйидагича аниқланади:

$$G = \bigcup_{\alpha} G_\alpha \text{ ва } R = \bigcap_{\alpha} G_\alpha$$

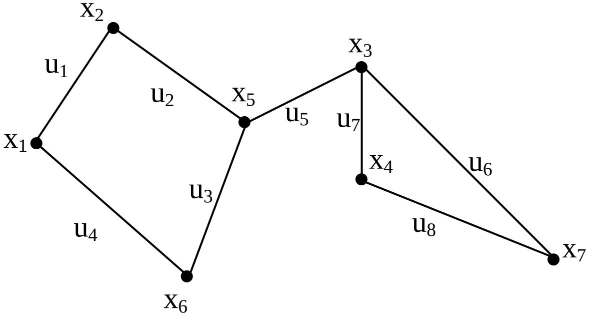
Бу ерда: G_α – граф бўлаклари тўплами, $\alpha = \overline{1,k}$ – графдаги бўлаклар сони.

Агар G_α граф бўлаклари умумий чўққиларга ва қобиқларга эга бўлмаса улар чўққи бўйича кесишмайди. Граф бўлаклари G_α умумий қобиқларга эга бўлмаса улар қобиқлар бўйича кесишмайди.

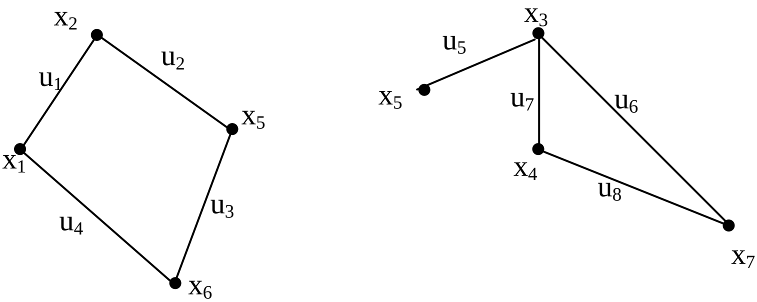
Агар берилган $G=<X, U>$ графни граф бўлакларига бўлиш талаб этилса, қуйидаги шартлар бажарилиши керак:

- чўққилар тўплами X нинг бир қисмини қуйидагича ифодалаш мумкин. $X^| \subset X$ бу ҳолда $x_i \in X^|$, X бўлади. $\alpha<m$ қийматга эга бўлади ва чўққилар тўпламининг бўлаги $X^| = \{x_1, x_2, ..., x_\alpha\}$ тенг бўлади.
- қобиклар тўплами U нинг бир қисмини қуйидагича ифодалаш мумкин $U^| \subset U$, бу ҳолда, $u_j \in U_\beta$, U бўлади ва қобиқлар тўпламининг бўлаги $U^| = \{u_1, u_2, ..., u_\beta\}$ тенг бўлиб, $\beta < n$ қийматга эга бўлади.

Масалан: $G=<X,U>$ берилган (1.10-расм). Бу графни бўлакларга бўлиб $G^|$ ва $G^{||}$ графларга эга бўламиз (1.11-расм).



1.10-расм. Граф $G=<X, U>$

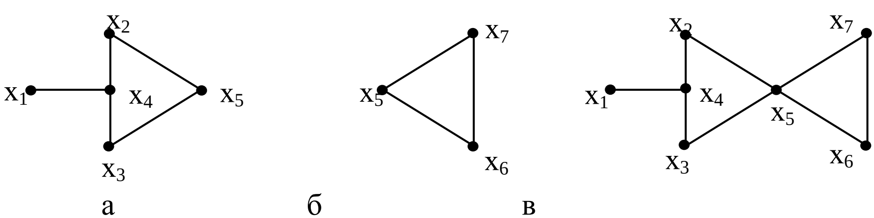


1.11-расм. $G=<X,U>$ нинг бўлаклари $G^{|}=<X^{|},U^{|}>$,
$G^{||}=<X^{||},U^{||}>$

Бу ерда: $G^{|}$ графи учун $X^{|}=\{x_1,x_2,x_5,x_6\}$ чўққилар тўплами;
$U^{|}=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ –қобиқлар тўплами;
$G^{||}$ графи учун $X^{||}=\{x_5,x_3,x_4,x_7\}$ – чўққилар тўплами;
$U^{||}=\{u_5,u_6,u_7, u_8\}$ – $G^{||}$ графи учун қобиқлар тўплами;
x_5 – $G^{|}$ ва $G^{||}$ графлари учун умумий чўққи.

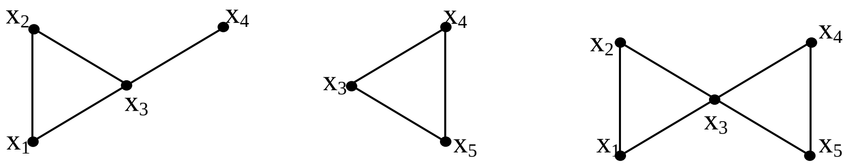
1.3. Графлар устида амаллар

Мантиқий бирлашиш амали. Энг керакли амаллардан бири – бирлашиш амалидир. Граф $G=<X,U>$, $G^{|}=<X^{|},U^{|}>$ ва $G^{||}=<X^{||},U^{||}>$ графларининг бирлашмаси ҳисобланади, агар $X=X^{|}\bigcup X^{||}$ ва $U=U^{|}\bigcap U^{||}$ шартлар бажарилса, яъни $G=G^{|}\bigcup G^{||}$



1.12-расм. Чўққи бўйича бирлашиш.
а- граф $G^{|}=<X^{|},U^{|}>$; б- граф $G^{||}=<X^{||},U^{||}>$; в- $G=<X,U>$

Графлар $G^{|}$ ва $G^{||}$ 1.12-расмда x_5 чўққиси орқали бирлашган бўлиб, граф G чўққи бўйича бирлашишни ташкил этади.



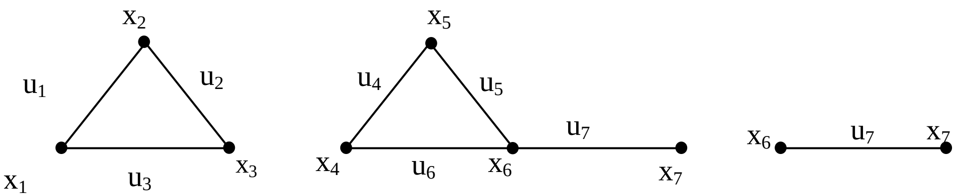
а б в

1.13-расм. Қобиқ бўйича бирлашиш

а- граф $G^{|}=<X^{|},U^{|}>$; б- граф $G^{||}=<X^{||},U^{||}>$; в- $G=<X,U>$

1.13-расмда графлар $G^{|}$ ва $G^{||}$ (x_3,x_4) қобиғи орқали бирлашиб, қобиқ бўйича бирлашишни ташкил этади.

<u>Мантиқий кесишиш амали</u>. Агар $G^{|}(X^{|}, U^{|})$ ва $G^{||}(X^{||}, U^{||})$ графлари берилган бўлса уларни бир-бирига кесишиши асосида граф $G^{|||}=G^{|}\bigcap G^{||}$ ҳосил бўлади.



$G^{|}$ $G^{||}$ $G^{|||}$

1.14-расм

$G^{|}$ ва $G^{||}$ графларни кесишиши асосида $G^{|||}=<X^{|||}, U^{|||}>$ ҳосил бўлади, бу ерда $X^{|||}=\{x_6, x_7\}$, $U^{|||}=\{u_7\}$. 1.14-расмда $G^{|}$ ва $G^{||}$ графларнинг кесишуви асосида $G^{|||}$ графнинг чўққилари тўплами $X^{|||}=\{x_6,x_7\}$ ва қобиқлари тўплами $U^{|||}=\{u_7\}$ ҳосил бўлади.

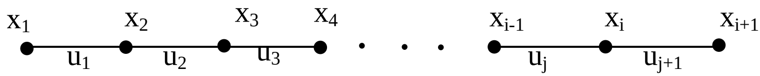
1.4. Маршрутлар, занжирлар, йўллар ва халқалар.

Маршрут деб, қобиқларни кетма-кетлигини тушуниб, унда ҳар бир иккита қўшни қобиқлар u_{j-1} ва u_i умумий туташ чўққига эга

$$S=\{u_1, u_2,.., u_j,..., u_n\}$$

Бу ерда ҳар бир қобиқни $u_1=(x_1, x_2)$, $u_2=(x_2, x_3)$, ..., $u_n=(x_m, x_{m+1})$ ни кўринишида ёзиш мумкин.

Демак, графдан чўққи ва қобиқларининг кетма-кетлиги x_1, u_1, x_2, u_2, x_3, u_3,..., x_i, u_{j+1} маршрут деб аталади ва у $u_j=(x_i, x_{i+1})$ ифода кўринишида ёзилади. Бундан ташқари маршрутни чўққилар кетма-кетлиги x_1, x_2,..., x_{i+1} ва қобиқлар кетма-кетлиги u_1, u_2,..., u_{j+1} билан аниқланади (1.15-расм).



1.15-расм

Айтиш керакки, маршрутда ихтиёрий бир u_j қобиғи ёки x_i чўққиси бир неча марта иштирок этиши мумкин.

Агар маршрутда x_0 чўққидан олдин хеч қандай чўққи бўлмаса у бошланғич чўққи деб аталади. Агар x_m чўққидан кейин ҳеч қандай чўққи бўлмаса x_m тугаш чўққиси деб аталади. Агар иккита қобиқ u_j, u_{j+1} ўртасида умумий чўққи бўлса, у ҳолда x_i чўққи ички чўққи деб аталади. Агар маршрут бошланғич чўққига эга бўлиб, тугаш чўққиси бўлмаса ёки тугаш чўққиси бўлиб бошланғич чўққиси бўлмаса, у ҳолда бундай маршрут бир томонлама тугалланмаган деб аталади. Маршрутда бошланғич ва тугаш чўққилари бўлмаса, икки томонлама тугалланмаган деб аталади.

Агар S маршрут x_0 бошланғич чўққига ва x_m тугаш чўққисига эга бўлса, у қуйидаги кўринишда ифодаланади.

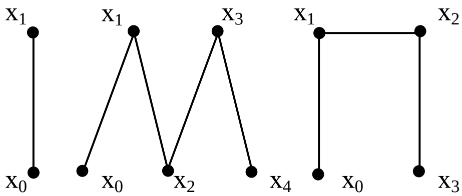
$$S=S(x_0, x_m)$$

бу ерда x_0, x_m – маршрутнинг тугаш чўққилари деб аталади.

Агар x_0 бошланғич чўққи x_m тугаш чўққиси бўлса, маршрутни узунлиги m га тенг бўлади.

Агар ҳар бир қобиқ бир марта иштирок этса, маршрут занжир деб аталади.

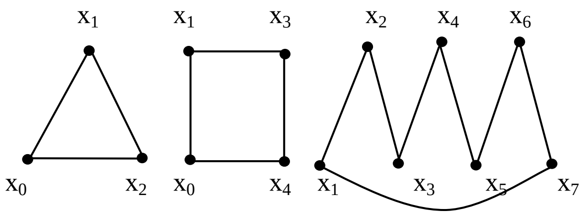
Агар занжирда хеч қандай чўққи қайтарилмаса, у оддий занжир деб аталади. Унинг айрим кўринишлари 1.16-расмда ифодаланган.



1.16–расм.

Графдаги ҳар қандай занжирни графнинг бўлаги деб айтиш мумкин. Иккита занжирнинг бошланғич ва тугаш чўққиларини боғланишидан ҳалқа ташкил этилади. Граф боғланган ҳисобланади, агар бир-бирига мос бўлмаган иккита чўққи маршрут орқали боғланган бўлса.

Маршрут ҳалқа деб аталади, агар унинг бошланғич ва тугаш чўққилари бир чўққидан иборат бўлса, яъни $x_0=x_m$. Ҳалқаларда бошланғич чўққи ички чўққилар бўлмайди ва қолган чўққилар қайтарилмайди (1.17-расм).



1.17-расм

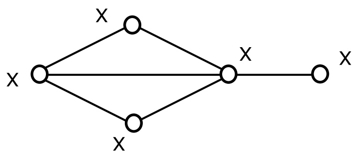
Юқоридаги тушунчалар йўналтирилмаган граф учун қабул қилинган.

Йўналтирилган граф учун ҳам йўналтирилган маршрут, занжир ва оддий занжирлар тушунчасини киритиш мумкин. Бу масалаларга кейинроқ тўхталамиз.

1.5. Масала ва машқлар.

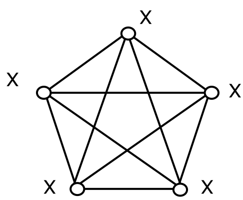
1. Боғланган графда локал даража ва қобиқлар сонини аниқланг.
2. T_1 ва T_2 даражаларнинг кесишуви $T_1 \cap T_2$ T даражани ташкил этишини кўрсатинг.

3. Граф G m та чўққидан ва n та қобиқдан иборат бўлиб чўққилар даражаси k ва k+1 га тенг. Агар граф G да m_k чўққи k даражага эга бўлса ва m_{k+1} чўққи k+1 даражага эга бўлса, у ҳолда m_k=(k+1)m-2m га тенг бўлишини исбот қилиш керак.
4. Тўғри ёки тўғри эмаслигини исбот қилинг: а) турли ҳилдаги 2 та боғлиқ маршрутларни 2 та чўққилар орқали бирлашуви циклни ташкил қилсин. б) иҳтиёрий икки хил йўлни иккита чўққи орқали бирлашуви циклни ташкил қилсин.
5. Ҳамма чўққиларининг даражасини 2 бўлган бекиқ занжир цикл эканлигини исботланг.
6. 23. Агар G графнинг иккита турли цикли u қобиғига эга бўлса, у ҳолда G графда u қобиғига эга бўлмаган цикл бор эканлигини кўрсатинг.
7. Агар бешта чўққили графнинг иккита чўққиси бир хил даражага эга бўлса уларнинг иккаласининг даражаси 0 га ёки 4 га тенг бўлиши мумкинми?
8. Даражалари 2, 3, 3, 4, 4, 4 бўлган олтита чўққидан иборат граф борми?
9. G графнинг ҳамма чўққиларидан ўтувчи x_1 дан x_5 гача оддий йўллар борми (1.18–расм)?



1.18–расм

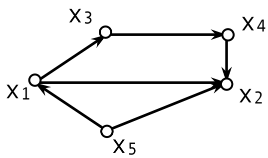
10. G графда қуйидаги қобиқлар сонидан иборат циклларни топинг (1.19–расм). а) 4 та қобиқли; б) 6 та қобиқли; в) 5 та қобиқли; г) 10 та қобиқли. Бу циклларнинг қайси бири оддий?



1.19–расм

11. Оддий циклда энг кам қобиқлар сони қанча?
12. Чўққилар сони $m \geq 3$ бўлган оддий циклда қобиқлар сони қанча?
13. m чўққидан иборат бўлган оддий йўлда қобиқлар сони қанча?
14. 17 та чўққили тўлиқ графдан бир нечта қобиқларни шундай олиб ташлаш керакки у ҳолда ҳар бир чўққининг даражаси 5 га тенг бўлсин.
15. Олтита чўққидан иборат боғланган G граф берилган, бунда шундай ёпиқ маршрутни топингки, ҳамма чўққилар уч марта қайтарилсин.
16. Тасвирланган гарфдан (1.20–расм):

а) ҳар бир чўққининг кириш ва чиқиш даражаларини аниқланг;
б) кириш ва чиқишни топинг;
в) E чўққидан C чўққигача бўлган йўллар сонини топинг;
г) E чўққидан C чўққигача бўлган масофани топинг.



1.20–расм

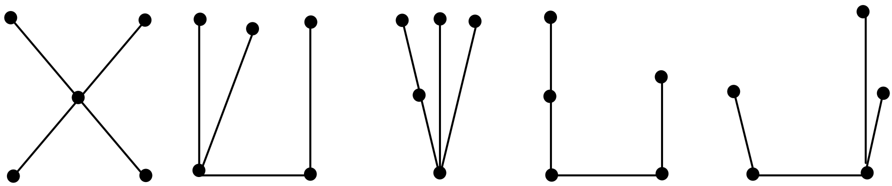
17. 5 та чўққили G гарфни чизинг, бунда граф:

а) 2 та чиқиш, 1 та киришдан иборат бўлсин;
б) чиқиш ва киришдан иборат бўлмасин.

II. ГРАФЛАРНИНГ ХУСУСИЯТЛАРИ.

2.1 Графларнинг турлари.

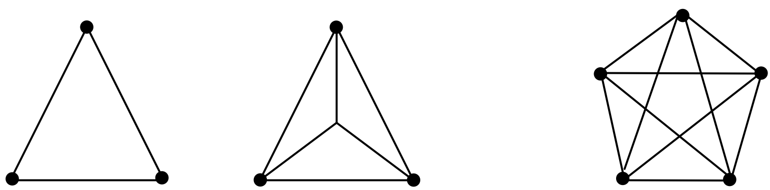
Дарахтлар. Дарахт деб, ҳалқага эга бўлмаган боғланган графга айтилади. Дарахтларни йиғиндиси ўрмон деб аталади. Шундай қилиб, ўрмоннинг компонентлари дарахт ҳисобланади. 2.1-расмда бешинчи тартибли дарахтлар келтирилган.



2.1 – расм

Дарахтларда ҳар бир чўққининг даражаси $\lambda(x_i)\geq 1$, яъни бошланғич ва тугаш чўққилар битта қобиқ билан боғланган, қолган чўққиларда боғланишлар сони бирдан кўп бўлади.

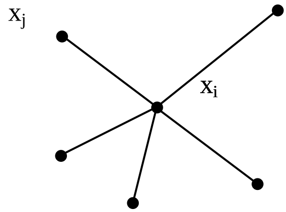
Тўлиқ графлар. Графда унинг иҳтиёрий иккита чўққиси бир-бирига боғланган бўлса тўлиқ граф деб аталади. Масалан, граф $G=<X, U>$ m та чўққидан иборат бўлса, ундаги қобиқлар сони $m(m-1)/2$ га тенг бўлади (2.2-расм).



2.2-расм.

Графлар оддий занжир (1.16-расм) ва оддий ҳалқа (1.17-расм) кўринишида бўлиши мумкин.

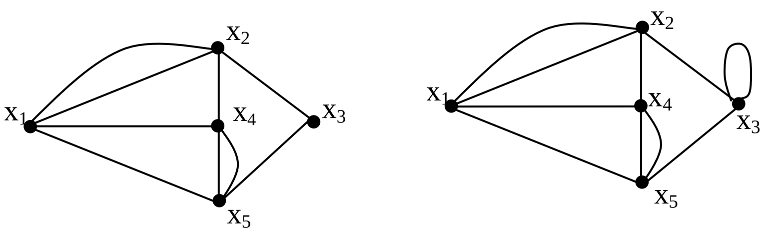
Юлдузли граф деб, бошланғич чўққиси x_i ва қолганлари X/x_j тугаш чўққилардан иборат бўлиб, қобиқлар ҳосил қилган графга айтилади (2.3-расм).



2.3 -расм

Мультиграф ва псевдограф. Айрим ҳолларда иккита чўққининг боғланиши биттадан кўп қобиқлар билан ифодаланади. Бундай ҳолларда мультиграф тушунчаси ҳосил бўлади. Мультиграф бу (X, U) иккилигидан ташкил топган бўлиб X – бўш бўлмаган чўққилар тўплами, U эса иккилик чўққилар тўпламчасидан ташкил топган қобиқлар тўплами. Тўпламчалар параллел қобиқлардан иборат (2.4.,а-расм).

Шундай килиб, агар иҳтиёрий графда бирорта қобиқлар карали ёки параллел бўлса, бундай графлар мультиграф дейилади.



а 2.4-расм. б

Айрим графларда параллел қобиқлардан ташқари, тугунчалар, яъни бошланғич ва тугаш чўққиларини битта чўққини ифодаловчи ва шу чўққи атрофида ташкил этилган қобиқ графда иштирок этса, бу ҳолда псевдограф ҳосил бўлади. У (X, U) иккилигидан иборат бўлади (2.4.,б-расм). Бу ерда X – бўш бўлмаган чўққилар тўплами, U эса тартибсиз чўққилар иккилиги – албатта ҳар хил бўлмаган қобиқларнинг мажмуаси.

