ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ, МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.27.06.2017.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

РАХМАТУЛЛАЕВ МУЗАФФАР МУХАММАДЖАНОВИЧ

СТАТИСТИК МЕХАНИКАНИНГ КЭЛИ ДАРАХТИДА БЕРИЛГАН КЛАССИК МОДЕЛЛАРИ УЧУН КУЧСИЗ ДАВРИЙ ГИББС ЎЛЧОВЛАР ВА АСОСИЙ ҲОЛАТЛАР

01.01.01 – Математик анализ
(физика-математика фанлари)

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ (DSc) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент шаҳри – 2017 йил

УДК: 517.98

Докторлик (DSc) диссертацияси автореферати мундарижаси
Оглавление автореферата докторской (DSc) диссертации
Content of the abstract of doctoral (DSc) dissertation

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ, МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.27.06.2017.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

РАХМАТУЛЛАЕВ МУЗАФФАР МУХАММАДЖАНОВИЧ

СТАТИСТИК МЕХАНИКАНИНГ КЭЛИ ДАРАХТИДА БЕРИЛГАН КЛАССИК МОДЕЛЛАРИ УЧУН КУЧСИЗ ДАВРИЙ ГИББС ЎЛЧОВЛАР ВА АСОСИЙ ҲОЛАТЛАР

01.01.01 – Математик анализ
(физика-математика фанлари)

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ (DSc)
ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент шаҳри – 2017 йил

Фан доктори (Doctor of Science) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2017.1.DSc./FM2 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертацияси Математика институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://ik-fizmat.nuu.uz/) ва «Ziyonet» Ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий маслаҳатчи:	**Розиков Уткир Абдуллоевич** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Гринив Остап Олегович** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Рахимов Абдуғофур Абдумажидович физика-математика фанлари доктори, профессор
	Кудайбергенов Каримберген Кадирбергенович физика-математика фанлари доктори
Етакчи ташкилот:	**Қарши давлат университети**

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети, Математика институти ҳузуридаги Dsc.27.06.2017.FM.01.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2017 йил «___»___________ соат____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (___ рақами билан рўйхатга олинган). Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (99871) 246-02-24.

Диссертация автореферати 2017 йил «____» _______________куни тарқатилди.
(2017 йил «____» ___________ даги _______ рақамли реестр баённомаси).

А. С.Садуллаев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., академик

Ғ.И. Ботиров
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.н.

В.И.Чилин
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш ҳузуридаги илмий семинар раиси, ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (докторлик диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда физика, биология, термодинамика, статистик механика ва бошқа шу каби фанлардаги фазавий ўтишлар назарияси масалаларига келади. Фазавий ўтишлар назарияси эса ўз навбатида Гиббс ўлчовлари назарияси билан узвий боғланишга эга. Доимий ҳарорат сақланадиган ва атроф-муҳит билан иссиқлик мувозанатида бўлган системалар учун америкалик олим Дж.У.Гиббс томонидан каноник Гиббс тақсимоти яратилган. Гиббс ўлчовлари назарияси ўлчовлар назариясининг нисбатан янги соҳаси бўлиши билан бир қаторда статистик механика ва Евклид квант назариясини ўрганишнинг асосий объектидир. Статистик механиканинг классик моделлари учун Гиббс ўлчовларини таснифлаш мураккаблиги, уларнинг мавжудлигини текшириш етарли даражада шаклланмаганлиги сабабли ушбу ўлчовларга оид тадқиқотларни ривожлантириш муҳим вазифалардан бири бўлиб қолмоқда.

Мустақиллик йилларида мамлакатимизда фундаментал фанларнинг амалий татбиқига эга бўлган йўналишларга эътибор кучайтирилди, хусусан, статистик механиканинг классик (Изинг, Поттс, SOS, HC, λ-моделлар ва бошқа) моделлари учун лимит Гиббс ўлчовларини тадқиқ қилиш, трансляцион-инвариант ва даврий ўлчовларни мавжудлигини аниқлаш усулларини топишга алоҳида эътибор қаратилди. Классик моделлар учун трансляцион-инвариант ва даврий лимит Гиббс ўлчовларини таснифлашда салмоқли натижаларга эришилди. Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси асосида илмий-тадқиқот ва инновация ютуқларини амалиётга жорий этиш маханизмларидан иқтисодиёт тармоқларининг самарадорлигини оширишда фойдаланиш муҳим аҳамиятга эга.

Ҳозирги кунда жахонда Марков тасодифий майдонлар назарияси ва бу назариянинг рекуррент тенгламалари усулларидан фойдаланиб, П.М.Блехер, Н.Ганиходжаев, С.Заҳари, Ф.Спитцер, Ю.Сухов, У.Розиков ва бошқалар томонидан Кэли дарахтида статистик механиканинг моделлари ўрганилган, даврий Гиббс ўлчовлар тўплами баён этилган. Бундай ўлчовлар фақат трансляцион-инвариант ёки даври иккига тенг бўлган даврий ўлчовлар бўлиши исботланган. Даврийликдан кўра умумий бўлган кучсиз даврий Гиббс ўлчови ва кучсиз даврий асосий ҳолат тушунчалари киритилди. Кэли дарахтида статистик механиканинг моделлари учун кучсиз даврий Гиббс ўлчовлар тўплами, асосий ҳолатларни тадқиқ қилиш ва амалиётга татбиқ этиш мухим аҳамият касб этмоқда. Бу борада мақсадли илмий тадқиқотларни, жумладан, қуйидаги йўналишларда илмий изланишларни амалга ошириш муҳим вазифалардан бири ҳисобланади: статистик механиканинг классик моделлари учун кучсиз даврий Гиббс ўлчовларини мавжудлигини текшириш, яъни фазавий ўтиш содир бўлишини аниқлаш; статистик механиканинг классик моделлари учун кучсиз даврий асосий ҳолатларнинг тўпламини топиш ва уларни таснифлаш. Юқорида келтирилган илмий-тадқиқотлар йўналишида бажарилаётган илмий изланишлар мазкур диссертация мавзусининг долзарблигини изоҳлайди.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2008 йил 15 июлдаги ПҚ-916-сон «Инновацион лойиҳалар ва технологияларни ишлаб чиқаришга татбиқ этишни рағбатлантириш борасидаги қўшимча чора-тадбирлар тўғрисида»ги, 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги Қарори ва 2017 йил 8 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича харакатлар стратегияси тўғрисида»ги фармони ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий хужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожлантиришнинг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи[1]

Гиббс ўлчовлари назарияси йўналишида, хусусан, панжараларда аниқланган статистик механиканинг классик моделлари учун Гиббс ўлчовлари ва уларнинг хоссаларини ўрганиш бўйича илмий изланишлар етакчи хорижий давлатларнинг илмий марказлари ва олий таълим муассасалари, жумладан, Россия фанлар академиясининг ахборотларни узатиш муаммолари институти, Россия фанлар академияси Математика институти, Москва давлат университети, Новосибирск давлат университети (Россия); Institut des Hautes Etudes Scientifiques (Bures-sur-Yvette, France); Abdus Salam International Center for Theoretical Physics (Triest, Italy); Париж университети (Франция); Женева университети (Швейцария); Бонн университети, Амалий математика институти, Рур университети (Германия); Авейру университети (Португалия); Кюсю университети (Япония); Кембридж университети, Лафборо университети, School of Mathematics, University of Leeds (Буюк Британия); International Islamic University of Malaysia (Малайзия); Zirve university, Harran university (Туркия) да олиб борилмоқда.

Статистик механиканинг кучсиз даврий Гиббс ўлчовларини таснифлашга бағишланган жаҳон миқёсидаги илмий изланишлар натижасида бир қатор долзарб масалалар ечилган, хусусан, қуйидаги илмий натижалар олинган: Кэли дарахтида Изинг модели учун озод энергияни ҳисоблашнинг

---

[1] Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи: онлайн библиотека, http://brats.mkt-stroy.ru/lirika/lib-238; Journal of Annals of Probability https://projecteuclid.org/euclid.aop/1176993439 ; Publ. RIMS, Kyoto Univ. https://www.jstage.jst.go.jp/article/kyotoms1969/13/2/13_2_335/_pdf; de Gruyter Studies in Mathematics, 9. Walter de Gruyter, Berlin https://www.degruyter.com/view/books; World scientific. Singapore/ http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0129055X1330001X; Cambridge University Press, 2017/ http://www.unige.ch/math/folks/velenik/smbook

умумий формуласи топилган ва маълум Гиббс ўлчовлари учун озод энергиялар ҳисобланган (Universites Aix-Marseille et Sud Toulon-Var); Поттс модели учун трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлари ва чегаравий шартлар ўртасидаги боғланиш топилган (Universites Aix-Marseille et Sud Toulon-Var); $(k_0)-$трансляцион-инвариант бўлган Гиббс ўлчовлари топилган (International Islamic University of Malaysia).

Дунёда бугунги кунда статистик механиканинг моделлари учун лимит Гиббс ўлчовларини таснифлаш бўйича бир қатор, жумладан, Марков тасодифий майдонлар назарияси ва бу назариянинг рекуррент тенгламалари усулларидан фойдаланган ҳолда муайян жараённи янада мутаносиб равишда ўзида акс эттирувчи математик моделларни яратиш ва уларни ифодаловчи масалаларни ечиш; спин қийматлари сони чекли ёки саноқли бўлган моделлар учун даврий, кучсиз даврий ва бошқа Гиббс ўлчовларининг мавжудлик шартларини топиш; Изинг ва Поттс моделлари учун кучсиз даврий Гиббс ўлчовларини таснифлаш ва бу ўлчовлар тўпламининг структурасини таҳлил қилиш; фазавий ўтишлар ҳамда асосий ҳолатларни топиш алгоритмини тузиш каби устувор йўналишларда илмий-тадқиқот ишлари олиб борилмоқда.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Дж.У.Гиббс томонидан каноник Гиббс тақсимоти яратилган бўлишига қарамай, биринчи бўлиб Гиббснинг лимит ўлчовлари умумий ҳарактеристикаси Р.Л.Добрушин, О.Лэнфорд ва Д.Рюэлларнинг ишларида келтирилган. Р.Л.Добрушин томонидан лимит Гиббс ўлчовининг мавжудлиги ҳақидаги теорема исботланган. Фаза алмашишларнинг асосий назарияси эса С.А.Пирогов ва Я.Г.Синай ишларида ёритилган. Кэли дарахтида Изинг модели учун трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлари К.Престон, Ф.Спитцер, П.М.Блехер, Ж.Руиз, В.Загребнов ва Д.Иоффелар томонидан ўрганилган. П.М.Блехер ва Н.Н.Ганиходжаевларнинг илмий мақолаларида континуумта Гиббс ўлчовлари мавжудлиги кўрсатилган.

Д.Гандолфо, Ж.Руиз, К.Кулске, П.М.Блехер, Дж.Либовиц, Е.Презутти, Ю.М.Сухов, Н.Н.Ганиходжаев, У.А.Розиков, Ф.Мухаммедов, Н.М.Хатамов, Р.М.Хакимов ва бошқаларнинг илмий ишларида Марков тасодифий майдонлар назарияси ва бу назариянинг рекуррент тенгламалари усулларидан фойдаланиб Гиббс ўлчовлари ўрганилган. У.А.Розиков, К.Кулске и Р.М.Хакимовларнинг ишларида Поттс модели учун трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлари таснифланган. У.А.Розиков, К.Кулске ишларида эса Поттс модели учун трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлари четки бўлишлиги ўрганилган.

У.А.Розиков, Ф.М.Мухаммедов, Г.И.Ботиров, Н.М.Хатамовларнинг илмий ишларида Кэли дарахтида контур усул (Пирогов-Синай назарияси) ривожлантирилган. Бу усул билан Кэли дарахтида етарлича кенг синфдаги Гамильтонианлар учун бир хил бўлмаган Гиббс ўлчовлари мавжудлиги кўрсатилган. У.А.Розиков, Х.Акин, С.А.Темурларнинг илмий ишларида Кэли дарахтидаги Изинг модели учун аввалдан маълум бўлган ўлчовлардан фарқли лимит Гиббс ўлчовлари тўплами қурилган. Д.Гандолфо, Ж.Руиз, У.А.Розиков, Ф.Х.Хайдаровларнинг ишларида эса Кэли дарахтида аниқланган, озод энергияси мавжуд бўлмайдиган Гиббс ўлчови мавжудлиги кўрсатилган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Математика институтининг Ф4-ФА-Ф013 «Ноассоциатив ва операторлар алгебралари, динамик системалар ҳамда уларнинг статистик физика ва популяцион биологияга татбиқлари» (2012-2016 йиллар) ва ЁФ-4-3+ЁФ-4-4 «Саноқли графларда спин системаларнинг эҳтимоллик ўлчовлари ва Ли алгебраларнинг тасвирлари ёрдамида ҳосил қилинувчи Лейбниц алгебралари» (2016-2017 йиллар) мавзусидаги илмий тадқиқот лойиҳалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади Кэли дарахтида Изинг ва Поттс моделлари учун кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари ҳамда асосий ҳолатларнинг мавжудлигини аниқлаш, (кучсиз) даврий бўлмаган лимит Гиббс ўлчовлари синфини топиш, Изинг ва Поттс моделлари учун озод энергияларни ҳисоблашдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

Кэли дарахтида аниқланган Изинг ва Поттс моделлари учун кучсиз даврий Гиббс ўлчовларини топиш;

Кэли дарахтида аниқланган ташқи майдонли Изинг модели учун кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари мавжудлигини аниқлаш;

Изинг модели учун (кучсиз) даврий бўлмаган Гиббс ўлчовларини қуриш;

Рақобатлашувчи ўзаро таъсирли Изинг ва Поттс моделлари учун кучсиз даврий асосий ҳолатларни тадқиқ этиш;

Поттс модели учун трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлари ва чегаравий шартлар ўртасидаги боғланишларни топиш;

Изинг ва Поттс моделлари учун озод энергияларни ҳисоблашнинг умумий формулаларини топиш ва маълум чегаравий шартлар учун уларни ҳисоблаш;

Тадқиқотнинг объекти Изинг ва Поттс моделлари учун кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари, кучсиз даврий асосий ҳолатлар, озод энергия, чегаравий шартлар, $(k_0)-$трансляцион-инвариант ва даврий Гиббс ўлчовларидан иборат.

Тадқиқотнинг предмети индекси икки ва тўртга тенг бўлган нормал бўлувчилар учун кучсиз даврий Гиббс ўлчовлар, даврий ва кучсиз даврий асосий ҳолатлар, Изинг ва Поттс моделларининг маълум ўлчовлари учун озод энергиялар, Кэли дарахтидаги Поттс модели трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлари учун чегаравий шартлардан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида ўлчовлар назарияси ва қисқартириб акслантириш усуллари, ночизиқли динамик системалар назарияси, Марков тасодифий майдонлар назарияси ва бу назариянинг рекуррент тенгламалари ҳамда Пирогов-Синай назариясидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

Нормал бўлувчи индекси тўртга тенг бўлган ҳолда, Изинг модели учун параметрларга баъзи шартлар асосида, камида 7 та кучсиз даврий Гиббс ўлчови мавжудлиги исботланган;

(k_0)-даврий (трансляцион-инвариант) Гиббс ўлчовлари тушунчаси киритилган ва бундай ўлчовлар мавжудлиги исботланган;

Изинг ва Поттс моделлари учун озод энергияларни ҳисоблашнинг умумий формуласи топилган ҳамда маълум чегаравий шартлар учун озод энергиялар ҳисобланган. Шунингдек, ушбу озод энергиялар кучсиз даврий Гиббс ўлчовининг чегаравий шартларидан фарқлилари ўзаро тенг бўлиши исботланган;

Индекси иккига тенг бўлган нормал бўлувчига нисбатан Кэли дарахтида антиферромагнит Поттс модели учун маълум шартлар бажарилганда 2^q-2 та кучсиз даврий лимит Гиббс ўлчовлари мавжудлиги исботланган;

Ферромагнит Поттс модели учун маълум шартларда камида иккита кучсиз даврий (даврий бўлмаган) лимит Гиббс ўлчовлари мавжудлиги исботланган;

Ташқи майдонли Поттс модели учун топилган шартлар бажарилганда камида иккита кучсиз даврий (даврий бўлмаган) лимит Гиббс ўлчовлари мавжудлиги исботланган;

Трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовларининг чегаравий шартлар (конфигурациялар) билан боғлиқлиги топилган. Трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлари учун чегаравий конфигурациялар қурилган;

Кэли дарахтида аниқланган рақобатлашувчи ўзаро таъсирли Изинг модели учун тўртта кучсиз даврий асосий ҳолатлар мавжуд бўлишининг (дарахт тартиби k га ва индекси икки ҳамда тўрт бўлган нормал бўлувчилар параметрларига) зарур ва етарли шартлари топилган.

Тартиби $k \geq 1$ бўлган Кэли дарахтида аниқланган рақобатлашувчи ўзаро таъсирли Изинг моделининг ихтиёрий (чекли индексли) нормал бўлувчига нисбатан кучсиз даврий конфигурацияси асосий ҳолат бўлишининг зарур ва етарли шарти топилган.

