ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.27.06.2017.FM.01.02 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

РАИМОВА ГУЛНОРА МИРВАЛИЕВНА

ЭЛЛИПТИК ВА ПАРАБОЛИК ТУРДАГИ ТЕНГЛАМАЛАРГА ҚЎЙИЛГАН ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАР ЕЧИМЛАРИ УЧУН ЭҲТИМОЛИЙ МОДЕЛЛАР

01.01.03 – Ҳисоблаш математикаси ва дискрет математика
01.01.05 – Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика
(физика-математика фанлари)

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ (DSc) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент шаҳри – 2017 йил

УДК 519.245
УДК 519.63

Докторлик (DSc) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата докторской (DSc) диссертации

Content of the abstract of the doctoral (DSc) dissertation

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.27.06.2017.FM.01.02 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

РАИМОВА ГУЛНОРА МИРВАЛИЕВНА

ЭЛЛИПТИК ВА ПАРАБОЛИК ТУРДАГИ ТЕНГЛАМАЛАРГА ҚЎЙИЛГАН ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАР ЕЧИМЛАРИ УЧУН ЭҲТИМОЛИЙ МОДЕЛЛАР

01.01.03 – Ҳисоблаш математикаси ва дискрет математика
01.01.05 – Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика
(физика-математика фанлари)

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ (DSc)
ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент шаҳри – 2017 йил

Фан доктори (Doctor of Science) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2017.2.DSc/FM58 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Ўзбекистон Республикаси Фанлар академияси В.И.Романовский номидаги Математика институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://ik-fizmat.nuu.uz/) ва «ZIYONET» ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий маслаҳатчилар:	**Форманов Шокир Қосимович** физика-математика фанлари доктори, академик
	Расулов Абдужаббор Саттарович физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Пресман Эрнст Львович** физика-математика фанлари доктори, профессор (Россия, ЦЭМИ РАН)
	Шадиметов Холматвай Махкамбоевич физика-математика фанлари доктори, профессор
	Ходжибаев Вали Рахимджанович физика-математика фанлари доктори, профессор
Етакчи ташкилот:	**Ал Фаробий номидаги Қозоғистон Миллий университети**

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги DSc.27.06.2017.FM.01.02 рақамли Илмий кенгашнинг 2017 йил «___»___________соат____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (___ рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 246-02-24.

Диссертация автореферати 2017 йил «____» _______________куни тарқатилди.
(2017 йил «____» ___________ даги _______ рақамли реестр баённомаси).

А.Р. Марахимов
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш раиси, т.ф.д., профессор

З.Р. Рахмонов
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.д.

М.М.Арипов
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш ҳузуридаги илмий семинар раиси, ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (докторлик диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган илмий-амалий тадқиқотлар кўпгина амалий муаммоларнинг ечими иккинчи тартибли ҳусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун қўйилган чегаравий масалалар билан таснифланиши ва бундай масалаларни сонли ечишда статистик моделлаштириш (Монте Карло) усулларини тадқиқ этиш долзарб эканлигини кўрсатмоқда. Статистик моделлаштириш – бирор объектнинг тадқиқ этилаётган таснифларини шу объектнинг эҳтимолий моделини компьютерда моделлаштириш ва катта сонлар қонуни асосида баҳолашдир. Монте Карло усулини тасодифий факторлар таъсири кузатиладиган ихтиёрий жараёнларни моделлаштиришда қўлланилиши табиий бўлиб, ушбу усулни статистик физика, турбулентлик назарияси, нурланишни кўчириш назарияси масалалар ечишга оид тадқиқотларни ривожлантириш муҳим вазифалардан бири бўлиб қолмоқда.

Мустақиллик йилларида мамлакатимизда фундаментал фанларнинг амалий татбиқига эга бўлган йўналишларга эътибор кучайтирилди. Ҳозирда статистик моделлаштириш усуллари тадбиқлари спектори жуда кенг бўлиб, нурланишни кўчириш масалалари (ядровий реакторлар; атмосфера оптикаси), газ динамикаси масалалари (Бёрд усули, коагуляция жараёнларини моделлаштириш), молиявий математика масалалари (қимматбаҳо қоғозлар ва бозор вазиятларининг бошқарувини моделлаштириш), оммавий хизмат кўрсатиш масалаларига (мураккаб ишлаб чиқариш тизимлари, алоқа тизимлари ва компьютер тармоқларини моделлаштириш) оид тадқиқотларни ривожлантириш муҳим вазифалардан бири бўлиб қолмоқда. Вазирлар Маҳкамасининг қарорида «Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика, амалий математика ва математик моделлаштириш фанларнинг устивор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш асосий вазифалар ва фаолиятлар йўналишлари» этиб белгиланди[1]. Қарор ижросини таъминлашда сонли усуллар, ҳисоблаш математикаси, эҳтимоллар назарияси ва статистик моделлаштиришни ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

Ҳозирги кунда жаҳонда статистик моделлаштириш усулларининг қўлланиш доирасини математик физиканинг турли масалалари, айниқса, чизиқсиз чегаравий масалалар соҳасини кенгайтириш мухим аҳамият касб этмоқда. Бундай чизиқсиз масалаларни сонли ечими, одатда, сезиларли қийинчиликлар билан боғлиқ. Бу борада детерминистик усуллар билан бир қаторда статистик моделлаштириш усулларини ишлаб чиқиш, ривожлантириш ҳамда қўллаш, шу жумладан, газ динамикаси, молиявий математика, биология ва бошқа соҳаларининг мунтазам равишда мураккаблашиб бораётган моделларига мос келувчи амалий масалаларни ечишда сонли натижалар олиш мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

---

[1] ЎзР Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий-тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида»ги 292-қарори.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2008 йил 15 июлдаги ПҚ-916-сон «Инновацион лойиҳалар ва технологияларни ишлаб чиқаришга татбиқ этишни рағбатлантириш борасидаги қўшимча чора-тадбирлар тўғрисида»ги, 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги Қарори ва 2017 йил 8 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича харакатлар стратегияси тўғрисида»ги фармони ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий хужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожлантиришнинг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи[2]. Монте Карло усуллари ва уларнинг амалий масалаларга тадбиқлари бўйича илмий изланишлар дунёнинг етакчи илмий марказлари ва олий таълим муассасалари, жумладан, the Centre for Advanced Computing and Emerging Technologies, the University of Leicester (Буюк Британия), the Institute for Parallel Processing of the Bulgarian Academy of Sciences (Болгария), the National Environmental Research Institute (Дания), the University of Mainz, the Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics (Германия), the University of North Carolina at Chapel Hill, The Florida State University, the CIS Department of the Brooklyn College (АҚШ), Санкт-Петербург Давлат университети, РФА СБ ҳисоблаш математикаси ва математик геофизика институти, Урал федерал университети (Россия), Қозоғистон Миллий Университети, Туркманистон Давлат университетида олиб борилмоқда.

Чегаравий масалаларни сонли ечиш учун статистик моделлаштириш усулларини ривожлантиришга оид жаҳонда олиб борилаётган тадқиқотлар натижасида қатор, жумладан, қуйидаги илмий натижалар олинган: Фредгольмнинг 2 тур интеграл тенгламаларни ечиш учун статистик моделлаштириш алгоритмларини такомиллаштирилган ва амалий тадбиқлари ўрганилган (РФА СБ ҳисоблаш математикаси ва математик геофизика институти), Монте Карло усулининг эллиптик ва параболик турдаги ҳусусий хосилали тенгламалар ечимлари учун тасодифий жараёнлар траекторияларида силжимас баҳолар қурилган (Санкт-Петербург Давлат университети), иссиқлик ўтказувчанлик масалаларини ечишда тасодифий жараёнлар ва уларнинг ҳоссалари тадқиқ этилган (University of Texas, USA), чегаравий масалалари стохастик дифференциал тенгламалар системасини

---

[2] Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий тадқиқотлар шарҳи: Journal of Approximation Theory, Applied Mathematics and Computation, Journal of Computational and Applied Mathematics http://www.journals.elsevier.com/mathematics; Calcolo, Numerical Algorithms, BIT Numerical Mathematics, Сибирский журнал вычислительной математики, Журнал вычислительной математики и математической физики, http://www.springer.com/mathematics манбалар асосида ишлаб чиқилган.

аппроксимация масалаларига келтириб ечилган (University of Leicester, Урал Давлат университети).

Дунёда бугунги кунда математик физиканинг кўп ўлчовли, чизиқсиз масалаларини ечишда бир қатор, жумладан, статистик моделлаштириш усулларини сийрак газ ҳаракатини ифодаловчи Больцманнинг интегро-дифференциал кинетик тенгламасини, чизиқсиз Ляпунов-Шмидт тенгламаларини, тўқнашиш ва ёпишиш физик жараёнларини ифодаловчи чизиқсиз тенгламаларни, динамикаси стохастик тенгламалар системаси билан ифодаланувчи қимматбаҳо қоғозлар бозори масалаларини сонли ечиш усулларини қуриш каби устивор йўналишларда илмий тадқиқот ишлари олиб борилмоқда.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Тармоқланувчи марков жараёнлари билан чизиқсиз тенгламалар орасидаги боғланишлар аввалдан маълум. Гарчи Монте-Карло усулининг қўлланилиши масалалари кўтарилмаган бўлсада, бу мавзу қуйидаги муаллифларнинг ишларида муҳокама қилинган: Ю.Л.Далецкий, Л.Т.Заплитная, А.А.Скороход, Б.А.Севостьянов. Бу йўналишда дастлабки асосий натижалар С.М.Ермаков томонидан олинган бўлиб, унинг ишларида Нейман–Улам схемасини тармоқланувчи марков жараёнлари асосидаги номаълум функция кўпҳад кўринишида қатнашган чизиқсиз интеграл тенгламаларга бевосита умумлаштириш амалга оширилган. Ушбу назариянинг келгуси ривожи С.М.Ермаков, Г.А.Михайлов, В.В.Некруткин, А.С.Расулов, Р.Н.Макаров, А.А.Сипин, М.Т.Бакоев, А.З.Веселовская, П.Г.Скворцов, Н.А.Симонов ва бошқалар ишларида амалга оширилган.

Тармоқланувчи жараёнларни моделлаштириш ёрдамида чизиқсиз чегаравий масалаларни ечиш учун, ҳозирда, Монте-Карло усулининг иккита амалий схемалари кенг ривожланган. Улардан биринчиси – тўр тугунлари бўйича тармоқланиб тасодифий ҳаракат, иккинчиси – сфералар бўйича тармоқланган тасодифий ҳаракат. Иккинчи тартибли чизиқсиз тенгламаларга қўйилган чегаравий масалаларни ечиш учун Монте-Карло усули алгоритмларини қуриш ва асослаш билан С.М.Ермаков, Г.А.Михайлов, А.С.Расулов, А.А.Сипин, В.В.Некруткин, А.З.Веселовская, М.Т.Бакоев шуғулланишган.

Тенгламалар системасини ечишга мўлжалланган Монте-Карло усулининг вектор алгоритмлари Г.А.Михайлов, А.В.Войтишек, В.В.Некруткин, С.В.Рогазинский, И.Н.Медведев ишларида кенг ўрганилган. Чегаравий масалаларни стохастик дифференциал тенгламалар системасини ечишга келтириш ва эйлер аппроксимациялари ёрдамида ечиш усулларини тадқиқ этиш билан Г.Н.Мильштейн, М. В. Третьяков ва Я.И.Белопольская шуғулланишган.