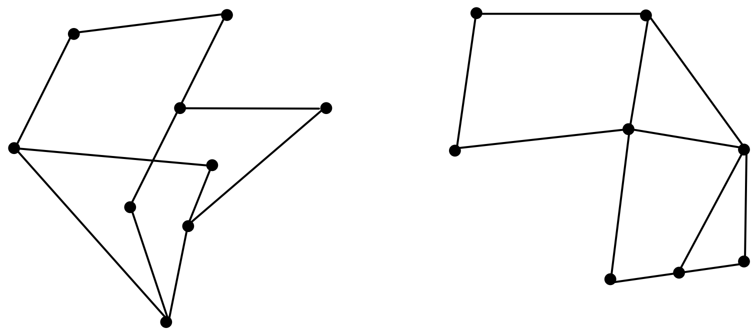
Йўналтирилган ва йўналтирилмаган графлар. Агар графни қобиқларини аниқлашда уларни бошланғич ва тугаш чўққиларининг тартиби инобатга олинмаса, яъни:

$$U=(x_i, x_j)=(x_j, x_i)$$

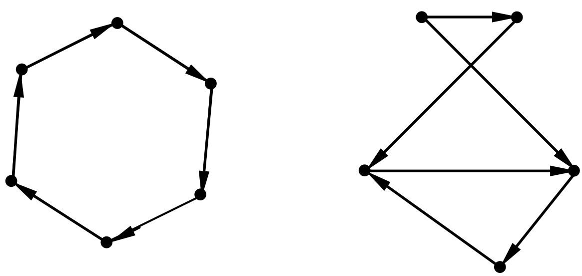
бўлса, у ҳолда U йўналтирилмаган қобиқ, агар уларнинг тартиби зарурий бўлса, йўналтирилган қобиқ деб аталади. Бунда x_i - қобиқнинг бошланғич чўққиси, x_j эса тугаш чўққиси ҳисобланади.

Граф йўналтирилмаган деб аталади, агар унинг ҳар бир қобиғи йўналтирилмаган бўлса ва йўналтирилган деб аталади, агар ҳамма қобиғи йўналтирилган бўлса.

Йўналтирилмаган графлар 2.5-расмда ва йўналтирилган графлар 2.6-расмда тасвирланган.



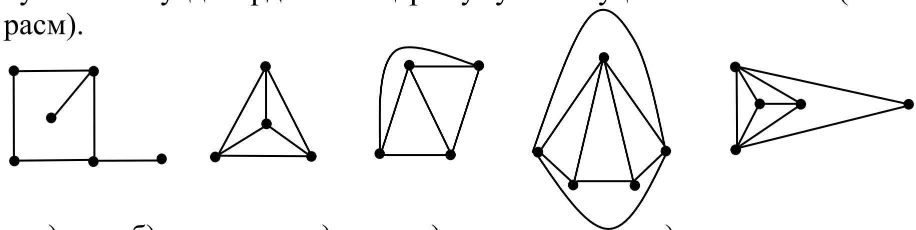
2.5-расм



2.6-расм

Кўпгина ҳолатларда аралаш графлар кўрилади. Улар йўналтирилган ва йўналтирилмаган қобиқлардан иборат бўлади. Масалан: шаҳарни планида қобиқлар билан кўчаларни, чўққилар билан эса чорраҳаларни белгилаймиз. Бу ҳолда айрим кўчалар бўйича бир томонлама ҳаракат бўлса, йўналиш берилади, айримлари бўйича эса икки томонлама ҳаракат бўлса, йўналиш берилмайди.

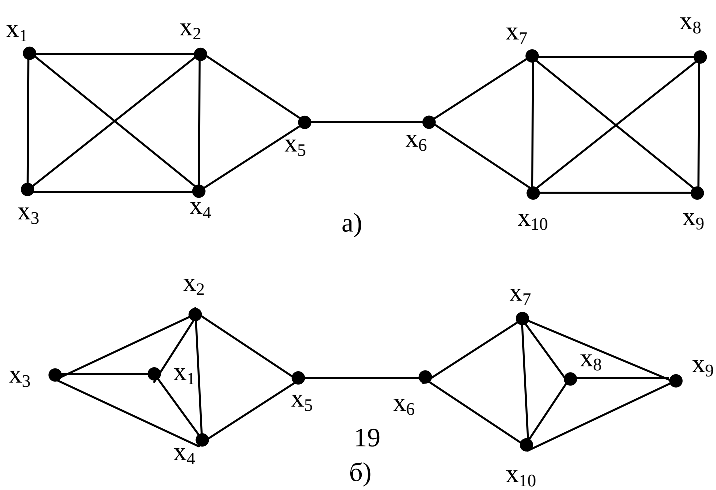
Текис ва планар графлар. Текис граф деб, шундай графларга айтиладики, унинг чўққилари текисликдаги нуқта бўлиб, кобиқлари эса ўзаро кесишмаган узлуксиз текис чизиқлардан ташкил топган. Унда иҳтиёрий иккита қобиқ уларга инцидент бўлмаган чўққилардан ташқари умумий нуқтага эга эмас (2.7-расм).



а) б) в) г) д)

2.7-расм

Текис графга ўхшаш ҳар қандай графни планар граф деб аталади. 2.7.,б-расмда тўрт чўққидан иборат бўлган граф, 2.7.,в-расмдаги тўрт чўққидан иборат бўлган графга ўхшаш бўлгани учун улар планар дейилади. Худди шу асосда 2.8-расмда келтирилган графлар ҳам бир-бирига ўхшаш ҳисобланади.



2.8-расм

Шундай қилиб қуйидагиларни маъқуллаш мумкин.

1) планар графнинг ҳар қандай бўлаги планардир.
2) агар графнинг боғловчи компонентлари планар граф бўлса, граф планар дейилади.

2.2. Йўналтирилган графлар ва унинг асосий хусусиятлари.

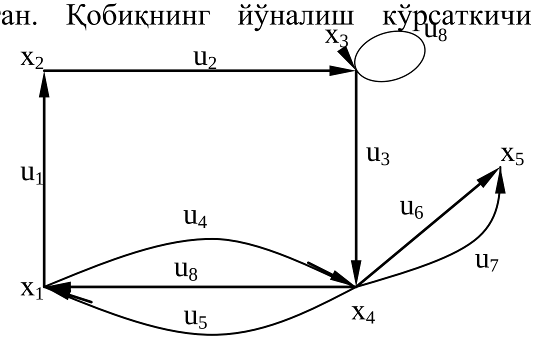
Агар графда қобиқларни бошланғич чўққиси ва тугаш чўққиси берилган бўлса, бундай қобиқлар йўналтирилган қобиқ деб аталади, улар асосида ташкил этилган граф эса йўналтирилган граф деб аталади.

Берилган граф G=<X, U> да X - йўналтирилган графнинг чўққилари, U – йўналтирилган графнинг қобиқлари. Бу ҳолда йўналтирилган қобиқ, тартибли жойлаштирилган жуфт чўққилардир.

Агар $U=(x_i, x_j)$ – йўналтирилган қобиқ бўлса, у ҳолда x_i ва x_j унинг тугаш чўққилари, яъни x_j – қобиқнинг бошланиши ва x_j – унинг тугаши. Йўналтирилган қобиқ тугаш чўққиларининг иккисига ҳам инцидент ҳисобланади. Ундан ташқари йўналтирилган қобиқ бошланғич чўққидан чиқиб иккинчи чўққида тугайди. Йўналтирилган қобиқнинг бошланиши ва тугаши бир-бирига мос келса, (x_i, x_j) тартибда у тугунча дейилади.

Йўналтирилган граф умумий бошланғич ва умумий тугаш чўққилардан иборат йўналтирилган қобиқлардан ва параллел қобиқлардан ташкил топади.

Масалан. 2.9-расмда йўналтирилган қобик йўналтирилган қобиқ билан яъни бир нуқтадан чиқиб иккинчисига кирувчи қобиқ орқали ифодаланган. Қобиқнинг йўналиш кўрсаткичи билан белгиланган.



2.9-расм

Бу расмда $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $U=\{ u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8\}$ ва $\{u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}$ - йўналтирилган параллел қобиқлар, u_8 – тугунчадир.

Йўналтирилган графнинг чўққилари, бирорта йўналтирилган қобиқнинг тугаш чўққилари бўлса, ҳамда йўналтирилган қобиқлар, умумий тугаш чўққисига эга бўлса улар боғланган ҳисобланади.

<u>Йўналтирилган графда чўққининг даражаси</u>. $G=<X,U>$ - йўналтирилган граф бўлсин, у ҳолда x_i чўққисидан чиқувчи ҳамма йўналтирилган қобиқларни $Г^+(x_i)$, ҳамда x_i чўққисига кирувчи ҳамма йўналтирилган қобиқларни $Г^-(x_i)$ деб белгилаймиз.

Чўққидан чиқувчи қобиқларни сони $\lambda^+(x_i)$ – чўққининг чиқиш даражаси, яъни $\lambda^+(x_i)= | Г(x_i) |$ деб аталади. Шунга ўхшаш x_i чўққига кириш даражаси $\lambda^-(x_i)$, яъни $\lambda^-(x_i)=| Г(x_i) |$ тарзида аниқланади.

Умумий ҳолда чўққининг даражаси унинг кириш ва чиқиш даражасини йиғиндисидан ҳосил бўлади:

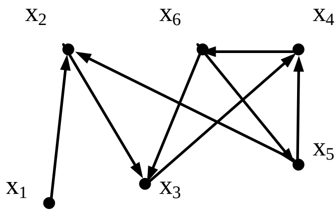
$$\lambda(x_i)= \lambda^+(x_i)+ \lambda^-(x_i)$$

Агар $P=\{P_1, P_2,..., P_k\}$ бирорта G графдаги умумий чўққига эга бўлмаган йўллар тўплами бўлса, у ҳолда граф G қуйидагича ифодаланади:

$$G=P_1 \text{ U } P_2 \text{ U}...\text{U } P_k$$

Граф G йўллар тўплами P дан иборат бўлиб, P эса йўналтирилган граф G нинг йўлларга бўлинишидан иборат. Граф G нинг бўлинишидаги P йўлларнинг минимал сонини *l* деб белгилаймиз ва натижада *l* (P) ташкил этилади.

Масалан. Берилган G=<X, U> граф (2.10-расм).



2.10-расм

Бу графда x_2 ва x_6 чўққиларни даражаси

$$\lambda^{+}(x_2)=1;\ \ \lambda^{-}(x_2)=2;$$
$$\lambda^{+}(x_6)=2;\ \ \lambda^{-}(x_6)=1;$$

2.3. Матрицалар ва уларни граф билан боғлиқлиги

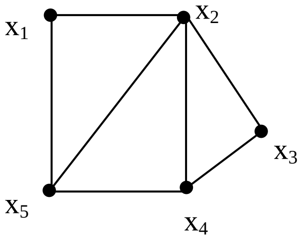
Боғланганлик матрицаси. Матрица А ва унинг элементи (i, j) билан аниқланиб у A_{ij} символи билан белгиланади. Агар матрицанинг ҳар бир элементи «0» ёки «1» билан белгиланса бу иккилик матрицаси деб аталади.

Графни боғланганлик матрицасининг горизонтал ва вертикал томонлари чўққилар асосида ифодаланади. Ҳар бир x_i чўққини иккинчи бир чўққи x_j билан боғланиши берилган G граф асосида белгиланади. Матрицада ҳар бир x_i чўққи ва x_j чўққини боғланганлигини кўрсатувчи элементлар $M(x_i,x_j)=1$ га тенг, акс ҳолда, яъни x_i ва x_j чўққилар орасида боғланиш бўлмаса, $M(x_i,x_j)=0$ га тенг бўлади. Шу тартибда берилган граф G=<X, U> нинг ҳамма чўққиларининг боғланиши унинг матрицасини қуриш асосида кўриб чиқилади ва матрица элементлари «1» ёки «0» қийматлари билан тўлдирилади.

Умумий ҳолда берилган G=<X, U> граф учун унинг чўққилари $X=\{x_1, x_2,...,x_m\}$ бўлса, у ҳолда иккилик mxm матрица A_{ij} ҳосил бўлади.

$$A_{ij}=\begin{cases}1, & агар \quad x_i \quad ва \quad x_j \quad чуккилар \; богланган \; булса \\ 0, & агар \quad x_i \quad ва \quad x_j \quad чуккилар \, богланмаган \, булса\end{cases}$$

A(G) матрицаси G графнинг боғланиш матрицаси деб аталади (2.11-расм).

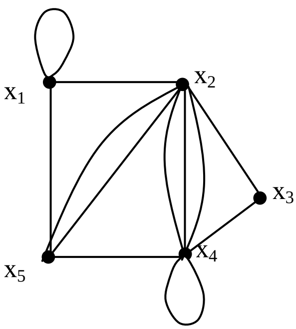


$$A_{ij}=\begin{array}{c|ccccc|} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ x_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ x_4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ x_5 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

2.11-расм

Бу матрицанинг диагонали бўйича ноллар бўлиб, симметрик матрица дейилади. Матрица қаторидаги бирлар сони мос чўққиларни даражасини аниқлайди.

Шунга ўхшаш тарзда мультиграфларни боғланганлик матрицаси ҳам аниқланади. Бу ҳолда A_{ij} x_i ва x_j чўққиларини боғловчи қобиқлар сонига тенг бўлади (тугунча иккита қобиққа тенг бўлади) (2.12-расм).

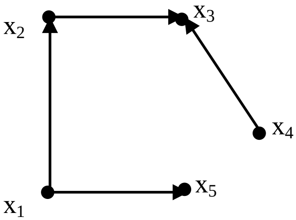


$$A_{ij}=\begin{array}{c|ccccc|} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ x_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ x_4 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ x_5 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

2.12-расм

Йўналтирилган графлар учун боғланганлик матрицаси куйидагича аниқланади:

Берилган граф G=<X,U> учун боғланганлик матрицасини қурамиз.



$$A_{ij}=\begin{array}{c|ccccc|}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\
x_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
x_2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
x_3 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
x_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
x_5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

2.13-расм

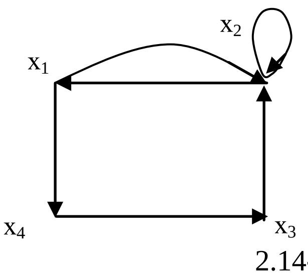
Бу ерда:

$I_{i,j}=$
- а) агар šобиš йœналиши бошланђич чœššидан тугаш чœššига бœлса $x_i \rightarrow x_j$;
- -1, агар šобиš йœналиши тугаш чœššидан бошланђич чœššига бœлса $x_i \leftarrow x_j$;
- 0, агар бођланиш бœлмаса;

Ҳар қандай йўналтирилган графнинг ҳам боғланганлик матрицаси бўлади. 2.14-расмда йўналтирилган граф G боғланганлик матрицаси билан тасвирланган.

Агар граф G=<X, U> йўналтирилган бўлса, у ҳолда A_{ij} боғланганлик матрица қуйидагича ҳисобланади:

$$A_{i,j}=\begin{cases} 1, & \text{агар} \quad (i,j)\in U \quad \text{булса}, \\ 0, & \text{агар} \quad (i,j)\notin U \quad \text{булса}, \end{cases}$$



$$A_{ij}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

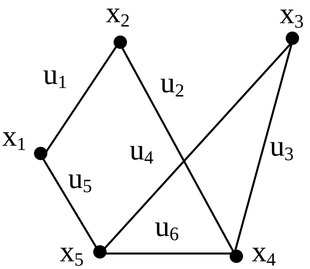
2.14-расм

Инцидентлик матрицаси. Граф G=<X, U> нинг инцидентли матрицаси I(G) нинг ҳар бир элементи

$$I_{i,j}=\begin{cases}1, & \textit{агар } x_i \textit{ чукки ва } u_j \textit{ кобик инцидент булса}\\ 0, & \textit{агар } x_i \textit{ чукки ва } u_j \textit{ кобик инцидент булмаса}\end{cases}$$

бу ерда, $X=\{x_1,x_2,...,x_m\}$ $U=\{u_1,u_2,...,u_n\}$

Шундай қилиб чўққилар матрицада горизонтал қаторларни билдирса, қобиқлар вертикал қаторни билдиради. Бу ҳолда қобиқларнинг ҳар бир қаторида иккитадан «1» қиймати бор бўлиши керак. Шу билан mxn қийматга эга бўлган матрица ҳосил бўлади (2.15-расм).



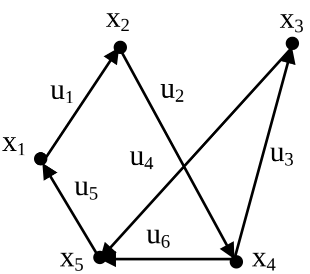
I(G)

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
x_1	1	0	0	0	1	0
x_2	1	1	0	0	0	0
x_3	0	0	1	1	0	0
x_4	0	1	1	0	0	1
x_5	0	0	0	1	1	1

2.15 – расм

Йўналтирилган граф учун инциндентли матрица I(G) қуриш учун қуйидаги шартлар бажарилиши керак:

$$I_{i,j}=\begin{cases}1, & \textit{агар } x_i \textit{ чукки } u_j \textit{ йуналтирилган кобикнинг бошлангич чуккиси булса}\\ -1, & \textit{агар } x_i \textit{ чукки } u_j \textit{ йуналтирилган кобикнинг охирги чуккиси булса}\\ 0 & \textit{агар } x_i \textit{ чукки } u_j \textit{ йуналтирилган кобикка инцидент булмаса}\end{cases}$$



I(G)

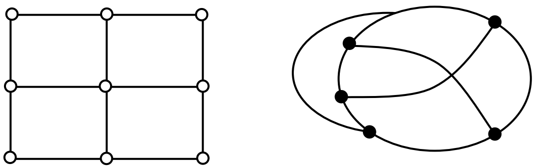
	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
x_1	1	0	0	0	-1	0
x_2	-1	1	0	0	0	0
x_3	0	0	1	1	0	0
x_4	0	-1	1	0	0	1
x_5	0	0	0	-1	1	-1

2.16 - расм

Инцидентли матрицани ташкил этилиши 2.16-расмда берилган граф G=<X,U> учун келтирилган.

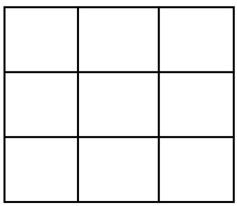
2.4. Масала ва машқлар.

1. Чўққилар сони m>5 бўлган текис графларни чизинг. Чўққилар орасида 4 та чўққининг даражаси 5 дан кичик бўлсин.
2. Контурсиз йўналтирилган графда битта кириш чўққи ва битта чиқиш чўққиси борлигини кўрсатинг.
3. Йўналган графда қуйидаги хусусиятлар ўринлигини исботланг
- йўналтирилган графларнинг ҳар бир маршрут йўли ҳисоблансин.
- G – контурсиз графни аниқланг.
- G йўналтирилган графнинг чўққиларини шундай тартибда ташкил этиш мумкинки, унинг боғланганлик матрицасини юқори учбурчакли матрица ташкил этсин.
4. Берилган графлардан текис ва нотекис графларни топинг.



2.17–расм

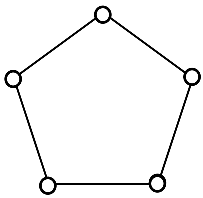
5. Тўғри кўп бурчаклар учун боғланганлик ва инцидентлик матрицаларини кўрсатинг.
6. Берилган квадратни унинг томонларига параллел бўлган тўғри чизиқлар ёрдамида n^2 кичик квадратларга тўғри бўлинг (2.18–расм).



2.18–расм

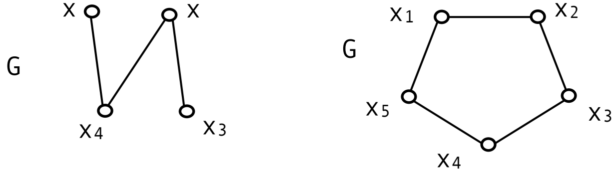
7. m- та чўққига ва n та қобиқлари бўлган тугунчасиз графларни тўлиқ сонини аниқланг.

8. Агар оддий граф G боғланмаган бўлса, у ҳолда унга қўшимча граф $\overline{G}$ боғланган бўлишини исботланг.
9. Агар граф G m та чўққи ва n та қобиққа эга бўлса, яъни n=m-1. Граф G боғланмаган граф эканлигини исботланг.
10. Агар $\delta\,(G) \geq (n—1)/2$ бўлса, n та чўққи оддий граф боғланган эканлигини исботланг.
11. Бўлмаганда 2 та чўққига эга бўлган оддий граф бир хил даражали 2 та чўққига эга эканлигини кўрсатинг.
12. Агар граф G=<X,U> оддий ва боғланган бўлса ва тўлиқ бўлмаса, у ҳолда у шундай 3 та x_i, x_j, x_k чўққига эгаки, (x_i, x_j) ва (x_j, x_k) қобиқлар U га тегишли, (x_i, x_k) – эса U га тегишли эмас.
13. Чуққилар сони m=2,3,5 бўлган тўлиқ графни чизинг.
14. Чуққилар сони m=3,5,k бўлган тўлиқ графда ҳар бир чўққи нечта қобиққа тегишли бўлади?
15. Чуққилар сони m=3,4,5 бўлган тўлиқ графда қобиқлар сони қанча?
16. Еттита қобиқдан иборат тўлиқ граф борми?
17. Чуққилар сони m бўлган тўлиқ графда қобиқлар сони n(n-1)/2 эканлигини исбот қилинг.
18. Тўлиқ граф ҳосил бўлиши учун тасвирланган графга нечта қобиқ қўшиш керак (2.19–расм)?