Кэли дарахтида рақобатлашувчи ўзаро таъсирли Поттс моделининг даврий ва кучсиз даврий асосий ҳолатлари мавжуд бўлиши учун (панжара тартиби $k \geq 2$ ва индекси икки ҳамда тўрт бўлган нормал бўлувчи параметрларига) зарур ва етарли шартлар топилган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари Гиббс ўлчовлари сони ўзгарадиган моделлар учун параметрларнинг фазавий ўзгаришларини таъминлайдиган аниқ ёки тақрибий қийматларини аниқланганлигидан, Изинг ва Поттс моделлари учун асосий ҳолатларнинг тўлиқ таснифидан ҳамда баъзи моделлар учун озод энергияларни ҳисоблашнинг асосий формулалари топилганлидан иборатдир.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги Контурлар усули ва ўлчовлар назариясининг фундаментал натижаларидан фойдаланилгани, параметрлар фиксирланган ҳолда фазавий ўтиш учун топилган критик қийматлар ҳақидаги тасдиқлар натижалари математик программалаштириш тилидаги Mathematica 7 ва Maple 15 программалари ёрдамида текширилганлиги ҳамда математик мулоҳазаларнинг ва исботларнинг қатъийлиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти физиканинг панжарали системаларида Гиббс ўлчовлари ва асосий ҳолатларни топиш орқали термодинамик хоссаларни ўрганишда қўлланилиши мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти, кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари ва асосий ҳолатларига оид натижалар, физик системанинг фазавий алмашиши мавжудлигини текширишда асос сифатида хизмат қилиши билан белгиланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Диссертация тадқиқоти жараёнида олинган илмий натижалар қуйидаги йўналишларда амалиётга жорий қилинган:

Кэли дарахтидаги панжарали моделлар учун кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари мавжудлигини текшириш ва уларнинг сонини аниқлаш усуллари FRGS 14-116-0357 грант лойиҳасида панжараларда аниқланган учта яқин қўшниларигача рақобатлашувчи дарахтнинг ҳар хил тармоқларига тегишли моделларнинг фазавий ўтишларини аниқлашда фойдаланилган (Малайзия Халқаро Ислом университетининг 2016 йил 26 октябрдаги маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши параметрларни янги шартлари асосида кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари мавжудлиги ва фазавий ўтиш содир бўлишини аниқлаш имконини берган;

Кэли дарахтида Изинг ва Поттс моделларининг кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари ва озод энергиясига ҳамда Изинг модели озод энергиясига бағишланган натижалари «Centre de Physique Théorique Universités Aix-Marseille et Sud Toulon-Var» маркази олимлари томонидан Лобачевский текислигида Изинг модели тоза Гиббс ҳолатларини тадқиқ қилишда ва бу моделнинг баъзи алтернатив Гиббс ўлчовларини қуришда фойдаланилган (Марсель (Франция) университетининг 2017 йил 5 сентябрдаги маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланиши комбинаторика, статистик механика, телекоммуникация ва фазавий ўтишлар масаларини ечиш имконини берган;

тўртинчи тартибли Кэли дарахтида Изинг модели учун параметрларнинг маълум шартлари бажарилганда кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари таснифланиши хорижий илмий журналларда (Communications in Mathematical Physics, 2015; Journal of Statistical Physics, 2012; Journal of Statistical Physics, 2016) Кэли дарахтида янги Гиббс ўлчовларини тадқиқ қилишда фойдаланилган. Илмий натижанинг қўлланилиши Кэли дарахтида янги Гиббс ўлчовларини топишда ва Гиббс ўлчовларига ўхшаш ўлчовларни қуришга хизмат қилган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 22 та илмий-амалий анжуманларда, жумладан 8 та халқаро ва 14 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 39 та илмий иш чоп этилган, шулардан Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 17 та мақола, жумладан, 14 таси хорижий ва 3 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг ҳажми ва тузилиши. Диссертация кириш қисми, тўртта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар руйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 184 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **«Изинг модели учун кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари»** деб номланувчи биринчи боби Кэли дарахтида индекси икки ва тўртга тенг бўлган нормал бўлувчига нисбатан Изинг модели учун кучсиз даврий Гиббс ўлчовларининг мавжудлиги ҳамда ташқи майдонли Изинг модели учун кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари мавжудлигини тадқиқ қилишга бағишланган. Бундан ташқари, Кэли дарахтида Изинг модели учун (k_0)-даврий Гиббс ўлчовлари тушунчаси киритилган ва бундай ўлчовлар мавжудлиги исботланган.

$T^k=(V,L),\ k\geq 1,\ k$-тартибли Кэли дарахти бўлсин, яъни ҳар бир учидан $k+1$ та қирра чиқувчи чексиз дарахт бўлсин, бу ерда V- учлар тўплами, L- қирралар тўплами.

Маълумки, T^k- Кэли дарахтини, ҳосил қилувчилари мос равишда $a_1,a_2,...,a_{k+1}$ бўлган $k+1$ та иккинчи тартибли циклик группаларнинг озод кўпайтмаси шаклида тасвирлаш мумкин.

$\Phi=\{-1,1\}$ ва $\sigma\in\Omega=\Phi^V$ −конфигурация бўлсин, яъни $\sigma=\{\sigma(x)\in\Phi: x\in V\}$. Изинг моделининг гамильтонианини кўрайлик

$$H(\sigma)=-J\sum_{<x,y>\in L}\sigma(x)\sigma(y), \tag{1}$$

бу ерда $J\in R,\ <x,y>$ - энг яқин қўшнилар.

Маълумки, Изинг моделининг ҳар бир Гиббс ўлчови учун қуйидаги шартни қаноатлантирувчи $h=\{h_x, x\in G_k\}$ қийматлар тўпламини мос қўйиш мумкин

$$h_x = \sum_{y\in S(x)} f\left(h_y, \theta\right), \qquad (2)$$

бу ерда $S(x)$ - «тўғри авлодлар» тўплами, $x\in V$ ва $f(x,\theta)=arcth(\theta\, th\, x)$, $\theta = th(J\beta)$, $\beta=\dfrac{1}{T}$, $T>0$ температура.

Ихтиёрий $x\in G_k$ учун $x_{\downarrow} = \{y\in G_k :< x, y >\}\setminus S(x)$ белгилаш киритамиз.

$G_k/\overline{G_k} = \{H_1, H_2, \ldots, H_r\}-$фактор-группа бўлсин, бу ерда $\overline{G_k}-$индекси $r\geq 1$ бўлган нормал бўлувчи.

Таъриф 1. Агар ихтиёрий $x\in G_k$, $y\in\overline{G_k}$ лар учун $h_{xy}=h_x$ бўлса, у ҳолда $h=\{h_x, x\in G_k\}$ қийматлар мажмуи $\overline{G_k}$- даврий дейилади. G_k - даврий қийматлар мажмуи трансляцион-инвариант дейилади.

Таъриф 2. Агар ихтиёрий $x\in H_i$, $x_{\downarrow}\in H_j$ лар учун $h_x=h_{ij}$ бўлса, яъни h_x нинг қиймати x ва $x_{\downarrow}$ лар тегишли бўлган синфларга боғлиқ бўлса, у ҳолда $h=\{h_x, x\in G_k\}$ қийматлар мажмуи $\overline{G_k}$ - кучсиз даврий дейилади.

Таъриф 3. Агар μ ўлчов $\overline{G_k}$ - (кучсиз) даврий h қийматлар мажмуига мос келса, у ҳолда бу ўлчов $\overline{G_k}$ - (кучсиз) даврий деб аталади.

Нолга тенг ташқи майдонли Изинг моделини кўрайлик. Қуйидагича белгилашлар қиламиз $\alpha=\dfrac{1-\theta}{1+\theta}$, $I_3=\{h\in R^4 : h_1=-h_4; h_2=-h_3\}$.

$\varnothing \neq A\subseteq N_k=\{1,2,\ldots,k+1\}$ ва $H_A=\{x\in G_k : \sum_{i\in A} w_x(a_i)-$жуфт$\}$ бўлсин, бу ерда $w_x(a_i)-$ $x\in G_k$ сўздаги a_i лар сони.

Теорема 1. $|A|=k$, $\alpha>1$ бўлсин.

1) $k\leq 3$ бўлса, I_3 тўпламда барча H_A-кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари трансляцион-инвариант бўлади.

2) $k=4$ бўлса, шундай $\alpha_{cr}(\approx 6{,}3716)$ критик миқдор мавжудки $\alpha<\alpha_{cr}$ бўлганда I_3 тўпламда ягона H_A- кучсиз даврий Гиббс ўлчови мавжуд; $\alpha=\alpha_{cr}$ бўлганда I_3 тўпламда учта H_A- кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари мавжуд; $\alpha>\alpha_{cr}$ бўлганда I_3 тўпламда бешта H_A- кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари мавжуд.

$H_{\{a_1\}}=\{x\in G_k : w_x(a_1)-$жуфт$\}$, $G_k^{(2)}=\{x\in G_k : |x|-$жуфт$\}$ бўлсин ва $G_k^{(4)}=H_{\{a_1\}}\cap G_k^{(2)}-$индекси тўртга тенг нормал бўлувчи бўлсин.

$G_k^{(4)}$ – индекси тўртга тенг нормал бўлувчи учун $G_k^{(4)}$-кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари таснифланган.

Теорема 2. Агар $k=4$ бўлса, шундай $\alpha_{cr}\approx 0{,}152$ ва $\alpha_c=3/5$ критик миқдорлар мавжудки:

1) Агар $\alpha\in[0,\alpha_{cr})\cup(\alpha_{cr}^{-1},+\infty)$ бўлса, камида еттита $G_k^{(4)}$- кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари мавжуд.

2) Агар $\alpha \in \{\alpha_{cr}, \alpha_{cr}^{-1}\}$ бўлса, у ҳолда камида бешта кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари мавжуд.

3) Агар $\alpha \in (\alpha_{cr}, \alpha_c) \cup (\alpha_c^{-1}, \alpha_{cr}^{-1})$ бўлса, у ҳолда камида учта Гиббс ўлчовлари мавжуд.

4) Агар $\alpha \in [\alpha_c, \alpha_c^{-1}]$ бўлса, у ҳолда камида битта Гиббс ўлчови мавжуд бўлади.

Энди ташқи майдонли антиферромагнит Изинг моделини, яъни $\alpha > 1$ $(\theta < 0)$ бўлган ҳолни кўрайлик. (2) тенгламадан трансляцион-инвариант қийматлар мажмуи учун қуйидаги тенгламани оламиз

$$h = \lambda\beta + kf(h,\theta) \tag{3}$$

Қуйидагича белгилашлар қиламиз: $\alpha = \dfrac{1-\theta}{1+\theta}$, $z = e^{2h}$, $a = e^{2\lambda\beta}$, $\varphi(x) = \dfrac{x+\alpha}{\alpha x+1}$.

У ҳолда (3) тенглама қуйидаги тенгламага келади:

$$z = a(\varphi(z))^k. \tag{4}$$

Маълумки, ташқи майдонли антиферромагнит Изинг модели учун ягона трансляцион-инвариант Гиббс ўлчови мавжуд бўлиб, у (4) тенгламанинг ягона ечимига мос келади, мазкур ечимни z_* билан белгилайлик.

Қуйидаги теорема исботланди:

Теорема 3. Агар ташқи майдонли антиферромагнит Изинг модели учун $|A| = k,\ k \geq 6$ ва $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ бўлса, у ҳолда камида иккита H_A- кучсиз даврий (даврий бўлмаган) Гиббс ўлчовлари мавжуд бўлади, бу ерда $\lambda_{1,2} = \dfrac{1}{2k\beta}\ln b_{1,2}$ ва

$$b_1 = \frac{(k-1-\sqrt{k^2-6k+1})(\alpha z_* + 1)^2}{2(\alpha^2-1)z_*^{\frac{k-1}{k}}}, \quad b_1 = \frac{(k-1+\sqrt{k^2-6k+1})(\alpha z_* + 1)^2}{2(\alpha^2-1)z_*^{\frac{k-1}{k}}}.$$

Биринчи бобнинг бешинчи параграфининг асосий натижасини келтирамиз.

Ташқи майдон нолга тенг бўлганда трансляцион-инвариант қийматлар мажмуи h учун (2) тенглама қуйидаги кўринишда бўлади

$$h = kf(h,\theta),\ 0 < \theta < 1. \tag{5}$$

Маълумки, (5) тенглама $0 < \theta \leq \theta_c = \dfrac{1}{k}$ бўлса, ягона $h = 0$ ечимга, $\theta_c < \theta < 1$ бўлса, учта $h = 0,\ \pm h_*^{(k)},\ \ h_*^{(k)} > 0$ ечимларга эга бўлади.

$k \geq 2,\ k_0 \geq 2$ лар шундай бўлсинки, $(k - k_0) -$жуфт ва мусбат бўлсин. $x \in V$ учун $S_{k_0}(x) -$билан $S(x)$ тўпламни ихтиёрий k_0 та учлари жамланмасини белгилайлик, қолган $k - k_0$ учлар тўламини эса $S_{k-k_0}(x)$ билан белгилайлик.

Дарахт тартиби k бўлганда $h=\{h_x, x\in V\}$, $h_x\in\{-h_*, h_*\}$ қийматлар мажмуини қуйидагича қурамиз:

(a_1) Агар x учда $h_x=h_*$ бўлса, у ҳолда $S_{k_0}(x)$ га тегишли барча учларга h_* қийматни жойлаштирамиз, $S_{k-k_0}(x)$ га тегишли ҳар бир учга эса h_* ва $-h_*$ қийматлардан бирини шундай қўямизки,

$$\sum_{y\in S_{k-k_0}(x)} f(h_y,\theta)=0,$$

тенглик ўринли бўлсин, яъни $S_{k-k_0}(x)$ тўпламга тегишли учларни ярмига h_* қийматни, қолган ярмига эса $-h_*$ қийматни қўямиз.

(a_2) Агар x учда $h_x=-h_*$, бўлса, у ҳолда $S_{k_0}(x)$ га тегишли барча учларга $-h_*$ қийматни жойлаштирамиз, $S_{k-k_0}(x)$ га тегишли ҳар бир учга эса h_* ва $-h_*$ қийматлардан бирини шундай қўямизки,

$$\sum_{y\in S_{k-k_0}(x)} f(h_y,\theta)=0,$$

тенглик ўринли бўлсин.

(a_1), (a_2) қонуният билан қурилган h қийматлар мажмуига мос ўлчовни (k_0)-трансляцион-инвариант Гиббс ўлчови деб атаймиз.

Энди антиферромагнит Изинг моделини кўрайлик (яъни $J<0$).

k_0 тартибли Кэли дарахтида ихтиёрий $G^{(2)}_{k_0}$-даврий қийматлар мажмуи $h=\{h_x, x\in V\}$ қуйидаги кўринишда бўлиб

$$h_x=\begin{cases} u, & \text{агар } x\in G_k^{(2)} \\ v, & \text{агар } x\in G_k\setminus G_k^{(2)}, \end{cases}$$

бу ерда (u, v) жуфтлик қуйидаги тенгламалар системасини қаноатлантиради:

$$\begin{cases} u=k_0 f(v,\theta) \\ v=k_0 f(u,\theta). \end{cases} \qquad (6)$$

Эслатиб ўтамизки, агар $-1<\theta<-\theta_c$ бўлса, (6) тенгламалар системаси $h_*^{\mp}=(-h_*,h_*), h_*^0=(0,0), h_*^{\pm}=(h_*,-h_*)$ кўринишдаги учта ечимга эга бўлар эди. $h_*^{\mp}$ лар ёрдамида (2) функционал тенгламанинг ечимини қурайлик.

$h=\{h_x, x\in V\}$ (бу ерда $h_x\in\{-h_*,h_*\}$) қийматлар мажмуини қуйидагича қурамиз:

(a_3) Агар x учда $h_x = h_*$ бўлса, у ҳолда $S_{k_0}(x)$ га тегишли барча учларга $-h_*$ қийматни жойлаштирамиз, $S_{k-k_0}(x)$ га тегишли ҳар бир учга эса h_* ва $-h_*$ қийматлардан бирини шундай қўямизки,

$$\sum_{y\in S_{k-k_0}(x)} f(h_y,\theta)=0,$$

тенглик ўринли бўлсин.

(a_4) Агар x учда $h_x = -h_*$ бўлса, у ҳолда $S_{k_0}(x)$ га тегишли барча учларга h_* қийматни жойлаштирамиз, $S_{k-k_0}(x)$ га тегишли ҳар бир учга эса h_* ва $-h_*$ қийматлардан бирини шундай қўямизки,

$$\sum_{y\in S_{k-k_0}(x)} f(h_y,\theta)=0,$$

тенглик ўринли бўлсин.

(a_3), (a_4) қонуният билан қурилган h қийматлар мажмуига мос ўлчовни (k_0)-даврий Гиббс ўлчови деб атаймиз.

Қуйидагича белгилаш қилайлик $T_{c,k_0} = \dfrac{J}{arcth(1/k_0)}$

Теорема 4. $k \ge 2,\, k_0 \ge 2$ лар шундай бўлсинки, $(k-k_0)-$жуфт ва мусбат бўлсин ҳамда $T < T_{c,k_0}$ бўлсин. У ҳолда k-тартибли Кэли дарахтида ферромагнит (антиферромагнит) Изинг модели учун аниқ иккита $(k_0)-$трансляцион-инвариант (даврий) Гиббс ўлчови мавжуд бўлади.

Диссертациянинг **«Поттс модели учун кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари»** деб номланувчи иккинчи боби нолга тенг бўлган ва нолга тенг бўлмаган ташқи майдонли Поттс моделлари учун кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари ўрганишга бағишланган. Бундан ташқари, Кэли дарахтида Поттс модели трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлари учун чегаравий шартлар топилган.

Спин қийматлари $\Phi = \{1,2,\ldots,q\}$, $(q \ge 2)$ тўпламга тегишли бўлган ва дарахт учларида жойлашган моделни қарайлик. У ҳолда V тўпламда σ конфигурация қуйидагича $x \in V \to \sigma(x) \in \Phi$ аниқланади.

α ташқи майдонли Поттс моделининг гамильтониани ушбу

$$H(\sigma) = -J\sum_{\langle x,y\rangle\in L}\delta_{\sigma(x)\sigma(y)} - \alpha\sum_{x\in V}\delta_{1\sigma(x)},$$

формула ёрдамида аниқланади, бунда $J,\alpha \in R$, $<x,y>$ – яқин қўшнилар ва δ_{ij} –Кронекер символи.

Маълумки, ташқи майдонли Поттс моделининг ҳар бир Гиббс ўлчовига қуйидаги тенгликни қаноатлантирувчи $h=\{h_x, x\in G_k\}$ векторлар мажмуини мос қўйиш мумкин

$$h_x = \sum_{y\in S(x)} F(h_y,\theta,\alpha), \tag{7}$$

бу ерда $F: h=(h_1,\ldots,h_{q-1})\in R^{q-1} \to F(h,\theta,\alpha)=(F_1,\ldots,F_{q-1})\in R^{q-1}$ қуйидагича аниқланади:

$$F_i = \alpha\beta\delta_{1i} + \ln\left(\frac{(\theta-1)e^{h_i}+\sum_{j=1}^{q-1}e^{h_j}+1}{\theta+\sum_{j=1}^{q-1}e^{h_j}}\right),$$

ва $\theta=\exp(J\beta)$.