Диссертация мавзусининг диссертация бажарилаётган илмий тадқиқот муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Математика институтининг Ф.1.1.1 «Тасодифий жараёнларнинг стохастик ва статистик таҳлили ва тадбиқлари» (2003-2007йй.), Ф005-Ф008 «Тасодифий жараёнларнинг асимптотик таҳлили ва унинг қарорлар қабул қилиш назариясига тадбиқлари» (2007-2011йй.), Ф4-ФА-Ф009 «Эҳтимоллар тақсимоти учун аппроксимация масалалари ва уларнинг математик статистикада қўлланилиши» (2012-2016 йй.) мавзуларидаги илмий тадқиқот лойиҳалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади иккинчи тартибли ҳусусий ҳосилали эллиптик ва параболик турдаги чизиқсиз тенгламалар ва чизиқли системалар учун қўйилган чегаравий масалалар ечимлари учун эҳтимолий моделлар қуриш ва уларни асослашдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

кўрилаётган масалаларнинг ечимларининг марков занжирлари траекториясида аниқланган тасодифий миқдорларнинг математик кутилмаси шаклидаги эҳтимолий кўринишларини аниқлаш;

чизиқсиз эллиптик ва параболик турдаги тенгламалар ва системаларга қўйилган чегаравий масалаларнинг ечимлари учун дисперсияси чегараланган силжимас ва кам силжиган баҳолар қуриш;

эҳтимолий моделларга асосланган алгоритмлари учун зарур бўлган тақсимотларни моделлаштириш усулларини аниқлаш;

модел масалалар учун ҳисоблаш тажрибаларини ўтказиш ва уларнинг натижаларини таҳлил этиш;

қурилган ҳисоблаш усуллари асосида самарали алгоритмлар қуриш ва амалий компьютер дастурлар мажмуасини яратиш.

Тадқиқотнинг объекти чизиқсиз эллиптик ва параболик турдаги тенгламаларга қўйилган чегаравий масалалар, чизиқли эллиптик ва параболик турдаги тенгламалар системаларига қўйилган чегаравий масалалардан иборат.

Тадқиқотнинг предмети чизиқсиз эллиптик ва параболик турдаги тенгламалар ечимларининг эҳтимолий қўринишлари, траекторияларида ўрганилаётган масалалар ечимларининг силжимас баҳолари қурилаётган марков занжирларининг ҳоссалари, ечимларга қурилган баҳоларнинг силжимаслигини исботлашда мартингаллар назариясининг қўлланилиши, чизиқсиз чегаравий масалаларни ечишнинг математик моделлар, статистик алгортимлар ва дастурий воситалардан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида Монте-Карло усуллари назарияси, эҳтимоллар назарияси, математик статистика, ҳисоблаш математикаси, математик ва функционал анализ, дифференциал тенгламалар назарияси, интеграл тенгламалар назарияси усулларидан фойдаланилган. Чегаравий масалаларнинг ечимларининг статистик баҳолари ва бу баҳолар кўрилаётган тасодифий ҳаракат траекторияларининг ҳусусиятларини тадқиқ этишда мартингаллар назарияси қўлланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

чексиз даражали қатор кўринишидаги чизиқсизликка эга бўлган эллиптик тенгламалар учун қўйилган биринчи ва иккинчи тур чегаравий масалалар ечимлари учун махсус эҳтимолий кўринишлар ҳосил қилинган ва улар асосида масалалар ечимларининг берилган нуқтадаги қиймати учун силжимас баҳолар қурилган;

чизиқсиз эллиптик тенгламаларга қўйилган чегаравий масалалар ечимлари учун эҳтимолий моделларга асосланган ҳисоблаш усуллари қурилган;

чексиз даражали қатор кўринишидаги чизиқсизликка эга бўлган ўзгармас ва ўзгарувчи коэффициентли параболик тенгламалар учун қўйилган чегаравий масалалар ечимлари учун махсус эҳтимолий кўринишлар ҳосил қилинган ва улар асосида масалалар ечимларининг берилган нуқтадаги қиймати учун силжимас баҳолар олинган;

чизиқсиз параболик тенгламаларга қўйилган чегаравий масалалар ечимлари учун эҳтимолий моделларга асосланган ҳисоблаш усуллари ишлаб чиқилган;

эллиптик тенгламалар системаси учун қўйилган чегаравий масала ечими учун махсус эҳтимолий кўриниш ҳосил қилинган ва унинг асосида сфералар бўйича тасодифий жараён траекториясида масала ечимининг берилган нуқтадаги қиймати учун силжимас баҳолар қурилган, сонли усуллар яратилган;

параболик тенгламалар системасига қўйилган чегаравий масала ечими учун махсус эҳтимолий кўриниш ҳосил қилинган бўлиб, ушбу кўриниш асосида сфероидлар бўйича тасодифий жараён траекториясида масала ечимининг берилган нуқтадаги қиймати учун силжимас баҳолар қурилган ва уларга асосланган сонли ечиш схемалари ишлаб чиқилган.

Тадқиқотнинг амалий натижаси. Эллиптик ва параболик турдаги чизиқсиз тенглама ва чизиқли системалар ечимлари учун янги статистик моделлаштириш алгоритмлари ишлаб чиқилган ва ушбу ҳисоблаш усулларининг самарали алгортимларига асосланган дастурлар мажмуаси яратилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги эҳтимоллар назарияси, статистик моделлаштириш, ҳисоблаш математикаси ва функционал анализ усулларидан фойдаланилган ҳолда математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги билан асосланган. Барча хулосалар компьютер ёрдамида ҳисоблаш тажрибаларининг натижалари билан тасдиқланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти олинган натижалар чизиқсиз тенгламалар, шу жумладан, ноъмалум функцияга нисбатан экспоненциал, айрим тригонометрик ва гиперболик функциялар кўринишидаги чизиқсизликларга эга бўлган тенгламаларни тадқиқ этиш ва чегаравий масалаларни сонли ечимларини олиш билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти тадқиқот натижалари эллиптик ва параболик турдаги чизиқсиз тенгламалар ва чизиқли системалари учун қўйилган чегаравий масалалар орқали ифодаланувчи физик жараёнларнинг тадқиқотига асос бўлиши ва масалаларни сонли ечиш имконияти билан белгиланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Эллиптик ва параболик тенгламаларга қўйилган чегаравий масалалар ечимлари учун эҳтимолий моделлар қуриш бўйича олинган илмий натижалар қуйидаги йўналишларда амалиётга жорий қилинган:

параболик тенгламалар системаси учун чегаравий масала ечими учун қурилган статистик моделлаштириш баҳолари DFNI-102/8 рақамли грант лойиҳасида интеграл тенгламалар системасини ечишда қўлланилган (Болгария Фанлар академиясининг ахборот ва коммуникацион технологиялари институтининг 2017 йил 14 августдаги маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланиши интеграл тенгламалар системасини ечишда қурилган статистик баҳоларнинг дисперсиясини камайтириш орқали баҳоларнинг статистик хусусиятларини яхшилаш имконини берган;

чизиқсиз эллиптик ва параболик тенгламалар учун олинган натижалар «Monte Carlo Methods in Biochemical Electrostatics», «Stochastic Estimation of Material Properties» илмий тадқиқот лойиҳаларида биохимик электростатика хамда материалларнинг айрим хусусиятларини сонли баҳолаш масалаларини ечишда қўлланилган (National Institute for Standards and Technology, USA, 2017 йил 17 июлдаги маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланиши мазкур масалаларнинг ечимлари учун статистик моделлаштириш баҳоларини қуриш имконини берган;

параболик тенгламаларга қўйилган чегаравий масалалар учун олинган натижалар «Monte Carlo Methods and Big Data Applications» илмий тадқиқот лойиҳасида чизиқли ва чизиқсиз чегаравий масалаларнинг ечимлари учун силжимас баҳолар олишда фойдаланилган (Department of Computer Science, Old Dominion University, Virginia, USA, 2017 йил 16 октябрдаги 16/10-сон маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланиши чизиқли ва чизиқсиз чегаравий масалаларнинг сонли ечимларини олиш ва баҳолаш хатолигини камайтириш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 22 та илмий-амалий анжуманларда, жумладан 14 та халқаро ва 8 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилиниши. Диссертация мавзуси бўйича жами 41 та илмий иш чоп этилган, шулардан, битта монография ва Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 15 та мақола, жумладан, 6 таси хорижий ва 9 таси республика журналларида нашр эттирилган.

Диссертациянинг ҳажми ва тузилиши. Диссертация кириш қисми, тўртта боб, хулоса, фойдаланилган адабиётлар рўйхати ва иловадан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 200 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устивор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **«Яримчизиқли эллиптик тенгламаларга қўйилган чегаравий масалалар ечимлари учун эҳтимолий моделлар»** деб номланувчи биринчи бобида яримчизиқли Гельмгольц тенгламасига қўйилган чегаравий масалалар ечимлари учун статистик моделлаштириш усуллари ўрганилган.

Ушбу бобнинг 1.1 параграфида асосий натижаларни баён қилишда зарур бўлган баъзи маълумотлар, шу жумладан, чизиқли Гельмгольц тенгламаси учун Дирихле масаларини ечими учун эҳтимолий баҳолар олишнинг умумий схемаси, сфералар бўйича тасодифий ҳаракатланиш жараёнининг таърифи ва унинг ҳусусиятлари келтирилган.

1.2 параграфда яримчизиқли Гельмгольц тенгламаси учун Дирихле масаласи кўрилган. $D\subset R^3$ - чегараланган соҳа ва Γ унинг чегараси бўлсин. $f(x,u)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x)u^n(x)$ ва қатор коэффициентлари $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\bar{a}_n}=0$ шартни қаноатлантирсин, бунда $\sup\limits_{x\in D}|a_n(x)|\le\bar{a}_n$. Қуйидаги Дирихле масаласини кўрамиз:

$$-\Delta u(x)+cu(x)=f(x,u),\quad x\in D,\quad u|_{\Gamma}=\varphi. \qquad (1)$$

$\varphi(x)\in C(\bar{\Gamma})$, $a_n(x)\in C(\bar{D})$ $(n=0,1,2,\ldots)$ функциялар ва $c>0$ коэффициент шундай бўлсинки, (1) масаланинг ягона узлуксиз ечими мавжуд бўлсин. Қуйидаги шарт бажарилсин $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\bar{a}_n n<\infty.$ Грин функцияси ёрдамида $u(x)$ функция учун махсус интеграл тенглама ҳосил қилинган:

$$u(x)=q\int\limits_{S_R(x)}u(y)d\omega+(1-q)\int\limits_{K_R(x)}p(x,y)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n(y)}{c}u^n(y)dy. \qquad (2)$$

бунда $R(x)=\min\limits_{y\in\Gamma}|x-y|$, K_R - маркази x нуқтада бўлган R радиусли шар, S_R - унга мос келувчи сфера, $q=R\sqrt{c}/\mathrm{sh}(R\sqrt{c})$, ω- S_R сфера сиртидаги текис тақсимот,

$$p(x,y)=\frac{\mathrm{sh}[(R-|x-y|)\sqrt{c}]}{4\pi|x-y|(\mathrm{sh}(R\sqrt{c})-R\sqrt{c})}$$

x нуқтадан y нуқтага ўтиш зичлиги $(x,y\in K_R)$.