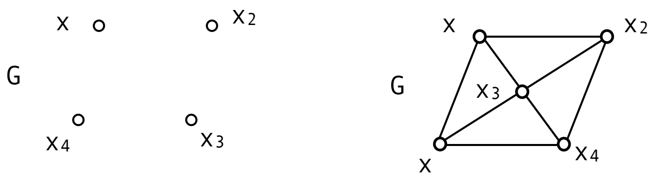


2.19–расм

19. G графига қўшимча бўлган $G^{|}$ графини чизинг (2.20–расм).

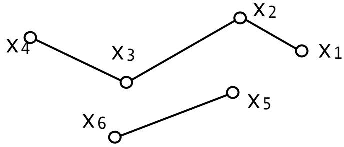


а)   б)



в) 2.20–расм г

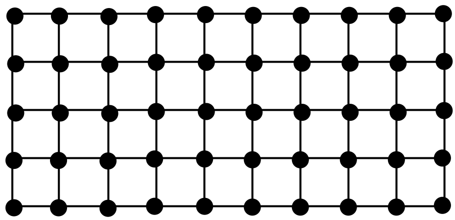
20. Шундай бешта чўққидан иборат бўлган графни топиш мумкинми? Унинг битта чўққиси озод ва бошқасиниинг даражаси тўртга тенг бўлсин.
21. Шундай бешта чуққидан иборат бўлган графни топиш мумкинми? Унинг чўққилари даражаси ҳар хил, яъни 0,1,2,3,4.
22. Бешта чўққидан иборат G графини чизинг, унда иккита чўққи бир хил даражага эга бўлсин.
23. Тасвирланган графни шундай тўлдирингки у боғланган бўлсин (2.21–расм).



2.21–расм

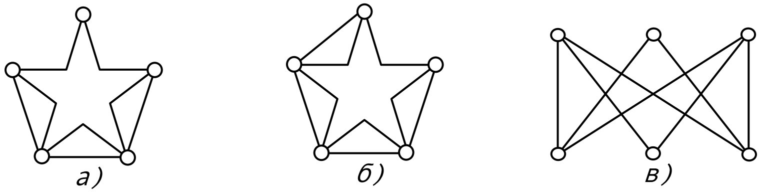
24. 7 та чўққи ва 6 та қобиқдан иборат ҳамда циклга эга бўлмаган граф чизинг.
25. 7 та чўққи ва 6 та қобиқдан иборат бўлган боғланган графни чизинг.
26. Ҳар қандай иккита чўққи орасида уларни боғловчи ягона йўлдан иборат бўлган 7 та чўққили граф қуринг.
27. G графнинг бир қисм қобиқларини шундай олиб ташлангки, натижада ҳосил бўлган граф G дарахтдан иборат бўлсин ва графнинг барча чўққиларини ўзида сақласин.
28. m та чўққидан ва n та қобиқдан иборат бўлган графнинг барча чўққиларини сақлаган ҳолда дарахт ҳосил қилиш учун нечта қобиғини олиб ташлаш керак.

29. 2.22–расмда берилган граф боғланган граф бўлиши учун энг кўпи билан қобиқларни олиб ташлаш мумкин?



2.22–расм

30. 5 та чўққидан иборат ҳамма мумкин бўлган дарахтларни кўриб чиқинг. Уларнинг ҳар бир чўққисининг даражаси 1 га ёки 2 га тенг. Шундай дарахтлардан бор?
31. Берилган G граф текислигини исботланг (2.23–расм).

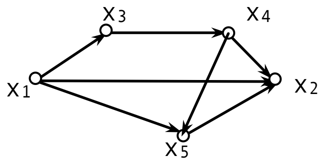


2.23–расм

32. Тўртта чўққидан иборат текис бўлмаган граф борми?
33. Олтита чўққидан иборат текис бўлмаган графларга мисол келтиринг.
34. G графга янги қобиқларни шундай қўшсангиз, натижада текис граф ҳосил бўладими? Агар мумкин бўлса, улар қандай кўринишда бўлади.
35. G графни қобиқларини тўғри чизиқ билан текисликда тасвирланг.
36. m та чўққидан ҳамда n та қобиқдан иборат бўлган йўналтирилган графда қуйидагиларни исботланг:
   а) x_1 кириш даражаси + x_2 кириш даражаси + … + x_m кириш даражаси = n;

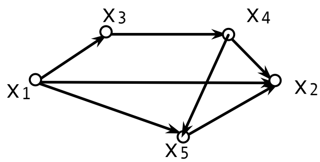
б) x_1 кириш даражаси + x_2 кириш даражаси + … + x_m кириш даражаси = x_1 чиқиш даражаси + x_2 чиқиш даражаси + … + x_m чиқиш даражаси;

37. Нима учун берилган граф тўлиқ йўналтирилган граф эмас (2.24–расм)?



2.24–расм

38. Олтита чўққидан иборат бўлган тўлиқ йўналтирилган графни чизинг.
39. Тасвирланган граф учун боғланганлик матрицасини қуринг (2.25–расм).



2.25–расм

40. Қуйида келтирилган боғланганлик матрицалари учун графларини тасвирланг.
41. Граф боғланганлик матрица кўринишида келтирилган. Шу матрица орқали қандай топиш мумкин?: а) графнинг чўққилари сонини; б) B_i чўққидан чиқувчи қобиқлар сонини; в) B_i чўққига кирувчи қобиқлар сонини; г) йўналтирилган графдаги қобиқлар сонини.
42. Агар графнинг боғланганлик матрицасида асосий диогоналдаги элементлар 0 га тенг бўлса, бундай граф қандай хусусиятга эга?
43. 5 та чўққидан иборат бўлган боғланмаган графни чизинг.
44. Графнинг боғланган матрицасини топинг
45. Графнинг инцидентли матрицасини топинг.

46. Графнинг бўлакларини топинг.
47. Марказида битта чўққи бўлган графни қуринг.
48. Марказида учта боғланган чўққи бўлган графни қуринг.
49. Даражаси $\lambda(x_i)\geq n$ бўлган дарахтларни қуринг, n=1,2,…,10.
50. λ_5 чўққини боғланган графларда энг кам қобиқлар сони қанчага тенг?
51. Чўққилар сони n>5 бўлган текис графни чизинг. Унда даражаси 3 дан катта бўлмаган 4 та чўққи бўлиши керак.

III. ГРАФЛАРНИ ИЗОМОРФЛИГИНИ АНИҚЛАШ.

3.1. Графлар изоморфлигининг асосий шартлари

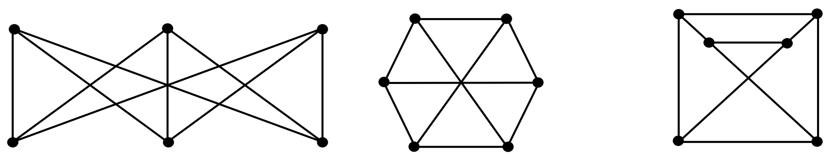
Иккита граф $G=\langle X, U\rangle$ ва $G^{|}=\langle X^{|}, U^{|}\rangle$ изоморф дейилади, агар уларнинг чўққилар тўплами X, $X^{|}$ ўзаро мос бўлса, яъни бир графдаги чўққилардан ташкил этилган қобиқлар U, иккинчи графдаги чўққиларни бирлашувидан ташкил топган қобиқларга $U^{|}$ мос келиши керак. Агар қобиқлар йўналтирилган бўлса, у ҳолда уларни йўналишлари ҳам иккита граф бўйича мос келиши керак.

Графларни изоморфлигини аниқлашни – эквивалентлик ёки ўхшашлик деб ҳам тушуниш мумкин.

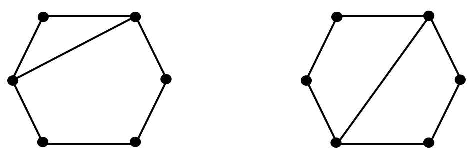
Графлар назариясида графларни изоморфлигини аниқлаш асосий марказий ўринни эгаллайди. Айрим авторларни фикрига кўра [1], умумий ҳолда бу масала тўлиқ саралаш билан ечилади. Бу ҳолда m та чўққига эга бўлган иккита оддий графни изоморфлигини аниқлаш учун m! тенг таққослаш керак бўлади.

Масалан: Берилган учта граф (3.1-расм) бир-бирига нисбатан изоморф бўлса, 3.2 - расмда берилган графлар эса изоморф эмас, нима учун?

Бу саволга жавоб бериш учун изоморф масаласини тўлиқ кўриб чиқишга тўғри келади.



3.1–расм

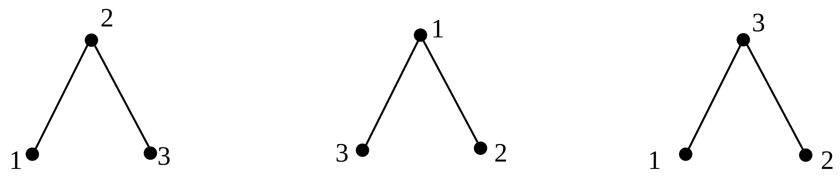


3.2–расм

Графларни изоморфлигини аниқлаш талаб этилган ҳолда, белгиланган граф тушунчасини киритиш мумкин.

Граф боғланган бўлади, агар унинг чўққилари бирорта белгига эга бўлса, масалан 3.3–расмда чўққилари ҳар хил белгиланган учта граф берилган.

Бундай графлар бир-бирига ўхшаш, яъни изоморф графлар деб аталади, чунки улар чўққиларини тартиб рақами билан белгилаш бўйича фарқ қилади.



3.3–расм

Шундай қилиб 3.1–расмда берилган графлар бир-бирига изоморф ҳисобланади, чунки кўриниш жиҳатдан ҳар хил бўлишига қарамасдан чўққиларини бир-бири билан боғланиши, яъни чўққиларни ёки қобиқларни ташкил этилиши бир хилдир. Бу расмда ҳам чўққиларни ёки қобиқларни тартиб рақамини ўзгариши уларни изоморфлигини исхор эта олмайди.

Графларни изоморфлигини аниқлашнинг бир нечта йўллари бор.

1. Графлар изоморф бўлади, агар уларнинг боғланганлик матрицалари бири иккинчисидан қаторларини ва устунларини ўрнини бир хил алмаштириш билан ҳосил қилинган бўлса. Бу ҳолда боғланганлик матрицалари тенг бўлса, графлар изоморф бўлади.

2. Графлар изоморф бўлади, агар уларнинг инцидентли матрицаси бири иккинчисидан қатор ва устунларни ўрнини ихтиёрий ўзгартириш орқали олинади, яъни бу ҳолда бир-бирига тенг бўлган инцидентли матрица ҳосил бўлиши керак.

3. Графларни изоморфлигини топиш учун саралаш усулидан фойдаланиш таклиф этилади, яъни саралаш сонини камайтиришдан иборат. Шундай усуллардан бири графларни сатҳларга бўлишга асосланган. Бундай ечилиш усуллари кўпроқ амалиётга боғлиқ бўлиб бошланғич чўққиларни тўғри танлашга

асосланган, яъни иккита граф бўйича бир-бирига мос чўққиларни аниқлаш талаб этилади. Бундай чўққиларни аниқлаш электрик, функционал, топологик ва бошқа схемаларда қийинчилик туғдирмайди.

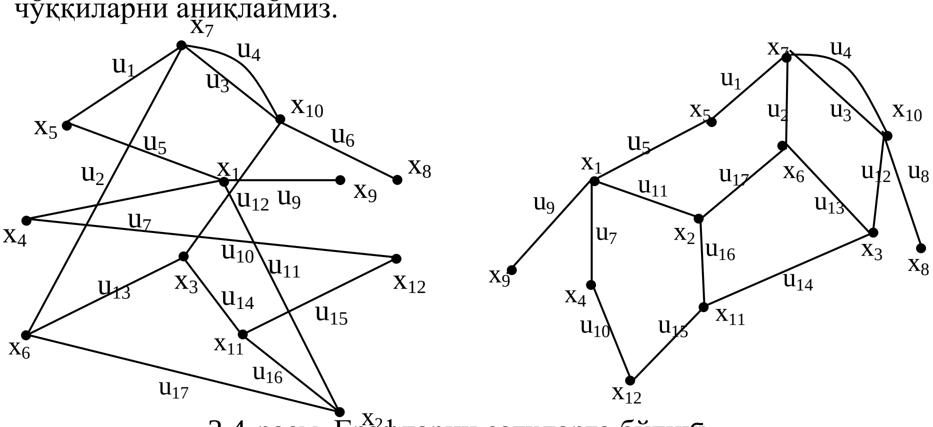
3.2. Графларни сатҳларга бўлиш

Лемма 1. Ихтиёрий граф $G<X,U>$ нинг U қобиқларини R сатҳларга бўйича бўлиш мумкин.

<u>Исбот.</u> $G=<X,U>$ ихтиёрий йўналтирилмаган граф (3.4.,а-расм) берилган, бу ерда $X=\{x_1, x_2,..., x_m\}$ – чўққилар тўплами; $U=\{u_1, u_2,..., u_n\}$ қобиқлар тўплами. Графнинг қобиқларини сатҳлар $R=\{1, 2,...,r,...,l\}$ бўйича бўлиш талаб этилади.

Графни сатҳларга бўлиш учун биринчи бошланғич чўққи $X_H \in X$ ёки бошланғич $X_{H1} \subset X$ чўққиларни танлаб олиш талаб этилади. Бу чўққилар биринчи сатҳ r=1 учун бошланғич чўққилар ҳисобланади. Агар бошланғич чўққилар маълум бўлса, уларга мос равишда инцидент бўлган $U_r \subset U$ қобиқларни аниқлаймиз. Бу қобиқлар биринчи сатҳнинг қобиқлари ҳисобланади ва уларнинг иккинчи чўққилари $X_{K1} \subset X$ шу сатҳнинг тугаш чўққилари ҳисобланади. Шу тартибда графнинг биринчи сатҳи r=1 учун $(X_{H1}, X_{K1})= U_r$ ҳосил қиламиз (3.4.,б-расм).

Берилган 3.4.,а-расмда бошланғич чўққини $X_{H1}=(x_7)$ деб белгилаймиз, у ҳолда x_7 га инцидент бўлган $U_1=(u_1, u_2, u_3, u_4)$ қобиқларни топамиз ва улар билан боғлиқ бўлган $X_{K1}=(x_5, x_6, x_{10})$ чўққиларни аниқлаймиз.



а 3.4-расм. Графларни сатҳларга бўлиш. б а- граф $G<X,U>$; б- граф $G^{|}<X^{|},U^{|}>$

Шу тариқа кейинги сатҳ r=2 учун X_{K1} чўққилари бошланғич чўққилар $X_{H2}=X_{K1}$ деб аниқлаб уларга боғлиқ бўлган U_2 қобиқларни аниқлаймиз ва натижада улар билан боғлиқ бўлган чўққилар X_{K2} ҳосил бўлади.

Сатҳ r=2 учун бошланғич чўққилар $X_{H2}=\{x_5, x_6, x_{10}\}$ бўлса, $X_{K2}=\{x_1, x_2, x_3, x_8\}$ эса тугаш чўққилар ҳисобланади, натижада қобиқлар $U_2=\{u_5, u_9, u_{10}, u_6, u_8\}$ ҳосил бўлади.

Шундай қилиб ҳар бир сатҳнинг бошланғич чўққилари X_H га нисбатан тугаш чўққилар X_K ва қобиқлар U аниқланиб улар сатҳларга тақсимланади. Натижада граф $G=<X,U>$ учун граф $G^{|}=<X,U>$ ҳосил бўлади. Ҳосил бўлган граф $G^{|}$ – йўналган граф деб аталади ва унинг чўққилари X ва қобиқлари U га тенг бўлади.

1-шарт. Агар бирор $r\in R$ сатҳнинг чўққилари шу сатҳ учун боғланган ва тугаш бўлсалар, уларни боғловчи қобиқлар r+1 даражага қарашли бўлади ва у чўққиларнинг бири бошланғич, иккинчиси эса тугаш чўққи бўлади.

2-шарт. Графда x_i чўққисига инцидент бўлган қобиқлар сонини аниқловчи, даражаси $\lambda(x_i)\geq 1$ бўлган бошланғич ва тугаш чўққилар бўлиши мумкин.

3-шарт. Графнинг чўққисидаги тугунча, шу чўққи бошланғич бўлган сатҳга тегишли бўлади.

4-шарт. Агар йўналтирилган қобиқлар бирор чўққидан чиқувчи ва унга кирувчи бўлса, у чўққилардан бири бошланғич бўлган сатҳга қарашли бўлади.

5-шарт. Иккита чўққларни боғловчи параллел қобиқлар ёки йўналтирилган қобиқлар уларни турига қарамасдан битта сатҳга қарашли бўлади.

Лемма 1А. Агар иҳтиёрий граф боғланмаган бўлса, унинг ҳар бир боғланиш компонентасининг қобиқлари сатҳлар бўйича алоҳида бўлинган бўлиши керак.

Бу ҳолда графнинг ҳар бир боғланиш компонентасига нисбатан 1-лемма ва 1-5 – шартлар бажарилиши керак.

3.3. Графларни изоморфлиги

G=<X,U> ва L=<Y,U> графларни изоморфлигини аниқлашда қуйидаги асосий шартлар бажарилиши керак бўлади:

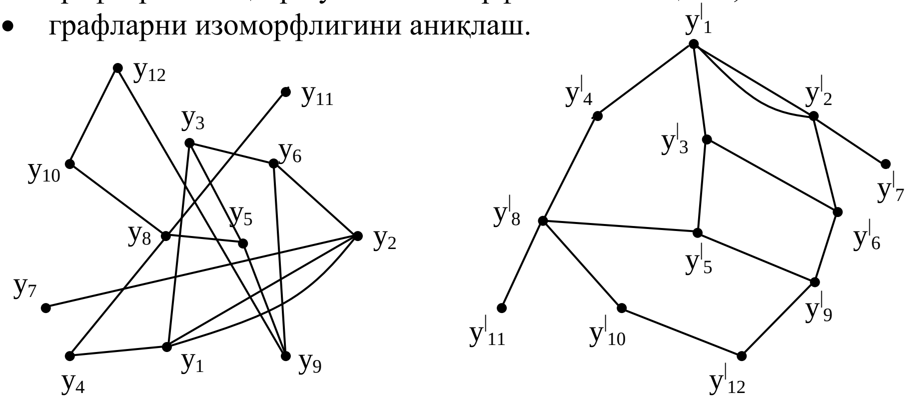
- Графларнинг чўққилари сони тенг бўлиши керак, яъни | X | = | Y |;
- Графларнинг қобиқлари сони тенг бўлиши керак, яъни | U | = | V |;
- Графларни чўққилари X,Y ва қобиқлари U, V мос равишда тенг бўлиши керак, яъни X<=>Y, U<=>V.

Бу учта шартни бажарилиши графларни изоморфлигини таъминлайди. Биринчи ва иккинчи шартлар зарурий шарт, учинчи шарт эса етарли шарт ҳисобланади.

Биринчи ва иккинчи шартларни бажариш учун, G ва L графлардаги чўққилар сонини тенглиги аниқланади. Бу ерда чўққилар тўплами $X=\{x_1, x_2,..., x_m\}$, $Y=\{y_1, y_2,..., y_{m1}\}$ ва қобиқлар тўплами $U=\{u_1, u_2,..., u_n\}$, $V=\{v_1, v_2,..., v_{n1}\}$.

G=<X,U> ва L=<Y,V> графларни изоморфлигини аниқлаш учун юқоридаги шартларни ҳисобга олган ҳолда қуйидаги масалаларни ечиш талаб этилади.

- графларда бошланғич чўққиларни топиш;
- графларни сатҳларга бўлиш;
- графларни сатҳлар бўйича изоморфлигини аниқлаш;
- графларни изоморфлигини аниқлаш.



а б

3.5-расм. Графларни сатҳларга бўлиш.
а- граф L=<Y,V>, б- граф $L^|$=<$Y^|$,$V^|$>

3.2 бандга асосланган ҳолда L=<Y,V> графидан $L^{|}$=<$Y^{|}$,$V^{|}$> йўналган графини ҳосил қиламиз.

3.3.1 Графларда бошланғич чўққиларни топиш

Графларда бошланғич чўққиларни топиш учун қуйидаги леммадан фойдаланамиз:

Лемма 2. Иҳтиёрий G=<X,U> ва L=<Y,V> графлар берилган (3.4а, 3.5а–расмлар). Улар ўзаро мос келувчи минимал сонга тенг бўлган $x_i \in X$ ва $y_i \in Y$ чўққиларидан иборат. Бу ҳолда G ва L графлари учун қуйидаги шартлар бажарилиши керак:

$$S^G=S^L$$

бу ерда,

$$S^G= S^o(x_i)+S^-(x_i)+S^+(x_i)+ S^{\sim}(x_i);$$
$$S^L= S^o(y_i)+ S^-(y_i)+ S^+(y_i)+ S^{\sim}(y_i)$$

$S^o(x_i)$, $S^o(y_i)$ – x_i ва y_i чўққиларидаги тугунчалар сони;

$S^-(x_i)$, $S^-(y_i)$ – x_i ва y_i чўққиларига кирувчи йўналтирилган қобиқлар сони;

$S^+(x_i)$,) – x_i ва y_i чўққиларидан чиқувчи йўналтирилган қобиқлар сони;

$S^{\sim}(x_i)$, $S^{\sim}(y_i)$ – x_i ва y_i чўққиларига инцидент бўлган қобиқлар сони.