1-3 Таърифларни векторлар учун ҳам киритиш мумкин.

Иккинчи бобнинг иккинчи параграфида ноль ташқи майдонли Поттс модели учун кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари таснифланган.

Нормал бўлувчи H_A, $A\subseteq N_k$ учун қуйидаги теорема исботланди:

Теорема 5. $|A|=k$ ва $k\geq 6$ бўлсин. Агар қуйидаги шартларнинг бири бажарилса,

1) $\dfrac{4k}{k+1+\sqrt{k^2-6k+1}} \leq q < \dfrac{4k}{k+1-\sqrt{k^2-6k+1}}$ и $0<\theta<\theta_2$;

2) $q \leq \dfrac{4k}{k+1+\sqrt{k^2-6k+1}}$ и $\theta_1<\theta<\theta_2$,

у ҳолда камида 2^q-2 та H_A-кучсиз даврий (даврий бўлмаган) Гиббс ўлчовлари мавжуд бўлади, бу ерда

$$\theta_1 = \frac{4k-kq-q-q\sqrt{k^2-6k+1}}{4k}, \quad \theta_2 = \frac{4k-kq-q+q\sqrt{k^2-6k+1}}{4k}.$$

Теорема 6. $|A|=1$, $k\geq 6$ ва $q\geq 3$ бўлсин. У ҳолда ферромагнит Поттс модели учун шундай θ_1, θ_2 критик қийматлар мавжуд бўлиб, $\theta\in(\theta_1,\theta_2)$ бўлганда камида иккита H_A-кучсиз даврий (трансляцион-инвариант бўлмаган) Гиббс ўлчовлари мавжуд, бу ерда

$$\theta_1 = \frac{4-3q+qk-q\sqrt{k^2-6k+1}}{4}, \; \theta_2 = \frac{4-3q+qk+q\sqrt{k^2-6k+1}}{4}.$$

Иккинчи бобнинг учинчи параграфида ноль бўлмаган ташқи майдонли Поттс модели учун кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари мавжудлиги исботланган.

Теорема 7. $|A|=k,\ k\geq 6$ бўлсин. Агар $\alpha\in(\alpha_1,\alpha_2)$ бўлса, ташқи майдонли антиферромагнит (яъни $0<\theta<1$) Поттс модели учун камида иккита H_A-кучсиз даврий (даврий бўлмаган) Гиббс ўлчовлари мавжуд бўлади, бу ерда $\alpha_i = kT\ln b_i$, $T-$ температура ва

$$b_1 = \frac{(k-1-\sqrt{k^2-6k+1})(1-\theta)(\theta+q-1)z_*^{\frac{k-1}{k}}}{2(\theta+q-2+z_*)^2},$$

$$b_2 = \frac{(k-1+\sqrt{k^2-6k+1})(1-\theta)(\theta+q-1)z_*^{\frac{k-1}{k}}}{2(\theta+q-2+z_*)^2}.$$

Иккинчи бобнинг тўртинчи параграфида Кэли дарахтида Поттс моделининг трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлари учун чегаравий шартлар топилди.

ω конфигурация ушбу $c^l(\omega) = \sum_{s:t\to_1 s}\delta_{l\omega(s)}$, $l=\overline{1,q}$ сон $t\in V\setminus\{0\}$га боғлиқ бўлмасин.

У.А.Розиков, Р.М.Хакимов, С.Кулскеларининг ишларида Поттс модели учун барча трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлари (ТИГЎ) таснифланган. Хусусан, Поттс моделининг ихтиёрий Гиббс ўлчови қандайдир $m=1,\ldots,q-1$ учун қуйидаги тенгламанинг ечимига мос келиши кўрсатилган

$$h = f_m(h)\equiv k\ln\left(\frac{(\theta+m-1)e^h+q-m}{me^h+q-m-1+\theta}\right). \tag{8}$$

Қуйидагича белгилаш қилайлик $\theta_m = 1+2\sqrt{m(q-m)}$, $m=1,\ldots,q-1$. У.А.Розиков, Р.М.Хакимов, С.Кулскеларининг ишларида қуйидаги тасдиқ исботланган.

Тасдиқ 1. $k=2$, $J>0$ бўлсин.

1) Агар $\theta<\theta_1$ бўлса, у ҳолда ягона ТИГЎ мавжуд бўлади;

2) Агар қандайдир $m=1,\ldots,[\frac{q}{2}]-1$ учун $\theta_m<\theta<\theta_{m+1}$ бўлса, у ҳолда $1+2\sum_{s=1}^{m}C_q^s$ та ТИГЎ мавжуд бўлади ва улар (8) нинг $h_i\equiv h_i(\theta,s) = 2\ln[x_i(s,\theta)]$, $i=1,2$, $s=1,\ldots,m$ кўринишидаги ечимарига мос келади, бу ерда

$$x_1(s,\theta) = \frac{\theta-1-\sqrt{(\theta-1)^2-4s(q-s)}}{2s},\ x_2(s,\theta) = \frac{\theta-1+\sqrt{(\theta-1)^2-4s(q-s)}}{2s};$$

3) Агар $\theta_{[\frac{q}{2}]} < \theta \neq q+1$ бўлса, у ҳолда $2^q - 1$ та ТИГЎ мавжуд бўлади;

4) Агар $\theta = q+1$ бўлса, у ҳолда ТИГЎ сони қуйидагича аниқланади:

$$\begin{cases} 2^{q-1}, \text{ агар } q - \text{жуфт бўлмаса,} \\ 2^{q-1} - C_{q-1}^{\frac{q}{2}}, \text{ агар } q - \text{жуфт бўлса;} \end{cases}$$

5) Агар $\theta = \theta_m$, $m = 1, \ldots, [\frac{q}{2}]$, $(\theta_{[\frac{q}{2}]} \neq q+1)$ бўлса, у ҳолда ТИГЎ сони $1 + C_q^m + 2\sum_{s=1}^{m-1} C_q^s$ бўлади.

$\mu_0 \equiv \mu_0(\theta)$ билан $h_i \equiv 0$ ечимга мос ТИГЎ ни, $\mu_i \equiv \mu_i(\theta, m)$ билан $h_i(\theta, m)$, $i = 1,2$, $m = 1, \ldots, [q/2]$ ечимга мос ТИГЎ ни белгилайлик.

Берилган $m \in \{1, \ldots, [q/2]\}$ ва $J > 0$ лар учун қуйидаги конфигурациялар тўпламини киритайлик:

$\mathrm{B}_m = \{\omega \in \Omega : c^1(\omega) = \ldots = c^m(\omega),\ c^{m+1}(\omega) = \ldots = c^{q-1}(\omega) = c^q(\omega)\}$,

$\mathrm{B}_{m,0}^+ = \{\omega \in \mathrm{B}_m : c^1(\omega) > c^q(\omega)\}$, $\mathrm{B}_{m,0}^0 = \{\omega \in \mathrm{B}_m : c^1(\omega) = c^q(\omega)\}$,

$\mathrm{B}_{m,0}^- = \{\omega \in \mathrm{B}_m : c^1(\omega) < c^q(\omega)\}$, $\mathrm{B}_{m,1}^+ = \{\omega \in \mathrm{B}_m : J\left(c^1(\omega) - c^q(\omega)\right) > h_1\}$,

$\mathrm{B}_{m,1}^0 = \{\omega \in \mathrm{B}_m : J\left(c^1(\omega) - c^q(\omega)\right) = h_1\}$, $\mathrm{B}_{m,1}^- = \{\omega \in \mathrm{B}_m : J\left(c^1(\omega) - c^q(\omega)\right) < h_1\}$.

P^{ω} – чегаравий конфигурация ω орқали қурилган лимит Гиббс ўлчови бўлсин. Қуйидаги теоремада ҳар бир $h_i(\theta, m)$, $i = 1,2$, $m = 1, \ldots, [q/2]$ учун $\mu_i(\theta, m) = P^{\omega}$ бўладиган $\omega \in \Omega$ конфигурациялар топилди.

Теорема 8. 1) Агар қандайдир $m = 1, \ldots, [q/2]$ учун $\theta = \theta_m$ бўлса, у ҳолда

$$P^{\omega} = \begin{cases} \mu_1(\theta, m), & \text{агар } \omega \in \mathrm{B}_{m,1}^+ \cup \mathrm{B}_{m,1}^0 \\ \mu_0(\theta), & \text{агар } \omega \in \mathrm{B}_{m,1}^- \end{cases}$$

2) Агар $\theta_m < \theta < \theta_c = q+1$ бўлса, у ҳолда

$$P^{\omega} = \begin{cases} \mu_2(\theta, m), & \text{агар } \omega \in \mathrm{B}_{m,1}^+ \\ \mu_1(\theta, m), & \text{агар } \omega \in \mathrm{B}_{m,1}^0 \\ \mu_0(\theta), & \text{агар } \omega \in \mathrm{B}_{m,1}^- \end{cases}$$

3) Агар $\theta = \theta_c$ бўлса, у ҳолда

$$P^{\omega} = \begin{cases} \mu_2(\theta, m), & \text{агар } \omega \in \mathrm{B}_{m,0}^+ \\ \mu_0(\theta), & \text{агар } \omega \in \mathrm{B}_{m,0}^- \cup \mathrm{B}_{m,0}^0 \end{cases}$$

4) Агар $\theta > \theta_c$ бўлса, у ҳолда

$$P^{\omega} = \begin{cases} \mu_2(\theta, m), & \text{агар } \omega \in \mathrm{B}_{m,0}^+ \\ \mu_1(\theta, m), & \text{агар } \omega \in \mathrm{B}_{m,0}^- \\ \mu_0(\theta), & \text{агар } \omega \in \mathrm{B}_{m,0}^0. \end{cases}$$

Диссертациянинг **«Изинг ва Поттс моделлари учун озод энергиялар»** деб номланувчи учинчи боби, Изинг ва Поттс моделлари учун аввалдан маълум бўлган чегаравий шартларнинг озод энергияларини топишга бағишланган.

Учинчи бобнинг иккинчи параграфида Кэли дарахти шарларида махсус қирралар зичликларининг аниқ кўринишлари олинди. Бу параграфнинг натижалари озод энергияларни ҳисоблашда фойдаланилди.

Учинчи бобнинг учинчи параграфининг асосий мақсади Кэли дарахтида Изинг модели учун озод энергия умумий формуласини топишдир.

Таъриф 4. (2) функционал тенгламани қаноатлантирувчи $h=\{h_x,\ x\in G_k\}$ чегаравий шарт мувофиқлашган дейилади.

Таъриф 5. Қуйидаги лимит (агар у мавжуд бўлса) h чегаравий шартларга мос озод энергия дейилади:

$$F(\beta,h)=-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\beta|V_n|}\ln Z_n(\beta,h).$$

Тасдиқ 2. Мувофиқлашган чегаравий шартлар учун озод энергия қуйидаги формула билан аниқланади

$$F(\beta,h)=-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|V_n|}\sum_{x\in V_n}a(x), \tag{9}$$

бу ерда $a(x)=\frac{1}{2\beta}\ln[4\cosh(h_x-\beta J)\cosh(h_x+\beta J)]$.

Трансляцион-инвариант (TI) чегаравий шарт учун озод энергия қуйидаги кўринишда бўлади:

$$F_{TI}(\beta,0)=-\frac{1}{\beta}\ln(2\cosh(\beta J)).$$

$$F_{TI}(\beta,h_*)=F_{TI}(\beta,-h_*)=-\frac{1}{2\beta}\ln[4\cosh(\beta J-h_*)\cosh(\beta J+h_*)].$$

Блехер-Ғанихўжаев чегаравий шартлари учун озод энергияни $F_{BG}(\beta,h^{\pi})$ билан белгилаймиз.

$$F_{BG}(\beta,h^{\pi})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|V_n|}\sum_{x\in V_n}a(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|V_n|}\left[(|V_n|-n)a_{TI}(x)+\frac{a(x_0)+a(x_1)+\ldots+a(x_n)}{|V_n|}\right]=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|V_n|}\left[(|V_n|-n)a_{TI}(x)\right]=F_{TI}(\beta,h_*).$$

Шунингдек Заҳари[1] чегаравий шарти учун озод энергия қуйидагича бўлиши кўрсатилди:

$$F_{Zach}(\beta, h^{(t)}) = F_{\text{T}I}(\beta, 0).$$

ART[2] конструкцияси учун мос озод энергия:

$$F_{\text{A}RT}(\beta, \widetilde{h}) = -\frac{1}{\beta}\ln[2\cosh(\beta J)] = F_{\text{T}I}(\beta, 0).$$

Даврий Гиббс ўлчови озод энергияси учун қуйидагига эгамиз:

$$F_{\text{P}er}(\beta, h_*^{(\pm)}) = -\frac{1}{2\beta}\ln[4\cosh(\beta J - h_*)\cosh(\beta J + h_*)] = F_{\text{T}I}(\beta, h_*).$$

Теорема 2 да олинган битта кучсиз даврий Гиббс ўлчови озод энергияси қуйидагича бўлади:

$$F_{\text{W}P}(\beta, h) = -\frac{1}{2\beta}\left\{\frac{4}{5}\ln[4\cosh(J\beta - h_1)\cosh(J\beta + h_1)] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{5}\ln[4\cosh(J\beta - h_2)\cosh(J\beta + h_2)]\right\}$$

Ушбу

$$F_{\text{T}I}(\beta, h_*) < F_{\text{W}P}(\beta, h) < F_{\text{T}I}(\beta, 0),$$

тенгсизлик ўринли экани исботланди.

Учинчи бобнинг тўртинчи параграфида Кэли дарахтида Поттс модели учун озод энергиялар ҳисобланган.

Қуйидаги теорема Кэли дарахтида Поттс модели учун озод энергияларни ҳисоблаш формуласини беради.

Теорема 9. (7) шартни қаноатлантирувчи чегаравий шартлар учун озод энергия ушбу

$$E(\beta, h) = -\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|V_n|}\sum_{x\in V_n} a(x), \tag{10}$$

формула билан аниқланади, бу ерда $a(x) = \dfrac{1}{q\beta}\sum_{i=1}^{q}\ln\left(\sum_{u=1}^{q}\exp\{(J\beta\sigma_i + h_x)\sigma_u\}\right).$

---

[1] H.O. Georgii (2011): Gibbs Measures and Phase Transitions, Second edition. de Gruyter Studies in Mathematics, 9. Walter de Gruyter, Berlin;

[2] Akin H., Rozikov U.A., Temur S. A new set of limiting Gibbs measures for the Ising model on a Cayley tree. // J.Stat.Phys. 2011, 142:314-321.

Поттс модели учун трансляцион-инвариант векторлар мажмуи h_x, яъни $h_x = h = (h_1, h_2, \ldots, h_{q-1}) \in R^{q-1}, \forall x \in G_k$ қарайлик. У ҳолда (7) дан қуйидаги тенгламага эга бўламиз:

$$h_i = k \ln\left(\frac{(\theta-1)e^{h_i} + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j} + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j}} \right), \ i = 1, \ldots, q-1. \qquad (11)$$

Маълумки, (11) тенгламанинг ихтиёрий ечими, координаталар ўрин алмашиши аниқлигида $h = (\underbrace{h_*, h_*, \ldots, h_*}_{m}, 0, 0, \ldots, 0), \ m \geq 0$ кўринишда бўлади.

$m = 0$ бўлган ҳол. Бу ҳолда $h = h_0 = (0,0,\ldots,0) \in R^{q-1}$ бўлади. (10) дан

$$E_{TI}(\beta, h_0) = -J - \frac{1}{\beta} \ln\left(1 + (q-1)\exp\left(\frac{Jq\beta}{1-q} \right) \right),$$

эканини топамиз.

$m \neq 0$ бўлган ҳол. Биз томондан қуйидагича озод энергия олинди:

$$E_{TI}(\beta, m, h_x) = -\frac{q-m}{q\beta} \ln\left(m \cdot e^{\left(-\frac{J\beta}{q-1} + \frac{q-m}{q-1}h_*\right)} + e^{\left(J\beta - \frac{m}{q-1}h_*\right)} + (q-m-1) \cdot e^{\left(-\frac{J\beta}{q-1} - \frac{m}{q-1}h_*\right)} \right) -$$

$$- \frac{m}{q\beta} \ln\left((m-1) \cdot e^{\left(-\frac{J\beta}{q-1} + \frac{q-m}{q-1}h_*\right)} + e^{\left(J\beta + \frac{q-m}{q-1}h_*\right)} + (q-m) \cdot e^{\left(-\frac{J\beta}{q-1} - \frac{m}{q-1}h_*\right)} \right).$$

Кэли дарахтининг чексиз йўли π учун белгилаш қиламиз

$$\mathrm{W}_n^{\pi} = \{x \in W_n : x \prec x_n\},$$

бу ерда $n = 1, 2, \ldots$ ва $x \prec x_n$ – x учни π йўлнинг чап қисмида эканини англатади.

Лемма 1. Ихтиёрий π учун қуйидаги лимит мавжуд бўлади:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|\mathrm{W}_n^{\pi}|}{|W_n|} = a^{\pi}.$$

Н.Н.Ганихўжаев томонидан қурилган векторлар мажмуи учун озод энергия қуйидаги кўринишга эга

$$E_G(\beta, m, h_x^{\pi}) = a^{\pi} E_{TI}(\beta, m, h_*^1) + (1 - a^{\pi}) E_{TI}(\beta, m, h_*^2).$$

Даврий чегаравий шартлар учун озод энергия мавжуд бўлмай қолиши мумкинлиги исботланди.

Кучсиз даврий чегаравий шартлар учун озод энергия қуйидагича бўлади:

$$E_{WP}(\beta, q, h_x) = \frac{1}{2(k+1)} \left(E_{TI}(\beta, q-1, h_1) + kE_{TI}(\beta, q-1, h_2) + kE_{TI}(\beta, q-1, h_3) + \right.$$

$$\left. + E_{TI}(\beta, q-1, h_4) \right).$$

Диссертациянинг «**Кучсиз даврий асосий ҳолатлар**» деб аталувчи тўртинчи бобида Кэли дарахтида индекси икки ва тўрт бўлган нормал бўлувчиларга нисбатан рақобатлашувчи ўзаро таъсирли Изинг модели ва рақобатлашувчи ўзаро таъсирли Поттс модели учун кучсиз даврий асосий ҳолатлар таснифланган.