Теорема 1.2 да (2) интеграл тенглама учун кетма-кет яқинлашишлар усули яқинлашишини таъминловчи шартлар аниқланган. (2) қўриниш асосида D фазода $\{Z_n\}$ тармоқланувчи тасодифий жараёни аниқланган.

Жараён учун $P(\mathrm{w}, B)$ ўтиш функцияси аниқланган ва тармоқланувчи марков занжирини моделлаштириш усули берилган. Қуйидаги лемма исботланган.

Лемма 1.1. *Тасодифий тармоқланувчи* $\{Z_n\}$ *жараён бир эҳтимоллик билан ёки* D *соҳада тугалланилади ёки* $Z=(x^1,n^1;x^2,n^2;\ldots;x^k,n^k)$ *нуқтавий тақсимотга яқинлашади, бунда* $x^i \in \Gamma$, $i=1,2,\ldots k$.

Юқорида аниқланган жараён траекториясида рекуррент аниқланган баҳо қурилган: $\zeta_0(x)=u(x)$, $\zeta_k(x)=\Psi(\zeta_{k-1}(x))$,

$$\Psi(\zeta(x))=\begin{cases}\zeta(y_1), & \textit{эхтимоллиги } \ q(x);\\ W_n(y_2)\prod\limits_{i=1}^{n}\zeta^{(i)}(y_2), & \textit{эхтимоллиги } \ (1-q(x))\pi_n, \quad n\neq 0\,;\\ W_0(y_2), & \textit{эхтимоллиги } (1-q(x))\pi_0.\end{cases}$$

Бунда $\zeta^{(i)}(y)$ - $\zeta(y)$ тасодифий миқдорнинг боғлиқсиз ҳолда моделлаштирилган қийматлари,

$$W_n(y)=\frac{M\,a_n(y)}{c\bar{a}_n\alpha}, \quad W_0(y)=\frac{a_0(y)}{c\pi_0}.$$

$\Re_k-$ $\{\omega_i\}_{i=0}^{k-1}, \left\{\alpha_i^0\right\}_{i=0}^{k-1}, \left\{\alpha_i^1\right\}_{i=0}^{k-1}, \left\{\alpha_i^2\right\}_{i=0}^{k-1}$ кетма-кетликлар асосида қўрилган σ-алгебра бўлсин. Қуйидаги теорема исботганган.

Теорема 1.3. $\{\zeta_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ *кетма-кетлик* $\{\Re_k\}_{k=0}^{\infty}$ *га нисбатан мартингал ташкил этади. Агар* $M<c$ *бўлса, у ҳолда* $\zeta_k(x,t)$- *текис интегралланувчи мартингал бўлади.*

Γ_ε чегаранинг ички ε- атрофи бўлсин, N_1 жараённинг соҳа ичида узилиш моменти, N_ε биринчи бор барча зарраларнинг Γ_ε соҳага тушиш моменти бўлсин. У ҳолда $N=\min\{N_1,N_\varepsilon\}$ - жараённинг тўхташ моменти.

Теорема 1.4. *Агар* $M<c$ *бўлса,у ҳолда* $\zeta_N(x)$ - $u(x)$ *учун чегаралаган дисперсияли силжимас баҳо бўлади.*

1.3 параграфда яримчизиқли Гельмгольц тенгламаси учун Нейман масаласи ечимига эҳтимолий модел қурилган. $D\subset R^3$ - чегараланган қаварик соҳа ва G - унинг чегараси бўлсин. $f(x,u)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n(x)u^n(x)$, $b_n(x)\in C(\bar{D})$ $(n=0,1,2,\ldots)$ ва қатор коэффициентлари $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\bar{b}_n}=0$ шартни қаноатлантирсин, бунда $\sup\limits_{x\in D}\left|b_n(x)\right|\le\bar{b}_n$, функциялар $\varphi(x)\in C(G)$, $a(x)\in C(\bar{D})$, $a(x)>0$, $n=n_x$ - G сатҳга x нуқтада ўтказилган ташқи нормал. Қуйидаги масалани қўрамиз:

$$-\Delta u(x)+a(x)u(x)=\sum_{i=0}^{\infty}b_i(x)u^i(x), x\in D, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_G=\varphi(x), \qquad (3)$$

Фараз қиламиз $\varphi(x), b_i(x), a(x)$ функциялар шундайки, (3) масаланинг ягона узлуксиз $u(x) \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ ечими мавжуд ва $M = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{b}_k k < \infty$ бўлсин. Грин формуласи ва ўрта қиймат ҳақидаги теоремадан фойдаланган ҳолда $u(x)$ функция қийматини унинг D соҳа бўйича ва G соҳа чегараси бўйича олинган интеграллари орқали ифодаловчи махсус интеграл тенглама ҳосил қилинган:

$$u(x) = \frac{1+I_G(x)}{\sigma_m} \int_D \frac{k_2(r)}{r^{m-1}} \left[\left[\frac{rf(y,u(y))}{c^2 r + c(m-3)} + \left(1 - \frac{a(y)r}{c^2 r + c(m-3)} \right) u(y) \right] dy + \right.$$

$$\left. + \int_G k_1(r) \frac{Cos\varphi_{xy}}{r^{m-1}} u(y) d_y S + \int_G \frac{\exp(-cr)}{r^{m-2}(m-2)} \varphi(y) d_y S \right]. \qquad (4)$$

Бунда

$$k_1(r) = \left(1 + \frac{cr}{m-2}\right) \exp(-cr),\ k_2(r) = \frac{c^2 r + c(m-3)}{(m-2)} \exp(-cr),\ Cos\varphi_{xy} = (y-x, n_y)/r,$$

$I_G(x)$ - G .чегара индикатори. Оҳирги ифодани қуйидагича ёзиб оламиз:

$$u(x) = \int_{\bar{D}} p(x,y) \left\{ (1-g(x,y))u(y) + g(x,y) \frac{f(y,u(y))}{a(y)} \right\} d\mu(y) + F(x). \qquad (5)$$

Бунда

$$p(x,y) = \frac{1+I_G(x)}{\sigma_m} \begin{cases} k_1(r) \dfrac{\cos\varphi_{xy}}{r^{m-1}}, & y \in G; \\ \dfrac{k_2(r)}{r^{m-1}}, & y \in D. \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} 0, & y \in G; \\ \dfrac{a(y)r}{c^2 r + c(m-3)}, & y \in D. \end{cases}$$

$$F(x) = \frac{1+I_G(x)}{\sigma_m} \int_G \frac{\exp(-cr)}{r^{m-2}(m-2)} \varphi(y) d_y S.$$

μ - $\bar{D}$ борель қисм тўпламларининг σ - алгебрасида $\mu(A) = \lambda(A) + S(A \cap G)$ тенглик билан аниқланган ўлчов, λ - R^m даги Лебег ўлчови, S - сатҳ майдони.

Теорема 1.5 да (5) чизиқсиз интеграл тенглама учун кетма-кет яқинлашишлар усули яқинлашишини таъминловчи шартлар аниқланган. (5) формулага мувофиқ $\bar{D}$ соҳада тармоқланувчи тасодифий жараён аниқланган. $Z_0 = (x,1)$, Z_1, Z_2, ... , Z_n, ... – тармоқланувчи жараён траекторияси бўлсин, бунда $Z_i = (x_i^1, n_i^1; x_i^2, n_i^2; \ldots; x_i^{l_i}, n_i^{l_i})$ - i моментдаги нуқтавий тақсимот.

Лемма 1.2. *Тасодифий тармоқланувчи* Z_n *жараён бир эҳтимоллик билан* $\bar{D}$ *соҳада тугалланади.*

$\{\xi_k(x)\}$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлигини реккурент формула орқали аниқлаймиз: $\xi_0(x) = u(x)$, $\xi_k(x) = \Psi(\xi_{k-1}(x))$,

$$\Psi(\xi(x)) = \begin{cases} \xi(y), & \text{эхтимоллиги } 1-g(x,y); \\ W_n(y)\prod\limits_{i=1}^{n}\xi^{(i)}(y), & \text{эхтимоллиги } \pi_n g(x,y); \\ \dfrac{1}{\pi_0}\left(\dfrac{b_0(y)}{a(y)} + \dfrac{\tilde{F}(y)}{g(x,y_2)(1-k_1(\rho))}\right), & \text{эхтимоллиги } \pi_0 g(x,y). \end{cases}$$

Бунда y - тасодифий нуқта фиксирланган x да $p(x,z)$ тақсимот зичлигига эга; $\rho = \rho(x,\omega)$; $\xi^{(i)}(y)$ - $\xi(y)$ тасодифий миқдорнинг боғлиқсиз ҳолда моделлаштирилган қийматлари, $\tilde{F}(x)$ - $F(x)$ интегралнинг силжимас баҳоси, $W_n(y) = \dfrac{b_n(y)}{\bar{b}_n}\dfrac{M}{\alpha a(y)}$.

$\Im_n$ - жараённинг n – моментигача бўлган қисми асосида ҳосил қилинган σ алгебра ва N - жараённинг тўхташ моменти бўлсин. Лемма 1.2 га кўра бир эҳтимоллик билан $N < \infty$.

Теорема 1.6. *a)* $\{\xi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ *кетма-кетлик* $\{\Im_k\}_{k=0}^{\infty}$ *га нисбатан мартингал ташкил этади. Агар* $M < a$ *бўлса,* $\xi_k(x)$ *- текис интегралланувчи мартингал бўлади. b)* $M < a$ *бўлсин,у ҳолда* $\xi_N(x)$ *-* $u(x)$ *учун чегараланган дисперсияли силжимас баҳо бўлади.*

(3) масаланинг $m = 3$ ва $a(x) = c^2$ ҳусусий ҳолда кўриб чиқамиз. Бу ҳолда $k_2(r) = c^2 r\exp(-cr)$ ва (4) ифодадаги иккинчи интеграл нолга тенг:

$$u(x) = \frac{1+I_G(x)}{\sigma_3}\left[\int\limits_D \frac{k_2(r)}{r^2}\frac{f(y,u(y))}{c^2}dy + \int\limits_G k_1(r)\frac{Cos\varphi_{xy}}{r^2}u(y)d_yS + \int\limits_G \frac{\exp(-cr)}{r}\varphi(y)d_yS\right].$$

Эҳтимолий кўриниш (5) дан фарқли бўлиб, у қуйидаги кўринишга эга:

$$u(x) = \int\limits_{\bar{D}} p(x,y)\Phi(u(y))d\mu(y) + F(x), \quad \Phi(u) = \begin{cases} u(y), & y \in G; \\ \dfrac{f(y,u(y))}{c^2}, & y \in D. \end{cases}$$

$\{\eta_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлигини қуйидагича аниқлаймиз: $\eta_0(x) = u(x)$, $\eta_k(x) = \Theta(\eta_{k-1}(x))$,

$$\Theta(\eta(x)) = \begin{cases} \eta(y), & 1\ \text{хол}; \\ W_n(y)\prod\limits_{i=1}^{n}\eta^{(i)}(y), & 2\ \text{хол}; \\ \dfrac{1}{\pi_0}\left(\dfrac{b_0(y)}{c^2} + \dfrac{\tilde{F}(y)}{(1-k_1(\rho))}\right), & 3\ \text{хол}. \end{cases}$$

1 ҳол. $k_1(\rho)$ эҳтимоллик билан заррача $x \to y = y_1 \in G$ ва ҳаракатини давом эттирди. **2 ҳол.** $\pi_n\,(1-k_1(\rho))$ эҳтимоллик билан заррача $x \to y = y_2 \in D$ ва $n \neq 0$ тага бўлинди. **3 ҳол.** $\pi_0\,(1-k_1(\rho))$ эҳтимоллик билан заррача $x \to y = y_2 \in D$ ва ютилди. Бунда $\eta^{(i)}(y)$- $\eta(y)$ тасодифий миқдорнинг боғлиқсиз ҳолда моделлаштирилган қийматлари, $W_n(y) = \dfrac{b_n(y)}{\bar{b}_n} \dfrac{M}{\alpha\, c^2}$.