Ўзаро мос келувчи чўққиларни топиш G ва L графлар учун белгили матрицаларни ҳисоблашга асосланади. Белгили матрицаларда M_P^G ва M_P^L уларнинг қоторлари чўққининг тартиб рақамлари билан, устунлари эса қобиқларнинг белгилари (ψ,η,δ,θ) билан аниқланади. Бу ерда ψ - x_i ёки y_i чўққилардан чиқувчи йўналтирилган қобиқлар сонини аниқловчи белги; η - x_i ёки y_i чўққиларига кирувчи йўналтирилган қобиқлар сонини аниқловчи белги; δ - x_i ёки y_i чўққиларидаги тугунчалар сонини аниқловчи белги; θ x_i ёки y_i чўққиларига инциндент бўлган қобиқларни аниқловчи белги.

M^G ва M^L матрицаларнинг тенг қийматлилигини аниқлаш матрицалар қаторини кетма-кет таққослаш орқали тенг қийматли белгилар сони бўлган қаторларни топиш билан аниқланади. Бу қаторлар бир-бирига мос бўлган чўққиларни аниқлайди.

$$M_P^G(\mathrm{i, j}) = M_P^L(\mathrm{i}+\tau,\mathrm{j}),\ M_P^G(\mathrm{i}^{|}, \mathrm{j}^{|}) = M_P^L(\mathrm{i}^{|}+\tau^{|},\mathrm{j}^{|}),$$
$$M_P^G(\mathrm{i, j}) = M_P^L(\mathrm{i}^{|}, \mathrm{j}^{|})$$

Бу ерда, j, $j^{|}=\overline{1,H}$; $\tau,\tau^{|}$ - ўзгарувчан сонлар, улар 1 дан m-1 гача *i* га тенг бўлмаган қийматларни қабул қилиши мумкин. M_P^G ва M_P^L матрицалари бўйича тенг қийматли қаторларни топишда бир-бирига тенг бўлган қаторлар сонини, яъни $\tau,\tau^{|}$ аниқлаш керак. Бу ҳолда M_P^G да тенг қийматли қаторлар сони минимал қийматга эга бўлиши керак, M_P^G ва M_P^L да уларни сони тенг бўлиши керак.

G ва L графларда тенг қийматли қаторлар $X_K \subset X$ ва $Y_K \subset Y$ чўққиларини аниқлайди. Шундай қилиб кўрилаётган графларда ўзаро мос бўлган $X_K \Leftrightarrow Y_K$ чўққилар аниқланади ва улар бошланғич чўққилар $X_H = X_K$, $Y_H = Y_K$ ҳисобланади. Бошланғич чўққилар X_H, Y_H ни топиш учун қаторлар устида N марта таққослаш олиб бориш керак

$$m \le N \le m\,(m+1)/2$$

бу ерда, m графдаги чўққилар сони.

Умумий ҳолда G ва L графлари учун бир хил даражага эга бўлган ўзаро мос келувчи $|X_H|>1$, $|Y_H|>1$ топилиши мумкин. Белгили матрицаларни ҳар бир сатҳи ва қатори бўйича таққослаб, тенг қийматли қаторларни аниқлаймиз, яъни $S(x_i)=S(y_i)$.

Бундай ҳолларда бу чўққилар бошланғич чўққилар деб қабул қилинади. (Лемма 1).

Натижада, агар G ва L графлари изоморф бўлса, M_P^G ва M_P^L матрицаларида ҳеч бўлмаганда битта тенг қийматли қатор ва ўзаро мос чўққи мавжуд бўлади.

2А-Лемма. Агар иҳтиёрий графлар боғланмаган компоненталардан ташкил топган бўлса, уларда ўзаро мос бўлган боғланмаган компоненталарни бошланғич чўққиларини биргаликда топиш мумкин.

Граф G ва L нинг чўққилари ва қобиқлари, ҳамда боғланмаган компонентларининг белгили матрицалари тенг қийматли бўлса, боғланганлик компоненталари тенг қийматли бўлади.

2-Лемма асосида бир-бирига ўхшаш белгили матрицалар танлаб олингандан сўнг ҳар бир боғланганлик матрицаси учун бошланғич чўққи аниқланади.

<u>3-Лемма</u>. Агар G ва L графлар изоморф бўлса, $G^{|}$ ва $L^{|}$ графларнинг ҳар бир сатҳида (3.5-расм) бошланғич ва тугаш чўққилари сони бир хил ва улар ўзаро мос.

<u>Исбот.</u> G графнинг ҳар бир қобиғини $u_J \in U$ ни $(\omega_\alpha, \varphi_\beta)$ билан аниқлаймиз. L графнинг ҳар бир қобиғи $v_J \in V$ ни эса (w_α, γ_β) билан аниқлаймиз.

Бу ерда α =1,2,...A; β =1,2,...B қийматлар қабул қилади; ω_α, w_α - u_J, v_J қобиқларнинг x_I, y_i бошланғич чўққиларини r сатҳидаги тартиб рақами. φ_α, γ_β - u_j ва v_j қобиқларнинг x_I, y_j тугаш чўққиларини r сатҳидаги тартиб рақами.

Графларни сатҳларга бўлиш усули (1-Лемма) га асосан чўққиларни қайта тартиб рақамини аниқлаймиз. Ҳар бир сатҳ учун α ва β ларни қийматларининг ўсиш тартиби алоҳида бўлади. Бу тартиб G ва L графларни чўққиларини даражасини ҳисобга олган ҳолда белгили матрицалари (2-Лемма) ёрдамида аниқланади. Агар A=B бўлса, яъни ҳар бир сатҳидаги чўққилар сони тенг бўлса, у ҳолда чўққиларни бир-бирига нисбатан ўзаро мос келишини аниқлаш керак.

Чўққиларни ўзаро мос эканлигини аниқлаш учун, уларни сатҳини ўсиш тартибини аниқлаш керак. Натижада граф G ва L нинг қобиқлари ва чўққилари сатҳлар бўйича тақсимланиб ички тартиб рақамлари билан аниқланган бўлади.

<u>1-Теорема.</u> G граф L графга изоморф бўлади, агар:

1. Ихтиёрий r даражасида G ва L графлар бўйича бошланғич чўққилар ва тугаш чўққилар ва уларнинг сатҳлари бир-бирига тенг бўлса

$$\forall r \in R\ [|\omega_\alpha|=|w_\alpha|,\ |\varphi_\beta=\gamma_\rho|,\ s(x_i)=s(y_i)]$$

2. Ихтиёрий x_i чўққиси учун шундай y_i чўққиси борки улар учун бошланғич ва тугаш чўққилари тенг бўлиш шарти бажарилса

$$\forall x_i \in X\ \exists y_i \in Y[(\omega_\alpha = w_\alpha) \wedge (\varphi_\beta = \gamma_\beta)]$$

3. $G^|$ ва $L^|$ графларнинг инцидентли матрицалари бир-бирига ўхшаш ёки тенг бўлса

$$M_G = M_L$$

<u>Исбот.</u> 1-леммага нисбатан Х, У тўпламларни ҳар бир чўққиси ва U, V тўпламлари қобиқлари даражалар бўйича тақсимланади. Ҳар бир граф учун бошланғич чўққи 2-лемма асосида аниқланади. (3.4.,б- расм). Натижада G ва L графлари $G^|$ ва $L^|$ йўналтирилган графларга айланади. 3-лемма асосида графларнинг чўққиси ва қобиқлари янги тартиб рақамларга эга бўлади. Натижада r сатҳда бошланғич ва тугаш чўққиларни ўзаро тенг қийматга эга бўлиши 1-2–теоремаларни керакли шартларини бажарилишини таъминлайди.

Теореманинг етарли шарти графларни инцидентлик матрицаларини M_G ва M_L тенглиги ва уларнинг ҳар бири сатҳлар бўйича матрицалардан ташкил топганлиги билан аниқланади. Агар даражалар бўйича матрицалар тенг қийматга эга бўлса, у ҳолда матрицалар тенг бўлади. Натижада $G^|$ ва $L^|$ графлар изоморфлиги таъминланади.

M_G ва M_L матрицаларни ўхшашлиги уларнинг элементлари $a_{i\ j}$ ва $a_{ji}^|$ ларни қаторлар (қобиқлар) бўйича таққослаш орқали аниқланади. G ва L графлар сатҳларга бўлинганлиги каби инцидентлик матрицаси ҳам сатҳлар бўйича N_r ва $N_r^|$ аниқланади. Бу ерда $N_r=\|a_{jt}\|$ ва $N_r^|=\|a_{js}\|$; t,s=1,2,... матрицаларга нисбатан ҳар бир сатҳидаги устунлар сони.

Шундай қилиб:

- матрица устунларининг элементлари мос равишда тенг қийматли бўлиши керак $a_{j\,t} \Leftrightarrow a_{j\,s}$;
- матрица сатҳларидаги устунлари тенг қийматли бўлиши керак:

$$A_t \Leftrightarrow A^|_s \text{ бу ерда } A_t=\{a_{1t}, a_{2t},..., a_{nt}\};$$

$A^{|}_s=\{a^{|}_{1s}, a^{|}_{2s},..., a^{|}_{ns}\}$;

- матрица сатҳлари тенг қийматли бўлиши керак:

$N_r=\|A_t\| \Leftrightarrow N^1_r=\|A^1_s\|$;

- матрицалар тенг қийматли бўлиши керак:

$M_G=\| N_r \| \Leftrightarrow M_L=\| N^1_r \|$.

Натижада сатҳлар бўйича матрицалар тенг бўлади, агар қуйидаги шартлар бажарилса,

$$\mu=\begin{cases}0, & агар\,(\forall a^{|}ij \in A^{|}_s \exists aij \in A_t)\Lambda(\forall A^{|}_s \in N^{|}_r \exists A_t \in N_t)\left[N_r <=> N^{|}_r\right] \\ \varsigma, & агар \qquad (\forall a^{|}_{ij} \in A^{|}_s \exists a_{ij} \in A_t)\left[a_{ij} \neq a^{|}_{ij}\right]\end{cases}$$

Агар $\mu_r=0$ бўлса сатҳлар тенг қийматли, $\mu_r=\xi_{r1}$ - сатҳлар тенг эмас. Иккинчи ҳолда r сатҳ учун хатоликлар $\xi_r=\{\xi_1, \xi_2,..., \xi_{r1}\}$ тўпламида йиғилади. Бу тўпламда w_α, γ_β ва уларга мос қобиқ ν_j, ҳамда ω_α, φ_β ва u_j қобиғидан ташкил топади. ω_α, φ_β ва қобиқ u_j қийматлари ёрдамида y_i ва y_i^1 чўққиларни боғловчи υ_j қобиғи аниқланади. r сатҳ бўйича хатоликларни аниқлагандан сўнг r+1 сатҳ кўриб чиқилади. Натижада ҳамма сатҳларни таққослаб ўзгартириш керак бўлган чўққилар топилади.

2-Теорема. G ва L графларни изоморфлигини аниқлаш учун $\frac{1}{2}\sum_{v=1}^{e} n_r\left(n_\mu+1\right)$ таққослаш етарли ҳисобланади. Бу ерда r - сатҳнинг тартиб рақами, n_r- хар бир сатҳдаги қобиқлар сони, m - чўққилар сони, n - қобиқлар сони.

G ва L графларни изоморфлигини аниқлаш учун, умумий ҳолда G графнинг ҳар бир қобиғини L графнинг ҳар бир қобиғи билан таққослаш талаб этилади. M_G матрицасини ҳар бир устунига иккинчи M_L матрицанинг мос устунини топиш учун, M_G нинг ҳар бир устунини M_L нинг ҳамма устунлари билан таққослаб мос устунни танлаб олиш учун n та таққослашни бажариш керак. Кейинги устунларни топишда n-1, n-2... таққослашлар олиб борилади. Шундай қилиб M_G ва M_L ни тенг қийматли эканлигини топиш учун n(n+1)/2 таққослаш керак бўлади. Агар бу таққослашлар сатҳ миқёсида олиб борилса, ҳар бир сатҳ учун

$\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{e} n_r\left(n_r+1\right)$ таққослаш керак бўлади. Ҳар бир матрица M_G ва M_L мос равишда сатҳ матрицалари N_r ва $N_r^|$ билан аниқланади.

G ва L графларни изоморфлигини уларни сатҳларига бўлиш бўйича аниқлаш алгоритмининг эффективности қуйидагича аниқланади:

$$\theta=\frac{n(n+1)}{\sum_{r=1}^{e} n_r\left(n_r+1\right)}$$

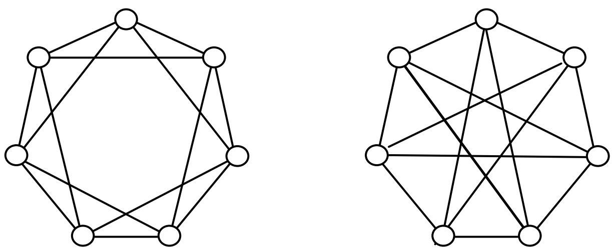
бу ерда $\sum_{r=1}^{e} n_r = n$. Графлар битта сатҳ билан тасвирланган ҳолда, яъни $l=1$, $n_r=n$ бўлганда $\theta=1$ бўлади. Бошқа ҳамма ҳолларда $\theta>1$ бўлади. Агар $l>>1$ ва $n_r=1$ бўлса, у ҳолда $\theta>>1$ бўлади ва алгоритм изоморфликни тезроқ топиш имконига эга бўлади. Ихтиёрий графлар G ва L изоморфлигини топиш алгоритмини қуйидагича тасвирлаш мумкин:

- G ва L графлар учун M_p $M_p^|$ белгили матрицаларини ҳисоблаш;
- ўзаро мос қийматли $X_к$ ва $У_к$ чўққиларни топиш;
- G ва L графлар учун бошланғич чўққилар $X_H \subset X$ $Y_H \subset Y$ $(X_H \Leftrightarrow Y_H)$ танлаш;
- G ва L графларни бошланғич чўққилар X_H ва $У_H$ асосида сатҳларга бўлиш;
- йўналган графларни $G^| = \langle X, U \rangle$ ва $L^| = \langle Y, V \rangle$ аниқлаш;
- G ва L графларни сатҳларига бўйича чўққиларни жуфт тартиб рақамлари билан белгилаб чиқиш $(w_\alpha, \varphi_\beta)$ ва $(\omega_\alpha, \gamma_\beta)$;
- G ва L графлар учун инцидентли матрицани аниқлаш $M_G=\|a_{ij}\|$ ва $M_L=\|a^|_{ij}\|$
- сатҳлар бўйича матрицаларни $N_r=\|a_{it}\|$ $N_r^1=\|a^1_{is}\|$ ўзаро бир хил қийматга эга эканлигини аниқлаш;
- агар $N_r \Leftrightarrow N^1_r$ бўлса, сатҳга нисбатан граф бўлаклари изоморф ҳисобланади ва кейинги сатҳ матрицаси текширилади, акс ҳолда граф изоморф эмаслиги аниқланган бўлади.

- графлар сатҳи изоморф бўлмаган ҳолда уларни изоморф ҳолга келтириб кейинги сатҳга ўтиш мумкин.
- графларнинг ҳамма сатҳлари бўйича изоморфлик таъминлангандан сўнг графлар изоморф деб ҳисобланади.

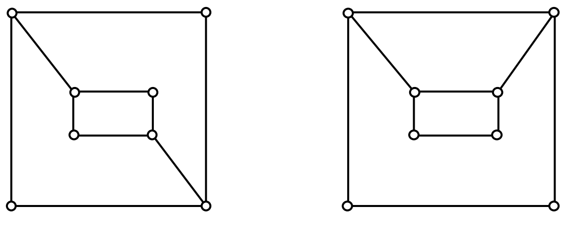
3.4. Масала ва машқлар

1. G ва H иккита граф берилган. Агар G<=>H бўлса, у ҳолда H<=>G бўладими?
2. Бешинчи тартибли бир-бирига изоморф бўлмаган ҳамма графларни топинг.
3. 3.1-расмда тасвирланган 3 та граф изоморф, 3.2-расмда тасвирланган 2 та граф изоморф эмаслигини исботланг.
4. 8–тартибли бир-бирига изоморф бўлмаган жуфт куб графларни чизинг.
5. 7-тартибли бир-бирига изоморф бўлмаган жуфт куб графларни чизинг.
6. Келтирилган графлар изоморфми? Нима учун (3.6–расм)?



3.6–расм

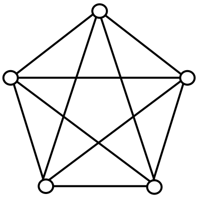
7. Берилган 2 та граф изоморф эмаслигини кўрсатинг (3.7–расм).



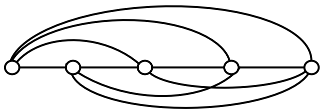
3.7–расм

8. Учинчи ва тўртинчи тартибли оддий изоморф бўлмаган графларни аниқланг. Илова: 3 та чўққили 4 та изоморф бўлмаган графлар ва 4 та чўққиси бўлмаган графлар борми?
9. Иҳтиёрий m- та чўққили иккинчи даражали 2 та оддий боғланган граф изоморф эканлигини исботланг.
10. 6 та чўққи учун 6 та изоморф бўлмаган дарахтлар борлигини, 7 та чўққи учун 11 та изоморф бўлмаган дарахтлар бўлишни кўрсатинг.
11. Қуйида келтирилган 3.8,3.9,3.10–расмларда бир хил граф берилганлигини исботланг:

а) 3.8 а ва 3.8 б –расмларда;



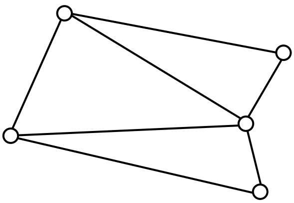
а)



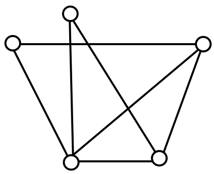
б)

3.8–расм

б) 3.9 а ва 3.9 б -– расмларда;



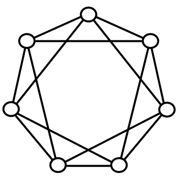
а)



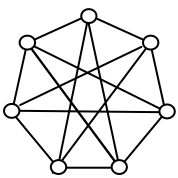
б)

3.9–расм

в) 3.10 а ва 3.10 б – расмларда.



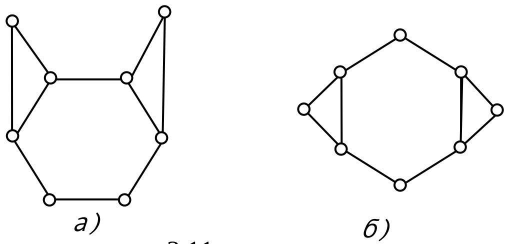
а)



б)

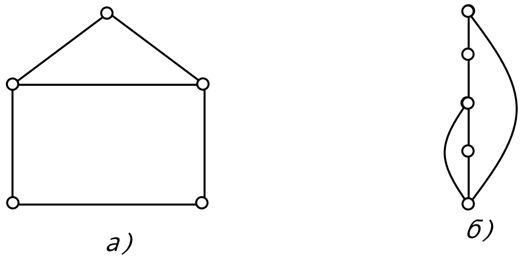
3.10–расм

12. Графларнинг бир-бирига мос эмаслигини исботланг (3.11 а, б–расмлар).



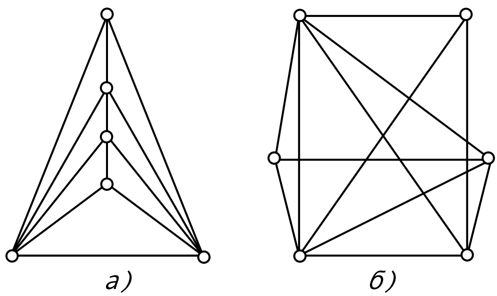
3.11–расм

13. Келтирилган графлар бир хилми?:
а) 3.12 а ва 3.12 б расмларда;



3.12–расм

б) 3.13 а ва 3.13 б – расмларда.



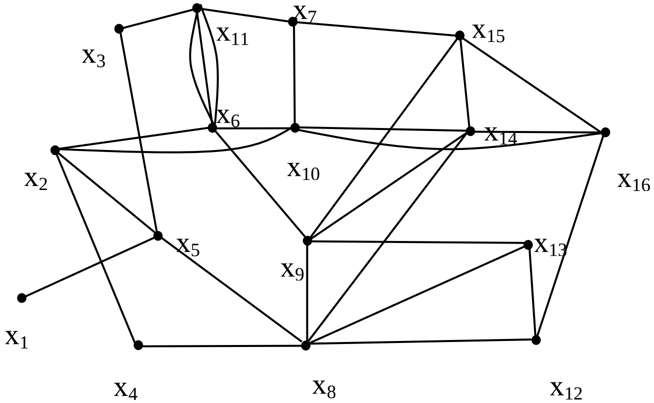
3.13–расм

IV. ГРАФЛАРДА ЙЎЛЛАРНИ ТОПИШ.

4.1. Графларда йўлларни топиш ва уларни сонини аниқлаш.