Тўртинчи бобнинг биринчи параграфида таърифлар ва зарур фактлар берилган. Бу бобнинг иккинчи параграфида рақобатлашувчи ўзаро таъсирли Изинг модели учун кучсиз даврий асосий ҳолатлар таснифланган.

$G_k / G_k^* = \{H_1, H_2, \dots, H_r\} -$ фактор-группа бўлсин, бу ерда G_k^*- индекси $r \geq 1$ бўлган нормал бўлувчи.

Таъриф 6. σ конфигурация G_k^* - даврий дейилади, агар у қисм группа $G_k^* \subset G_k$ га нисбатан инвариант бўлса, яъни ихтиёрий $x \in G_k$, $y \in G_k^*$ лар учун $\sigma(yx) = \sigma(x)$ бўлса.

Таъриф 7. $\sigma(x), x \in V$ - конфигурация G_k^* - кучсиз даврий дейилади, агар $x \in H_i, x_\downarrow \in H_j, \forall x \in G_k$ да $\sigma(x) = \sigma_{ij}$ бўлса.

Рақобатлашувчи ўзаро таъсирли Изинг модели учун гамильтониан қуйидагича кўринишга эга

$$H(\sigma) = J_1 \sum_{<x,y>} \sigma(x)\sigma(y) + J_2 \sum_{\substack{x,y \in V: \\ d(x,y)=2}} \sigma(x)\sigma(y) . \qquad (12)$$

Эслатиб ўтамиз, ихтиёри индекси иккига тенг бўлган нормал бўлувчи $H_A = \{x \in G_k : \sum_{i \in A} w_x(a_j) - \text{жуфт}\}$ кўринишида бўлади, бу ерда $w_x(a_j) - x \in G_k$ сўздаги a_j ҳарфлар сони, $\varnothing \neq A \subseteq N_k = \{1,2,\dots,k+1\}$, ва $|A| = i$ бўлсин.

Қуйидаги теорема исбот қилинди.

Теорема 10. $|A| = i,\ i \in \{1,2,\dots,k+1\}$ бўлсин.

1) Агар $i \neq \frac{k+1}{2}$ бўлса, у ҳолда барча $H_A -$кучсиз даврий асосий ҳолатлар $H_A -$даврий ёки трансляцион-инвариант бўлади.

2) $i = \frac{k+1}{2}$ ва $J_1 = 2J_2,\ J_2 \geq 0$ бўлганда камида иккита $H_A -$кучсиз даврий (даврий бўлмаган) асосий ҳолатлар мавжуд.

$G_k^{(4)} = H_A \cap G_k^{(2)} -$ индекси 4 га тенг нормал бўлувчи бўлсин.

Теорема 11. $|A| = i,\ i \in \{1,2,\dots,k+1\}$ бўлсин.

1) Агар $i \neq \frac{k+1}{2}$ бўлса, у ҳолда барча $G_k^{(4)} -$ кучсиз даврий асосий ҳолатлар $G_k^{(4)} -$даврий ёки трансляцион-инвариант бўлади.

2) $i = \frac{k+1}{2}$ ва $J_1 = 2J_2,\ J_2 \geq 0$, даврийдан ташқари камида яна тўрта $G_k^{(4)} -$кучсиз даврий (даврий бўлмаган) асосий ҳолатлар мавжуд бўлади.

Тўртинчи бобнинг учинчи параграфида индекси иккига тенг нормал бўлувчига нисбатан рақобатлашувчи ўзаро таъсирли Поттс модели учун кучсиз даврий асосий ҳолатлар таснифланган.

Рақобатлашувчи ўзаро таъсирли Поттс модели гамильтониани қуйидагича кўринишга эга

$$H(\sigma) = J_1 \sum_{\substack{\langle x,y\rangle, \\ x,y\in V}} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} + J_2 \sum_{\substack{x,y\in V, \\ d(x,y)=2}} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \qquad (13)$$

бу ерда $J_1, J_2 \in R$,

$$\delta_{uv} = \begin{cases} 1, & u = v, \\ 0, & u \neq v. \end{cases}$$

Теорема 12. $|A| = 2$ бўлсин.

1) $k = 2, q = 3$ бўлсин, у ҳолда $A_{0,1} = \{J \in R^2 : J_2 \geq 0, J_1 - 2J_2 \geq 0\}$ тўпламда трансляцион-инвариант ёки даврий бўлмайдиган олтита H_A- кучсиз даврий асосий ҳолатлар мавжуд бўлади ва улар қуйидагича кўринишга эга:

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} l, & x_\downarrow \in H_0, x \in H_0, \\ m, & x_\downarrow \in H_0, x \in H_1, \\ n, & x_\downarrow \in H_1, x \in H_0, \\ l, & x_\downarrow \in H_1, x \in H_1, \end{cases}$$

бу ерда $l, m, n \in \{1, 2, 3\}$ ва $l \neq m,\ l \neq n,\ m \neq n.$

2) $k = 2, q = 3$ бўлса, $\varphi^*(x)$ дан фарқли барча H_A- даврий асосий ҳолатлар трансляцион-инвариант бўлади.

Теорема 13. $k \geq 4$ ва $|A| = k$ бўлса, кучсиз даврий конфигурация

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} l, & x_\downarrow \in H_0, x \in H_0 \\ m, & x_\downarrow \in H_0, x \in H_1 \\ n, & x_\downarrow \in H_1, x \in H_0 \\ l, & x_\downarrow \in H_1, x \in H_1, \end{cases}$$

$\{J \in R^2 : J_1 \geq 0,\ J_2 = 0\}$ тўпламда кучсиз даврий асосий ҳолат бўлади, бу ерда $l, m, n \in \{1,\ 2,\ 3\}$ ва $l \neq m,\ l \neq n,\ m \neq n.$

Тўртинчи бобнинг тўртинчи параграфи индекси тўртга тенг нормал бўлувчига нисбатан рақобатлашувчи ўзаро таъсирли Поттс модели учун даврий ва кучсиз даврий асосий ҳолатларни ўрганишга бағишланган.

$G_k^{(4)}$ - даврий конфигурация қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_0 & \text{агар } x \in H_0 \\ a_1 & \text{агар } x \in H_1 \\ a_2 & \text{агар } x \in H_2 \\ a_3 & \text{агар } x \in H_3 \end{cases}$$

бу ерда $a_i \in \Phi = \{1, 2, 3\}$, $i \in \{0,1,2,3\}$.

Келгусида қулайлик учун $\varphi(x), x \in G_k$ даврий конфигурацияни $\varphi = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ кўринишда ёзамиз.

Қуйидаги теорема $G_k^{(4)}$ - даврий асосий ҳолатларни таснифлайди.

Теорема 14. $k \geq 2$ ва $|A| \in \{1,2,\ldots,k\}$ бўлсин. У ҳолда қуйидаги тасдиқлар ўринли:

I. a) $\{J \in R^2 : J_1 \geq 0, J_2 \leq 0\}$ тўпламда трансляцион-инвариант бўлмаган, аммо $G_k^{(2)}-$даврий бўладиган олтита $G_k^{(4)}-$даврий асосий ҳолатлар мавжуд ва улар қуйидаги кўринишда бўлади: $\varphi_1 = (l,l,m,m)$;

b) $|A| = 1$ бўлсин, $\{J \in R^2 : J_1 \leq 0, \frac{-J_1}{2k} \leq J_2 \leq \frac{-J_1}{2(k-1)}\}$ тўпламда трансляцион-инвариант бўлмаган, аммо H_A-даврий бўладиган олтита $G_k^{(4)}-$даврий асосий ҳолатлар мавжуд ва улар қуйидаги кўринишда бўлади: $\varphi_2 = (l,m,l,m)$;

c) $|A| = k$ бўлсин, $\{J \in R^2 : J_1 \leq 0, \frac{-J_1}{2k} \leq J_2 \leq \frac{-J_1}{2(k-1)}\}$ тўпламда трансляцион-инвариант бўлмаган олтита $G_k^{(4)}-$даврий асосий ҳолатлар мавжуд ва улар қуйидаги кўринишда бўлади: $\varphi_3 = (l,m,m,l)$;

d) $\{J \in R^2 : J_1 \geq 0, J_2 = 0\}$ тўпламда трансляцион-инвариант бўлмаган, $G_k^{(2)}$ ва H_A-даврий бўладиган ўн иккита $G_k^{(4)}-$даврий асосий ҳолатлар мавжуд ва улар қуйидаги кўринишда бўлади: $\varphi_4 = (l,l,m,n)$ и $\varphi_5 = (l,m,n,n)$, бу ерда $l,m,n \in \Phi$, и $l \neq m,\ l \neq n,\ m \neq n.$

II. I қисмда келтирилган конфигурациялардан фарқли ҳар қандай $G_k^{(4)}-$асосий ҳолат трансляцион-инвариант бўлади.

$G_k^{(4)}$-кучсиз даврий конфигурациялар қуйидагича кўринишда бўлади:

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_{02}, \text{ агар } x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_2, \\ a_{03}, \text{ агар } x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_3, \\ a_{12}, \text{ агар } x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_2, \\ a_{13}, \text{ агар } x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_3, \\ a_{20}, \text{ агар } x_{\downarrow} \in H_2, x \in H_0, \\ a_{21}, \text{ агар } x_{\downarrow} \in H_2, x \in H_1, \\ a_{30}, \text{ агар } x_{\downarrow} \in H_3, x \in H_0, \\ a_{31}, \text{ агар } x_{\downarrow} \in H_3, x \in H_1, \end{cases}$$

бу ерда $a_{ij} \in \Phi$, $i, j \in \{0,1,2,3\}$.

Келгусида қулайлик учун $\varphi(x), x \in G_k$ кучсиз даврий конфигурацияни $\varphi = (a_{02}, a_{03}, a_{12}, a_{13}, a_{20}, a_{21}, a_{30}, a_{31})$ кўринишда ёзамиз.

Тўртинчи бобнинг тўртинчи параграфининг асосий натижаларидан бири қуйидаги теоремадир.

Теорема 15. $k \geq 2$ ва $|A| = k$ бўлса, қуйидаги тасдиқлар ўринли бўлади:

I. a) $\{J \in R^2 : J_1 \geq 0, J_2 \leq 0\}$ тўпламда $G_k^{(2)}-$даврий (трансляцион-инвариант бўлмаган) бўладиган олтита $G_k^{(4)}-$кучсиз даврий асосий ҳолатлар мавжуд бўлади ва улар ушбу кўринишга эга: (l,l,l,l,m,m,m,m);

b) $\{J \in R^2 : J_1 \leq 0, \frac{-J_1}{2k} \leq J_2 \leq \frac{-J_1}{2(k-1)}\}$ тўпламда трансляцион-инвариант бўлмаган олтита $G_k^{(4)}-$кучсиз даврий асосий ҳолатлар мавжуд бўлади ва улар ушбу кўринишга эга: (l,m,l,m,m,l,m,l);

c) $\{J \in R^2 : J_2 \geq 0, J_1 - 2J_2 \geq 0\}$ тўпламда $k = 2$ ва $\{J \in R^2 : J_1 \geq 0, J_2 = 0\}$ тўпламда $k \geq 3$ бўлса, трансляцион-инвариант бўлмаган олтита $G_k^{(4)}-$кучсиз даврий асосий ҳолатлар мавжуд бўлади ва улар ушбу кўринишга эга: (l,m,n,l,l,m,n,l);

d) $\{J \in R^2 : J_1 \geq 0, J_2 = 0\}$ тўпламда $a), c)$ пунктларда кўрсатилган конфигурациялардан фарқли трансляцион-инвариант бўлмайдиган бир юз элликта кучсиз даврий асосий ҳолатлар мавжуд бўлади ва улар ушбу кўринишга эга:

(l,l,l,l,m,m,m,n), (l,l,l,m,n,n,n,n), (l,l,l,l,m,m,n,m), (l,l,m,l,n,n,n,n),
(l,l,l,l,m,n,m,m), (l,m,l,l,n,n,n,n), (l,l,l,l,m,n,n,n), (l,m,m,m,n,n,n,n),
(l,l,l,l,m,m,n,n), (l,m,m,l,l,n,n,l), (l,l,m,m,n,n,n,n), (l,l,l,l,m,n,m,n),
(l,m,l,m,n,n,n,n), (l,l,l,l,m,n,n,m), (l,m,m,l,n,n,n,n), (l,l,l,m,n,n,n,m),
(l,m,m,m,l,n,n,l), (l,l,l,m,m,n,n,m), (l,l,l,m,m,n,n,n), (l,l,m,l,n,n,m,n),
(l,m,l,l,n,m,n,n), (l,m,m,m,n,n,n,l), (l,m,m,m,l,n,n,n), (l,m,m,l,n,n,n,l),
(l,m,m,l,l,n,n,n),

бу ерда $l,m,n \in \Phi$ ва $l \neq m,\ l \neq n,\ m \neq n.$

II. I қисмда келтирилган конфигурациялардан фарқли ҳар қандай $G_k^{(4)}-$кучсиз даврий асосий ҳолат трансляцион-инвариант бўлади.

ХУЛОСА

Диссертация иши Изинг ва Поттс моделлари учун кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари, кучсиз даврий асосий ҳолатлар мавжудлиги, озод энергиялар ва трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлари билан чегаравий шартлар ўртасидаги боғланишларни топишга бағишланган.

Асосий натижалар қуйидагилардан иборат:

1. Кэли дарахтида Изинг модели учун баъзи шартлар остида индекси иккига тенг нормал бўлувчига нисбатан бештадан кам бўлмаган кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари мавжудлиги тадқиқ қилинган.

2. Номал бўлувчи индекси тўрт бўлган ҳолда параметрларнинг маълум шартлар асосида Изинг модели учун камида 7 та кучсиз даврий Гиббс ўлчови мавжудлиги кўрсатилган.

3. Кэли дарахтида ташқи майдонли Изинг модели учун маълум шартлар асосида иккитадан кам бўлмаган $H_k -$кучсиз даврий (даврий бўлмаган) лимит Гиббс ўлчовлари мавжудлиги исботланган, (k_0)-даврий (трансляцион-инвариант) Гиббс ўлчовлари тушунчалари киритилган ва бундай Гиббс ўлчовлари мавжудлиги исботланган.

4. Индекси икки бўлган нормал бўлувчига нисбатан Кэли дарахтида антиферромагнит Поттс модели учун баъзи шартлар бажарилганда $2^q - 2$ та кучсиз даврий лимит Гиббс ўлчовлари мавжудлиги исботланган, бу ўлчовлар континуумта (кучсиз) даврий бўлмаган Гиббс ўлчовларини қуриш имконини беради.

5. Кэли дарахтида берилган ферромагнит Поттс модели учун баъзи шартлар бажарилганда камида иккита кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари мавжудлиги исботланган, бундан ташқари, ташқи майдонли Поттс модели учун маълум шартлар асосида камида иккита кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари мавжудлиги исботланган.

6. Поттс модели учун трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовларининг (ТИГЎ) чегаравий шартлар (конфигурациялар) га боғлиқлиги ўрганилган. ТИГЎ учун чегаравий конфигурациялар қурилган. Бу усул ёрдамида бошқа моделлар учун ҳам Гиббс ўлчовлари ва чегаравий шартлар (конфигурациялар) ўртасидаги боғланишни аниқлаш мумкин.

7. Изинг ва Поттс моделлари учун озод энергияларни ҳисоблашнинг умумий формуласи олинган, маълум чегаравий шартлар учун озод энергия ва энтропиялар ҳисобланган. Олинган натижадан фойдаланиб статистик физиканинг бошқа моделлари учун озод энергияларни ҳисоблаш мумкин.

8. Кэли дарахтида аниқланган рақобатлашувчи ўзаро таъсирли Изинг ва Поттс моделлари учун кучсиз даврий асосий ҳолатлар мавжуд бўлишининг зарур ва етарли шартлари (дарахт тартиби k га ва индекси икки ва тўрт бўлган нормал бўлувчилар параметрларига) топилган. Бу натижа усулини бошқа моделларнинг асосий ҳолатларини топишга хизмат қилади.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.27.06.2017.FM.01.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА, ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

РАХМАТУЛЛАЕВ МУЗАФФАР МУХАММАДЖАНОВИЧ

СЛАБО ПЕРИОДИЧЕСКИЕ МЕРЫ ГИББСА И ОСНОВНЫЕ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ КЛАССИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

01.01.01 – Математический анализ
(физико-математические науки)

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА (DSc) ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

г. Ташкент – 2017 год

Тема докторской диссертации зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2017.1.DSc./FM2

Докторская диссертация выполнена в Институте математики.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице по адресу (http://ik-fizmat.nuu.uz) и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Розиков Уткир Абдуллоевич** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Гринив Остап Олегович** доктор физико-математических наук, профессор
	Рахимов Абдугофур Абдумажидович доктор физико-математических наук, профессор
	Кудайбергенов Каримберген Кадирбергенович доктор физико-математических наук
Ведущая организация:	Каршинский государственный университет

Защита диссертации состоится «____» _____________2017 года в ____ часов на заседании Научного совета ___________________ при Национальном университете Узбекистана (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871)227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №_____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «____» _______________2017 года.
(протокол рассылки №________ от «____» _______________2017 года).

А.С.Садуллаев
Председатель научного совета по
присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н., академик

Г.И.Ботиров
Ученый секретарь научного совета по
присуждению ученых степеней, к.ф.-м.н.

В.И.Чилин
Председатель научного семинара при научном
совете по присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация докторской диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научно-прикладные исследования, проводимые на мировом уровне, во многих случаях приводятся к задачам теории фазовых переходов в физике, биологии, термодинамике, статистической механике и так далее. А теория фазовых переходов тесно связана с теорией Гиббсовских мер. Американским ученым Дж.У.Гиббсом для систем, находящихся в тепловом равновесии с окружающей средой, в которой поддерживается постоянная температура, установлено каноническое гиббсовское распределение. Хотя теория гиббсовких мер является относительно новым разделом в теории мер, она является основным объектом в изучении статистической механики и квантовой теории Евклида. Развитие исследований теории таких мер становится одной из важных задач из-за сложности описания гиббсовских мер для классических моделей и недостаточной формализованности проверки их существования.