Теорема 1.7. *a)* $\{\eta_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ *кетма-кетлик* $\{\Im_k\}_{k=0}^{\infty}$ *га нисбатан мартингал ташкил этади. Агар* $M < c^2$ *бўлса,* $\eta_k(x)$ *текис интегралланувчи мартингал бўлади. b)* $M < c^2$ *бўлсин, у ҳолда* $\eta_N(x)$ *баҳо* $u(x)$ *функция учун силжимас баҳо бўлади ва унинг дисперсияси чегаралангандир.*

Диссертациянинг **«Яримчизиқли параболик тенгламаларга қўйилган чегаравий масалалар ечимлари учун эҳтимолий моделлар»** деб номланувчи иккинчи боби мазкур масалалар ечимлари учун статистик моделлаштириш усулларни ишлаб чиқиш ва асослашга бағишланган.

2.1 параграфда қуйидаги масала кўрилган. $D \subset R^m$ чегараланган соҳа ва унинг чегараси ∂D, $\Omega = D \times [0,T]$, $T > 0$. Функциялар $y_0(x) \in C(\bar{D})$, $y(x,t) \in C(\partial D \times [0,T])$, $a_n(x,t) \in C(\bar{\Omega})$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ ва коэффициентлар $c > 0$, $a > 0$. $f(x,t,u) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x,t) u^n(x,t),$ қатор коэффициентлари $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\bar{a}_n} = 0$ шартни қаноатлантиради, бунда $\sup\limits_{(x,t)\in\Omega} \left|a_n(x,t)\right| \le \bar{a}_n$. Қуйидаги параболик тенглама учун бошланғич чегаравий масалари кўрамиз:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - a\Delta u(x,t) + cu(x,t) = f(x,t,u), \quad (x,t) \in \Omega, \tag{6}$$

Бошланғич ва чегаравий шартлар:

$$\begin{cases} u(x,t) = y(x,t), & x \in \partial D,\, t \in \left[0,T\right], \\ u(x,0) = y_0(x), & x \in D. \end{cases} \tag{7}$$

Фараз қиламиз $a_n(x,t)$, $(n = 0,1,2,\ldots)$, $y_0(x)$, $y(x,t)$ функциялар ва a, c коэффициентлар шундайки, яримчизиқсиз масаланинг ягона узлуксиз ечими мавжуд ва $M = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n n < \infty.$ бўлсин. $Z(x,t;y,\tau)$ - иссиқлиқ ўтказувчанлик тенгламасининг фундаментал ечими бўлсин. Соҳалар оиласи $Q_r(x,t)$ $r > 0$ параметр ва $(x,t) \in R^{m+1}$ нуқтага боғлиқ:

$$Q_r(x,t) = \left\{(y,\tau) : Z(x,t;y,\tau) > (4\pi ar)^{-m/2}, \tau < t\right\}.$$

Лемма 2.1. $u(x,t)$ *функция* $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - a\Delta u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t)\in\Omega$ *тенгламани қаноатлартирсин. У ҳолда ўртача қиймат ҳақидаги қуйидагича муносабат ўринли бўлади:*

$$u(x,t) = a \iint\limits_{\partial Q_r(x,t)} \left(1-\frac{t-\tau}{r}\right)\left(-\frac{\partial Z(x,t;y,\tau)}{\partial n_y}\right) u(y,\tau)ds d\tau +$$

$$+\frac{1}{r}\iint\limits_{Q_r(x,t)} Z_r(x,t;y,\tau)u(y,\tau)dyd\tau + F_r(x,t),$$

бунда $F_r(x,t) = \frac{1}{r}\iint\limits_{Q_r(x,t)} (r-(t-\tau))Z_r(x,t;y,\tau)f(y,\tau)dyd\tau, \; Z_r = Z-(4\pi ar)^{-m/2}$,

ds - $\partial B(x, R(t-\tau))$ *сфера сирти элементи.*

$r = r(x,t) = \min\left\{\frac{eR^2(x)}{2ma}, t, \frac{1}{c}\right\}$ бўлсин. У ҳолда $\overline{Q_r(x,t)} \subset \Omega$ ва фиксирланган (x,t) ларда қуйидаги функциялар

$$p_1(x,t;y,\tau) = \frac{\left(1-\frac{t-\tau}{r}\right)a}{1-q_m}\left(-\frac{\partial Z(x,t;y,\tau)}{\partial n_y}\right) I_{\partial Q_r(x,t)}(y,\tau),$$

$$p_2(x,t;y,\tau) = \frac{\left(1-\left(r-(t-\tau)\right)c\right)Z_r(x,t;y,\tau)}{rq_m\left(1-rq_{1m}c\right)} I_{Q_r(x,t)}(y,\tau),$$

$$p_3(x,t;y,\tau) = \frac{Z_r(x,t;y,\tau)}{rq_m} I_{Q_r(x,t)}(y,\tau)$$

$\bar{Q}_r(x,t)$да ўтиш эҳтимолликларининг зичлиги бўлади. Бунда $q_{1m} = 1-\frac{1}{2}\left(\frac{m+2}{m+4}\right)^{1+m/2}$. Қуйидаги белгилашлар киритамиз: $\alpha_1 = 1-q_m$, $\alpha_2 = q_m\left(1-rcq_{1m}\right)$, $\alpha_3 = rcq_m q_{1m}$. Шуни таъкидлаш лозимки, $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 1$.

Теорема 2.1. *(2.1)-(2.2) масаланинг ечими учун қуйидаги эҳтимолий кўриниш ўринли:*

$$u(x,t) = \alpha_1 Eu(y_1,\tau_1) + \alpha_2 Eu(y_2,\tau_2) +$$

$$+\alpha_3 E\left(1-v^{2/m}\exp\left(-\frac{2\xi_1}{m+2}\right)\right)\frac{f(y_3,\tau_3,u(y_3,\tau_3))}{cq_{1m}}, \qquad (8)$$

бунда (y_i,τ_i) - $Q_r(x,t)$ *шароиднинг фиксирланган* (x,t) *нуқтада* $p_i(x,t;y,\tau)$ $(i=\overline{1,3})$ *ўтиш тақсимоти зичлигига асосан тақсимларган нуқтаси,* υ- $(2,2/m)$ *параметрли бета тақсимотга эга ва* ξ_1 - $(m/2,1)$ *параметрли гамма тақсимотга эга тасодифий миқдорлар.*

$C(\bar{\Omega})$ да аниқланган функцияларга таъсир қилувчи $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ ва $\mathfrak{R}_3$, операторларни $\mathfrak{R}_i u(x,t) = \iint\limits_{\bar{\Omega}} p_i(x,t;y,\tau)u(y,\tau)d\mu, \quad (x,t)\in\bar{\Omega}, \quad (i=\overline{1,3}).$ каби аниқлаймиз. Бунда μ - ўлчов $\bar{\Omega}$ тўпламнинг борел кисм тўпламлари σ-алгебрсида $\mu(A)=\lambda(A)+S(A\cap\partial\Omega)$ тенглик билан аниқланган, λ - R^m даги Лебег ўлчови, S- сатҳ юзаси. Қуйидаги F чизиқсиз интеграл операторни кўрайлик:

$$\mathbf{F}u(x,t)=\alpha_1\mathfrak{R}_1 u(x,t)+\alpha_2\mathfrak{R}_2 u(x,t)+\alpha_3/(cq_{1m})\sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{R}_3\left(a_n(x,t)u^n(x,t)\right).$$

Теорема 2.2 да $u(x,t)=\mathbf{F}u(x,t)$ интеграл тенглама учун кетма-кет яқинлашишлар усулини яқинлашишини таъминловчи шартлар келтирилган. (8) кўринишга мувофиқ ҳолда Ω фазода тасодифий тармоқланувчи жараён ва унинг ўтиш функцияси $P((x,t,1),B)$ аниқланган, жараён траекториясини моделлаштириш усули берилган. $Z_0=(x,t,1),Z_1,Z_2,\ldots,Z_n,\ldots$ тармоқланувчи жараён траекторияси бўлсин.

Лемма 2.2. $\{Z_n\}$ *тасодифий тармоқланувчи жараён бир эҳтимоллик билан ёки* Ω *соҳа ичида тугалланади ёки* $T=(x^1,t^1,n^1;x^2,t^2,n^2;\ldots;x^k,t^k,n^k)$, $(x^i,t^i)\in\partial\Omega$, $i=\overline{1,k}$ *нуқтавий тақсимотга яқинлашади.*

Тармоқланувчи тасодифий жараён траекториясида $\{\zeta_k(x,t)\}_{k=0}^{\infty}$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлигини рекуррент формула ёрдамида аниқлаймиз: $\zeta_0(x,t)=u(x,t)$, $\zeta_k(x,t)=\Psi(\zeta_{k-1}(x,t))$,

$$\Psi(\zeta(x,t))=\begin{cases}\zeta(y_1,\tau_1), & \text{эхтимоллиги } \alpha_1(x,t);\\ \zeta(y_2,\tau_2), & \text{эхтимоллиги } \alpha_2(x,t);\\ W_n(y_3,\tau_3)\prod\limits_{i=1}^{n}\zeta^{(i)}(y_3,\tau_3), & \text{эхтимоллиги } \pi_n\alpha_3(x,t)\,(n\neq 0);\\ W_0(y_3,\tau_3)\dfrac{a_0(y_3,\tau_3)}{\pi_0}, & \text{эхтимоллиги } \pi_0\alpha_3(x,t).\end{cases}$$

Бунда (y_i,τ_i)- фиксирланган (x,t) учун $p_i(x,t;y,\tau)$ ўтиш эҳтимолликлари зичлиги асосида тақсимланган тасодифий нуқта $(i=1,2,3)$, $\zeta^{(i)}(y,\tau)$- $\zeta(y,\tau)$ тасодифий миқдорнинг боғлиқсиз ҳолда моделлаштирилган қийматлари. Кўпайтувчилар қуйидагича аниқланган:

$$W(y,\tau)=\frac{1}{cq_{1m}}\left(1-v^{2/m}\exp\left(-\frac{2\xi}{m+2}\right)\right),$$

$$W_n(y,\tau)=W(y,\tau)\frac{a_n(y,\tau)}{\bar{a}_n}\frac{M}{\alpha},\quad W_0(y,\tau)=W(y,\tau)\frac{a_0(y,\tau)}{\pi_0},$$

бунда ξ- $(m/2,1)$ параметрли гамма тақсимотга ва v - $(2,2/m)$ параметрли бета тақсимотга эга тасодифий миқдорлар.