Берилган граф G=<X,U>. Бу ерда $X=\{x_1, x_2,...,x_m\}$ чўққилар тўплами, $U=\{u_1, u_2,...,u_n\}$-қобиқлар тўплами бўлсин (4.1–расм). Берилган граф параллел қобиқлардан ва тугунчалардан иборат.

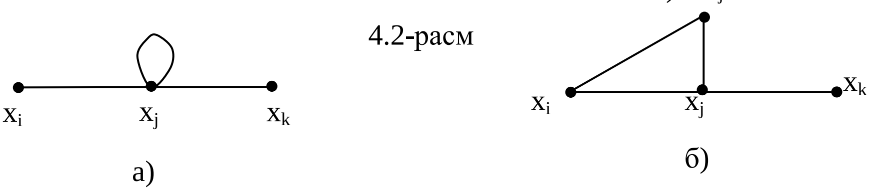
Графда йўлларни топиш учун графларни сатҳларга бўлиш масаласидан фойдаланилади. Бу ҳолда берилган граф G=<X,U> ни (4.1–расм) сатҳларга бўлинади.



4.1-расм

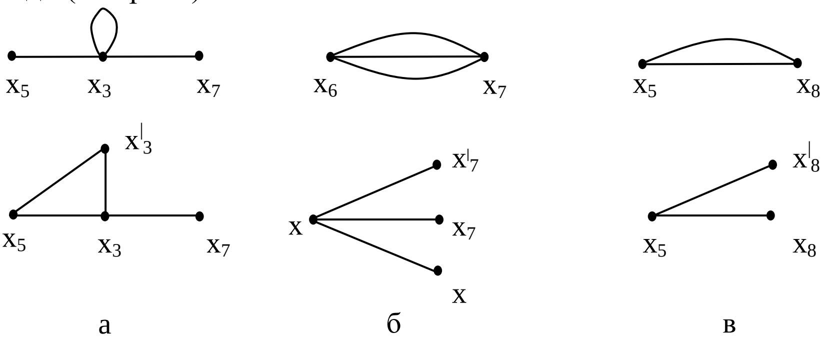
Бу ерда параллел қобиқларни ва тугунчаларни оддий қобиқлар орқали ифодалаш асосида қўшимча чўққилар ва қобиқлар ташкил этилади. Масалан параллел қобиқлар (4.2.,а-расм) юлдузли граф (4.2.,б-расм), халқа (4.3-расм) эса контур орқали ифодаланади.

4.2-расм



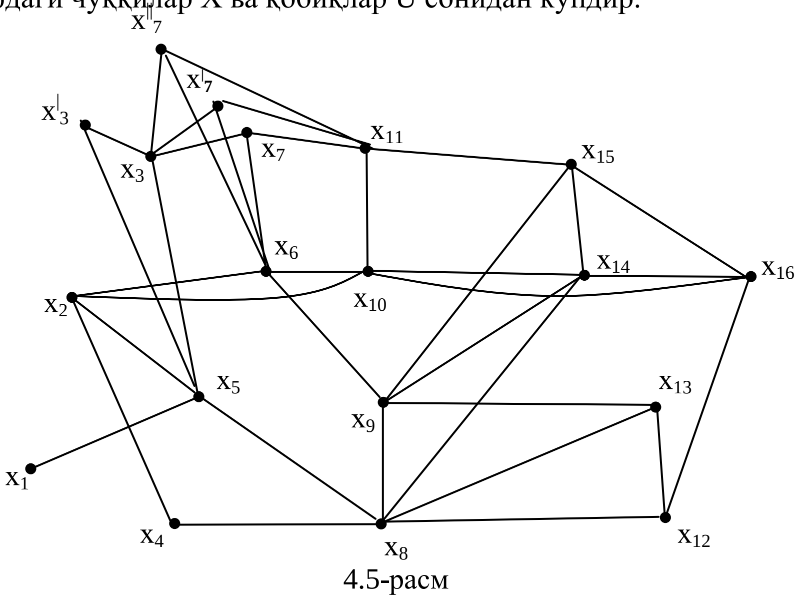
4.3-расм

Берилган $G=<X,U>$ графда x_3 чўққидаги халқани, (x_6,x_7) ва (x_5,x_8) параллел қобиқларни оддий қобиқларга айлантирамиз. Натижада халқа ва параллел қобиқлар қуйидаги кўринишга эга бўлади (4.4–расм).



4.4–расм

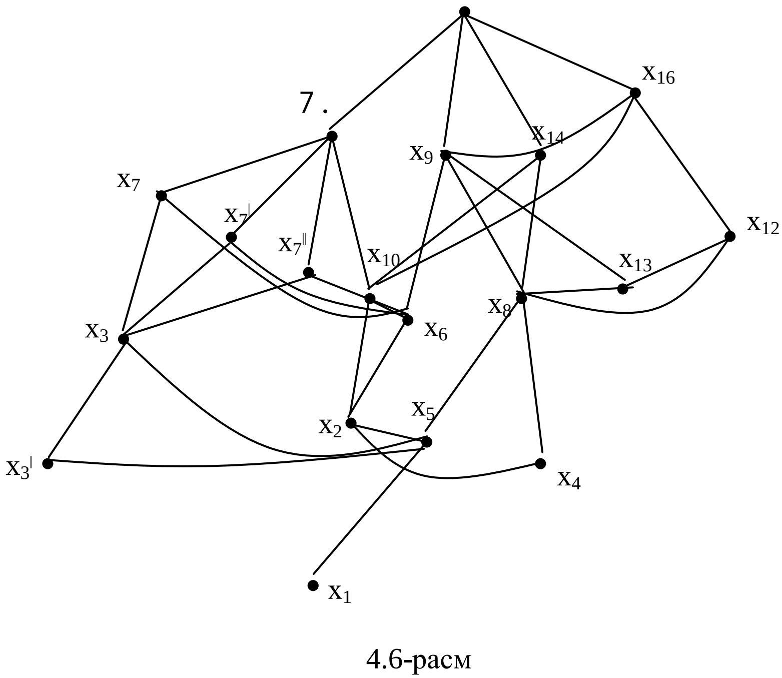
Шундай қилиб, граф $G=<X,U>$ асосида йўналган граф $G^{|}=<X^{|},U^{|}>$ ҳосил бўлади. Бу ерда $X^{|}=\{x_1, x_2,...,x_k\}$, $U^{|}=\{u_1, u_2,...,u_l\}$ ва $k>m$, $l>n$. Яъни, $G^{|}$ графдаги чўққилар $X^{|}$ ва қобиқлар $U^{|}$ сони G графдаги чўққилар X ва қобиқлар U сонидан кўпдир.



4.5-расм

Масалан: Ҳосил бўлган граф $G^{|}=<X^{|},U^{|}>$ да (4.5-расм) бошланғич чўққи x_{15} берилган бўлсин. У ҳолда граф $G^{|}=<X^{|},U^{|}>$ да берилган бошланғич чўққига нисбатан мумкин бўлган ҳамма йўлларни топиш талаб этилади. Айрим ҳолда бошланғич чўққини ўрнида бошланғич чўққилар тўплами берилган бўлиши мумкин (икки ва ундан ортиқ). Йўлларни тугаш чўққилари охирги сатҳдаги чўққилар ҳисобланади. Бундан ташқари сатҳлардаги бошланғич чўққилар ҳар доим қобиқнинг чиқиш чўққиси бўлиб, тугаш чўққилар эса қобиқнинг кириш чўққиси ҳисобланади.

Шу тариқа янги граф $G^{||}=<X^{||},U^{||}>$ (4.6-расм) ҳосил бўлади. Бу граф тўртта сатҳдан иборат. Йўллар шу сатҳларга нисбатан аниқланади. Охирги сатҳда x_1 ва $x^{|}_3$ чўққилари тугаш чўққилари ҳисобланади.



4.6-расм

$G^{||}=<X^{||},U^{||}>$ графда берилган шартларга асосланган ҳолда йўллар сонини топамиз. Йўллар чўққиларни боғланиши билан ифодаланади ва қуйидагича тасвирланади.

1. $x_{15} - x_{11} - x_7 - x_3 - x_3^{1}$
2. $x_{15} - x_{11} - x_7^{1} - x_3 - x_3^{1}$
3. $x_{15} - x_{11} - x_7^{11} - x_3 - x_3^{1}$
4. $x_{15} - x_{11} - x_7 - x_3 - x_5 - x_1$
5. $x_{15} - x_{11} - x_7^{1} - x_3^{1} - x_5 - x_1$
6. $x_{15} - x_{11} - x_7^{1} - x_3 - x_3^{1}$
7. $x_{15} - x_{11} - x_7^{1} - x_3 - x_3^{1}$
8. $x_{15} - x_{11} - x_7^{11} - x_3 - x_3^{1}$
9. $x_{15} - x_{11} - x_7^{11} - x_3 - x_3^{1}$
10. $x_{15} - x_{11} - x_7 - x_6 - x_2 - x_5 - x_1$
11. $x_{15} - x_{11} - x_7^{11} - x_6 - x_7 - x_5 - x_1$
12. $x_{15} - x_{11} - x_{10} - x_2 - x_5 - x_1$
13. $x_{15} - x_{11} - x_{10} - x_6 - x_2 - x_5 - x_1$
14. $x_{15} - x_9 - x_6 - x_2 - x_5 - x_1$
15. $x_{15} - x_9 - x_8 - x_5 - x_1$
16. $x_{15} - x_9 - x_8 - x_4 - x_2 - x_5 - x_1$
17. $x_{15} - x_9 - x_{14} - x_8 - x_5 - x_1$
18. $x_{15} - x_9 - x_{14} - x_8 - x_4 - x_2 - x_5 - x_1$
19. $x_{15} - x_{14} - x_{10} - x_2 - x_5 - x_1$
20. $x_{15} - x_{14} - x_{10} - x_6 - x_2 - x_5 - x_1$
21. $x_{15} - x_{14} - x_8 - x_5 - x_1$
22. $x_{15} - x_{14} - x_6 - x_4 - x_2 - x_5 - x_1$
23. $x_{15} - x_{16} - x_{10} - x_2 - x_5 - x_1$
24. $x_{15} - x_{16} - x_{10} - x_6 - x_8 - x_5 - x_1$
25. $x_{15} - x_{16}^{1} - x_{10} - x_2 - x_5 - x_1$
26. $x_{15} - x_{16} - x_{10} - x_6 - x_2 - x_5 - x_1$
27. $x_{15} - x_{16} - x_{12} - x_{13} - x_8 - x_5 - x_1$
28. $x_{15} - x_{16} - x_{12} - x_8 - x_5 - x_1$
29. $x_{15} - x_{16} - x_{12} - x_{13} - x_4 - x_2 - x_5 - x_1$
30. $x_{15} - x_{16} - x_{12} - x_8 - x_4 - x_2 - x_5 - x_1$

Шундай қилиб, граф $G=<X,U>$ да йўллар сони 30 тага тенг.

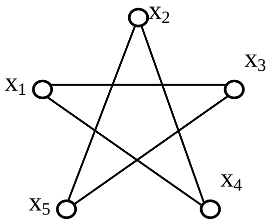
Йўналтирилмаган графларда йўлларни топиш алгоритми қуйидагича тасвирланади:

1. $G=<X,U>$ – берилган йўналтирилмаган граф параллел қобиқлар ва тугунчалар билан ифодаланган.
2. Параллел қобиқлар ва тугунчаларни оддий қобиқлар ёрдамида тасвирланади.
3. $G^{|}=<X^{|},U^{|}>$ йўналган граф параллел қобиқлар ва тугунчаларсиз ҳосил қилинади.
4. Иҳтиёрий бошланғич чўққиларни $X_{Б}\subset X$ танлаб оламиз.
5. $G^{|}=<X^{|},U^{|}>$ графни сатҳларга бўламиз.
6. Охирги сатҳдаги чўққиларни тугаш чўққилари деб танлаб оламиз.
7. Бошланғич $X_{Б}\subset X$ ва тугаш чўққиларига $X_{Т}\subset X$ нисбатан мумкин бўлган йўлларни топамиз.

Йўналтирилмаган, йўналтирилган ва аралаш графларда йўлларни топиш масаласи графлар назариясининг асосий масалаларидан бири ҳисобланади. Бу масала микроэлектрон қурилмаларини лойиҳалашда электрик ва функционал схемаларда сигналларни бир элементдан иккинчисига ўтиш йўлларини, ҳамда киришда берилган сигналларни тарқалиш йўлларини аниқлашга ёрдам беради.

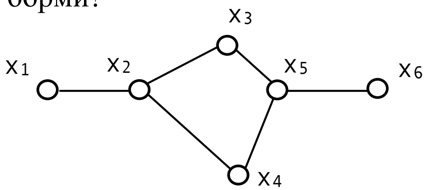
4.2. Масала ва машқлар

1. Агар G графда x_i ва x_j чўққилари орасида, ҳамда x_i ва x_j чўққилар орасида йўл бўлса, у ҳолда x_i ва x_j орасида йўл бўлишини исбот қилинг.
2. Графда x_1 ва x_3 чўққиларни боғловчи иккита йўлни топинг (4.7–расм).



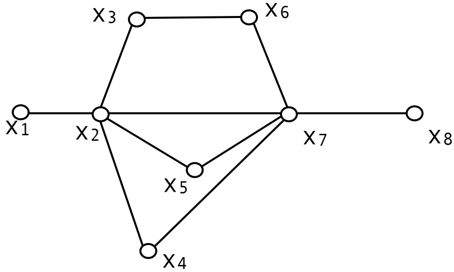
4.7–расм

3. G граф тасвирланган (4.8–расм). x_1 дан x_6 гача бўлган йўлни аниқланг. x_1 дан x_6 гача графнинг ҳамма чўққилари орқали ўтувчи йўллар борми?



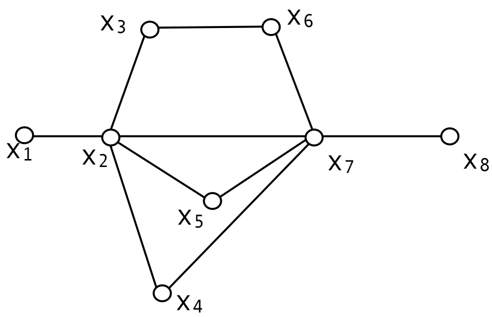
4.8–расм

4. G графнинг ҳамма чўққиларини ташкил этувчи x_1 дан x_8 гача йўллар борми (4.9–расм)?



4.9–расм

5. Тасвирланган графда x_1 чўққидан x_2 ва x_7 чўққиларигача бўлган энг қисқа ва энг катта узунликларга эга бўлган йўлларни топинг (4.10–расм).



4.10–расм

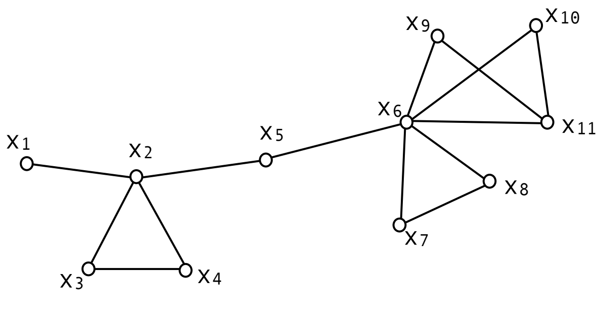
6. G граф тасвирланган (4.11–расм):

а) Графнинг ҳамма чўққиларини қамраб олган x_1 дан x_{11} гача бўлган йўлни топинг;

б) Графнинг ҳамма чўққиларидан ўтувчи x_1 дан x_{11} гача бўлган оддий йўл борми?

в) G граф нечта циклдан иборат?

г) G граф нечта оддий циклдан иборат?



4.11–расм

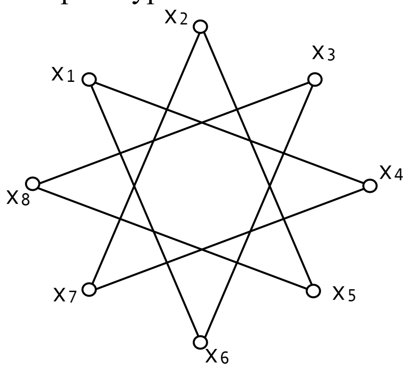
7. G граф тасвирланган (4.12расм):

а) x_1 ва x_3 чўққиларни боғловчи йўлларни топинг;

б) G граф боғланганми?

в) G графда 3,4,5,6 та қобиқлардан иборат цикллар борми?

г) G графда оддий цикллар борми? Агар бўлса улар нечта қобиқдан иборат? Уларни кўрсатинг.



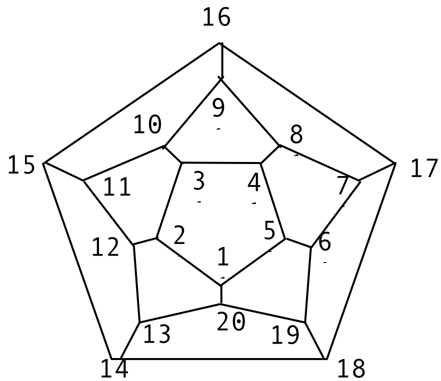
4.12–расм

8. 4.13–расмда 20 та шаҳар ва уларни боғлаш йўллари тасвирланган. Биринчи шаҳардан бошлаб ҳар бир шаҳардан бир марта ўтиш керак. Шундай саёҳатни бажариш учун шаҳарлардан кетма–кет ўтишни келтиринг, агар:

а) 16 чи шаҳарда саёхатни тўхтатиш керак бўлса;

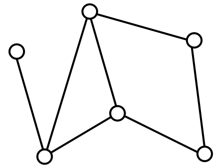
б) аввал 2, 12, 11 ва 10 чи шаҳарларга бориб, сўнгара 1 чи шаҳарга қайтиш керак бўлса;

в) биринчи навбатда 2 ва 3 чи шаҳарларга бориб, сўнгра саёҳатни 18 шаҳарда тугатиш керак бўлса.



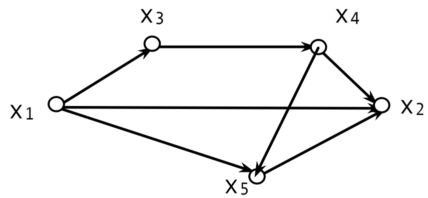
4.13–расм

9. Боғланган G граф тасвирланган. x_i чўққидан бошланган ёпиқ йўлни топингки, бунда барча қобиқлар икки марта қайтарилсин ва ҳар бири айрим йўналишда бўлсин (4.14–расм).



4.14–расм

10. Тасвирланган G графда A чўққидан B чўққигача бўлган йўллар сонини аниқланг. A дан B гача, C дан A гача, A дан C гача бўлган масофаларни аниқланг (4.15–расм).



4.15–расм

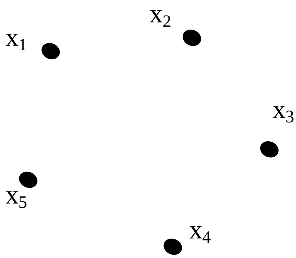
11. G оддий графда k узунлигидаги йўл бор. Шу графда k+1 узунлигида цикл борлигини кўрсатинг, ҳамда $k \geq 2$ эканлигини исботланг.

12. Агар боғланган ёки боғланмаган граф шундай 2 та жуфт даражали чўққига эга бўлса, у ҳолда 2 та чўққини боғловчи йўл борлигини исбот қилинг.

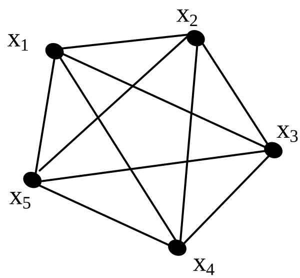
V. МИНИМАЛ ДАРАХТЛАРНИ ҚУРИШ.

5.1. Юлдузли графларни танлаш.

Тексликда чўққилар тўплами X=<x_1,x_2,x_3,x_4,x_5> берилган бўлсин (5.1.–расм).



5.1–расм



5.2–расм

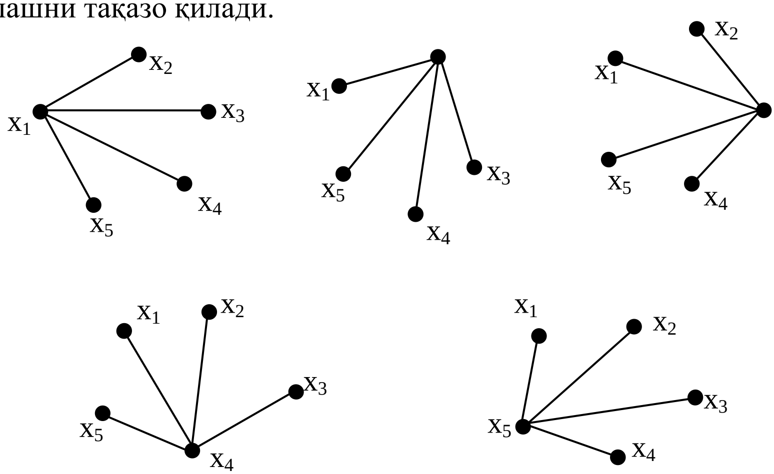
Берилган чўққилар тўплами асосида уларни боғловчи қобиқларнинг узунликлари йиғиндиси энг қисқа бўлган дарахтларни қуриш талаб этилади. Агар чўққиларни сони m=|x| бўлса, у ҳолда m^{m-2} дарахларни қуриш мумкин. Чунки m чўққилар орасидаги энг кўп қобиқлар сони m(m-1)/2 га тенг бўлади.