В нашей стране в годы независимости большое внимание уделялось и продолжает уделяться направлениям, имеющим прикладное значение фундаментальными науками. В частности, особое внимание было уделено развитию теории мер Гиббса для классических моделей статистической механики (модели Изинга, Поттса, SOS, HC, λ-модели и др.) и нахождению методов определения трансляционно-инвариантных и периодических мер. Значительные результаты были достигнуты по описанию трансляционно-инвариантных и периодических мер Гиббса, и эти результаты были признаны зарубежными учеными. На основе Стратегии Действий по развитию Республики Узбекистан особенно большое значение приобретают эффективные механизмы внедрения научных и инновационных достижений в целях повышения эффективности в сфере экономики страны.

В настоящее время в мире, используя метод, основанный на теории марковских случайных полей и рекуррентных уравнений этой теории, на дереве Кэли изучены модели статистической механики, в частности, в работах П.М.Блехера, Н.Н.Ганиходжаева, С.Захари, Ф.Спитцера, Ю.Сухова, У.А.Розикова и других. Описаны множества периодических гиббсовских мер. Доказано, что такие меры являются либо трансляционно-инвариантными, либо периодическими с периодом два. Введено понятие слабо периодической меры Гиббса и слабо периодического основного состояния. В настоящее время важную роль играют исследование множества слабо периодических мер Гиббса, изучение основных состояний для моделей статистической механики на дереве Кэли. В связи с этим реализация целевых научных исследований в следующих направлениях является одной из важных задач: существование слабо периодической меры Гиббса для классических моделей статистической механики, т.е. определение происхождения фазовых переходов; изучение и описание множества слабо периодических основных состояний. Научные исследования, проводимые в вышеупомянутых направлениях, подтверждают актуальность темы диссертации.

Эта диссертация, в определенной степени, служит осуществлению задач, обозначенных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан №-ПП-916 «О дополнительных мерах по стимулированию внедрения инновационных проектов и технологий в производство» от 15 июля 2008 года, №-ПП-2789 «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» от 17 февраля 2017 года и №-УП-4947 «О стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан» от 8 февраля 2017 года а также в других нормативно-правовых актах по данной деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации[1]. Исследования в направлениях теории гиббсовских мер, в частности гиббсовских мер, и изучение их свойств для классических моделей статистической механики на решетках ведутся довольно широко в научных центрах и университетах ведущих стран, в том числе в Институте проблем передачи информации и Математическом институте Российской академии наук, Московском государственном университете, Новосибирском государственном университете (Россия); также этим занимаются Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Парижской университет (Франция); Abdus Salam International Center for Theoretical Physics (Triest, Italy); Университет Женевы (Швейцария); Университет Бонна, Институт прикладной математики, Рурский университет Бохума (Германия); Университет Авейру (Португалия); Университет Кюсю (Япония); Университет Кэмбриджа, Университет Лафборо, School of Mathematics, University of Leeds, (Великобритания); Университет Зирве и Университет Харран (Туркия); Международный исламский университет Малайзии (Малайзия).

В результате научных исследований, проведенных по описанию слабо периодических мер Гиббса для классических моделей статистической механики, в мировом масштабе решен целый ряд актуальных задач, в том числе были получены следующие научные результаты: найдена общая формула вычисления свободной энергии гиббсовских мер для модели Изинга на дереве Кэли и вычислены свободные энергии для известных мер Гиббса (Universites Aix-Marseille et Sud Toulon-Var); получена связь между

[1] Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации: онлайн библиотека, http://brats.mkt-stroy.ru/lirika/lib-238; Journal of Annals of Probability https://projecteuclid.org/euclid.aop/1176993439 ; Publ. RIMS, Kyoto Univ. https://www.jstage.jst.go.jp/article/kyotoms1969/13/2/13_2_335/_pdf; de Gruyter Studies in Mathematics, 9. Walter de Gruyter, Berlin https://www.degruyter.com/view/books; World scientific. Singapore/ http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0129055X1330001X; Cambridge University Press, 2017/ http://www.unige.ch/math/folks/velenik/smbook

граничным условием и трансляционно-инвариантными мерами Гиббса для модели Поттса (Universites Aix-Marseille et Sud Toulon-Var); найдены (k_0) – трансляционно-инвариантные меры Гиббса.

На мировом уровне осуществляется ряд научно-исследовательских работ в приоритетных направлениях, таких как изучение свойств мер Гиббса и их применение, а именно: описание предельных мер Гиббса для моделей статистической механики, в частности, используя метод, основанный на теории марковских случайных полей и рекуррентных уравнений этой теории, создание математических моделей, отображающих конкретный процесс, и решение задач, описывающих эти модели; нахождение условий существования периодических, слабо периодических и других мер Гиббса для моделей с конечными или счетными числами спиновых значений; описание слабо периодическx гиббсовских мер и анализ структуры множества таких мер для моделей Изинга и Поттса; создание алгоритмов нахождения основных состояний и фазового перехода.

Степень изученности проблемы. Несмотря на то, что американским ученым Дж.У.Гиббсом было выведено каноническое гиббсовское распределение, общие характеристики предельной меры Гиббса впервые появились в работах Р.Л.Добрушина, О.Ленфорда и Д.Рюэля. Р.Л.Добрушиным доказана теорема существования предельной гиббсовской меры. Основная теория фазовых переходов содержится в работах С.А.Пирогова и Я.Г.Синая. Трансляционно-инвариантные меры Гиббса модели Изинга на дереве Кэли изучены К.Престоном, Ф.Спитцером, П.М.Блехером, Ж.Руизом, В.Загребновым и Д.Иоффе. В научных работах П.М.Блехера и Н.Н.Ганиходжаева показано существование континуума мер Гиббса. В работах Д.Гандолфо, Ж.Руиза, К.Кулске, П.М.Блехера, Дж.Либовица, Е.Презутти, Ю.М.Сухова, Н.Н.Ганиходжаева, У.А.Розикова, Ф.Мухаммедова, Н.М.Хатамова, Р.М.Хакимова и других, используя метод, основанный на теории марковских случайных полей и рекуррентных уравнениях этой теории, изучены предельные меры Гиббса. В работе У.А.Розикова, К.Кулске и Р.М.Хакимова описаны трансляционно-инвариантные меры Гиббса для модели Поттса. А в работе У.А.Розикова, К.Кулске изучена крайность трансляционно-инвариантных мер Гиббса для модели Поттса. В работах У.А.Розикова, Ф.М.Мухаммедова, Г.И.Ботирова, Н.М.Хатамова развит контурный метод (теория Пирогова-Синая) на дереве Кэли. Этим методом доказано существование различных мер Гиббса для достаточно широкого класса гамильтонианов на дереве Кэли. В работе У.А.Розикова, Х. Акина, С.А.Темура построено множество предельных мер Гиббса для модели Изинга на дереве Кэли, которые отличны от ранее известных мер. В работе Д.Гандолфо, Ф.Х.Хайдарова, У.А.Розикова, Ж.Руиз для модели Изинга показано, что существует мера Гиббса на дереве Кэли, для которой не существуют свободные энергии.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, в которой выполняется диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно-исследовательских работ Ф4-ФА-Ф013 «Неассоциативные и операторные алгебры, динамические системы и их приложения в статистической физике и популяционной биологии» (Институт Математики, 2012-2016 гг.), ЁФ-4-3+ЁФ-4-4 «Вероятностные меры спиновых систем на счетных графах и алгебры Лейбница, ассоциированные представлениями алгебр Ли» (Институт математики при Национальном университете Узбекистана, 2016-2017гг.).

Целью исследования является изучение существования слабо периодических мер Гиббса и основных состояний для моделей Изинга и Поттса, исследование некоторого класса (слабо) непериодических предельных мер Гиббса и вычисление свободных энергий для моделей Изинга и Поттса.

Задачи исследования:

- поиск слабо периодических мер Гиббса, определенных для моделей Изинга и Поттса на дереве Кэли;

- определение существования слабо периодических мер Гиббса для модели Изинга с внешним полем на дереве Кэли;

- построение (слабо) непериодических мер Гиббса для модели Изинга;

- изучение слабо периодических основных состояний для моделей Изинга и Поттса с конкурирующими взаимодействиями;

- исследование зависимостей между трансляционно-инвариантными мерами Гиббса для модели Поттса и граничными условиями.

- нахождение общей формулы вычисления свободных энергий для моделей Изинга и Поттса и их вычисление при известных граничных условиях.

Объект исследования. Слабо периодические меры Гиббса для моделей Изинга и Поттса, слабо периодические основные состояния для моделей Изинга и Поттса с конкурирующими взаимодействиями, свободная энергия, граничные условия, $(k_0)-$трансляционно-инвариантная и $(k_0)-$периодическая меры Гиббса.

Предмет исследования. Слабо периодические меры Гиббса для нормальных делителей индекса два и четыре, слабо периодическое и периодическое основные состояния относительно нормальных делителей индекса два и четыре, свободная энергия для известных мер Гиббса для моделей Изинга и Поттса, граничные условия для трансляционно-инвариантных мер Гиббса модели Поттса на дереве Кэли.

Методы исследования. В диссертационной работе используются методы, основанные на теории мер и сжимающих отображений, на теории нелинейных динамических систем, на теории марковских случайных полей и рекуррентных уравнений этой теории и на теории Пирогова-Синая.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

В случае нормальных делителей индекса 4 при некоторых условиях на параметры модели Изинга доказано существование не менее 7 слабо периодических гиббсовских мер.

Введено понятие (k_0)-периодических (трансляционно-инвариантных) мер Гиббса и доказано существование таких гиббсовских мер.

Получена общая формула для вычисления свободных энергий для моделей Изинга и Поттса, вычислена свободная энергия для известных граничных условий. Показано, что эти свободные энергии совпадают, за исключением их для граничных условий слабо-периодической меры Гиббса.

Для антиферромагнитной модели Поттса на дереве Кэли доказано, что при определенных условиях существуют 2^q-2 слабо-периодические предельные гиббсовские меры относительно нормальных делителей индекса два.

Для ферромагнитной модели Поттса на дереве Кэли доказано, что при определенных условиях существует не менее двух слабо-периодических предельных гиббсовских мер.

Для модели Поттса с внешним полем на дереве Кэли доказано, что при выполнении найденных условий существует не менее двух слабо-периодических предельных гиббсовских мер.

Найдена зависимость трансляционно-инвариантных мер Гиббса от граничных условий (конфигураций). Построены граничные конфигурации для трансляционно-инвариантных мер Гиббса.

Найдены необходимое и достаточное условия (на порядок k решетки и на параметры нормального делителя индекса два и четыре), при которых существуют четыре слабо периодических основных состояния модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли.

Для произвольных нормальных делителей конечного индекса найдены необходимое и достаточное условия для конфигурации быть основным состоянием модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли порядка $k\geq 1$.

Найдены необходимое и достаточное условия (на порядок решетки $k\geq 2$ и на параметры нормального делителя индекса два и четыре), при которых существуют слабо периодические основные состояния модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли.

Практические результаты исследования состоят из определения точных или приближенных значений параметров для моделей, у которых изменение числа мер Гиббса обеспечивает существование фазового перехода, описание основных состояний для моделей Изинга и Поттса и нахождение основных формул вычисления свободных энергий для некоторых моделей.

Достоверность результатов исследования обоснована строгостью математических рассуждений и доказательств, использованием известных методов исследования других мер Гиббса и основных состояний, применением фундаментальных результатов теории мер и контурного метода. В результате доказанных утверждений найдены критические значения для фазовых переходов, которые в случае фиксированных значений параметра были проверены с помощью математического программирования

Mathematica 7 и Maple 15.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научное значение результатов исследования заключается в том, что полученные в работе научные результаты могут быть использованы для дальнейших исследований термодинамических свойств решеточных систем физики с помощью определения других мер Гиббса и основных состояний.

Практическая значимость диссертации состоит в том, что результаты диссертации, касающиеся слабо периодических мер Гиббса и слабо периодических основных состояний, позволяют проверить существование фазовых переходов физических систем.

Внедрение результатов исследования. Полученные в диссертации результаты были использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

методы нахождения существования слабо периодических мер Гиббса для решетчатых моделей на дереве Кэли и определение их чисел были использованы в исследованиях проекта FRGS 14-116-0357 для определения фазовых переходов решеточных моделей с конкурирующими взаимодействиями до трех ближайших соседей со спинами, принадлежащими разным ветвям дерева (Международнқй Исламский университет Малайзии, справка от 26 октября 2016 года). Применение этих научных результатов дало возможность для определения существования слабо периодических мер Гиббса и фазовых переходов при новых условиях на параметры;

полученные результаты диссертационной работы относительно слабо периодических гиббсовских мер и свободной энергии моделей Изинга и Поттса на дереве Кэли были использованы зарубежными учеными центра «Centre de Physique Théorique Universités Aix-Marseille et Sud Toulon-Var» для исследования многообразия чистых состояний Гиббса модели Изинга на плоскости Лобачевского. Более того, результаты диссертационной работы о свободных энергиях модели Изинга использовались для построения некоторых альтернативных гиббсовских мер этой модели (Марсельский университет, справка от 5 сентября 2017 года, Франция). Применение этих научных результатов дало возможность для решения задач комбинаторики, статистической механики, телекоммуникаций и фазовых переходов;

полученные результаты диссертационной работы об описании слабо периодических гиббсовских мер на дереве Кэли порядка четыре были использованы в зарубежных журналах (Communications in Mathematical Physics, 2015; Journal of Statistical Physics, 2012; Journal of Statistical Physics, 2016) для исследования новых мер Гиббса на дереве Кэли. Применение этих научных результатов открывает возможность для нахождения новых мер Гиббса на дереве Кэли и построения мер, подобных мерам Гиббса.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования были обсуждены на 22 научно-практических конференциях, в том числе на 8 международных и 14 республиканских научно - практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 39 научных работ, из них 17 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты докторских диссертаций, в том числе 14 опубликованы в зарубежных журналах и 3 – в республиканских научных изданиях.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 184 страницы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации, названная **«Слабо периодические меры Гиббса для модели Изинга»,** посвящена изучению существования слабо периодических мер Гиббса для модели Изинга на дереве Кэли относительно нормального делителя индекса два и четыре, также для модели Изинга с ненулевым внешним полем изучены слабо периодические меры Гиббса. Вводятся (k_0)-периодические меры Гиббса для модели Изинга на дереве Кэли и доказывается существование таких мер.

Пусть $T^k=(V,L)$, $k\geq 1$ есть дерево Кэли порядка k, т.е. бесконечное дерево, из каждой вершины которого выходит ровно $k+1$ ребер, где $V-$множество вершин, $L-$множество ребер T^k.

Известно, что T^k можно представить как G_k-свободное произведение $k+1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1,a_2,...,a_{k+1}$, соответственно.

Пусть $\Phi=\{-1,1\}$ и $\sigma\in\Omega=\Phi^V-$ конфигурация, то есть $\sigma=\{\sigma(x)\in\Phi : x\in V\}$. Рассмотрим гамильтониан модели Изинга с внешним полем

$$H(\sigma)=-J\sum_{\langle x,y\rangle\in L}\sigma(x)\sigma(y)-\lambda\sum_{x\in V}\sigma(x), \tag{1}$$

где $J,\lambda\in R,\langle x,y\rangle-$ ближайшие соседи.

Известно, что каждой мере Гиббса модели Изинга можно сопоставить совокупность величин $h=\{h_x, x\in G_k\}$ удовлетворяющую

$$h_x=\lambda\beta+\sum_{y\in S(x)}f(h_y,\theta), \tag{2}$$

где $S(x)-$множество «прямых потомков» точки $x\in V$ и $\theta = th(J\beta)$, $f(x,\theta)=arcth(\theta th x)$, $\beta=\dfrac{1}{T}$, $T>0$ $-$температура.

Для $x\in G_k$ обозначим через $x_{\downarrow}=\{y\in G_k :< x,y>\}\setminus S(x)$.

Пусть $G_k/\overline{G_k}=\{H_1,H_2,\ldots,H_r\}-$ фактор-группа, где $\overline{G_k}-$нормальный делитель индекса $r\geq 1$.

Определение 1. Совокупность величин $h=\{h_x, x\in G_k\}$ называется $\overline{G_k}$-периодической, если $h_{xy}=h_x$ для любого $x\in G_k$, $y\in \overline{G_k}$. G_k -периодическая мера называется трансляционно-инвариантной.

Определение 2. Совокупность величин $h=\{h_x, x\in G_k\}$ назовем $\overline{G_k}$-слабо периодической, если $h_x=h_{ij}$, при $x\in H_i$, $x_{\downarrow}\in H_j$ для любого $x\in G_k$.

Определение 3. Меру μ назовем $\overline{G_k}$ -(слабо) периодической, если она соответствует $\overline{G_k}$ -(слабо) периодической совокупности величин h.

Рассмотрим модель Изинга с нулевым внешним полем. Обозначим $\alpha=\dfrac{1-\theta}{1+\theta}$, $I_3=\{h\in R^4: h_1=-h_4; h_2=-h_3\}$.

Пусть $H_A=\{x\in G_k:\sum\limits_{i\in A} w_x(a_i)-\text{четно}\}$, где $\varnothing\neq A\subseteq N_k=\{1,2,\ldots,k+1\}$ и $w_x(a_i)-$число букв a_i в слове $x\in G_k$.

Теорема 1. Пусть $|A|=k$, $\alpha>1$.

1) При $k\leq 3$ все H_A-слабо периодические меры Гиббса на I_3 являются трансляционно-инвариантными.

2) При $k=4$ существует критическое значение $\alpha_{cr}(\approx 6{,}3716)$ такое, что при $\alpha<\alpha_{cr}$ на I_3 существует одна H_A-слабо периодическая мера Гиббса; при $\alpha=\alpha_{cr}$ на I_3 существуют три H_A-слабо периодические меры Гиббса; при $\alpha>\alpha_{cr}$ на I_3 существуют пять H_A-слабо периодических мер Гиббса.

Пусть $H_{\{a_1\}}=\{x\in G_k: w_x(a_1)-\text{четно}\}$, $G_k^{(2)}=\{x\in G_k: |x|-\text{четно}\}$ и $G_k^{(4)}=H_{\{a_1\}}\cap G_k^{(2)}-$нормальный делитель индекса 4.