$\Re_k$ траектория координаталарини аниқловчи $\{\xi_n\}_{n=0}^k$, $\{\omega_n\}_{n=0}^k$, $\{\xi'_n\}_{n=0}^k$, $\{v'_n\}_{n=0}^k$, $\{\xi''_n\}_{n=0}^k, \{v''_n\}_{n=0}^k$ тасодифий миқдорлар асосида ҳосил қилинган σ алгебра бўлсин. Қуйидаги тасдиқ ўринли.

Теорема 2.3. *$\{\zeta_k(x,t)\}_{k=0}^\infty$ кетма-кетлик $\{\Re_k\}_{k=0}^\infty$ га нисбатан мартингал ташкил этади. Агар $M < cq_{1m}$ бўлса, у ҳолда $\zeta_k(x,t)$- текис интегралланувчи мартингал бўлади.*

Етарлича кичик ε учун чегаранинг ички ε атрофи $(\partial\Omega)_\varepsilon$ бўлсин. N_1- жараённинг соҳа ичида тугалланиш моменти ва N_ε- барча зарраларнинг биринчи бор $(\partial\Omega)_\varepsilon$ га тушиш моменти бўлсин. $N = \min\{N_1, N_\varepsilon\}$- жараённинг тўхташ моментидир. У ҳолда траекториянинг нуқтада узилиш эҳтимоли қуйидагига тенг бўлади:

$$g(x_n,t_n) = \begin{cases} 1, & \textit{агар} \quad (x_n,t_n) \in (\partial\Omega)_\varepsilon; \\ \pi_0, & \textit{агар} \quad (x_n,t_n) \in \bar{\Omega} \setminus (\partial\Omega)_\varepsilon. \end{cases}$$

Лемма 2.2 га асосан бир эҳтимоллик билан $N < \infty$.

Теорема 2.4. *Агар $M < cq_{1m}$ бўлсин, у ҳолда $\zeta_N(x,t)$- $u(x,t)$ учун чегараланган дисперсияли силжимас баҳо бўлади.*

Ҳусусий $f(x,t,u)$ функция $g\exp(u), g\sin(u), g\cos(u), g\,\mathrm{sh}(u), g\,\mathrm{ch}(u)$, $(g - const)$ каби аниқланган ҳоллар учун $\{\pi_k\}_{k=0}^\infty$ кўпайиш эҳтимолликлар аниқланган.

2.2 параграфда яримчизиқли параболик тенглама учун Коши масаласи кўрилган. $\Omega = R^m \times (0,T]$, $f(x,t,u) = \sum\limits_{n=0}^\infty a_n(x,t)u^n(x,t)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\bar{a}_n} = 0$ бўлсин, бунда $\sup\limits_{(x,t)\in\Omega} |a_n(x,t)| \le \bar{a}_n$. Қуйидаги параболик тенглама учун Коши масаласини қўрамиз:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - a\Delta u(x,t) + \sum_{i=1}^m b_i(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} + c(x,t)u(x,t) = f(x,t,u), (x,t) \in \Omega, \qquad (9)$$

Бошланғич шарт:

$$u(x,0) = \varphi(x). \qquad (10)$$

Фараз қиламиз $\varphi(x)$, $c(x,t)$, $b_i(x,t)$, $i = \overline{1,m}$, $a_k(x,t)$, $k = 0,1,2,\cdots$ функциялар шундайки, (9)-(10) масаланинг ягона узлуксиз ечими мавжуд ва $M = \sum\limits_{n=0}^\infty \bar{a}_n n < \infty$ бўлсин . Масала ечимининг баҳоси тармоқланувчи жараён траекториясида қурилган. Бунинг учун махсус ўрта қиймат хақидаги муносабат асосида $u(x,t)$ функцияга нисбатан интеграл тенглама ҳосил қилинган:

$$u(x,t)=\int_0^t d\tau \int_{R^m} Z(x,t;y,\tau)\times$$

$$\times\left(k(x,t;y,\tau)u(y,\tau)+\sum_{k=0}^{\infty} a_k(y,\tau)u^k(y,\tau) \right)dy+\int_{R^m} Z(x,t;y,0)\varphi(y)dy,$$

бунда

$$k(x,t;y,\tau)=\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{\left(b_i(x,t)-b_i(y,\tau)\right)}{2a(t-\tau)}\left(y_i-x_i-(t-\tau)b_i(x,t)\right)+\frac{\partial b_i(y,\tau)}{\partial y_i} \right]-c(y,\tau).$$

$r(t,\tau)$ τ бўйича ўтиш зичлиги бўлиб, у қуйидаги шартларни қаноатлантирсин: $r(t,\tau)\ge c_0>0$, ихтиёрий $0<\tau<t$ учун $\int_0^t r(t,\tau)d\tau\le c_1<1$, $\tau\ge t$ ва $\tau<0$ учун $r(t,\tau)=0$. $q(t)$ ни қуйидагича аниқлайлик: $q(t)=1-\int_0^t r(t,\tau)d\tau>0$, $q(t)<1$. У ҳолда $p(x,t;y,\tau)=\dfrac{r(t,\tau)}{1-q(t)}Z(x,t;y,\tau)$ функция ўтиш эҳтимолликлари зичлиги бўлади. Тармоқланиш қонуниятини аниқлаш учун $\alpha\in(0;1)$ параметр киритамиз ва қуйидаги сонли кетма-кетликни аниқлаймиз: $\pi_k=\alpha\cdot\overline{a_k}/M,\ (k=1,2,\ldots)$, $\pi_0=1-\sum_{k=1}^{\infty}\pi_k$. Ихтиёрий k учун $0\le\pi_k<1$ ва $\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k=1, \sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\pi_k=\alpha$. Масаланинг ечими учун қуйидаги эҳтимолий кўриниш ўринли бўлади:

$$u(x,t)=(1-q(t))\int_0^t d\tau\int_{R^m} p(x,t;y,\tau)\times$$
$$\times\left(\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k W_k(x,t;y,\tau)u^k(y,\tau)\right)dy+q(t)\int_{R^m} Z(x,t;y,0)\,\frac{\varphi(y)}{q(t)}dy. \tag{11}$$

W_k қийматлари қуйидагича аниқланади:

$$W_0(x,t;y,\tau)=\frac{a_0(y,\tau)}{\pi_0 r(t,\tau)},\ W_1(x,t;y,\tau)=\frac{M}{\alpha\cdot\bar{a}_1}\left(\frac{k(x,t;y,\tau)+a_1(y,\tau)}{r(t,\tau)}\right),$$

$$W_k(x,t;y,\tau)=\frac{M}{\alpha\cdot\bar{a}_k}\,\frac{a_k(y,\tau)}{r(t,\tau)},\quad k=2,3,\ldots.$$

(11) эҳтимолий кўринишга мувофиқ тармоқланувчи тасодифий жараён ва жараеннинг $P((x,t,1),B)$ ўтиш функцияси аниқланган, жараён траекториясини моделлаштириш усули берилган. $Z_0=(x,t,1)$, $Z_1,Z_2,\ldots,Z_n,\ldots$- тармоқланувчи жараён траекторияси бўлсин.

Лемма 2.3. *$\{Z_n\}$ тасодифий тармоқланувчи жараён бир эҳтимоллик билан Ω соҳа ичида тугалланади.*

Жараён траекториясида аниқланган $\{\zeta_k(x,t)\}_{k=0}^{\infty}$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлигини рекуррент формула ёрдамида аниқлаймиз: $\zeta_0(x,t)=u(x,t)$, $\zeta_k(x,t)=\Psi(\zeta_{k-1}(x,t))$,

$$\Psi(\zeta(x,t))=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x^*)}{q(t)}, & 1-хол;\\ W_k(x,t;y,\tau)\prod\limits_{i=1}^{k}\zeta^{(i)}(y,\tau), & 2-хол.\end{cases}$$

1-ҳол. $(x,t)\to(y,\tau)$ ўтишда заррача $q(t)$ эҳтимоллик билан ютилди.

2-ҳол. $(x,t)\to(y,\tau)$ ўтишда заррача $(1-q(t))\pi_k$ эҳтимоллик билан k та янги заррачага бўлинди (k=0,1,…).

Бунда $\zeta^{(i)}(y,\tau)$- $\zeta(y,\tau)$ тасодифий миқдорнинг боғлиқсиз ҳолда моделлаштирилган қийматлари, $\varphi(x^*)$- битта тасодифий тугун асосидаги $\int\limits_{R^n} Z(x,t;y,0)\varphi(y)dy$ интегралнинг баҳоси. $\Re_k$ - $\{\tau_i\}_{i=1}^{k}$, $\{\gamma_i\}_{i=1}^{k}$, $\{\omega_i\}_{i=1}^{k}$, кетма-кетликлар асосида ҳосил қилинган σ-алгебра бўлсин, бунда τ_i, γ_i, ω_i тасодифий миқдорлар y_i қийматини аниқлашда ишлатилади.

Теорема 2.6. *$\{\zeta_k(x,t)\}_{k=0}^{\infty}$ кетма-кетлик $\{\Re_k\}_{k=0}^{\infty}$ га нисбатан мартингал ҳосил қилади. Агар $M<1$ бўлса, у ҳолда $\zeta_k(x,t)$- текис интегралланувчи мартингал бўлади.*

N - жараённинг тугалланиш моменти бўлсин. Лемма 2.3 га асосан бир эҳтимоллик билан $N<\infty$.

Теорема 2.7. *$M<1$ бўлсин, у ҳолда $\zeta_N(x,t)$ $u(x,t)$ учун чегараланган дисперсияли силжимас баҳо бўлади.*

2.3 параграфда яримчизиқли биринчи тартибли ҳосилалари олдида ўзгарувчи коэффициентли параболик тенглама учун бошланғич-чегаравий масалани ечиш учун эҳтимолий ёндашув ўрганилган. $\Omega=D\times(0,T]$, $D\subset R^m$- чегаралганган соҳа, S - унинг чегараси , $\Gamma=S\times(0,T]$ ва $\partial\Omega=\Gamma\cup\left(D\times\{0\}\right)$ бўлсин. $f(x,t,u)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x,t)u^n(x,t),$ қатор коэффициентлари $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\bar{a}_n}=0$ шартни қаноатлантирсин, бунда $\sup\limits_{(x,t)\in\Omega}|a_n(x,t)|\le\bar{a}_n$. Қуйидаги $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}-a\Delta u(x,t)+\sum\limits_{i=1}^{m}b_i(x,t)\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}+c(x,t)u(x,t)=f(x,t,u)$ тенглама учун Ω соҳада Дирихле масаласи кўрилган. Масала ечими мавжудлиги фарази остида тармоқланувчи жараён траекторияларида масала ечимига силжимас баҳо қурилган.

Диссертациянинг **«Эллиптик ва параболик турдаги тенгламалар системаларига қўйилган чегаравий масалаларни ечиш учун эҳтимолий моделлар»** деб номланган учинчи бобда мазкур масалаларни сонли ечиш учун статистик моделлаштириш усуллари ўрганилган.

3.1 параграфда интеграл тенгламалар системасининг ечимларига баҳо қуришда қўлланиладиган статистик моделлаштиришнинг вектор алгоритмлари ҳақидаги баъзи бир маълумотлар келтирилган.