Дарахтларни қуриш икки хил усулда олиб борилиши мумкин. Агар чўққилар даражаси $\lambda \leq 2$ бўлса, бу ҳолда қисқа Гамильтон занжирини, $\lambda \geq 1$ бўлса қисқа боғланган тармоқни қуриш талаб этилади.

Берилган текисликдаги чўққилар (5.1–расм) асосида тўлиқ граф қурамиз Q=<X,U> (5.2-расм). Тўлиқ графнинг ҳар бир чўққисини бошланғич чўққи, ёки нурларни чиқиш жойи деб қарасак, у ҳолда ҳар бир чўққи ва унинг боғланган чўққилари асосида юлдузли граф G_i=<X_i,U_i> ҳосил бўлишини кўриш мумкин (5.3–расм)

Ташкил этилган юлдузли графлар G=<X,U>дан, шундай G_i ни топиш талаб этиладики, унинг асосида минимал дарахт ҳосил бўлсин. Унинг қобикларининг узунликлари йиғиндиси қолган дарахтларга нисбатан энг кичик қийматга тенг бўлиши керак.

Шундай қилиб масалани ечишни энг қисқа минимал дарахт $G=<X,U>$ ни қуриш учун юлдузли граф G_i ни, яъни юлдузли графларни қобиқларининг узунликлари йиғиндисининг ўртача қийматига мос келувчи ишончлилик оралиғидаги a қийматини танлашни тақазо қилади.



5.3-расм

Қиймат a учун ишончлилик оралиғи қуйидаги тенглик орқали аниқланади:

$$\overline{S} - t\frac{\sigma}{\rho\sqrt{m}} < a < \overline{S} + t\frac{\sigma}{\rho\sqrt{m}},$$

Бу ерда:

$\overline{S}$ – юлдузли графларнинг қобиқлари узунликлари йиғиндисининг ўртача қиймати;

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

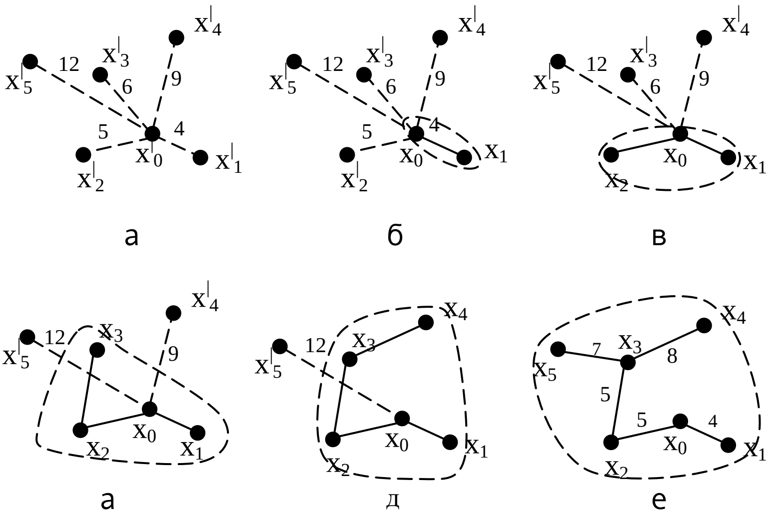
σ^2 - ўртача квадратик бурилиши,

t_ρ - эҳтимоллик оралиғининг илдиз тенгламаси.

Шундай қилиб юлдузли графлар орасидан минимал дарахтларни танлаш вариантлари сони $m^{|} \leq m$ га келтирилади, бу ерда $m^{|}$ – юлдузли графларни узунликларини ишончлилик оралиғига мос келган a нинг қийматлари сони.

5.2. Минимал дарахтларни танлаш усули ва алгоритми.

Берилган юлдузли граф $G'=\langle X',U'\rangle$ (5.4.–расм) бўйича минимал дарахтни қуриш усули таклиф этилади. Бу графда $X'=\{x'_0, x'_1, x'_2...,x'_{m-1}\}$ – чўққилар тўплами; $u'=\{u'_0, u'_1, u'_2,...,u'_n\}$ қобиқлар тўплами.



5.4-

G' графи учун марказий чўққи деб бошланғич чўққи x'_0 ни танлаймиз. Граф G нинг ҳар бир қобиғи $u'_j \in U$ марказий чўққи x'_0 ва $x'=\{\bigcup_{i=1}^{n} x'_i\}$ тўпламининг бирор чўққиси орқали аниқланади. Бу ҳолда қобиқлар тўплами қуйидагича аниқланади:

$$u_1'=(x'_0, x'_1),\ u_2'=(x'_0, x'_2),\ \dots,\ u_n'=(x_0, x'_{m-1})$$

X' тўпламининг ҳар бир чўққисининг марказга интилувчи кучи тўпламдаги мос келувчи қобиқларнинг узунликлари билан аниқкланади.

Қуйидаги аниқланишларни киритамиз: юлдузли графларнинг «марказга интилувчи кучи» қанчалик кичик бўлса, x'_i чўққи билан шунчалик кучли боғланган. Минимал дарахтни қуриш энг кучли боғланган чўққидан бошланиб, энг суст боғланган чўққи билан тугалланади.

Таклиф этилаётган усул иккита тамойилга асосланган:

1. Юлдузли граф G нинг марказий чўққиси қўшни чўққилар $X^{||}$ нинг бирортаси билан энг қисқа қобиқ орқали боғланган.
2. $X^{||}$ тўпламининг ҳар бир чўққиси марказий чўққи билан ёки ташкил этилаётган минимал дарахтнинг чўққилар тўпламининг бирорта чўққиси билан қисқа қобиқ орқали боғаланган.

Минимал дарахтларни қуришда биринчи тамойил бир марта ишлатилса, иккинчи тамойил эса кўп марта ишлатилади, яъни энг суст боғланган чўққига инцидент бўлган охирги қобиқни аниқлашгача. Бу кобиқ минимал «марказга интилувчи куч» га эга. Масалан, минимал дарахт G=<X,U> бошланғич ҳолатда бирорта чўққига ва бирорта қобиққа эга эмас. Юлдузли граф $G^{|}$ нинг чўққиларини танлашнинг ҳар бир қадамида қуйидаги шарт бажарилиши керак.

$$X=\bigcup_{i=1}^{n}(x_i^{|}\cap x_0^{|}),$$

Натижада, $X^{||}$ тўпламидан бирорта чўққи танлангандан сўнг, у X тўпламига қўшилади. Чўққи $x^{|}_0$ ни минимал дарахтни бошланғич (марказий) чўққиси деб қабул қиламиз. Шу чўққидан минимал дарахтнинг қурилиши бошланиб, у унинг биринчи чўққиси ҳисобланади. Шундан сўнг, граф $G^{|}$ дан шундай $x^{|}_i<\in X^{|}$ чўққисини топамизки (5.4.-расм), у $G^{|}$ графининг қобиғи бўлиб, унинг учун қуйидаги шарт бажарилади:

$$d(u_j^{|})=\min d(x_0^{|},x_i^{|}),$$

бу ерда, $d(u_j^{|})$ - $u^{|}_j$ қобиғининг узунлиги.

Натижада юлдузли графларнинг, жуда бўлмаганда битта қобиғини аниқлаймиз, у минимал дарахт G нинг ҳам қобиғи ҳисобланади (биринчи тамойил).

$$\exists u_j^{|}\in U^{|}P\left[\left(x_0^{|},u_j^{|},x_i^{|}\right)=\left(x_0,u_j,x_i\right)\right]$$

Шундан сўнг $X^{|}$ тўпламидан марказга интилувчи кучнинг камайиши асосида чўққини танлаймиз (бу қадамда $|X^{|}|<|X^{|}\backslash X^{|}_0|$) (5.4,в, е – расм).

G графни қуришнинг j – қадамида қуйидаги шарт бажарилиши талаб этилади.

$$d(u^{|}_j) = \min_i d(x^{|}_0, x^{|}_i)$$

Чўққи $x^{|}_i \in X^{||}$ ни танлаб, навбатдаги $x_i \in X$ чўққини аниқлаймиз бу қадамда $|X^{|}|<|X^{||}|$. Бу ерда x_i чўққи $x_{i1} \in X$ чўққиси билан энг қисқа йўл билан боғланган бўлиб, u_j қобиғини аниқлайди (2-тамойил). Бу ҳолда,

$$d(u^{|}_j) = \min_{i1} d(x_i, x_{i1}),\ i1{=}i{-}1$$

5.2 ва 5.3 шартларни биргаликда бажарилиши, $G^{|}$ графнинг энг суст боғланган чўққисини танлашгача такрорланади.

$$d(u^{|}_j) = \max_i d(x^{|}_0, x^{|}_i)$$

Шундай қилиб, қобиқлар узунлигини йиғиндиси энг кам бўлган минимал дарахтни топамиз (4-е–расм).

$$d\{G = <X, 0>\} = \min d(U) = \min \sum_{i=1}^{n} d(u_j)$$

ва у X чўққилар тўплами учун оптимал вариант ҳисобланади.

Минимал дарахтни топиш алгоритми қуйидаги босқичларга бўлинади:

- тўлиқ граф учун масофали матрица ҳисоблаш;
- юлдузли графларнинг қобиқлари узунликлари йиғиндиси ўртача қийматининг ишончлилик оралиғини аниқлаш ва уларга мос равишда чўққиларни аниқлаш;
- юлдузли графнинг қобиқлари рўйхатини уларни узунликлари асосида белгилаш;
- минимал дарахтларни ташкил этувчи қобиқларини топиш;
- минимал даражаларни ташкил этиш.

Минимал дарахлар қуришга мисоллар келтирамиз.

1-мисол. Текисликда берилган чўққилар сони 20 га тенг. Қисқа гамильтон занжирини (ҚГЗ) қуриш талаб этилади. 20 та чўққидан иборат бўлган тўлиқ граф $Q=<X,U^n>$ қурамиз. Бу граф учун масофали матрица $M=||d_{ij}||$ ни ҳисоблаймиз (1-жадвал), бу ерда m=k=20. Матрицанинг ҳар бир элементи d_{ij} x_i ва x_j чўққлари орасидаги масофани аниқлайди.

1-Жадвал

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}	x_{20}	
0	18	38	27	46	49	65	80	90	95	02	112	120	127	138	142	150	136	12	111	x_1
	0	20	21	40	42	47	72	74	80	92	104	104	112	115	131	144	122	19	98	x_2
		0	34	35	46	30	73	58	68	87	100	88	98	105	124	134	109	32	89	x_3
			0	21	22	48	53	70	70	75	86	98	104	101	115	129	111	13	85	x_4
				0	26	67	51	85	80	77	85	110	113	106	116	131	120	27	91	x_5
					0	47	30	60	54	54	64	84	87	82	93	108	94	35	65	x_6
						0	62	28	42	67	82	59	69	79	100	108	80	53	64	x_7
							0	60	44	22	34	74	72	59	65	81	75	66	45	x_8
								0	21	53	67	30	41	55	79	84	53	78	44	x_9
									0	32	46	31	34	37	59	67	42	80	23	x_{10}
										0	15	55	49	32	40	55	50	88	20	x_{11}
											0	66	58	34	32	50	55	92	38	x_{12}
												0	15	49	64	63	28	106	37	x_{13}
													0	27	50	48	13	114	30	x_{14}
														0	25	29	20	113	16	x_{15}
															0	18	41	128	36	x_{16}
																0	36	141	45	x_{17}
																	0	122	31	x_{18}
																		0	99	x_{19}
																			0	x_{20}

Масофали матрица диагонал бўйича симметрик кисмлардан иборат бўлиб, иккита учбурчакли матрицага бўлинади. Шунинг учун, керакли ҳамма амалларни учбурчакли матрица асосида бажариш мумкин. Ташкил этилган матрицанинг ҳар бир қаторидаги қийматлар бошланғич чўққини шу катор тартиб номерига тенг бўлган юлдузли графнинг қобиқларининг узунлигини кўрсатади.

	$G^{\vert}_1$	$G^{\vert}_2$	$G^{\vert}_3$	$G^{\vert}_4$	$G^{\vert}_5$	$G^{\vert}_6$	$G^{\vert}_7$	$G^{\vert}_8$	$G^{\vert}_9$	$G^{\vert}_{10}$
$\overline{S}$	1658	1449	1338	1283	1447	1142	1197	1118	1130	1005
$d(G)_{г.ц}$	455	455	641	454	586	669	657	595	591	624
$d(G)_{с.с}$	386	386	386	386	390	400	415	389	412	396
	$G^{\vert}_{11}$	$G^{\vert}_{12}$	$G^{\vert}_{13}$	$G^{\vert}_{14}$	$G^{\vert}_{15}$	$G^{\vert}_{16}$	$G^{\vert}_{17}$	$G^{\vert}_{18}$	$G^{\vert}_{19}$	$G^{\vert}_{20}$
$\overline{S}$	1065	1220	1281	1261	1220	1458	1612	1338	1414	1067
$d(G)_{г.ц}$	627	473	487	613	612	494	467	487	421	601
$d(G)_{с.с}$	386	395	391	381	377	391	391	381	386	386

Бу ерда $\overline{S}$ – матрица қаторлари элементларининг йиғиндиси; $d(G)_{23}$ ва $d(G)_{бт}$ мос равишда гамильтон занжири ва боғланганлик тармоқлари қобиқларининг узунликлари йиғиндиси.

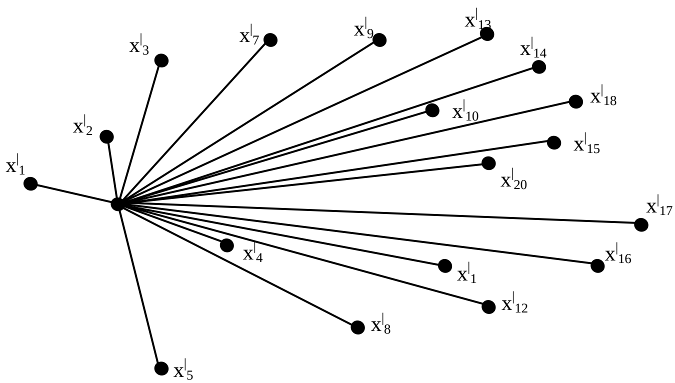
Бу қаторлар (юлдузли графлар) учун ўртача қийматини ва дисперсияни аниқлаймиз:

$$\overline{S} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} S_i \quad \text{ва} \quad \sigma^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(S_i - \overline{S}\right)^2 .$$

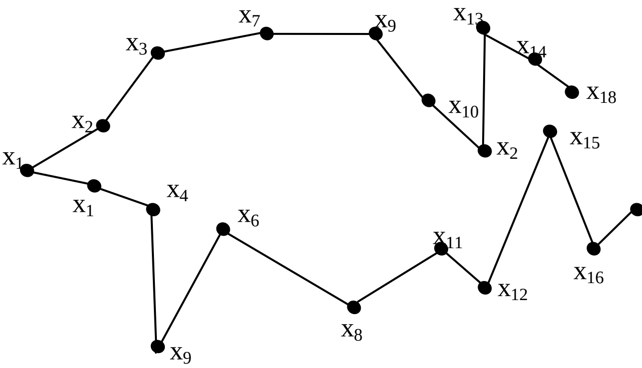
Минимал дарахтларни қуришда ихтиёрий S қийматлар учун ўртача қийматнинг ишончлилик оралиғини P=0,99 эҳтимоллик билан аниқлаймиз. Бу ҳолда ишончлилик оралиғининг қуйи чегараси $a_{\min} = \overline{S} - t_\rho \frac{\sigma}{\sqrt{m}} = 1155$, юқори чегараси эса

$$a_{\max} = \overline{S} + t_\rho \frac{\sigma}{\sqrt{m}} = 1419 \text{ га тенг.}$$

Топилган ишончлилик чегарасига S_3, S_4, S_6, S_7, S_{12}, S_{15}, S_{18}, S_{19} ихтиёрий қийматлар тўғри келади. Иҳтиёрий S_{19} қиймати учун дарахт қуриш жараёнини кўриб чиқамиз. Марказий чўққини x_{19} деб қабул қилиб, юлдузли граф $G^|_{19}(X^|, U^|)$ ни қурамиз (5.5–расм). Натижада граф $G^|_{19}$ учун қобиқлар узунлиги йиғиндиси $d(G^|_{19})=421$ бўлган гамильтон занжирини топамиз (5.6–расм).



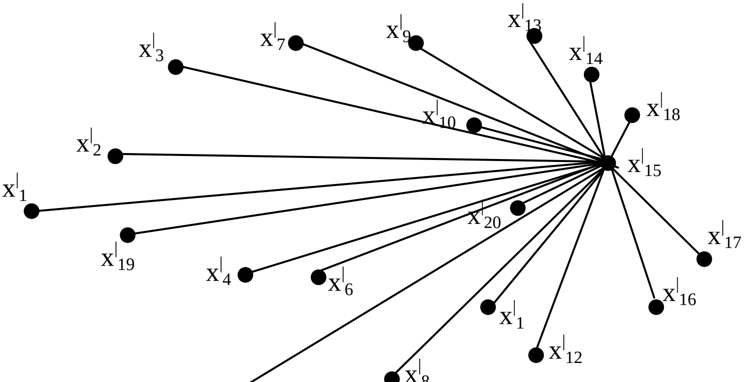
5.5-расм



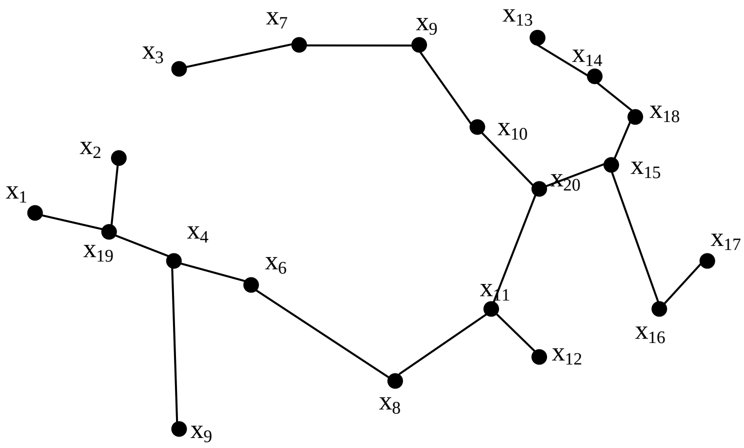
5.6-расм

Бошқа юлдузли графлар учун ҳам шу тарзда Гамильтон занжирини қурамиз. Натижада, ҳулоса қилиб айтганда $G^{|}_{19}$ юлдузли граф асосида қурилган дарахтнинг қобиқлар узунлиги йиғиндисининг қиймати энг кичик, яъни минимал ҳисоблананди. Танланган ишончлилик оралиғи қисқа Гамильтон занжирини қуриш учун етарлидир. Шундай қилиб, граф $G^{|}_{19}(X, U)$ берилган чўққилар тўплами учун қисқа Гамильтон занжиридир.

2-мисол. 1-мисол учун қисқа боғланганлик тармоғини (ҚБТ) қурамиз. ҚБТ ни қуриш ҚГЗ қуришдан чўққиларни локал даражаси бўйича фарқ қилади. Шунинг учун алгоритмнинг 4-босқичидаги талабдан бошқа талаблар бир хил ҳисоблананди. Бу ерда 4-босқичда чўққиларнинг локал даражаси иҳтиёрий бўлиши мумкин.



5.7–расм



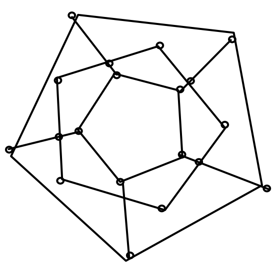
5.8-расм

Берилган чўққилар сони учун қобиқларнинг узунликлари йиғиндисини минимал бўлган $d(G_{15})=377$ бўлган G_{15} графини аниқлаймиз (5.7-расм).

Бу граф қисқа боғланганлик тармоғи бўлиб (5.8-расм), у x_{15} марказий чўққилар юлдузли граф асосида қурилган.

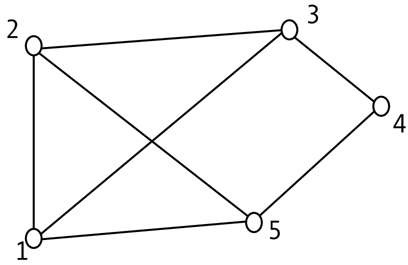
5.3. Масала ва машқлар.

1. Граф йўналтирилган ва йўналтирилмаган қобиқлардан иборат, масалан шаҳарнинг турли кўчаларида бир томонлама ва икки томонлама ҳаракат қилинаи. Бир нуқтадан иккинчи нуқтага бориш йўлларини топинг, ҳамда шулар орасида энг қисқа масофага эга бўлган йўлни топинг.
2. Граф G да Гамильтон йўли йўқ эканлигини кўрсатинг (5.9–расм).