Описаны $G_k^{(4)}$-слабо периодические меры Гиббса для нормального делителя $G_k^{(4)}$ $-$ индекса 4.

Теорема 2. При $k=4$ существуют критические значения $\alpha_{cr}\approx 0{,}152$ и $\alpha_c=\dfrac{3}{5}$, такие, что

1) При $\alpha\in[0,\alpha_{cr})\cup(\alpha_{cr}^{-1},+\infty)$ существуют не менее семи $G_k^{(4)}$-слабо периодических гиббсовских мер.

2) При $\alpha=\alpha_{cr}$ и $\alpha=\alpha_{cr}^{-1}$ существуют не менее пяти слабо периодических гиббсовских мер.

3) При $\alpha \in (\alpha_{cr}, \alpha_c) \cup (\alpha_c^{-1}, \alpha_{cr}^{-1})$ существуют не менее трех мер Гиббса.

4) При $\alpha \in [\alpha_c, \alpha_c^{-1}]$ существует не менее одной гиббсовской меры.

Теперь рассмотрим антиферромагнитную модель Изинга с внешним полем, т.е. случай $\alpha > 1$ $(\theta < 0)$. Из (2) для трансляционно-инвариантной совокупности величин получим следующее уравнение

$$h = \lambda\beta + kf(h, \theta). \tag{3}$$

Введем обозначения $\alpha = \dfrac{1-\theta}{1+\theta}$, $z = e^{2h}$, $a = e^{2\lambda\beta}$, $\varphi(x) = \dfrac{x+\alpha}{\alpha x + 1}$. Тогда уравнение (3) сводится к следующему уравнению

$$z = a(\varphi(z))^k. \tag{4}$$

Известно, что для антиферромагнитной модели Изинга с внешним полем существует единственная трансляционно-инвариатная мера Гиббса, которая соответствует единственному решению уравнения (5), это решение обозначим через z_*.

Доказана следующая

Теорема 3. При $|A| = k,\ k \geq 6$ и $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ для антиферромагнитной модели Изинга с внешним полем существует не менее двух H_A- слабо периодических (не периодических) мер Гиббса, где $\lambda_{1,2} = \dfrac{1}{2k\beta}\ln b_{1,2}$ и

$$b_1 = \frac{(k-1-\sqrt{k^2-6k+1})(\alpha z_* + 1)^2}{2(\alpha^2-1)z_*^{\frac{k-1}{k}}}, \quad b_1 = \frac{(k-1+\sqrt{k^2-6k+1})(\alpha z_* + 1)^2}{2(\alpha^2-1)z_*^{\frac{k-1}{k}}}.$$

Приведем основной результат шестого параграфа первой главы.

При нулевом внешнем поле для трансляционно-инвариантной совокупности величин h уравнение (2) имеет следующий вид

$$h = kf(h, \theta),\ 0 < \theta < 1. \tag{5}$$

Известно, что уравнение (5) имеет единственное решение $h = 0$, если $0 < \theta \leq \theta_c = \dfrac{1}{k}$, и три решения $h = 0,\ \pm h_*^{(k)},\ \ h_*^{(k)} > 0$, если $\theta_c < \theta < 1$.

Пусть $k \geq 2, k_0 \geq 2$ такие, что $(k - k_0)-$четное положительное число. Для $x \in V$ через $S_{k_0}(x)-$ обозначим произвольный набор из k_0 вершин множества $S(x)$, а остальные $k - k_0$ вершин обозначим через $S_{k-k_0}(x)$.

Построим совокупность величин $h = \{h_x, x \in V\}$, где $h_x \in \{-h_*, h_*\}$, на дереве Кэли порядка k следующим образом:

(a_1) Если на вершине x имеем $h_x = h_*$, то на каждую вершину из $S_{k_0}(x)$ ставим значение h_*, а на каждую вершину из $S_{k-k_0}(x)$ ставим одно из значений h_* и $-h_*$ так, что

$$\sum_{y\in S_{k-k_0}(x)} f(h_y,\theta)=0,$$

т.е. на половину вершин из $S_{k-k_0}(x)$ ставим значение h_*, а на другую половину $-h_*$.

(a_2) Если на вершине x имеем $h_x = -h_*$, то на каждую вершину из $S_{k_0}(x)$ ставим значение $-h_*$, а на каждую вершину из $S_{k-k_0}(x)$ ставим одно из значений h_* и $-h_*$ так, что

$$\sum_{y\in S_{k-k_0}(x)} f(h_y,\theta)=0.$$

Меру, соответствующую совокупности величин h, построенную по правилам (a_1), (a_2), назовем (k_0)-трансляционно-инвариантной мерой Гиббса.

Рассмотрим теперь антиферромагнитную модель Изинга (т.е. $J<0$).

На дереве Кэли порядка k_0 любая $G_{k_0}^{(2)}$-периодическая совокупность величин $h=\{h_x, x\in V\}$ имеет вид

$$h_x=\begin{cases} u, & \text{если } x\in G_k^{(2)}, \\ v, & \text{если } x\in G_k\setminus G_k^{(2)}, \end{cases}$$

где пара (u, v) удовлетворяет следующей системе уравнений

$$\begin{cases} u=k_0 f(v,\theta), \\ v=k_0 f(u,\theta). \end{cases} \tag{6}$$

Заметим, что при $-1<\theta<-\theta_c$ система уравнений (6) имеет три решения вида $h_*^{\mp}=(-h_*,h_*)$, $h_*^0=(0,0)$, $h_*^{\pm}=(h_*,-h_*)$. С помощью $h_*^{\mp}$ построим новые решения функционального уравнения (2).

Построим совокупность величин $h=\{h_x, x\in V\}$ (где $h_x\in\{-h_*,h_*\}$) следующим образом:

(a_3) Если на вершине x имеем $h_x = h_*$, то на каждую вершину из $S_{k_0}(x)$ ставим значение $-h_*$, а на каждую вершину из $S_{k-k_0}(x)$ ставим одно из значений h_* и $-h_*$ так, что

$$\sum_{y\in S_{k-k_0}(x)} f(h_y,\theta)=0.$$

(a_4) Если на вершине x имеем $h_x = -h_*$, то на каждую вершину из $S_{k_0}(x)$ ставим значение h_*, а на каждую вершину из $S_{k-k_0}(x)$ ставим одно из значений h_* и $-h_*$ так, что

$$\sum_{y\in S_{k-k_0}(x)} f(h_y,\theta) = 0.$$

Меру, соответствующую совокупности величин h, построенную по правилам (a_3), (a_4), назовем $(k_0)-$периодической мерой Гиббса.

Введем обозначение $T_{c,k_0} = \dfrac{J}{arcth(1/k_0)}$.

Теорема 4. Пусть $k \geq 2,\, k_0 \geq 2$ такие, что $(k-k_0)-$четное положительное число и $T < T_{c,k_0}$. Тогда для ферромагнитной (антиферромагнитной) модели Изинга на дереве Кэли порядка k существуют ровно две $(k_0)-$трансляционно-инвариантные (периодические) меры Гиббса.

Во второй главе диссертации, названной «**Слабо периодические меры Гиббса для модели Поттса**», исследована слабо-периодическая мера Гиббса для модели Поттса с нулевым внешнем полем и с ненулевым внешнем полем, также найдены граничные условия для трансляционно-инвариантных гиббсовских мер модели Поттса на дереве Кэли.

Мы рассмотрим модель, где спиновые переменные принимают значения из множества $\Phi = \{1,2,\ldots,q\}$, $q \geq 2$ и расположены на вершинах дерева. Тогда конфигурация σ на V определяется как функция $x \in V \to \sigma(x) \in \Phi$.

Гамильтониан модели Поттса с внешним полем α определяется как

$$H(\sigma) = -J\sum_{\langle x,y\rangle\in L}\delta_{\sigma(x)\sigma(y)} - \alpha\sum_{x\in V}\delta_{1\sigma(x)},$$

где $J, \alpha \in R$, $< x, y >$ - ближайшие соседи.

Известно, что каждой мере Гиббса модели Поттса с внешним полем можно сопоставить совокупность векторов $h = \{h_x, x \in G_k\}$, удовлетворяющую

$$h_x = \sum_{y\in S(x)} F(h_y,\theta,\alpha), \qquad (7)$$

где $F: h = (h_1,\ldots,h_{q-1}) \in R^{q-1} \to F(h,\theta,\alpha) = (F_1,\ldots,F_{q-1}) \in R^{q-1}$ определяется как

$$F_i = \alpha\beta\delta_{1i} + \ln\left(\frac{(\theta-1)e^{h_i} + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j} + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j}}\right),$$

и $\theta = \exp(J\beta)$, $S(x)-$ множество прямых потомков точки x.

Для совокупности векторов $h=\{h_x,\ x\in G_k\}$ можно привести определения, аналогичные определениям 1-3.

Во втором параграфе второй главы описаны слабо периодические меры Гиббса для модели Поттса с нулевым внешним полем.

Для нормального делителя $H_A,\ A\subseteq N_k$ доказаны следующие теоремы:

Теорема 5. Пусть $|A|=k$ и $k\geq 6$. Если выполняется одно из следующих условий

1) $\dfrac{4k}{k+1+\sqrt{k^2-6k+1}}\leq q<\dfrac{4k}{k+1-\sqrt{k^2-6k+1}}$ и $0<\theta<\theta_2$;

2) $q\leq\dfrac{4k}{k+1+\sqrt{k^2-6k+1}}$ и $\theta_1<\theta<\theta_2$,

то существуют не менее 2^q-2 H_A-слабо периодических (не периодических) мер Гиббса, где

$$\theta_1=\frac{4k-kq-q-q\sqrt{k^2-6k+1}}{4k},\quad \theta_2=\frac{4k-kq-q+q\sqrt{k^2-6k+1}}{4k}.$$

Теорема 6. Пусть $|A|=1,\ k\geq 6$ и $q\geq 3$. Тогда для ферромагнитной модели Поттса существуют критические значения $\theta_1,\ \theta_2$ такие, что при $\theta\in(\theta_1,\theta_2)$ существуют не менее двух H_A- слабо периодических (не трансляционно-инвариантных) мер Гиббса, где

$$\theta_1=\frac{4-3q+qk-q\sqrt{k^2-6k+1}}{4},\ \theta_2=\frac{4-3q+qk+q\sqrt{k^2-6k+1}}{4}.$$

В третьем параграфе второй главы доказано существование слабо периодических мер Гиббса для модели Поттса с ненулевым внешним полем. Справедлива следующая теорема.

Теорема 7. При $|A|=k,\ k\geq 6$ и $\alpha\in(\alpha_1,\alpha_2)$ для антиферромагнитной (т.е. $0<\theta<1$) модели Поттса с внешним полем существуют не менее двух H_A- слабо периодических (не периодических) мер Гиббса, где $\alpha_i=kT\ln b_i$, $T-$ температура и

$$b_1=\frac{(k-1-\sqrt{k^2-6k+1})(1-\theta)(\theta+q-1)z_*^{\frac{k-1}{k}}}{2(\theta+q-2+z_*)^2},$$

$$b_2=\frac{(k-1+\sqrt{k^2-6k+1})(1-\theta)(\theta+q-1)z_*^{\frac{k-1}{k}}}{2(\theta+q-2+z_*)^2}.$$

В четвертом параграфе второй главы найдены граничные условия для трансляционно-инвариантных гиббсовских мер модели Поттса на дереве Кэли.

Пусть $\omega-$такая конфигурация, что число $c^l(\omega)=\sum_{s:t\to_1 s}\delta_{l\omega(s)},\ l=\overline{1,q}$ не зависит от $t\in V\setminus\{0\}$.

В работе У.А.Розикова, Р.М.Хакимова, С.Кулске описаны все трансляционно-инвариантные предельные меры Гиббса (ТИМГ) модели Поттса. В частности, там же показано, что любая ТИМГ модели Поттса соответствует решению следующего уравнения

$$h=f_m(h)\equiv k\ln\left(\frac{(\theta+m-1)e^h+q-m}{me^h+q-m-1+\theta}\right) \tag{8}$$

для некоторого $m=1,\dots,q-1$.

Введем обозначение $\theta_m=1+2\sqrt{m(q-m)},\ m=1,\dots,q-1$. В работе У.А.Розикова, Р.М.Хакимова, С.Кулске доказано следующее

Утверждение 1. Пусть $k=2,\ J>0$.

1) Если $\theta<\theta_1$, то существует единственная ТИМГ.

2) Если $\theta_m<\theta<\theta_{m+1}$ для некоторого $m=1,\dots,[\frac{q}{2}]-1$, то существуют $1+2\sum_{s=1}^{m}C_q^s$ ТИМГ, которые соответствуют решениям (8) вида $h_i\equiv h_i(\theta,s)=2\ln[x_i(s,\theta)],\ i=1,2,\ s=1,\dots,m$, где

$$x_1(s,\theta)=\frac{\theta-1-\sqrt{(\theta-1)^2-4s(q-s)}}{2s},\ x_2(s,\theta)=\frac{\theta-1+\sqrt{(\theta-1)^2-4s(q-s)}}{2s}.$$

3) Если $\theta_{[\frac{q}{2}]}<\theta\neq q+1$, то существуют 2^q-1 ТИМГ.

4) Если $\theta=q+1$, то количество ТИМГ определяется следующим образом:

$$\begin{cases}2^{q-1}, & \text{если } q-\text{нечетное}\\ 2^{q-1}-C_{q-1}^{\frac{q}{2}}, & \text{если } q-\text{четное};\end{cases}$$

5) Если $\theta=\theta_m,\ \ m=1,\dots,[\frac{q}{2}],\ (\theta_{[\frac{q}{2}]}\neq q+1)$, то число ТИМГ равно следующему

$$1+C_q^m+2\sum_{s=1}^{m-1}C_q^s.$$

Обозначим через $\mu_0\equiv\mu_0(\theta)$ ТИМГ, соответствующую решению $h_i\equiv 0$, и через $\mu_i\equiv\mu_i(\theta,m)$ ТИМГ, соответствующую решению $h_i(\theta,m)$, $i=1,2$, $m=1,\dots,[q/2]$.

Для данного $m \in \{1,\ldots,[q/2]\}$ и $J > 0$ введем следующие множества конфигураций:

$$\mathrm{B}_m = \{\omega \in \Omega : c^1(\omega) = \ldots = c^m(\omega),\ c^{m+1}(\omega) = \ldots = c^{q-1}(\omega) = c^q(\omega)\},$$

$$\mathrm{B}^+_{m,0} = \{\omega \in \mathrm{B}_m : c^1(\omega) > c^q(\omega)\},\ \mathrm{B}^0_{m,0} = \{\omega \in \mathrm{B}_m : c^1(\omega) = c^q(\omega)\},$$

$$\mathrm{B}^-_{m,0} = \{\omega \in \mathrm{B}_m : c^1(\omega) < c^q(\omega)\},\ \mathrm{B}^+_{m,1} = \{\omega \in \mathrm{B}_m : J\left(c^1(\omega) - c^q(\omega)\right) > h_1\},$$

$$\mathrm{B}^0_{m,1} = \{\omega \in \mathrm{B}_m : J\left(c^1(\omega) - c^q(\omega)\right) = h_1\},\ \mathrm{B}^-_{m,1} = \{\omega \in \mathrm{B}_m : J\left(c^1(\omega) - c^q(\omega)\right) < h_1\}.$$

В следующей теореме для каждого $h_i(\theta, m)$ найдена конфигурация $\omega \in \Omega$ такая, что $\mu_i(\theta, m) = P^\omega$, где P^ω – предельная гиббсовская мера.

Теорема 8. 1) Если $\theta = \theta_m$ для некоторого $m = 1,\ldots,[q/2]$, то

$$P^\omega = \begin{cases} \mu_1(\theta, m), & \text{если } \omega \in \mathrm{B}^+_{m,1} \cup \mathrm{B}^0_{m,1}, \\ \mu_0(\theta), & \text{если } \omega \in \mathrm{B}^-_{m,1}; \end{cases}$$

2) Если $\theta_m < \theta < \theta_c = q + 1$, то

$$P^\omega = \begin{cases} \mu_2(\theta, m), & \text{если } \omega \in \mathrm{B}^+_{m,1}, \\ \mu_1(\theta, m), & \text{если } \omega \in \mathrm{B}^0_{m,1}, \\ \mu_0(\theta), & \text{если } \omega \in \mathrm{B}^-_{m,1}; \end{cases}$$

3) Если $\theta = \theta_c$, то

$$P^\omega = \begin{cases} \mu_2(\theta, m), & \text{если } \omega \in \mathrm{B}^+_{m,0}, \\ \mu_0(\theta), & \text{если } \omega \in \mathrm{B}^-_{m,0} \cup \mathrm{B}^0_{m,0}; \end{cases}$$

4) Если $\theta > \theta_c$, то

$$P^\omega = \begin{cases} \mu_2(\theta, m), & \text{если } \omega \in \mathrm{B}^+_{m,0}, \\ \mu_1(\theta, m), & \text{если } \omega \in \mathrm{B}^-_{m,0}, \\ \mu_0(\theta), & \text{если } \omega \in \mathrm{B}^0_{m,0}. \end{cases}$$

В третьей главе диссертации, названной **«Свободные энергии для модели Изинга и Поттса»**, для моделей Изинга и Поттса изучим свободные энергии для граничных условий, которые ранее были изучены.

Во втором параграфе третьей главы получен явный вид плотности специальных ребер на шарах дерева Кэли. Результаты этого параграфа использованы для вычисления свободных энергий.

Основной целью третьего параграфа третьей главы является нахождение общих формул свободной энергии для модели Изинга на дерева Кэли.

Определение 4. Граничные условия $h = \{h_x,\ x \in G_k\}$, удовлетворяющие функциональному уравнению (2), называются согласованными.

Определение 5. Следующий предел (если он существует) называется свободной энергией соответствующих граничных условий h:

$$E(\beta, h) = -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\beta |V_n|} \ln Z_n(\beta, h).$$

Утверждение 2. Для согласованных граничных условий свободная энергия задается следующими формулами

$$F(\beta, h) = -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|V_n|} \sum_{x\in V_n} a(x), \tag{9}$$

где $a(x) = \frac{1}{2\beta} \ln[4\cosh(h_x - \beta J)\cosh(h_x + \beta J)]$.