3.2 параграфда эллиптик тенгламалар системаси учун Дирихле масаласи кўрилган. $D \subset R^3$ чегараланган соҳа ва $\Gamma = \partial D$ бўлсин. Қуйидаги эллиптик тенгламалар системаси учун Дирихле масаласини кўрамиз:

$$\begin{cases} -\Delta u_1(x) + c_{11}u_1(x) = c_{12}u_2(x) + \ldots + c_{1n}u_n(x) + f_1(x), \\ -\Delta u_2(x) + c_{22}u_2(x) = c_{21}u_1(x) + \ldots + c_{2n}u_n(x) + f_2(x), \\ \vdots \\ -\Delta u_n(x) + c_{nn}u_n(x) = c_{n1}u_1(x) + \ldots + c_{(n-1)n}u_{n-1}(x) + f_n(x), \end{cases} \qquad x \in D,$$

масаланинг чегаравий шартлари: $u_i(x) = \varphi_i(x), \quad x \in \Gamma, \quad i = \overline{1,n}.$ Бунда $c_{ii} > 0$, $i = \overline{1,n}$. Фараз қиламиз $f_i(x)$, $\varphi_i(x)$ функциялар ва c_{ij}, $(i, j = \overline{1,n})$ коэффициентлар шундайки, масаланинг ягона узлуксиз ечими $u_i(x) \in C(\bar{D}) \cap C^2(\bar{D})$ $(i = \overline{1,n})$ мавжуд. Масалани ечиш учун номаълум функцияларнинг қийматларини уларнинг шарлар ва сфералар бўйича олинган интеграллари орқали ифодаловчи махсус интеграл тенгламалар системасига ўтилган:

$$\begin{cases} u_1(x) = q_1 \int\limits_{S_R} u_1(y)\,d\omega + (1-q_1) \int\limits_{K_R} p_1(x,y) \dfrac{1}{c_{11}} \left(c_{12}u_2(y) + \cdots + c_{1n}u_n(y) + f_1(y)\right) dy \\ \quad\vdots \\ u_k(x) = q_k \int\limits_{S_R} u_k(y)\,d\omega + (1-q_k) \int\limits_{K_R} p_k(x,y) \dfrac{1}{c_{kk}} \left(\sum\limits_{i=\overline{1,n};\, i\neq k} c_{ki}u_i(y) + f_k(y) \right) dy \\ \quad\vdots \\ u_n(x) = q_n \int\limits_{S_R} u_n(y)\,d\omega + (1-q_n) \int\limits_{K_R} p_n(x,y) \dfrac{1}{c_{nn}} \left(c_{n1}u_1(y) + \cdots + c_{n(n-1)}u_{n-1}(y) + f_n(y)\right) dy \end{cases}$$

Бунда $R(x) = \min\limits_{y\in\Gamma} |x-y|$, K_R - маркази x нуқтада бўлган R радиусли шар, S_R - унга мос келувчи сфера, $q = R\sqrt{c}/\mathrm{sh}(R\sqrt{c})$, ω- S_R сфера сиртидаги текис тақсимот $q_k = \dfrac{R\sqrt{c_{kk}}}{\mathrm{sh}\left(R\sqrt{c_{kk}}\right)}$, $p_k(x,y) = \dfrac{\mathrm{sh}\left[\left(R - |x-y|\right)\sqrt{c_{kk}}\right]}{4\pi|x-y|\left(\mathrm{sh}\left(R\sqrt{c_{kk}}\right) - R\sqrt{c_{kk}}\right)}$. D соҳада тасодифий жараённи аниқлаймиз. $A(x) = \left\{\alpha_{ij}\right\}_{i,j=\overline{1,n+1}}$ ўтиш эҳтимоликлари матрицасини қуйидагича аниқлаймиз: $\alpha_{ii} = q_i, \quad M_i = \sum\limits_{j=\overline{1,n};\, j\neq i} |c_{ij}|,$

$\alpha_{i(n+1)}=\dfrac{1-q_i}{n}$, $\quad \alpha_{ij}=(1-q_i)\dfrac{(n-1)}{n}\dfrac{|c_{ij}|}{M_i}$, $\quad (i,j=\overline{1,n};\, i\neq j)$, $\quad \alpha_{(n+1)i}=0,\ (i=\overline{1,n})$, $\alpha_{(n+1)(n+1)}=1$. Ўтиш зичлик функциялари матрицаси деб аталган $P(x,y)$ матрицани аниқлаймиз: $P(x,y)=\left\{p_{ij}(x,y)\right\}_{i,j=\overline{1,n+1}}$, бунда $p_{ii}(x,y)=I_{S_R}(y)\dfrac{1}{4\pi R^2}$, $(i=\overline{1,n})$, $p_{ij}(x,y)=I_{K_R}(y)p_i(x,y)$, $(i=\overline{1,n},\ \ j=\overline{1,n+1},\ i\neq j)$, $p_{(n+1)i}(x,y)=0$, $(i=\overline{1,n})$, $p(x,y)_{(n+1)(n+1)}=1$, $I_A(y)-A$ соҳа индикатори белгиси. Тенглама номери $i_0\in\{1,2,\ldots,n\}$ ва бошланғич $x_0=x$ нуқтани фиксирлаймиз. Бошланғич моментда $x_0=x$ нуқтада битта заррача бўлсин. Бир қадамда $i_k\to i_{k+1}$ ўтиш $A(x_k)$ ўтиш эҳтимолликлари матрицаси асосида ҳамда $x_k\to x_{k+1}$ўтиш $P(x_k,y)$ ўтиш эҳтимолликлари зичлик функциялари матрицаси асосида амалга оширилсин, яъни $\alpha_{i_k,i_{k+1}}(x_k)$ эҳтимоллик билан заррача x_k нуқтадан $p_{i_k i_{k+1}}(x_k,y)$ зичлик функциясига асосан x_{k+1} нуқтага кўчади. Жараённинг x_n нуқтада узилиш эҳтимоли қуйидагига тенг:

$$g(x_n)=\begin{cases}1, & \text{агар}\quad x_n\in\Gamma;\\ \alpha_{i_{n-1}n}(x_{n-1}), & \text{агар}\quad x_n\in D.\end{cases}$$

Бундай аниқланган $\{(i_{k,}x_k)\}_k$ тасодифий жараёнда $\{x_k\}_k$ - модификацияланган сферик жараёндир, яъни навбатдаги нуқта q_i эҳтимоллик билан максимал радиусли $S_R\in D$ сферада текис тақсимланади ёки $1-q_i$ эҳтимоллик билан K_R шарда p_i зичлик асосида тақсимланган бўлади. Тасодифий $\{(i_{k,}x_k)\}_k$ жараённи моделлаштириш усули аниқланган.

$\Theta_0=1,\quad \Theta_n=\Theta_{n-1}\times V_{i_{n-1}i_n}$ бўлсин, бунда V_{ij} қўйидагича аниқлансин:

$$V_{ii}=1,\quad V_{ij}=\frac{nM_i\,\mathrm{sgn}(c_{ij})}{(n-1)c_{ii}},\quad V_{i(n+1)}=\frac{n}{c_{ii}},\quad (i,j=\overline{1,n};\ i\neq j).$$

Тасодифий жараён траекториясида $\{\eta_n(i_0,x_0)\}_{n=0}^{\infty}$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлигини қуйидагича аниқлаймиз:

$$\eta_n(i_0,x_0)=\Theta_n\times F(x_n)=\Theta_n\times\begin{cases}u_j(x_n), i_n=j,\ j\neq n+1;\\ f_{i_{n-1}}(x_n), i_n=n+1.\end{cases}$$

Агар n моментда узилиш рўй берган бўлса, $\eta_{n+k}(i_0,x_0)=\eta_n(i_0,x_0)$, $(i_{n+k},x_{n+k})=(i_n,x_n)$, $k=1,2,\ldots$ деб қабул қиламиз. $\Re_n$ σ-алгебра $\{\omega_k\}_{k=0}^{n-1}$, $\{\alpha_{0k}\}_{k=0}^{n-1}$, $\{\alpha_{1k}\}_{k=0}^{n-1}$, $\{\alpha_{2k}\}_{k=0}^{n-1}$ тасодифий миқдорлар асосида ҳосил қилинган бўлсин.

Теорема 3.2. $\{\eta_n(i_0,x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ *кетма-кетлик* $\{\Re_n\}_{n=1}^{\infty}$*га нисбатан мартингал ҳосил қилади. Агар* $M_i < \dfrac{(n-1)c_{ii}}{n}$ *ва* $\max\limits_{x\in D}|f_i(x)|\le c_0$, $(c_0 = const$, $i=\overline{1,n})$ *бўлса,* $\{\eta_n(i_0)\}$ *- текис интегралланувчи мартингал бўлади.*

Етарлича кичик ε учун чегаранинг ички ε атрофи Γ_εни кўрамиз. N_1 жараённинг соҳа ичида узилиш моменти ва N_ε жараённинг биринчи бор Γ_ε соҳага тушиш моменти бўлсин. Жараённинг тўхташ моменти $N=\min\{N_1,N_\varepsilon\}$. У ҳолда жараён траекториясининг x_n нуқтада узилиши эҳтимоли қуйидагига тенг:

$$g(x_n)=\begin{cases}1, & \text{агар} \quad x_n\in\Gamma_\epsilon;\\ \alpha_{i_{n-1}n}(x_{n-1}), & \text{агар} \quad x_n\in\bar{D}\setminus\Gamma_\epsilon.\end{cases}$$

Теорема 3.3. $\eta_n(i_0)$ *текис интегралланувчи мартингал бўлсин, у ҳолда* $\eta_N(i_0,x_0)$ - $u_{i_0}(x_0)$ *учун чегараланган дисперсияли силжимас баҳо бўлади.*

Олинган натижалар тенглама коэффициентлари ўзгарувчи бўлган ҳол учун умумлаштирилган.

3.3 параграфда параболик тенгламалар системаси учун Дирихле масаласи кўрилган. $D\subset R^m$ - чегараланган соҳа, ∂D - унинг чегараси, $\Omega=D\times[0,T], T>0$. Функциялар $y_{oi}(x)\in C(\bar{D})$, $y_i(x,t)\in C(\partial D\times[0,T])$, $f_i(x,t)\in C(\bar{\Omega})$ ва коэффициентлар $a_i>0$, $c_{ij}>0$, $(i,j=\overline{1,n})$ бўлсин. Куйидаги параболик тенгламалар системаси учун бошлангич чегаравий масалани кўрамиз:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_1(x,t)}{\partial t}-a_1\Delta u_1(x,t)+c_{11}u_1(x,t)-c_{12}u_2(x,t)-\ldots-c_{1n}u_n(x,t)=f_1(x,t)\\ \vdots\\ \dfrac{\partial u_k(x,t)}{\partial t}-a_k\Delta u_k(x,t)+c_{kk}u_k(x,t)-\sum\limits_{i=1,n;\,i\ne k}c_{ki}u_i(x,t)=f_k(x,t)\\ \vdots\\ \dfrac{\partial u_n(x,t)}{\partial t}-a_n\Delta u_n(x,t)+c_{nn}u_n(x,t)-c_{n1}u_1(x,t)-\ldots-c_{n(n-1)}u_{n-1}(x,t)=f_n(x,t)\end{cases} \tag{12}$$

бунда $(x,t)\in\Omega$ ва бошланғич ва чегаравий шартлар қуйидагича:

$$\begin{cases}u_i(x,t)=y_i(x,t), \quad x\in\partial D, \quad t\in[0,T], \quad i=\overline{1,n},\\ u_i(x,0)=y_{oi}(x), \quad x\in D, \quad i=\overline{1,n}.\end{cases} \tag{13}$$

Фараз қиламиз (12) система (13) шартлар остида ягона узлуксиз $u_i(x,t)\in C\left(\bar{D}\times[0,T]\right)\cap C^{2,1}\left(\bar{D}\times[0,T]\right)$ $(i=\overline{1,n})$ ечимга эга. Шуни таъкидлаш жоизки, ушбу кўринишдаги тенгламалар системаси амалий аҳамиятга эга бўлиб, у фильтрация назариясининг масалаларида учрайди.