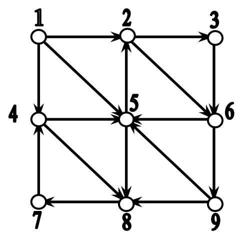
5.9–расм

3. Тасвирланган графдан иккита гамильтон циклини топинг (5.10–расм).



5.10–расм

4. Тасвирланган 1 пунктдан 8 чи пунктгача бир хил йўналишда кўрсатгич бўйича ҳаракат қилинсин. Ҳар бир пунктда бир мартадан ортиқ бўлиш мумкин эмас. 1 чи пунктдан 8 чи пунктгача бўлган барча йўлларни топинг. Бу йўллардан қайси бири энг қисқа ва қайси бири энг узун (5.11–расмда)?



5.11–расм

VI. ГРАФЛАРНИ ТОПОЛОГИК ТАСВИРЛАНГАН МАЙДОНИНИ ҚОПЛАШ.

6.1 Графларнинг топологик майдонини қоплаш.

Масалани ечиш учун айрим қўшимча тушунчаларни киритамиз. Занжирда ҳамма чўққилар ва қобиқлар ҳар хил бўлса, у оддий занжир деб аталади. Боғланган графнинг ҳар қандай иккита чўққиси оддий занжир билан боғланган. Шундай занжирларнинг агар бошланғич ва охирги чўққилари устма-уст тушса, яъни ($x_0=x_n$), у ҳолда қуйидаги оддий цикл ҳосил бўлади.

$$X_0u_1x_1u_2x_2u_3\ldots u_ix_i\ldots u_nx_nu_{n+1}x_0$$

бу ерда u_i x_i ва x_{i+1} орасидаги қобиқ.

Агар граф G=<X,U> нинг топологик тасвири G_i^P берилган бўлса ва унинг ҳамма нуқталари (чўққилари ва қобиқлари) S текислигига тегишли бўлса, бундай граф S текисликда жойлашган деб ҳисобланади. Агар граф G □кала□ текислигида жойлашган бўлса, у текис граф деб аталади. Текисликда жойлашган ҳар қандай оддий цикл (текис граф), уни иккита майдонга бўлади. Уларнинг бири ички, иккинчиси эса ташқи майдон деб аталади.

S текислигида $P_i^S \in P^S$ ни аниқловчи $G_i^P=<X^P,U^P>$ текис граф ва P_i^S даги $P_i^C \in P^C$ ички майдонни аниқловчи $G_i^C=<X^C,U^C>$ текис графи берилган. Шундай қилиб, P_i^S майдони G_i^C текис граф томонидан иккита майдонга, яъни ташқи P_i^C ва ички P_i^C майдонларига бўлинади, $P_i^S=P_i^C \cup P_j^C$. Ҳар бир майдоннинг атрофидаги нуқталари тўплами унинг чегараси деб аталади ва у $G_i^P \in G^P$ ва $G_j^C \in G^C$ графларининг чўққи ва қобиқларидан ташкил топган. Аниқланиши бўйича $G_i^P \in G_j^C$ графларининг қобиқлари майдонининг чегараси ҳисобланади. Бу ҳолда G_j^C графнинг ҳар бир қобиғи иккита майдоннинг чегарасини аниқлайди ва у фақат иккита майдонга тегишли бўлиши мумкин.

<u>Теорема</u>: $\mu(G^P{}_i)$ – $G^P{}_i$ графнинг ташқи ва ички майдонлари сони $\lambda(G_j^C)$ – G_j^C графнинг ички майдонлари P_j^C сони бўлса P^C майдонларини P^S майдонлари билан қопланиши учун қуйидаги шартлар бажарилиши керак:

$$\mu\left(G^{P}\right)=\lambda\left(G^{C}\right)+1$$

$$\forall P_{j}^{C} \in P \forall P_{i}^{S},$$

$$P_{\xi}^{S} \in P^{S}\left[\left(P_{j}^{C} \cap P_{i}^{S}=P_{j}^{C}\right) \wedge\left(P_{j}^{C} \cap P_{\xi}^{S}=\otimes\right) \cap\left(P_{i}^{S} \cap P_{\xi}^{S}=\otimes\right)\right]$$

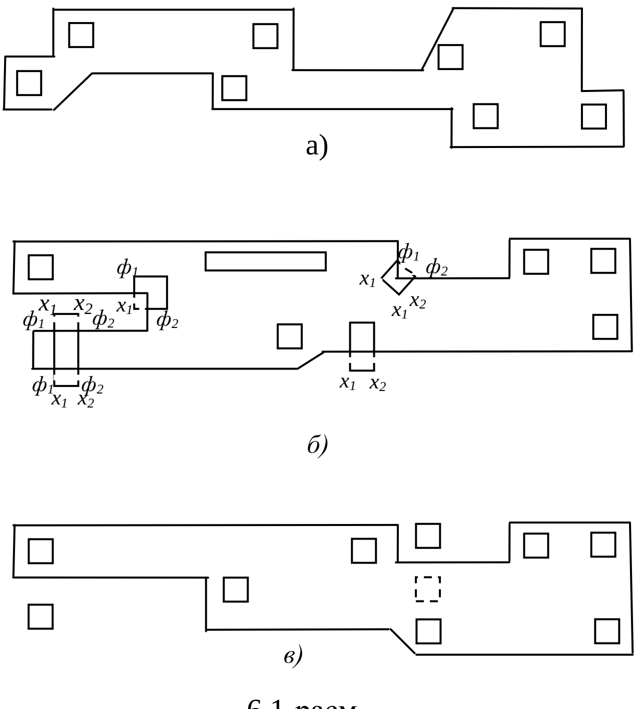
<u>Исбот</u>: $\lambda(G^{P}{}_{i})=1$ учун P_{i}^{S} майдоннинг чегараси фақат биттагина ички оддий граф $G^{C}{}_{j}$ дан ташкил топган, у майдонни иккига бўлади ва □кала майдон учун чегара ҳисобланади, яъни $\mu(G^{P}{}_{i})=2$ ёки $\lambda(G^{P}{}_{i})=1$. Бу ҳолда майдон P^{5} ички оддий цикллар G^{C} тўпламидан ташкил топган бўлгани учун:

$$\mu(G^{P}{}_{i})>2$$

Шундай килиб, граф G^{P} нинг ташқи ва ички майдонлари қуйидагича аниқланади:

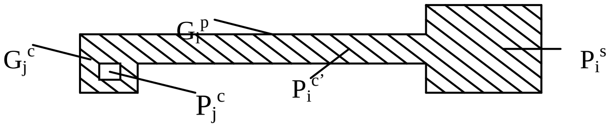
$$\mu\left(G_{i}^{P}\right)=\lambda\left(G_{j}^{C}\right)+1 \qquad (6.1)$$

Бу шарт майдонларни қоплаш учун керакли, лекин етарли эмас (6.1, а-расм).

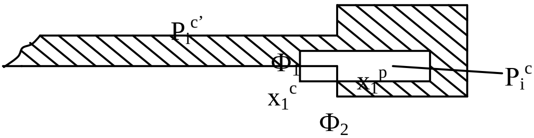


6.1-расм

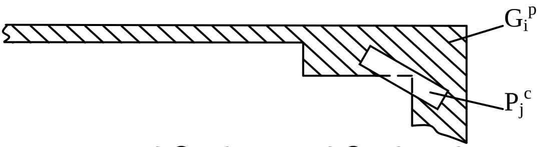
Масалан граф G^C_i нинг ихтиёрий чўққиси G^P_i графнинг чегарасидан ташқарида бўлсин (6.1.,б-расм). Бу ҳолда (6.1) шарт бажарилади, лекин P_j^C майдон P_i^S майдони билан тўлиқ қопланмайди, чунки x_i^C чўққи ва u^C қобиқ ундан ташқарида жойлашган.



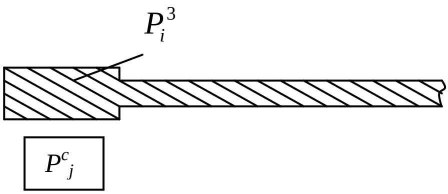
а) P^C_i майдонини тœлиš šоплаш



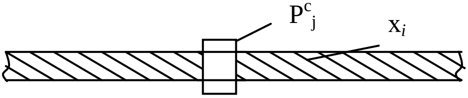
б) P^C_i майдонини šисман šоплаш



в) $P_j^c \cap P_i^c \neq \varnothing \& P_j^c \cap P_i^c \neq P_j^c$



г) P_j^c майдонини тœлиš



д) $P_j^c \cap P_L^{C'} = P_i^c \neq P_j^c$

6.2 – расм. Майдонларни šоплаш усуллари

Бу ҳолда $G^C{}_j$ графнинг x_j^C чўққисига инцидент бўлган қобиқлари, x_i^P чўққиларига инцидент бўлган қобиқлар билан кесишиб, $Ф_1$ ва $Ф_2$ нуқталарни ҳосил қилади. Бу ҳолат P_j^C майдонини P_i^S майдон томонидан тўлиқ қопланмаганлигидан далолат беради. $G^C{}_j$ ва $G^P{}_i$ графлар учун P_j^C майдонини тўлиқ қопламаганлик шартларини аниқлаймиз. (6.2-расм)

$$P_i^S \bigcap P_j^C \neq P_j^C, \quad P_i^S \bigcap P_j^C \neq \varnothing \qquad (6.2)$$

Шундай қилиб, P_j^C майдонини P_i^S области билан қоплашдан P_i^S нинг бир қисмига тенг бўлган унинг майдони ҳосил бўлади (6.1-расм).

Масалан, $G^C{}_j$ графнинг чўққилари $G^P{}_i$ чегарадан ташқарида бўлсин (6.1.б,–расм), у ҳолда (6.1) шарт бажарилмайди, яъни $\lambda(G_j^C)=0$, $\mu(G^P{}_i)=1$ ва

$$P_i^S \bigcap P_j^C = \varnothing \quad \text{ёки} \quad P_i^S \bigcap P_j^C = P_i^S \qquad (6.3)$$

Бу тенглама P_j^C майдонини P_i^S майдони билан тўлиқ қопланмаганлигини аниқлайди. (6.2-расм)

P_j^C майдонини P_i^S майдони билан тўлиқ қоплаш учун қуйидаги шарт бажарилиши талаб этилади.

$$P_j^C = P_i^S \bigcap P_j^C \qquad (6.4)$$

Бу шарт (6.2) ва (6.3) шартларга қарама-қаршидир.

P_j^C майдонини P_i^S билан тўлиқ қопланиши учун бу шарт етарли ҳисобланади ва умумий ҳолда қуйидагича тасвирланади.

$$\forall P_j^C \in P^C \exists P_i^S \in P^S \left[P_j^C \bigcap P_i^S = P_j^e \right] \qquad (6.5)$$

Умумий ҳолда текисликда берилган боғланмаган текис графлар учун қопланиш тахлилини кўриб чиқамиз.

$$G_j^p = \{G_1^p, G_2^p, ..., G_N^p\} \text{ ва } G_j^C = \{G_1^C, G_2^C, ..., G_M^C\}$$

Текис графлар тўплами G^P билан аниқланган P^S майдони унга мос равишда G^C текис графлар тўплами билан аниқланган P^C майдонлари билан қопланиши керак.

Юқорида келтирилган теорема ва унинг исботи асосида майдонлар тўпламини қоплаш ва қопланмаслик ҳолатлари қуйидагича ифодалаш мумкин:

1) P^C майдонлар тўплами P майдонлари билан тўлиқ қопланган;
2) P^C майдонлар тўпламининг P_j^C майдони $P_i^S \in P^S$ майдони билан қопланади.
3) P^C майдонлар тўпламининг P_j^C майдони $P_i^S \in P^S$ майдони билан тўлиқ қопланмайди.

Биринчи ҳолатда (6.1) ва (6.5) шартлар P^C майдонларини қоплаш учун керакли ва етарли ҳисобланади, яъни ихтиёрий $P_i^S \in P^S$ G^C текис графлар G^P текис графларни чўққилари ва қобиқларининг нуқталарини ўзига қамраб олмаган.

Иккинчи ҳолатда G^K ва G^n текис графлар ўртасида қобиқларининг кесишуви мавжуд бўлиб (6.1) ва(6.2) керакли шартнинг ўзигина бажарилиб, етарли шарт (6.5) бажарилмайди.

Учинчи ҳолатда эса, P^S тўпламида P_j^C мавжуд бўлиб, улар ихтиёрий $P_i^S \in P^S$ майдонидан ташқарида, яъни

$$\exists P_j^C \in P^C \exists P_i^S \in P^S \left[\left(P_j^C \cap P_i^S = \oplus\right) \wedge \left(P_j^c \wedge P_i^S\right)\right] \quad (6.6)$$

Бу ўринда (6.1) ва (6.5) шартлари бажарилмайди. Айрим ҳолатларда P_j^C майдони $P_i^S \in P^S$ тегишли бўлиш ўрнига бошқа майдонга тегишли булиб $P_\xi^S \in P^S$, яъни $P_\xi^S \Lambda i_i^S = \varnothing$.

Шундай қилиб топологик тасвирдаги P^C графларни майдонларини бошқа P^S майдонлари билан тўлиқ қоплаш учун керакли ва етарли шарт қуйидагича бўлиши керак:

$$\mu\left(G^P\right) = \lambda\left(G^C\right) + 1,\ \forall P_j^C \in P \forall P_i^S \quad (7),$$

$$P_\xi^S \in P^S \forall P_i^S, P_S^S \in P^S \ \ [(P_j^C \bigcap P_i^S = P_j^C \bigcap (P_j^C \bigcap P_\xi^S = \varnothing)]$$

Таклиф қилинган топологик тасвирланган графларни майдонларини қоплаш усули асосида турли технологик структурали катта интеграл схемаларни компоненталарининг топологияси майдонини қоплашни текшириш ва лойиҳалаш жараёнида бўлган хатоликларни топишга имкон беради.

6.2. Масала ва машқлар.

1. Майдонни қисман қоплаш усулига мисоллар келтиринг.
2. Топологик тасвирланган графларни майдонлар тўпламини бирорта майдон билан қоплаш усулларига мисоллар келтиринг.
3. Майдоннинг бир чўққиси ички майдонга тегишли бўлса уни ташқи майдонга мос келишини исботланг.
4. Майдонларни тўлиқ қоплашга мисоллар келтиринг.
5. майдонларни тўлиқ қопланмаслигига мисоллар келтиринг.

VII. ГРАФЛАРНИ БЎЛАКЛАРГА БЎЛИШ.

7.1. Графларни бўлакларга бўлиш.

Графларни бўлакларга бўлиш масаласи қуйидагича таърифланади.

Берилган граф G=<X,U> шундай бўлакларга бўлиниши керакки, бўлининишдан сўнг унинг бўлаклари орасидаги боғланишлар сони минимумига тенг бўлсин, ҳар бир бўлакдаги чўққилар сони чегараланган бўлиши, яъни бўлаклар сони ва улар орасидаги ўхшашликлар сони минимум бўлсин, нихоят бўлакларни сифат даражаси бир хил бўлсин.

Келтирилган талаб ва чегараланишларни бажариш учун кўп критерияли масалаларни ечиш усуллари муаммосини ҳал қилишга тўгри келади. Маълумки, бир вақтнинг ўзида бир неча критерияни бажариш жуда катта муҳим масала ҳисоблананди. Қуйидаги графларни бўлишни амалиётда қўллаш нуқтаи назаридан, уни дастурлаш асосида ечишга ахамият берамиз.

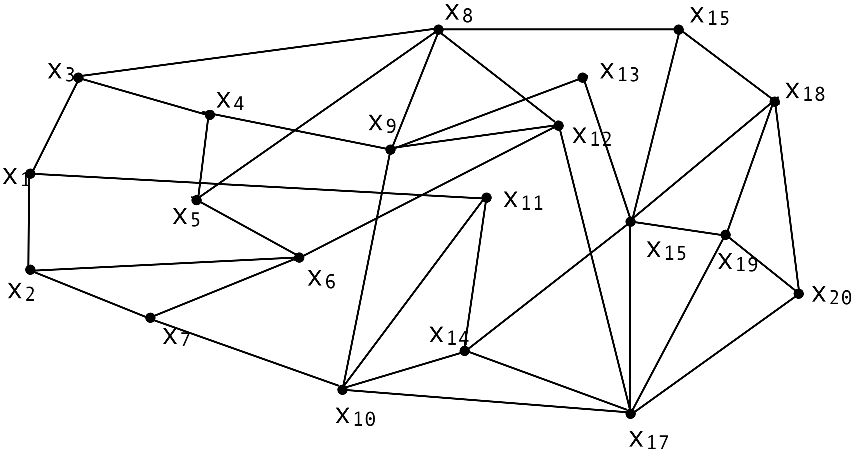
Графларни бўлакларга бўлишда қуйидаги асосий критерияларни бажариш талаб этилади:

1. Ҳар бир граф бўлагида чўққилар ва қобиқлар сони максимум қийматга эга.
2. Ҳар бир граф бўлаги иккинчи граф бўлаги билан энг кам миқдордаги боғланишлар сони билан боғланган.
3. Графларни энг кам миқдордаги бўлакларга бўлиш.

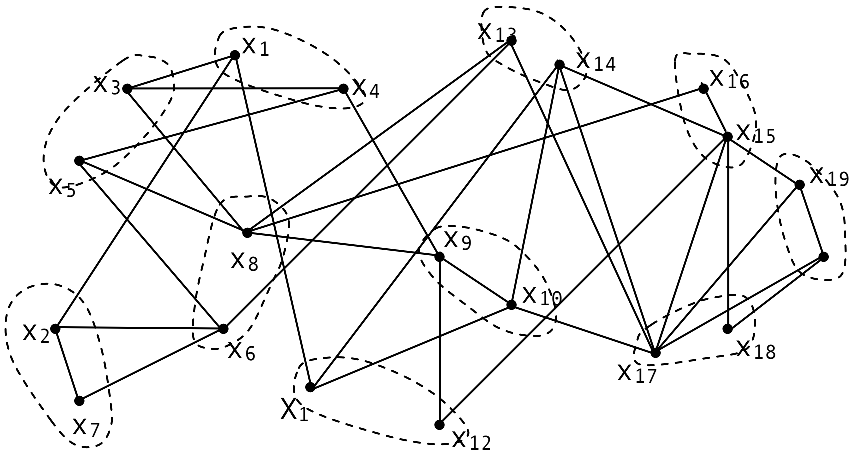
Агар G=<X,U> граф берилган бўлсин, у $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_m\}$ чўққилар тўпламидан ва $U=\{u_1,u_2,\ldots,u_i,\ldots,u_n\}$ қобиқлар тўпламидан ташкил топган. X чўққиларни боғланишларини ҳисобга олган ҳолда, боғланишлар матрицасини $M=\|m_{i,j}\|$ қуриш мумкин. Ҳар бир қобиқ бирор оғирлик функциясига тенг деб фараз қиламиз. Бу ерда оғирлик функциясини $Z=\{z_1,z_2,\ldots,z_n\}$ билан белгилаймиз. Ҳар бир граф бўлаги аниқ чўққилар миқдорига ва ҳар хил оғирлик функциясига эга, ҳамда бўлаклар орасидаги боғланишлар сони минимум қийматга эга.

Масалани ечишини беш босқичдан иборат бўлган алгоритм орқали ифодалаймиз:

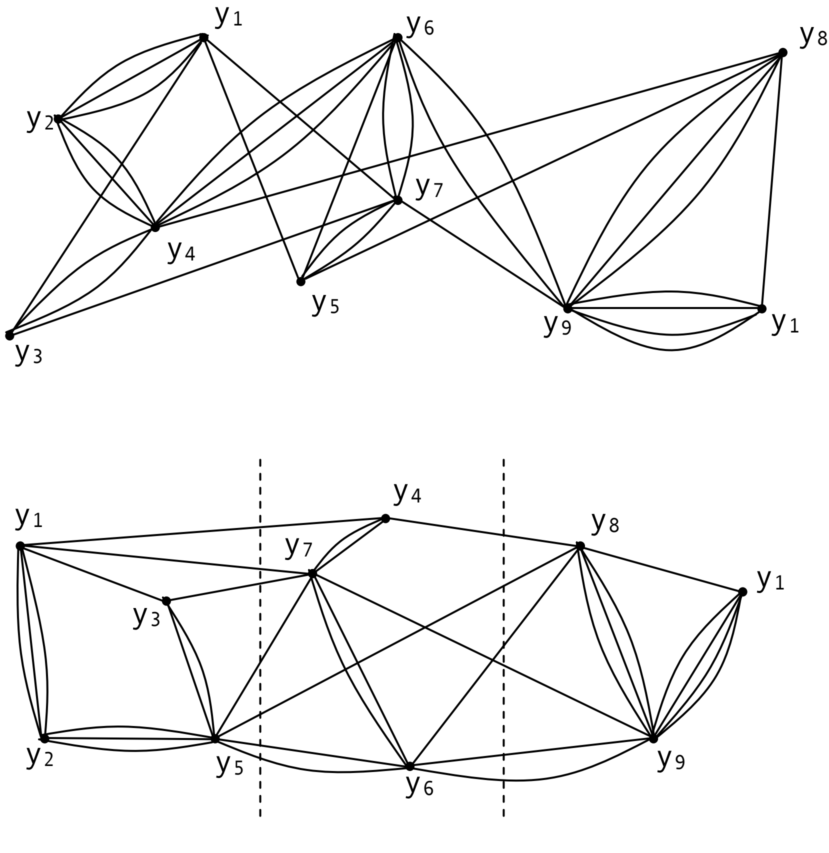
I. Граф G=<X,U> ни бир хил оғирлик функциясини қийматига эга бўлган боғланган графларга бўламиз. (7.1-расм)



а)



II. Граф $G=<X,U>=\bigcup\limits_{c=1}^{n} P_c<X_c,U_c>$ ни $G=<Y,V>$ кўринишида тасвирлаймиз. (7.2 а-расм). Бу ерда у- биринчи босқичда ташкил этилган $P_c<X_c,U_c>$ граф бўлаклари.