Нами найдено точное значение свободных энергий: свободная энергия для трансляционно-инвариантных (TI) граничных условий имеет следующий вид:

$$F_{TI}(\beta, 0) = -\frac{1}{\beta} \ln(2\cosh(\beta J)),$$

$$F_{TI}(\beta, h_*) = F_{TI}(\beta, -h_*) = -\frac{1}{2\beta} \ln[4\cosh(\beta J - h_*)\cosh(\beta J + h_*)].$$

Свободную энергию для граничных условий Блехера-Ганиходжаева обозначим через $F_{BG}(\beta, h^{\pi})$

$$F_{BG}(\beta, h^{\pi}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|V_n|} \sum_{x\in V_n} a(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|V_n|} \left[(|V_n| - n) a_{TI}(x) + \frac{a(x_0) + a(x_1) + \ldots + a(x_n)}{|V_n|} \right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|V_n|} [(|V_n| - n) a_{TI}(x)] = F_{TI}(\beta, h_*).$$

Также показано, что свободная энергия для граничных условий Захари[1] имеет вид

$$F_{Zach}(\beta, h^{(t)}) = F_{TI}(\beta, 0).$$

Для ART[2]- конструкции соответствующей свободной энергии имеем

$$F_{ART}(\beta, \tilde{h}) = -\frac{1}{\beta} \ln[2\cosh(\beta J)] = F_{TI}(\beta, 0).$$

---

[1] H.O. Georgii (2011): Gibbs Measures and Phase Transitions, Second edition. de Gruyter Studies in Mathematics, 9. Walter de Gruyter, Berlin;
[2] Akin H., Rozikov U.A., Temur S. A new set of limiting Gibbs measures for the Ising model on a Cayley tree. // J.Stat.Phys. 2011, 142:314-321.

Свободная энергия для периодических мер Гиббса имеет следующий вид:

$$F_{\mathrm{Per}}(\beta, h_*^{(\pm)}) = -\frac{1}{2\beta}\ln[4\cosh(\beta J - h_*)\cosh(\beta J + h_*)] = F_{\mathrm{T}I}(\beta, h_*).$$

Свободная энергия для одной слабо-периодической меры Гиббса (из Теоремы 2) имеет следующий вид:

$$F_{\mathrm{W}P}(\beta, h) = -\frac{1}{2\beta}\left\{\frac{4}{5}\ln[4\cosh(J\beta - h_1)\cosh(J\beta + h_1)] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{5}\ln[4\cosh(J\beta - h_2)\cosh(J\beta + h_2)]\right\}.$$

Доказано следующее неравенство

$$F_{\mathrm{T}I}(\beta, h_*) < F_{\mathrm{W}P}(\beta, h) < F_{\mathrm{T}I}(\beta, 0).$$

Целью четвертого параграфа третьей главы является изучение свободной энергии для модели Поттса на дереве Кэли.

Следующая теорема дает формулы для вычисления свободной энергии для модели Поттса на дереве Кэли.

Теорема 9. Для граничных условий, удовлетворяющих условию (7), свободная энергия определяется по формуле

$$E(\beta, h) = -\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|V_n|}\sum_{x\in V_n} a(x), \tag{10}$$

где $a(x) = \frac{1}{q\beta}\sum_{i=1}^{q}\ln\left(\sum_{u=1}^{q}\exp\{(J\beta\sigma_i + h_x)\sigma_u\}\right)$.

Для модели Поттса рассмотрим трансляционно-инвариантную совокупность векторов h_x, т.е. $h_x = h = (h_1, h_2, ..., h_{q-1}) \in R^{q-1}, \forall x \in G_k$. Тогда из (7) получим

$$h_i = k\ln\left(\frac{(\theta-1)e^{h_i} + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j} + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j}}\right),\ i = 1, \ldots, q-1. \tag{11}$$

Известно, что любое решение (11) имеет вид: $h = (\underbrace{h_*, h_*, \ldots, h_*}_{m}, 0, 0, \ldots, 0),\ m \geq 0$ с точностью до перестановки координат.

Случай $m=0$. В этом случае $h=h_0=(0,0,...,0)\in R^{q-1}$. Из (10) имеем

$$E_{TI}(\beta,h_0)=-J-\frac{1}{\beta}\ln\left(1+(q-1)\exp\left(\frac{Jq\beta}{1-q}\right)\right).$$

Случай $m\neq 0$. Нами получена свободная энергия:

$$E_{TI}(\beta,m,h_x)=-\frac{q-m}{q\beta}\ln\left(m\cdot e^{\left(-\frac{J\beta}{q-1}+\frac{q-m}{q-1}h_*\right)}+e^{\left(J\beta-\frac{m}{q-1}h_*\right)}+(q-m-1)\cdot e^{\left(-\frac{J\beta}{q-1}-\frac{m}{q-1}h_*\right)}\right)-$$
$$-\frac{m}{q\beta}\ln\left((m-1)\cdot e^{\left(-\frac{J\beta}{q-1}+\frac{q-m}{q-1}h_*\right)}+e^{\left(J\beta+\frac{q-m}{q-1}h_*\right)}+(q-m)\cdot e^{\left(-\frac{J\beta}{q-1}-\frac{m}{q-1}h_*\right)}\right).$$

Для бесконечного пути π на дереве Кэли введем обозначение

$$\mathrm{W}_n^{\pi}=\{x\in W_n : x\prec x_n\},$$

где $n=1,2,\dots$, и $x\prec x_n$ означает, что x находится с левой стороны пути π.

Лемма 1. Для любого π существует следующий предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\mathrm{W}_n^{\pi}|}{|W_n|}=a^{\pi}.$$

Свободная энергия для совокупности векторов, построенной Н.Н.Ганиходжаевым, имеет следующий вид

$$E_G(\beta,m,h_x^{\pi})=a^{\pi}E_{TI}(\beta,m,h_*^1)+(1-a^{\pi})E_{TI}(\beta,m,h_*^2).$$

Доказано, что для периодических граничных условий свободная энергия может и не существовать.

Для слабо периодических граничных условий свободная энергия имеет следующий вид:

$$E_{WP}(\beta,q,h_x)=\frac{1}{2(k+1)}(E_{TI}(\beta,q-1,h_1)+kE_{TI}(\beta,q-1,h_2)+kE_{TI}(\beta,q-1,h_3)+$$
$$+E_{TI}(\beta,q-1,h_4)).$$

В четвертой главе диссертации, названной «**Слабо периодические основные состояния**», на дереве Кэли описаны слабо периодические основные состояния для модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями и для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями относительно нормального делителя индекса два и четыре. Также описаны периодические основные состояния для модели

Поттса с конкурирующими взаимодействиями относительно нормального делителя индекса четыре.

Пусть $G_k / G_k^* = \{H_1, H_2, \ldots, H_r\}$ – фактор-группа, где G_k^* – нормальный делитель индекса $r \geq 1$.

Определение 6. Конфигурация σ называется G_k^* - периодической, если она является инвариантной относительно подгруппы $G_k^* \subset G_k$, т.е. $\sigma(yx) = \sigma(x)$ для любых $x \in G_k, y \in G_k^*$.

Определение 7. Конфигурация $\sigma(x), x \in V$ называется G_k^*-слабо периодической, если $\sigma(x) = \sigma_{ij}$ при $x \in H_i, x_\downarrow \in H_j, \forall x \in G_k$.

Гамильтониан модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями имеет вид

$$H(\sigma) = J_1 \sum_{<x,y>} \sigma(x)\sigma(y) + J_2 \sum_{\substack{x,y \in V: \\ d(x,y)=2}} \sigma(x)\sigma(y). \tag{12}$$

В работе У.А.Розикова найдены все трансляционно-инвариантные и периодические основные состояния для модели (12).

Напомним, что произвольный нормальный делитель индекса два имеет $H_A = \{x \in G_k : \sum_{i \in A} w_x(a_j) - \text{четно}\}$, где $\varnothing \neq A \subseteq N_k = \{1, 2, \ldots, k+1\}$ и $w_x(a_j)$ – число букв a_j в слове $x \in G_k$, и пусть $|A| = i$.

Доказана следующая

Теорема 10. Пусть $|A| = i,\ i \in \{1, 2, \ldots, k+1\}$.

1) Если $i \neq \frac{k+1}{2}$, то всякое H_A-слабо периодическое основное состояние является H_A-периодическим или трансляционно-инвариантным.

2) При $i = \frac{k+1}{2}$ и $J_1 = 2J_2,\ J_2 \geq 0$ существуют, по меньшей мере, два H_A-слабо периодических (непериодических) основных состояния.

Пусть $G_k^{(4)} = H_A \cap G_k^{(2)}$ – нормальный делитель индекса 4.

Доказана следующая

Теорема 11. Пусть $|A| = i,\ i \in \{1, 2, \ldots, k+1\}$.

I) Если $i \neq \frac{k+1}{2}$, то всякое $G_k^{(4)}$-слабо периодическое основное состояние является периодическим или трансляционно-инвариантным.

II) При $i = \frac{k+1}{2}$ и $J_1 = 2J_2,\ J_2 \geq 0$, кроме периодических, существуют по меньшей мере еще четыре $G_k^{(4)}$-слабо периодических (непериодических) основных состояния.

Гамильтониан модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями имеет вид

$$H(\sigma) = J_1 \sum_{\substack{\langle x,y\rangle, \\ x,y\in V}} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} + J_2 \sum_{\substack{x,y\in V, \\ d(x,y)=2}} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \tag{13}$$

где $J_1, J_2 \in R,$

$$\delta_{uv} = \begin{cases} 1, & u = v, \\ 0, & u \neq v. \end{cases}$$

В работе У.А.Розикова и Г.И.Ботирова построены все трансляционно-инвариантные и некоторые периодические основные состояния для модели (13).

Теорема 12. Пусть $|A| = 2$.

i) При $k = 2, q = 3$ на множестве $A_{0,1} = \{J \in R^2 : J_2 \geq 0, J_1 - 2J_2 \geq 0\}$ существуют шесть H_A-слабо периодических основных состояний, не являющихся периодическими или трансляционно-инвариантными, и они имеют следуюший вид:

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} l, & x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_0, \\ m, & x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_1, \\ n, & x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_0, \\ l, & x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_1, \end{cases}$$

где $l, m, n \in \{1, 2, 3\}$, и $l \neq m,\ l \neq n,\ m \neq n.$

ii) При $k = 2, q = 3$, кроме $\varphi^*(x)$, все H_A-слабо периодические основные состояния являются трансляционно-инвариантными.

Теорема 13. При $k \geq 4$ и $|A| = k$ слабо периодическая конфигурация

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} l, & x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_0, \\ m, & x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_1, \\ n, & x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_0, \\ l, & x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_1 \end{cases}$$

на множестве $\{J \in R^2 : J_1 \geq 0,\ J_2 = 0\}$ является слабо периодическим основным состоянием, где $l, m, n \in \{1, 2, 3\}$, и $l \neq m,\ l \neq n,\ m \neq n.$

$G_k^{(4)}$ - периодические конфигурации имеют следующий вид:

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_0 & \text{если } x \in H_0, \\ a_1 & \text{если } x \in H_1, \\ a_2 & \text{если } x \in H_2, \\ a_3 & \text{если } x \in H_3, \end{cases}$$

где $a_i \in \Phi = \{1, 2, 3\}$, $i \in \{0,1,2,3\}$.

Далее для удобства периодическую конфигурацию $\varphi(x),\ x\in G_k$ запишем в виде $\varphi=(a_0,a_1,a_2,a_3)$.

Следующая теорема описывает $G_k^{(4)}-$периодические основные состояния.

Теорема 14. Пусть $k\geq 2$ и $|A|\in\{1,2,...,k\}$. Тогда верны следующие утверждения:

I. a) На множестве $\{J\in R^2: J_1\geq 0, J_2\leq 0\}$ существуют шесть $G_k^{(4)}-$периодических основных состояний, не являющихся трансляционно-инвариантными, но являющихся $G_k^{(2)}-$периодическими, и они имеют следующий вид: $\varphi_1=(l,l,m,m)$;

b) При $|A|=1$ на множестве $\{J\in R^2: J_1\leq 0, \frac{-J_1}{2k}\leq J_2\leq \frac{-J_1}{2(k-1)}\}$ существуют шесть $G_k^{(4)}-$периодических основных состояний, не являющихся трансляционно-инвариантными, но являющихся H_A-периодическими, и они имеют следующий вид: $\varphi_2=(l,m,l,m)$;

c) При $|A|=k$ на множестве $\{J\in R^2: J_1\leq 0, \frac{-J_1}{2k}\leq J_2\leq \frac{-J_1}{2(k-1)}\}$ существуют шесть $G_k^{(4)}-$периодических основных состояний, не являющихся трансляционно-инвариантными, и они имеют следующий вид: $\varphi_3=(l,m,m,l)$;

d) На множестве $\{J\in R^2: J_1\geq 0, J_2=0\}$ существуют двенадцать $G_k^{(4)}-$периодических основных состояний, не являющихся трансляционно-инвариантными, не являющихся $G_k^{(2)}$, H_A- периодическими, и они имеют следующий вид: $\varphi_4=(l,l,m,n)$ и $\varphi_5=(l,m,n,n)$, где $l,m,n\in\Phi$, и $l\neq m,\ l\neq n,$ $m\neq n.$

II. Всякие $G_k^{(4)}-$периодические основные состояния, кроме конфигураций, указанных в пункте I, являются трансляционно-инвариантными.

$G_k^{(4)}$-слабо периодические конфигурации имеют следующий вид:

$$\varphi(x)=\begin{cases} a_{02}, \text{ если } x_{\downarrow}\in H_0, x\in H_2,\\ a_{03}, \text{ если } x_{\downarrow}\in H_0, x\in H_3,\\ a_{12}, \text{ если } x_{\downarrow}\in H_1, x\in H_2,\\ a_{13}, \text{ если } x_{\downarrow}\in H_1, x\in H_3,\\ a_{20}, \text{ если } x_{\downarrow}\in H_2, x\in H_0,\\ a_{21}, \text{ если } x_{\downarrow}\in H_2, x\in H_1,\\ a_{30}, \text{ если } x_{\downarrow}\in H_3, x\in H_0,\\ a_{31}, \text{ если } x_{\downarrow}\in H_3, x\in H_1,\end{cases}$$

где $a_{ij}\in\Phi$, $i,j\in\{0,1,2,3\}$.

Далее для удобства слабо периодическую конфигурацию $\varphi(x), x \in G_k$ запишем в виде $\varphi = (a_{02}, a_{03}, a_{12}, a_{13}, a_{20}, a_{21}, a_{30}, a_{31})$.

Одним из основных результатов четвертого параграфа четвертой главы является следующая теорема.

Теорема 15. При $k \geq 2$ и $|A| = k$ верны следующие утверждения:

I. a) На множестве $\{J \in R^2 : J_1 \geq 0, J_2 \leq 0\}$ существуют шесть $G_k^{(4)}-$слабо периодических основных состояний, являющихся $G_k^{(2)}-$периодическими (не трансляционно-инвариантными), и они имеют следующий вид: (l,l,l,l,m,m,m,m);

b) На множестве $\{J \in R^2 : J_1 \leq 0, \frac{-J_1}{2k} \leq J_2 \leq \frac{-J_1}{2(k-1)}\}$ существуют шесть $G_k^{(4)}-$слабо периодических основных состояний, не являющихся трансляционно-инвариантными, и они имеют следующий вид: (l,m,l,m,m,l,m,l);

c) На множестве $\{J \in R^2 : J_2 \geq 0, J_1 - 2J_2 \geq 0\}$ при $k = 2$ и на множестве $\{J \in R^2 : J_1 \geq 0, J_2 = 0\}$ при $k \geq 3$ существуют шесть $G_k^{(4)}-$слабо периодических основных состояний, не являющихся трансляционно-инвариантными, и они имеют следующий вид: (l,m,n,l,l,m,n,l);

d) На множестве $\{J \in R^2 : J_1 \geq 0, J_2 = 0\}$ существуют сто пятьдесят $G_k^{(4)}-$слабо периодических основных состояний, не являющихся трансляционно-инвариантными, кроме конфигураций, указанных в $a), c)$, и они имеют следующий вид:

(l,l,l,l,m,m,m,n), (l,l,l,m,n,n,n,n), (l,l,l,l,m,m,n,m), (l,l,m,l,n,n,n,n),
(l,l,l,l,m,n,m,m), (l,m,l,l,n,n,n,n), (l,l,l,l,m,n,n,n), (l,m,m,m,n,n,n,n),
(l,l,l,l,m,m,n,n), (l,m,m,l,l,n,n,l), (l,l,m,m,n,n,n,n), (l,l,l,l,m,n,m,n),
(l,m,l,m,n,n,n,n), (l,l,l,l,m,n,n,m), (l,m,m,l,n,n,n,n), (l,l,l,m,n,n,n,m),
(l,m,m,m,l,n,n,l), (l,l,l,m,m,n,n,m), (l,l,l,m,m,n,n,n), (l,l,m,l,n,n,m,n),
(l,m,l,l,n,m,n,n), (l,m,m,m,n,n,n,l), (l,m,m,m,l,n,n,n), (l,m,m,l,n,n,n,l),
(l,m,m,l,l,n,n,n),

где $l, m, n \in \Phi$, и $l \neq m,\ l \neq n,\ m \neq n.$

II. Всякие $G_k^{(4)}-$слабо периодические основные состояния, кроме конфигураций, указанных в пункте I, являются трансляционно-инвариантными.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена определению существования слабо периодических мер Гиббса и основных состояний для моделей Изинга и Поттса, нахождению свободной энергии мер Гиббса, а также нахождению связи между трансляционно-инвариантными мерами Гиббса и граничными условиями.

Основные результаты исследования состоят в следующем:

1. Для модели Изинга на дереве Кэли доказано, что при некоторых условиях существует не менее пяти слабо-периодических предельных гиббсовских мер относительно произвольных нормальных делителей индекса два.

2. В случае нормальных делителей индекса 4 при известных условиях на параметры модели Изинга доказано существование не менее 7 слабо периодических гиббсовских мер.