Фундаментал ечим ёрдамида Грин формуласини қўллаб дифференциал тенгламалар системасидан интеграл тенгламалар системасига ўтилади. Қуйидаги белгилашлар қиритамиз:

$$Z^{(i)}(x,t;y,\tau)=\left(4\pi a_i\left(t-\tau\right)\right)^{-m/2}\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4a_i\left(t-\tau\right)}\right),$$

$Z_r^{(i)}=Z^{(i)}-\left(4\pi a_i r\right)^{-m/2}.$

$r>0$ параметр ва $(x,t)\in R^{m+1}$ нуқтага боғлиқ $Q_r^{(i)}(x,t)$ соҳалар оиласини $Q_r^{(i)}(x,t)=\left\{(y,\tau):Z_r^{(i)}(x,t;y,\tau)>0,\ \tau<t\right\}$ каби аниқлаймиз. $(x,t)\in\Omega$ ва $r=r(x,t)=\min\left\{\frac{R_1^2(x)e}{2a_1m},\dots,\frac{R_1^2(x)e}{2a_nm},t\right\}$ бўлсин, бунда $R_1(x)$ x нуқтадан D соҳа чегарасигача бўлган масофа. Бу ҳолда $Q_r^{(i)}(x,t)\subset\bar{\Omega}$ бўлади. Лемма 2.1 да келтирилган ўрта қиймат асосидаги муносабатни ҳар бир тенгламага қўллаб, қуйидаги тенгламалар системасини ҳосил қиламиз $(i=\overline{1,n})$:

$$\begin{aligned}u_i(x,t)=a_i&\iint\limits_{\partial Q_r^{(i)}(x,t)}\left(1-\frac{t-\tau}{r}\right)\left(-\frac{\partial Z^{(i)}(x,t;y,\tau)}{\partial n_y}\right)u_i(y,\tau)dsd\tau+\\&+\frac{1}{r}\iint\limits_{Q_r^{(i)}(x,t)}(1-(r-(t-\tau))c_{ii})Z_r^{(i)}(x,t;y,\tau)u_i(y,\tau)dyd\tau+\\&+\frac{1}{r}\iint\limits_{Q_r^{(i)}(x,t)}(r-(t-\tau))Z_r^{(i)}(x,t;y,\tau)\sum_{j=1,n;\,j\neq i}c_{ij}u_j(y,\tau)dyd\tau+\\&+\frac{1}{r}\iint\limits_{Q_r^{(i)}(x,t)}(r-(t-\tau))Z_r^{(i)}(x,t;y,\tau)\,f_i(y,\tau)dyd\tau.\end{aligned}\tag{14}$$

Агар r параметрни $r=r(x,t)=\min\left\{\frac{eR_1^2(x)}{2ma_1},\cdots,\frac{eR_1^2(x)}{2ma_n};\frac{1}{c_{11}},\cdots,\frac{1}{c_{nn}};t\right\}$ каби танлаб олсак, у ҳолда $\overline{Q_r^{(i)}}(x,t)\in\Omega$ бўлади ва

$$p_0^{(i)}\left(x,t;y,\tau\right)=\frac{\left(1-\frac{t-\tau}{r}\right)}{1-q_m}\left(-\frac{\partial Z^{(i)}\left(x,t;y,\tau\right)}{\partial n_y}\right)I_{\partial Q_r^{(i)}(x,t)}(y,\tau),$$

$$p_1^{(i)}\left(x,t;y,\tau\right)=\frac{\left(1-\left(r-\left(t-\tau\right)\right)c_i\right)Z_r^{(i)}\left(x,t;y,\tau\right)}{rq_m\left(1-rq_{1m}c_i\right)}I_{Q_r^{(i)}(x,t)}\left(y,\tau\right),$$

$$p_2^{(i)}\left(x,t;y,\tau\right)=\frac{Z_r^{(i)}\left(x,t;y,\tau\right)}{rq_m}I_{Q_r^{(i)}(x,t)}\left(y,\tau\right),$$

функциялар фиксирланган (x,t) да мос равишда $Q_r^{(i)}(x,t)$ ларда аниқланган тақсимот зичлик функциялари бўлади. Бунда $q_{1m}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{m+2}{m+4}\right)^{1+m/2}$.

$(y_2^{(i)},\tau_2^{(i)})$ тасодифий нуқта $Q_r^{(i)}(x,t)$ шароидда аниқланган бўлиб, фиксирланган (x,t) да $p_1^{(i)}\left(x,t;y,\tau\right)$ $(i=1,n)$ тақсимот зичлик функциясига эга бўлсин. У ҳолда $(i=\overline{1,n})$ учун қуйидаги ўринли:

$$\frac{1}{r}\iint\limits_{Q_r^{(i)}(x,t)}(1-(r-(t-\tau))c_{ii})Z_r^{(i)}(x,t;y,\tau)u_i(y,\tau)dyd\tau=q_m(1-rc_{ii}q_{1m})Eu_i\left(y_2^{(i)},\tau_2^{(i)}\right).$$

Теорема 3.5. *(12) системанинг ечими учун қуйидаги эҳтимолий кўриниш хаққоний:*

$$u_i(x,t)=\left(1-q_m\right)Eu_i\left(y^{(i)}(\xi,\omega),\tau(\xi)\right)+q_m\left(1-rc_{ii}q_{1m}\right)Eu_i\left(y_2^{(i)},\tau_2^{(i)}\right)+$$
$$+q_mrE\left\{\left(1-\upsilon^{2/m}\exp\left(-\frac{2\xi_1}{m+2}\right)\right)\sum_{j=1,n;\,j\neq i}c_{ij}u_j\left(y_1^{(i)}\left(\xi_1,\upsilon,\omega\right),\tau_1\left(\xi_1,\upsilon\right)\right)\right\}+ \quad (15)$$
$$+q_mrE\left(\left(1-\upsilon^{2/m}\exp\left(-\frac{2\xi_1}{m+2}\right)\right)f_i\left(y_1^{(i)}\left(\xi_1,\upsilon,\omega\right),\tau_1\left(\xi_1,\upsilon\right)\right)\right),$$

бунда

$$y^{(i)}\left(\xi,\omega\right)=x+\sqrt{4r\xi a_i\exp\left(-\frac{2\xi}{m}\right)}\omega,\quad \tau\left(\xi\right)=t-r\exp\left(-\frac{2\xi}{m}\right),\left(i=\overline{1,n}\right),$$
$$y_1^{(i)}(\xi_1,\upsilon,\omega)=x+\sqrt{\frac{4m}{m+2}ra_i\xi_1\upsilon^{2/m}\exp\left(-\frac{2\xi_1}{m+2}\right)}\omega,\ \tau_1(\xi_1,\upsilon)=t-r\upsilon^{2/m}\exp\left(-\frac{2\xi_1}{m+2}\right)$$

$\xi -$ *тасодифий миқдорнинг тақсимот зичлиги*

$$q_1(\rho)=\rho^{m/2}\exp(-\rho)\left(1-\exp\left(-\frac{2\rho}{m}\right)\right)\left((1-q_m)\Gamma\left(1+\frac{m}{2}\right)\right)^{-1},$$

ω- *бирлик сфера сиртидаги тасодифий нуқта,* σ_m- *бирлик сфера сирти майдони,* ξ_1-$(m/2,1)$ *параметрли гамма тақсимотга эга ва* υ- $(2,2/m)$ *параметрли бета тақсимотга эга тасодифий миқдорлар,* $\Gamma(\cdot)$- *гамма функция.*

$U=\mathrm{K}U+H$ кўриншидаги интеграл тенгламалар системасини Монте-Карло усули ёрдамида ечиш учун спектрал радиус $\rho(\mathrm{K})<1$ бўлишлиги зарурий шарт бўлиб, кўрилаётган масала учун бу шартнинг бажарилиши исботланган.

Ω соҳада (15) кўринишга мувофиқ ҳолда тасодифий жараён қурилган. $A(x,t)=\left\{\alpha_{ij}\right\}_{i,\,j=\overline{1,n+1}}$ ўтиш эҳтимоликлари матрицасини қуйидагича аниқлаймиз: $\alpha_{ii}=1-q_mc_{ii}q_{1m}r(x,t)$, $\beta_i=q_mc_{ii}q_{1m}r(x,t)(n-1)/n$,

$$\alpha_{ij}=\frac{\beta_i c_{ij}}{M_i},(i,j=\overline{1,n};i\neq j),\qquad M_i=\sum_{j=1,n;\,j\neq i}c_{ij},\alpha_{i(n+1)}=\frac{q_m q_{1m} r(x,t)c_{ii}}{n},(i=\overline{1,n}),$$

$\alpha_{(n+1)i}=0,\alpha_{(n+1)(n+1)}=1,(i=\overline{1,n}).$ $P(x,t;y,\tau)$- ўтиш эҳтимолликлари зичлик функциялари матрицасини қуйидаги кўринишда аниқлаймиз: $P(x,t;y,\tau)=\left\{p_{ij}(x,t;y,\tau)\right\}_{i,j=\overline{1,n+1}}$, бунда $p_{ij}(x,t;y,\tau)=p_2^{(i)}(x,t;y,\tau),\quad (i=\overline{1,n};,$ $j=\overline{1,n+1};i\neq j),\ p_{(n+1)i}(x,t;y,\tau)=0,\ (i=\overline{1,n}),\ p(x,t;y,\tau)_{(n+1)(n+1)}=1,.$

$$p_{ii}(x,t;y,\tau)=\frac{(1-q_m)p_0^{(i)}(x,t;y,\tau)+q_m(1-rq_{1m}c_{ii})p_1^{(i)}(x,t;y,\tau)}{1-r(x,t)q_{1m}c_{ii}q_m},(i=\overline{1,n}).$$

Тенглама номери $i_0\in\{1,\dots,n\}$ ва бошланғич нуқта $(x_0,t_0)=(x,t)$ ни фиксирлаймиз. Дастлабки моментда бир дона заррача $(x_0,t_0)=(x,t)$ нуқтада жойлашган бўлсин. Бир қадам давомида $i_k\to i_{k+1}$ ўтиш $A(x_k,t_k)$ ўтиш эҳтимолликлари матрицаси асосида ҳамда $(x_k,t_k)\to(x_{k+1},t_{k+1})$ ўтиш $P(x_k,t_k;y,\tau)$ ўтиш эҳтимолликлари зичлик функциялари матрицаси асосида амалга оширилсин, яъни $\alpha_{i_k,i_{k+1}}(x_k,t_k)$ эҳтимоллик билан заррача (x_k,t_k) нуқтадан $p_{i_k i_{k+1}}(x_k,t_k;y,\tau)$ зичлик функциясига асосан (x_{k+1},t_{k+1}) нуқтага ўтади. Жараён траекториясининг (x_n,t_n) нуқтада узилиши эҳтимоли:

$$g(x_n,t_n)=\begin{cases}1, & (x_n,t_n)\in\partial\Omega;\\ \alpha_{i_{n-1}n+1}(x_{n-1},t_{n-1}), & (x_n,t_n)\in\Omega.\end{cases}$$

Юқорида аниқланган жараённинг фазовий координаталари (x_n,t_n) учун моделлаштириш усули аниқланган. Агар n моментда траекторияда узилиш рўй берган бўлса, $(x_{n+k},t_{n+k})=(x_n,t_n)$, $k=0,1,2,...$ деб оламиз. Табиийки, заррача координаталари кетма-кетлиги (x_n,t_n) марков занжирини ҳосил қилади. Қуйидаги ёрдамчи тасдиқ исботланган.