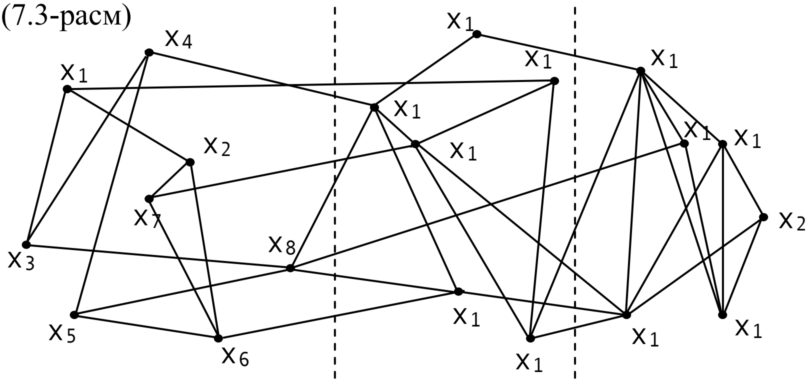


б)

7.2–расм

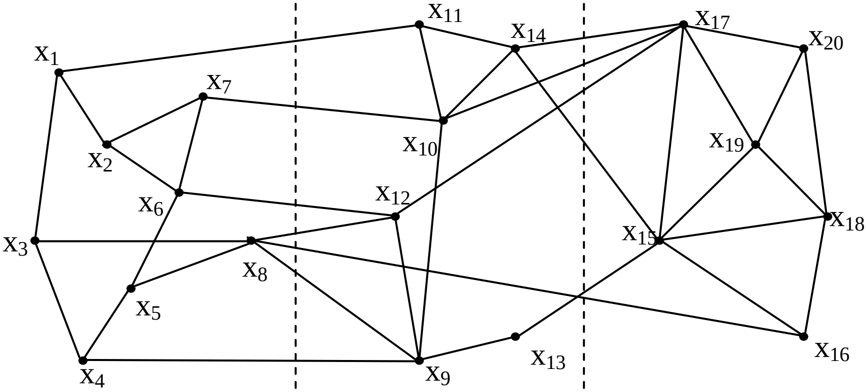
III. $G=\langle Y,V\rangle$ графни элементлар сони чегараланган граф бўлакларига бўламиз. Янги $G^{|}=\langle Y^{|},V^{|}\rangle=\bigcup\limits_{\alpha=1}^{n} G_{\alpha}\langle Y^{|},V^{|}\rangle$ гарфларни ташкил этамиз (7.2 б-расм).

IV. Чўққилар $y_1 \in Y$ x_i бошланғич чўққилар тўплами билан ифодалаймиз. $G\langle X^{|},U^{|}\rangle=\bigcup\limits_{\alpha=1}^{n} G^{|}_{\alpha}\langle X^{|},U^{|}\rangle$ графлар бўлагини ташкил этамиз. (7.3-расм)



7.3–расм

V. $G^{|}=\langle X^{|},U^{|}\rangle$ графини $G^{|||}=\langle X^{|||},U^{|||}\rangle$ граф бўлаклари тўпламига бўламиз. (7.4-расм)



7.4–расм

Қуйида графларни бўлакларга бўлишни учта усулларини кўриб чиқамиз.

Кетма-кет усули. Графларни бўлакларга бўлиш кетма-кет бажарилади: аввал биринчи граф бўйича, сўнгра иккинчи ва бошқа граф бўлаклари топилади. Ҳар бир граф ўзининг бошлангич чўққиси асосида қурилади. Шундай қилиб, графлар бўлакларининг сони унинг чўққиларнинг ва унинг чўққиларининг бошланғич тўпламига боғлиқ. Граф бўлакларини аниқлашдаги ҳар бир қадамда қўйилган чегараланишларни ҳисобга олган ҳолда биринчи критериянинг бажарилиши таъминланади. Бу критерия умумий бўлиши мумкин, акс ҳолда критерияларни кетма-кет бажарилиши таъминланади. Шу тариқа приоритет асосида критерияларни бажарилиши кетма-кетлиги тузилади ва графларни бўлакларга бўлиш таъминланади.

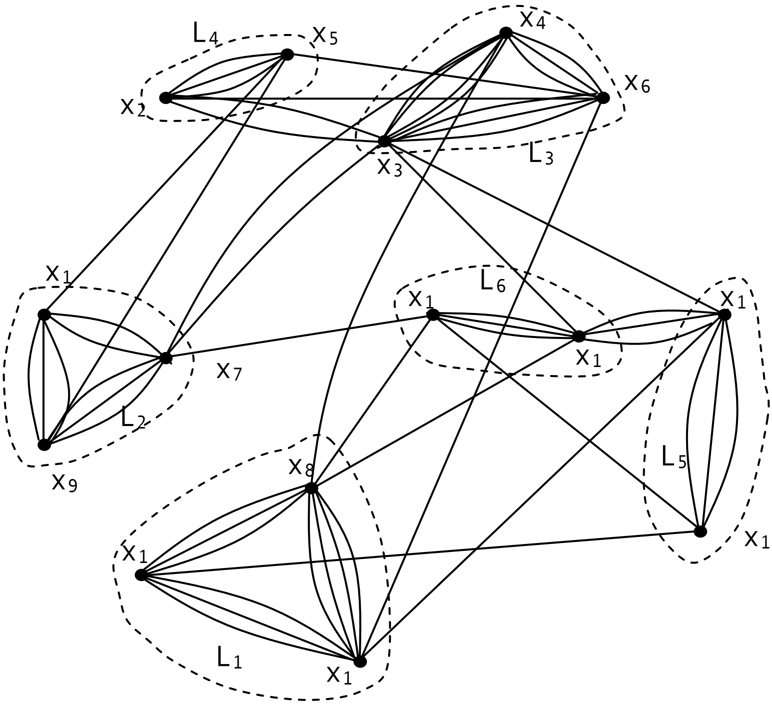
Параллел усул. Бу усул бўйича параллел равишда бир нечта граф бўлакларини ташкил этишга эришилади. Бунинг учун бошланғич чўққилар тўплами орасида янги чўққилар параллел танлаб олинади. Ҳар бир танлашда берилган чегараланишлар ва критериялар ҳисобга олиниб борилади.

Кетма-кет параллел усул. Бу усул аввалги иккита усулнинг бирлашмасидир. Аввал граф бўлакларининг фрагментлари параллел ҳосил қилинади ва қолган қисмини эса кетма-кет қурилиши ташкил этилади.

Бу усулда ҳам ҳар қадамда берилган чегараланишлар ва критерияларни бажаралиши таъминланади.

Кўриниб турибдики бу усуллар бўйича графларни бўлакларга бўлишни ташкил этишда асосий муаммо бошланғич чўққилар тўпламини танлашдан иборат. Бунинг учун иккита ҳолат тавсия этилади. Биринчи ҳолатда бошланғич чўққилар сифатида бир хил тоифадаги, яъни ўхшаш чўққилар танлаб олинади, яъни энг кичик қобиқга ёки даражага эга бўлган чўққиларни танлаб олиш мумкин. Иккинчи ҳолатда бошланғич чўққилар сифатида зиддиятли чўққиларини олиш мумкин. Зиддиятли чўққилар, шундай чўққиларки, уларнинг ҳеч бўлмаганда иккитаси битта граф бўлагида бирга бўлиши мумкин эмас.

Юқорида айтилганларни ҳисобга олиб қуйидаги графларни бўлакларга бўлиш масаласини ечишнинг умумий алгоритмини келтириш мумкин.



7.5-расм. Граф L=<X,U>

Графларни бўлакларга бўлиш алгоритми қуйидагича амалга оширилади:

1. Бошланғич чўққиларни тўпламини танлаш: ўхшаш чўққилар, зиддиятли чўққилар.
2. Графларни бўлишни бошланғич бўлагини (фрагментини) ташкил этиш.
3. Фрагмент билан максимум боғланган чўққини танлаш.
4. Асосий критериялар ва чегараланишлар бажарилганлигини текшириш.
5. Графни бўлишдаги Янги фрагментни ташкил этиш.
    - Кетма-кет усули билан;

- Параллел усул билан;
- Параллел – кетма-кет усул билан.

6. Барча чўққилар граф бўлакларига тақсимланганлигини текшириш.
7. Граф бўлакларини ташкил этиш.

Мисол. Граф G=<X,U> берилган (7.5-расм). Графдаги чўққилар сони 15 та. Шу графни бўлакларга бўлиш талаб этилади.

Берилган графда X чўққилар тўплам тўпламчалар бўйича тақсимланган. Ҳар бир тўплами бир хил рангга эга бўлган ўхшаш чўққиларан иборат.

Ўхшаш чўққилар тўплами қуйидаги тартибда тақсимланган:

$$X^1=\{x_1, x_2, x_{10}, x_{11}, x_{12}\}, X^2=\{x_8, x_9\}, X^3=\{x_7, x_{13}\},$$

$$X^4=\{x_5, x_{14}, x_{15}\}, X^5=\{x_3\},$$

$$X^5=\{x_4\}, X^7=\{x_6\}$$

Кўрилаётган граф учун чегараланишлар қуйидагича берилган:

1) зиддиятли чўққилар тўпламчалари;

$$Z_1=\{x_{10}, x_9, x_3\} \text{ и } Z_2=\{x_5, x_6\},$$

2) граф бўлакларининг максимал боғланишлари – $Ф_0$=20;
3) граф бўлакларида максимал чўққилар сони – $К_0$=3;
4) графда граф бўлакларининг максимал сони – N_0=6/

Граф G=<X,U> боғланишлар рўйхати C билан берилган. Шу рўйхат асосида боғланганлик матрицасини қурамиз.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}
x_1		1			1		2		3						
x_2	1		2		3	1									1
x_3		2		4		3	1			1	1	1			
x_4			4			3	1	1							
x_5	1	3				1			1					1	
x_6		1	3	3	1					1					
x_7	2		1	1					3						1

x_8				1						4		1	3		1
x_9	3				1		3						1		
x_{10}			1			1		4			1		3		
x_{11}			1							1		3		3	
x_{12}			1					1			3				3
x_{13}								3	1		3			1	
x_{14}					1						3			1	1
x_{15}		1			1			1				3		1	

Келтирилган алгоритм бўйича бошланғич чўққилар учун зиддиятли чўққилар тўпламларини $Z_1=\{x_{10}, x_9, x_3\}$ ни кейинроқ $Z_2=\{x_5, x_6\}$ ни оламиз. Кетма-кет (параллел) равишда Z_1 тўпламидан чўққини танлаб боғланганлик матрицаси орқали энг кучли боғланган чўққиларни аниқлаймиз.

Боғланганлик матрицасини ҳар бир элементи қатордаги чўққиларни устундаги чўққилар билан боғланганлигини кўрсатади. Масалан x_{10} чўққини бошланғич чўққи деб олсак, у билан энг кучли боғланган чўққи x_8 бўлиб (x_{10}, x_8) боғланиши ҳосил қилинади.

Бу чўққилар учун энг кучли боғланган чўққи x_{13} ҳисобланади. Шундай қилиб, $G_1=\langle X_1,U_1\rangle=\{x_{10}, x_8, x_{13}\}$ граф бўлаги ҳосил бўлади.

Шу тартибда x_9 чўққиси учун $G_1=\langle X_1,U_1\rangle$ графига изоморф ҳолатда x_7 ва x_1 чўққиларини аниқлаймиз. Натижада, $G_2=\langle X_2,U_2\rangle=\{x_9, x_7, x_1\}$ граф бўлагини ташкил этамиз.

Бу граф бўлакларининг чўққилари ўхшаш бўлиб, G_1 ва G_2 графларида X^1, X^2, X^3 чўққилар тўпламидан биттадан чўққи иштирок этган. Натижада, $G=\langle X,U\rangle$ графини граф бўлакларига бўлишни қуйидагича ифодалаш мумкин:

Граф бўлаги	Чўққилар тўпламчаси	Чўққилар тури	Ташқи қобиқлар сони
G_1	x_8, x_{10}, x_{13}	1, 2, 3	$Ф_1=8$
G_2	x_1, x_7, x_9	1, 2, 3	$Ф_2=7$
G_3	x_3, x_4, x_6	5, 6, 7	$Ф_3=11$
G_4	x_2, x_5	1, 4	$Ф_4=9$

G_5	x_{11}, x_{14}	1, 4	$Ф_5$=8
G_6	x_{12}, x_{15}	1, 4	$Ф_6$=9

Шундай қилиб, граф $G=<X,U>$ уч хил турдаги граф бўлакларига бўлинади.

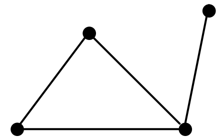
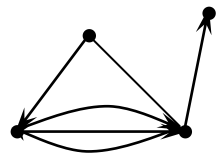
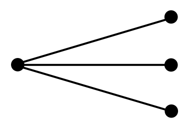
1) $G_1=<X_1,U_1>$, $G_2=<X_2,U_2>$;
2) $G_3=<X_3,U_3>$;
3) $G_4=<X_4,U_4>$, $G_5=<X_5,U_5>$, $G_6=<X_6,U_6>$.

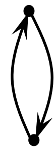
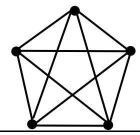
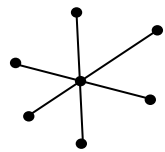
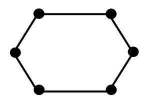
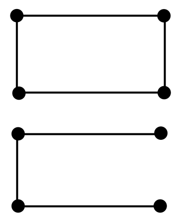
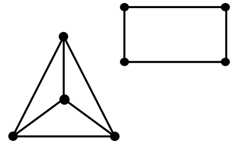
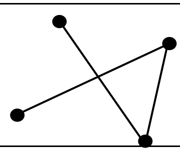
Граф бўлакларининг ташқи қобиқлари сони 52 га тенг.

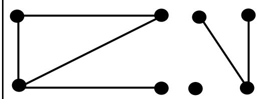
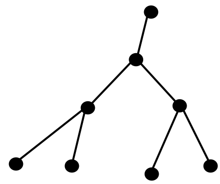
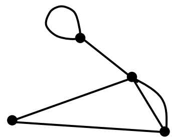
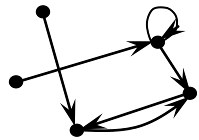
7.2. Масала ва машқлар

1. Берилган графни ташқи қобиқлар сони энг кам бўлган критерияга асосланган ҳолда икки бўлакка бўлинг.
2. Граф $G=<X,U>$ да бўлаклар сони чегараланганлигини ҳисобга олиб, уни бўлакларга бўлинг.
3. Берилган графни ташқи қобиқлар сони энг кам бўлган критерияга асосланган ҳолда тўрт бўлакка бўлинг.
4. Граф $G=<X,U>$ да граф бўлакларидаги чўққилар сони чегараланганлигини ҳисобга олиб мисоллар келтиринг.
5. Берилган графда бир бирига мос бўлган граф бўлаклари сонини топинг.
6. Берилган графда бир бирига изоморф бўлган бўлакларни топинг.

VIII. ГРАФЛАРНИНГ ТУРЛАРИ.

1.	Йўналтирилмаган граф	X-чўққилар тўплами ва u-қобиқлар тўпламидан ташкил топган ва қуйидагича ифодага эга бўлган: $X=\{x_1, x_2,\dots x_i,\dots, x_m\}$ ва $U=\{u_1, u_2,\dots u_j,\dots, u_m\}$, ҳамда $U_j=x_i$ ва x_k чўққиларини боғловчи қобиқ $u_j=(x_i,x_k)$ дан иборат бўлса, бундай тўпламлар йиғиндисидан ташкил топган чизма $G=<X,U>$ йўналтирилмаган граф деб аталади.	
2.	Йўналтирилган граф	X-чўққилар тўплами ва U-йўналтирилган қобиқлар тўпламидан ташкил топган, ҳамда $u_1=(x_i,x_k)$, x_i – бошланғич чўққи – чиқувчи ва x_k – охирги чўққи кирувчи бўлса, бундай тўпламлардан ташкил топган чизма йўналтирилган граф деб аталади.	
3.	Нуль граф	$G=<X,U>$ графда $x=\{x_i\}$, $i=1$ $U=\varnothing$ бўлса, бундай граф нуль граф деб аталади.	
4.	Мультиграф	$G=<X,U>$ графида бирор иккита чўққининг бирлашуви бир неча қобиқ билан ифодаланса, бундай граф мультиграф деб аталади.	

5.	Симметрик граф	G=<X,U> граф симметрик деб аталади, агар унинг бирор иккита чўққиси x_i ва x_j учун u=(x_i, x_j) бўлса, (x_j, x_i)=u бўлсин.	
6.	Тўлиқ граф	G=<X,U> графда х чўққи-ларни ҳаммаси бир-бири билан боғланган бўлса, тўлиқ граф деб аталади.	
7.	Юлдузли граф	G=<X,U> граф битта марказий чўққига эга бўлса ва унинг локал даражаси λ_{xi}>1 бўлса, қолганлари эса λ_{xj}=1 бўлса, бундай графлар юлдузли граф деб аталади.	
8.	Циклли граф	G=<X,U> графда ҳар бир чўққининг даражаси λ=2 бўлса, бундай граф циклли граф деб аталади.	
9.	Гамильтон граф	Ҳар бир чўққидан бир марта ўтиши мумкин бўлган бекиқ занжир, яъни циклли граф Гамильтон цикли деб аталади, агар занжир бекиқ бўлмаса, Гамильтон занжири деб аталади.	
10.	Текис граф	Текис граф деб текисликда берилган иккита қобиғи бир-бири билан кесишмайдиган графга айтилади.	
11.	Боғланган граф	Графнинг ҳамма чўққилари боғланган бўлиб, бир бутун бўлса, у боғланган граф деб	

		аталади.	
12.	Боғланмаган граф	Агар графда бирорта чўққилар боғланмаган бўлса, улар боғланмаган граф деб аталади.	
13.	Дарахт	Граф дарахт деб аталади, агар унда цикллар бўлмаса.	
14.	Йўналтирилмаган аралаш граф	Графларда тугунчалар ва параллел қобиқлар бўлса, йўналтирилмаган аралаш граф деб аталади.	
15.	Йўналтирилган аралаш граф	Графларда йўналтирилган қобиқлар ва тугунчалар бўлса, бундай граф йўналтирилган аралаш граф деб аталади.	

Адабиётлар

1. Автоматизация проектирования сложных логических структур./Под ред. Гарбатова В.А. М: Энергия 1978.327 с
2. Белов В.В , Воробьев Е.М., Шаталов В. Е. Теория графов М. Высшая школа 1976.
3. Берзтисс А.Т. Структуры данных М. Статистика, 1974.
4. Брегман в.И. графы в задачах управления производством
5. Горбатов В.А. Схемы управления ЦВМ и графы Энергия 1971
6. Гуськов Г.Я., Магрупов Т.М. Алгоритмическое проектирование микроэлектронных вычислительных структур. Ташкент 1982
7. Евстигнеев В.А. Применение теории графов в программирование Наука 1985
8. Ершов А.П. Введение в теоретическое программирование Наука 1977
9. Зыков А.А Основы теории графов Наука 1987.
10. Зыков А. А Теория конечных графов Новосибирск Наука 1969
11. Кабулов В.К., Гуськов Г.Я., Магрупов Т.М. Концептуальное проектирование микроэлектронных вычислительных структур и систем. Ташкент: Фае, 1989. 224 с.
12. Ландау И.Я. применение ЦВМ, для проектирования ЦВМ. М. Энергия, 1974
13. Липатов .П Теория графов и ее применение М. Знание 1986
14. Магрупов Т.М. Графы, сети, алгоритмы и их приложения. Ташкент: Фан, 1990. 120 с.
15. Мелихов А.Н., Берштейн Л.С., Курейчик В.М. Применение графов для применения дискретных устройств. М.: Наука, 1974.
16. Методы разбиения РЭА на конструктивные законченные части. М.: Сов. радио,1978.
17. Морозов К.К., Одинцов В.Г., Курейчик В.М. Автоматизация проектирование конструкций радиоэлектронной аппаратуры. М.: Радио и связь, 1983.
18. Оре. О. Теория графов. М.: Наука,1980
19. Поспелов Д.А. Введение в теорию вычислительных систем. М.: Сов.радио, 1972
20. ФилипсД., Гарша-ДиасА. Методы анализа сетей/пер. с англ.М.:Мир,1984.496 с.

21 Харари Ф. Теория графов М.,Мир 1973.

Мундарижа