3. Для модели Изинга с внешним полем на дереве Кэли доказано, что при известных условиях существует не менее двух H_k-слабо периодических (не периодических) предельных гиббсовских мер. Введено понятие (k_0)-периодических (трансляционно-инвариантных) мер Гиббса и доказано существование таких гиббсовских мер.

4. Для антиферромагнитной модели Поттса на дереве Кэли доказано, что при некоторых условиях существуют 2^q-2 слабо-периодические предельные гиббсовские меры относительно нормальных делителей индекса два.

5. Для ферромагнитной модели Поттса на дереве Кэли доказано, что при некоторых условиях существует не менее двух слабо-периодических предельных гиббсовских мер. Кроме того, для модели Поттса с внешним полем на дереве Кэли доказано, что при известных условиях существует не менее двух слабо периодических предельных гиббсовских мер.

6. Изучена зависимость ТИМГ от граничных условий (конфигураций). Построены граничные конфигурации для ТИМГ. С помощью этого метода также можно определить связь между граничными условиями (конфигурациями) и мерами Гиббса для других моделей.

7. Получена общая формула вычисления свободной энергии для моделей Изинга и Поттса, вычислены свободные энергии и энтропии для известных граничных условий. С помощью полученных результатов можно вычислить свободную энергию для других моделей статистической физики.

8. Найдены необходимое и достаточное условия (на порядок k решетки и на параметры нормального делителя индекса два и четыре), при которых существуют слабо периодические основные состояния моделей Изинга и Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли. Эти результаты можно применить для нахождения основных состояний других моделей.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.27.06.2017.FM.01.01 AT NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN, INSTITUTE OF MATHEMATICS

INSTITUTE OF MATHEMATICS

RAHMATULLAEV MUZAFFAR MUHAMMADJANOVICH

WEAKLY PERIODIC GIBBS MEASURES AND GROUND STATES FOR THE CLASSICAL MODELS OF STATISTICAL MECHANICS ON A CAYLEY TREE

01.01.01– Mathematical analysis
(Physical and mathematical sciences)

DISSERTATION ABSTRACT OF DOCTORAL DISSERTATION (DSc)
ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent – 2017

The theme of doctoral dissertation (DSc) was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2017.1.DSc/FM2

Dissertation has been prepared at the Institute of Mathematics

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website http://fti-kengash.uz/ and an the website of “ZiyoNet” Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific consultant:	**Rozikov Utkir Abdulloevich** doctor of physical and mathematical sciences, professor
Official opponents:	**Hryniv Ostap Olegovich** (Durham university, UK) doctor of physical and mathematical sciences, professor
	Rakhimov Abdugofur Abdumajidovich doctor of physical and mathematical sciences, professor
	Kudaybergenov Karimbergen Kadibergenovich doctor of physical and mathematical sciences
Leading organization:	Qarshi State University

Defense will take place «____» __________ 2017 at ____ at the meeting of Scientific council number DSc.27.06.2017.FM.01.01 at National University of Uzbekistan (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar area, University str.,4, Ph.: (99871) 227-12-24, fax: (99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Doctoral dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered № _____) (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar area, University str., 4. Ph.: (99871) 246-02-24).

Abstract of dissertation sent out on « ___ » _________ 2017.
(mailing report № __ on « ___ » ____________ 2017).

A.S.Sadullaev
Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.M.S., academician

G.I. Botirov
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees, C.F.M.S.

V.I.Chilin
Chairman of Scientific Seminar under Scientific
Council on award of scientific degrees,
D.F.M.S., professor

INTRODUCTION (abstract of DSc thesis)

The urgency and relevance of the dissertation topic. Many scientific and applied studies (conducted at the world level) are in many cases brought to the problems of the theory of phase transitions in physics, biology, statistical mechanics, and so on. The theory of phase transitions is closely related to the theory of Gibbs measures. The development of the theory of such measures important because of the complexity of the description of Gibbs measures for classical models and the insufficient formalization of verification of their existence.

The aim of the research work is study existence of weakly periodic Gibbs measures and ground states for the Ising and Potts models. Construct some class of non (weakly) periodic limiting Gibbs measures, ground states and calculate free energies for the Ising and Potts models.

The tasks of research work:

to find weakly periodic Gibbs measures for the Ising and Potts models on the Cayley tree;

to study weakly periodic Gibbs measures for the Ising model with an external field on the Cayley tree;

to construct non (weakly) periodic Gibbs measures for the Ising model;

to define the set of weakly periodic ground states for the Ising and Potts models with competing interactions ;

to study dependence between translation-invariant Gibbs measures and boundary conditions for the Potts model;

to give general formulas of free energies for the Ising and Potts models and calculate them for known boundary conditions.

The object of the research work weakly periodic Gibbs measures for the Ising and Potts models, weakly periodic ground states for the Ising and Potts models with competing interactions, free energies, $(k_0)-$translation-invariant and $(k_0)-$ periodic Gibbs measures.

Scientific novelty of the research work is as follows:

In the case of a normal subgroup of index four, for some conditions, it is proved that for the Ising model there are at least seven weakly periodic Gibbs measures;

Notions of (k_0)-translation-invariant and (k_0)- periodic Gibbs measure are introduced and the existences of such measures are proved;

General formula, for free energies for the Ising and Potts models are given, free energies corresponding to some known boundary conditions are calculated;

For the antiferromagnetic Potts model on the Cayley tree the existence of 2^q-2 weakly periodic Gibbs measures is proved for normal subgroups of index two;

Under some conditions for the ferromagnetic Potts model on the Cayley tree the existence of at least two weakly periodic Gibbs measures is proved;

For the Potts model with external field, under defined conditions, the existence of at least two weakly periodic Gibbs measures is proved;

For the Potts model dependence between translation-invariant Gibbs measures and boundary conditions is found. Boundary conditions corresponding to the translation-invariant Gibbs measures are constructed;

For the Ising model with competing interactions on the Cayley tree sufficient and necessary conditions (on the order k of lattice and on parameters of normal subgrups of index two and four), for existence four of weakly periodic ground states are found;

For arbitrary normal subgrup of finite indices sufficient and necessary conditions are given under which a configurations is ground state of the Ising model with competing interactions on Cayley tree;

For the Potts model with competing interantion sufficient and necessary conditions are obtained under which there are weakly periodic ground states.

The outline of the thesis. The dissertation is devoted to weakly periodic Gibbs measures, ground states, free energies for the Ising and Potts models. Moreover, we give dependence between translation-invariant Gibbs measures and boundary conditions for the Potts model.

In conclusion, the following results are obtained:

- For the Ising model on a Cayley tree under some conditions it is proved that there are at least five weak periodic Gibbs measures corresponding to arbitrary normal subgroup of index two.
- In case of normal subgroups of index four under some conditions on parameters of the Ising model it is shown that there are at least seven weakly periodic Gibbs measures.
- For the Ising model with an external field on a Cayley tree under some conditions it is proved that there are at least two H_k-weak periodic (non periodic) Gibbs measures. Notions of (k_0)-translation-invariant and (k_0)- periodic Gibbs measure are introduced and existence of such measures is proved;
- For the antiferromagnetic Potts model on the Cayley tree the existence of $2^q - 2$ weakly periodic Gibbs measures is proved for normal subgroups of indices two;
- For the Potts model dependence between translation-invariant Gibbs measures and boundary conditions is found. Boundary conditions corresponding to the translation-invariant Gibbs measures are constructed;
- General formula, for free energies for the Ising and Potts models are given, free energies corresponding to some known boundary conditions are calculated;
- For the Ising and Potts models with competing interactions on the Cayley tree sufficient and necessary conditions, for existence weakly periodic ground states are found;

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (Часть I; Part I)

1. М.М.Рахматуллаев, У.А.Розиков. Слабо периодические основные состояъние и мер Гиббса для модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли. // Теоретическая и математическая физика. – Москва, 2009, т.160, №3. С. 507-516. (№ 39. Impact Factor Search. IF=0.984).
2. M.M.Rahmatullaev. Desription of weak periodic ground states of Ising model with competing interactions on Cayley tree. // Applied Mathematics & Information Sciences. – USA. 2010, - 4(2). –P. 237-241. (№ 39. Impact Factor Search. IF=1.23).
3. M.M.Rahmatullaev, D. Gandolfo, U. A. Rozikov, J. Ruiz. On free energies of the Ising model on the Cayley tree. // Journal of Statistical Physics. – USA. 2013, V150, №6, –P.1201–1217. (№ 39. Impact Factor Search. IF=1.53).
4. М.М.Рахматуллаев, М.А.Расулова. Существование слабо периодических основных состояъний для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли. // Доклады Академии Наук Республики Узбекистан. – Ташкент, 2013. - № 3. С. 10-13. (01.00.00; №7).
5. М.М.Рахматуллаев. Слабо периодические меры Гиббса и основные состояъния для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли. // Теоретическая и математическая физика. – Москва, 2013, т.176, №3. С. 478-494. (№ 39. Impact Factor Search. IF=0.984).
6. М.М.Рахматуллаев. Существование слабо периодических мер Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли. // Теоретическая и математическая физика. – Москва, 2014, т.180, №3. С. 307-317. (№ 39. Impact Factor Search. IF=0.984).
7. М.М.Рахматуллаев. О новых слабо периодических гиббсовских мер модели Изинга на дереве Кэли. // Известия высших учебных заведений. Математика. // 2015, №11. С.54-63. (01.00.00; №23 Research Gate IF=0.370).
8. М.М.Рахматуллаев. О слабо периодических гиббсовских мерах модели Изинга с внешним полем на дереве Кэли. // Теоретическая и математическая физика. – Москва, 2015, т.183, №3. С. 434-440. (№ 39. Impact Factor Search. IF=0.984).
9. М.М.Рахматуллаев. Слабо периодических мер Гиббса для ферромагнитной модели Поттса на дереве Кэли. // Сибирский математический журнал. - Новосибирск, 2015, Т. 56, №. 5, С. 1163–1170. (№ 40. Research Gate IF=0.36)
10. М.М.Рахматуллаев. О слабо периодических мерах Гиббса для модели Поттса с внешним полем на дереве Кэли. // Украинский математический журнал. – Киев. 2016, Т.68, № 4, С. 529-541. (№ 40. Research Gate IF=0.36)

11.M.M.Rahmatullaev. On new weakly periodic Gibbs measures of the Ising model on the Cayley tree of order ≤ 5. Journal of Physics: Conference Series. 697, (2016), 012020, doi: 10.1088/1742-6596/697/1/012020. (№ 40. Research Gate IF=0.45)

12.М.М.Рахматуллаев. (k_0)-периодические меры Гиббса для модели Изинга на дереве Кэли. // Доклады Академии Наук Республики Узбекистан. – Ташкент, 2016. - № 3. С. 9-12. (01.00.00; №7).

13.M.M.Rahmatullaev. On Weakly Periodic Gibbs Measures of the Potts Model with a Special External Field on a Cayley Tree. // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry 2016, vol. 12, No. 4, pp. 302- 314. (№ 40. Research Gate IF=0.36)

14.У.А.Розиков, М.М.Рахматуллаев. О свободных энергиях модели Поттса на дереве Кэли. // Теоретическая и математическая физика. – Москва, 2017, т.190, №1. С. 112-123. (№ 39. Impact Factor Search. IF=0.984).

15. D. Gandolfo, M.M.Rahmatullaev, U. A. Rozikov. Boundary conditions for translation-invariant Gibbs measures of the Potts model on Cayley trees.// Journal of Statistical Physics. – USA. 2017, 167. –P.1164–1179. DOI: 10.1007/s10955-017-1771-5 (№ 39. Impact Factor Search. IF=1.78).

16.M.M.Rahmatullaev, Ising model on trees: (k_0)-non translation-invariant Gibbs measures. // Journal of Physics: Conference Series. 819 (2017) 012019 doi:10.1088/1742-6596/819/1/012019 (№ 40. Research Gate IF=0.45)

17.У.А.Розиков, М.М.Рахматуллаев. Построение граничных конфигураций трансляционно-инвариантных мер Гиббса для модели Поттса // Доклады Академии Наук Республики Узбекистан. – Ташкент, 2017. - № 3. С. . (01.00.00; №7).

II бўлим (Часть II; Part II)

18.М.М.Рахматуллаев. Неподвижные точки одной нелинейной динамической системы. // Тез. межд. научной конф. “Управление и оптимизация динамических систем – CODS-2009” Ташкент, 28-30 сентября 2009, -С. 88.

19.М.М.Рахматуллаев. Слабо периодические основные состояъния для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли порядка два. // Тез. докл. конф. «Ёш математикларнинг янги теоремалари-2009». Наманган, 2009, – С. 61-62.

20.У.А.Розиков, М.М.Рахматуллаев. О слабо периодические основные состояъния для модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями.// Тез. докл. конф. «Ёш математикларнинг янги теоремалари-2009». Наманган, 2009, – С. 62-66.

21.М.М.Рахматуллаев. Неподвижные точки одной нелинейной оператора. // Тезис докладов Рес.кон. Пос. 60-летию акад. Ш.А. Аюпов. Ташкент, 2012,-С198-199.

22.М.М.Рахматуллаев, М.А.Расулова. Изучение слабо периодических основных состояъний для модели Поттса. «Математик анализнинг долзарб муаммолари» Республиканская научная конференция, Ургенч, 2012, –с.49-51

23.М.М.Рахматуллаев. Слабо периодические меры Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли. // Тез. докл. Всероссийской конф. по матем. и мех. Томск, 2013, 2-4 октября. –с.238.

24.М.М.Рахматуллаев, М.А.Расулова. Слабо периодические основные состояъния для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли. // Тез. докл. Всероссийской конф. по матем. и мех. Томск, 2013, 2-4 октября. –с.239.

25.М.М.Рахматуллаев. Об одной нелинейной динамической системе и ее применении для описания меры Гиббса. // Тез. докл. Респ. научной конф. с участ. ученых из СНГ «Совр. проб. дифф. урав. и их прил.», Ташкент, 2013, 21-23 ноября.–с. 326-328

26.М.М.Рахматуллаев. Слабо периодические меры Гиббса для одной модели на дереве Кэли. // Тез. межд. научной конф. «Прикладной и геометрический анализ.», Ташкент, 2014, 22-25 сентября. –с. 75

27.М.М.Рахматуллаев. О слабо периодических мерах Гиббса для модели Поттса с q-состояъниями на дереве Кэли. // Республиканская научная конференция с участием зарубежных ученых “Неклассические уравнения математической физики и их приложения”, Ташкент, 2014, 23-25 октября. -с.243-244

28.М.М.Рахматуллаев. Изучение слабо периодических мер Гиббса с помощью геометрических методов одной динамической системы. // Тез. докл. Респ. научной конф. с участ. ученых из СНГ «Актуальные вопросы геометрии и её приложения», Ташкент, 2014, 27-28 октября. –с 258-260.

29.М.М.Рахматуллаев. Слабо периодические меры Гиббса для анти-ферромагнитной модели Изинга на дереве Кэли. // Тез. докл. Респ. научной конф. с участ. ученых из СНГ «Современные методы математической физики и их приложения», Ташкент, 2015, 15-17 апреля. –с 240-242.

30.М.М.Рахматуллаев. О слабо периодических мерах Гиббса для антиферромагнитной модели Поттса с внешним полем на дереве Кэли. // Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2015» Россия, 2015, 13-17 апреля.

31. М.М.Рахматуллаев. Слабо периодические меры Гиббса для антиферромагнитной модели Изинга с внешними полями на дереве Кэли. // VII Ферганской конференции «Предельные теоремы теории вероятностей и их приложения» 2015, 11-12 мая, Наманган. –с.225-228.

32.М.М.Рахматуллаев. Изучение слабо периодических мер Гиббса для ферромагнитной модели Поттса на дереве Кэли. // Рес. научной конф. с учатием зарубежных ученых «Алгебра, анализ и квантовая вероятность» 2015, 10-12 сентября, Ташкент. –с.226-228.

33.М.М.Рахматуллаев. Некоторые меры Гиббса для модели Изинга на дереве Кэли. // Рес. научной конф. «Математическая физика и родственные проблемы» Бухоро, 26-27 ноября, 2015. –с.119-121

34.М.М.Рахматуллаев. Существование k_0-периодических и k_0-трансляционно-инвариантних мер Гиббса для модели Изинга на дереве Кэли.

// Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2016» Россия, 2016, 11-15 апреля.

35.М.М.Рахматуллаев. Не единственность слабо периодических (не периодических) мер Гибба для антиферромагнитной модели Изинга на решетке Бета. // Международная конференция по алгебре, анализу и геометрии. Казань, Россия., 2016г., 26июня-2июля. –с.283-284.

36.М.М.Рахматуллаев. О (k_0)-трансляционно инвариантные мерах Гиббса для модели Изинга на дереве Кэли. // Рес Научную Конференцию «Актуальные вопросы анализа», Карши, 22-23 апреля 2016 г. –с.255-257

37.М.М.Рахматуллаев. О слабо периодических мерах Гиббса для модели Поттса со специальным внешним полем на дереве Кэли. // Рес. научной конф. с учатием зарубежных ученых «Проблемы современной топологии и её приложения» –Ташкент, 2016г., -с239-241

38.M.M.Rahmatullaev. Ising model on trees: (k_0) periodic Gibbs measures. // «37 International Conference on Quantum Probability and Related Topics» 2016, 22-26 august, Kuantan, Pahang, Malaysia.

39.U.A.Rozikov, M.M.Rahmatullaev. Gibbs measures with four valued boundary conditions of Ising model on tree. // International Conference on «Nonlinear analysis and its applications» -Samarqand, 2016, 19-21 September.

Автореферат «Ўзбекистон математика журнали» таҳририятида таҳрирдан ўтказилди (26 сентябрь 2017 йил).

Босишга рухсат этилди: 30.09.2017 йил
Бичими 60х45 $^{1}/_{8}$, «Times New Roman»
гарнитурада рақамли босма усулида босилди.
Шартли босма табоғи 3,7. Адади: 100. Буюртма: № _____.

Ўзбекистон Республикаси ИИВ Академияси,
100197, Тошкент, Интизор кўчаси, 68

«АКАДЕМИЯ НОШИРЛИК МАРКАЗИ»
Давлат унитар корхонасида чоп этилди.