Лемма 3.1. *Бир эҳтимоллик билан* $\{x_n,t_n\}_{n=0}^{\infty}$ *марков занжири ёки* $n\to\infty$ *да чегарага тегишли тасодифий нуқта* $(x_\infty,t_\infty)\in\partial\Omega$ *га интилади ёки соҳанинг ичида узилади.*

$(x_k,t_k)_{k=0}^{\infty}$ юқорида аниқланган тасодифий жараён траекторияси ва $\Theta_0=1,\Theta_n=\Theta_{n-1}\times V_{i_{n-1}i_n}(x_{n-1},t_{n-1};x_n,t_n)$ бўлсин, $V_{ij}(x_{n-1},t_{n-1};x_n,t_n)$ қуйидагича аниқланади:

$$V_{ij}(x_{n-1},t_{n-1};x_n,t_n)=\frac{nM_i}{(n-1)c_{ii}q_{1m}}\left(1-v_n^{2/m}\exp\left(-\frac{2\zeta_n}{m+2}\right)\right),$$

$$V_{ii}(x_{n-1},t_{n-1};x_n,t_n)=1,$$

$$V_{i(n+1)}(x_{n-1},t_{n-1};x_n,t_n)=\frac{n}{c_{ii}q_{1m}}\left(1-v_n^{2/m}\exp\left(-\frac{2\zeta_n}{m+2}\right)\right),(i,j=\overline{1,n};\ j\neq i).$$

Бунда $\{\zeta_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$- мос равишда $(m/2{,}1)$ параметрли гамма тақсимотга эга ҳамда $(2{,}2/m)$ параметрли бета тақсимотга эга тасодифий миқдорлар кетма-кетликлари. Жараён траекториясида аниқланган $\{\eta_n(i_0)\}$ кетма-кетликни қуйидагича аниқлаймиз:

$$\eta_n(i_0)=\Theta_n\times F(x_n,t_n)=\Theta_n\times\begin{cases} u_j(x_n,t_n), & i_n=j,\quad j\neq n+1,\\ f_{i_{n-1}}(x_n,t_n), & i_n=n+1.\end{cases}$$

Агар n моментда траектория узилиши рўй берган бўлса, $\eta_{n+k}(i_0)=\eta_n(i_0)$, $(x_{n+k},t_{n+k})=(x_n,t_n)$, $k=1,2,...$ деб оламиз. $\Re_n-\sigma$- алгебра $\{x_k,t_k\}_{k=0}^{n}$ траекторияни аниқлашда қатнашган $\{\omega_k\}_{k=0}^{n-1}$, $\{v_k\}_{k=0}^{n-1}$, $\{\xi_k\}_{k=0}^{n-1}$, $\{v'_k\}_{k=0}^{n-1}$, $\{\xi'_k\}_{k=0}^{n-1}$ тасодифий миқдорлар ёрдамида ҳосил қилинган бўлсин.

Теорема 3.6. $\{\eta_n(i_0)\}_{n=1}^{\infty}$ *кетма-кетлик* $\{\Re_n\}_{n=1}^{\infty}$ *га нисбатан мартингал ҳосил қилади. Агар* $\sum\limits_{j=1,n;\,j\neq i} c_{ij}<(n-1)c_{ii}q_{1m}/n,(i=\overline{1,n})$, $\max\limits_{(x,t)\in\Omega}\left|f_i(x,t)\right|\le c_0$, $(c_0=const,i=\overline{1,n})$ *бўлса,* $\eta_n(i_0)$ *текис интегралланувчи мартингал бўлади.*

Етарлича кичкина ε учун чегаранинг ички ε атрофини кўрамиз $(\partial\Omega)_\varepsilon=\{D\times[0,\varepsilon]\}\cup\{(\partial D)_\varepsilon\times[0,T]\}$. N_1 жараённинг соҳа ичида узилиш моменти ва N_ε жараённинг биринчи бор $(\partial\Omega)_\varepsilon$ соҳага тушиш моменти бўлсин. $N=\min\{N_1,N_\varepsilon\}$- $\{(x_n,t_n)\}$ жараённинг тўхташ моменти. У ҳолда жараённинг $\{(x_n,t_n)\}$ нуқтада узилиш эҳтимоли:

$$g(x_n,t_n)=\begin{cases} 1, & (x_n,t_n)\in(\partial\Omega)_\varepsilon,\\ \alpha_{i_{n-1}(n+1)}(x_{n-1},t_{n-1}), & (x_n,t_n)\in\bar{\Omega}\setminus(\partial\Omega)_\varepsilon.\end{cases}$$

3.1 леммага асосан бир эҳтимоллик билан $N<\infty$.

Теорема 3.7. $\eta_n(i_0)$ *текис интегралланувчи мартингал бўлсин. У ҳолда* $\eta_N(i_0)$ *ечимлар вектори* $u(x,t)$ *нинг* i_0- *компонентаси* $u_{i_0}(x,t)$ *учун чегараланган дисперсияли силжимас баҳо бўлади.*

«Молиявий математиканинг айрим масалалари учун эҳтимолий моделлар» номли тўртинчи бобда иккита амалий масала кўрилган. 4.1. параграфда бир неча риск активлар учун аниқланган опционнинг муқобил нархи учун стохастик модел қурилган. Маълумки, бир неча активлар учун опционнинг нархи кўп ўлчовли параболик тенгламани қаноатлантиради. Риск активлари нархининг динамикаси эса стохастик тенгламалар системаси билан аниқланади. $Q=[t_0,T)\times R_+^n$ бўлсин. Қуйидаги масала кўрамиз:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i(t,x)\dfrac{\partial u}{\partial x_i} + c(t,x)u + g(t,x) = 0, \quad (t,x) \in Q, \\ u(T,x) = \varphi(x), \quad x \in R_+^n. \end{cases} \tag{16}$$

(16) масаланинг ечими учун эҳтимолий кўриниш ўринли:

$$u(t,x) = E\left[\varphi(T, X_{t,x}(T))Y_{t,x,1}(T) + Z_{t,x,1,0}(T)\right], \tag{17}$$

бунда $X_{t,x}(s)$, $Y_{t,x,y}(s)$, $Z_{t,x,y,z}(s)$ $(s \geq t)$ - қуйидаги стохастик дифференциал тенгламалар системаси учун Коши масаласининг ечими:

$$\begin{cases} dX = b(s,X)ds + \sigma(s,X)d\omega(s), \quad X(t) = x, \\ dY = c(s,X)Yds, \quad Y(t) = y, \\ dZ = g(s,X)Yds, \quad Z(t) = z. \end{cases}$$

Бунда $(t,x) \in Q$, $\omega(s) = \left(\omega^1(s);\ldots,\omega^n(s)\right)^T$ - стандарт винер жараёни, Y ва Z - скалярлар; $b(s,x)$ - $b_i(s,x)$ коэффициентлардан иборат вектор-устун, $\sigma(s,x)$ матрица $\sigma(s,x)\sigma^T(s,x) = a(s,x)$ тенгликдан аниқланади, $a(s,x) = \left\{a_{ij}(s,x)\right\}$ $(i, j = \overline{1,n})$.

(17) формула асосида баҳолаш учун Мильштейн схемасини қўллаймиз. $h = \dfrac{T - t_0}{N}$ қадам билан вақт бўйича дискретлаштиришни амалга оширамиз: $T = t_N > t_{N-1} > \cdots > t_0$. $(t_0, x_0) \in Q$, ξ - $S_1(0) \subset R^n$ шарнинг сиртида текис тақсимланган тасодифий миқдор ва $\rho_0 = \sqrt{nh}$ бўлсин. $S(t_0, x_0, \rho)$ эллипсоид $S_1(0)$ шардан марказини $x_0 + \dfrac{\rho^2}{n} b(t_0, x_0)$ га кўчириш ва $\rho\sigma(t_0, x_0)$ чизиқли алмаштириш ёрдамида ҳосил қилинган. Агар $S(t_0, x_0, \rho) \not\subset R_+^n$ бўлса, R_+^m чегараси $S(x_0, t_0, \rho)$ соҳага уринадиган қилиб $\rho < \rho_0$ ни танлаймиз.

$$t_1 = t_0 + h, \quad X_1 = x_0 + b(t_0, x_0)\frac{\rho^2}{n} + \rho\sigma(t_0, x_0)\xi,$$

$$Y_1 = y_0\left(1 + c(t_0, x_0)\frac{\rho^2}{n}\right), \quad Z_1 = z_0 + g(t_0, x_0)y_0\frac{\rho^2}{n}.$$

X_1 нуқта $S(t_0, x_0, \rho)$ соҳа сиртида жойлашади. Траекториянинг навбатдаги нуқтаси ҳам шу тарзда аниқланади. $X_{N+k} = X_k$ ва $\Im_k = \sigma(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ бўлсин. Бу кўринишда аниқланган $\{X_k\}$ кетма-кетлик $\Im_k = \sigma(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ га нисбатан мартингал ташкил этади. $(t_0, x_0) \in Q$, $S = S(t_0, x_0, \rho)$ эллипсоид ва $P = S \times \left[t_0, t_0 + h\right)$ цилиндр бўлсин.

Теорема 4.1. *f функция (16) масаланинг $\overline{P}$ соҳадаги узлуксиз $D_x^m D_t^k f$ ҳосилаларга эга бўлган ечими бўлсин* $(0 \leq m + 2k \leq 4,\ k = 0,1)$. $X_{t_0,x_0}(s)$,

$Y_{t_0,x_0,y_0}(s)$, $Z_{t_0,x_0,y_0,z_0}(s)$ *(4.3) системанинг ечими ва* τ $(X_{t_0,x_0}(s),s)$ *жараённинг P цилиндрнинг чегарасига чиқиш вақти бўлсин. У ҳолда*

$$E\left[f(t_1,X_1)Y_1 + Z_1 - f\left(\tau, X_{t_0,x_0}(\tau)\right)Y_{t_0,x_0,y_0}(\tau) - Z_{t_0,x_0,y_0,z_0}(\tau) \right] = O(h^2).$$

(16) масалани ечиш учун бир қадамли аппроксимацияга асосланган усул қурилган.

$$t_{k+1} = t_k + h, \qquad X_{k+1} = X_k + b(t_k, X_k)\frac{\rho_k^2}{n} + \rho_k \sigma(t_k, X_k)\xi_k,$$

$$Y_{k+1} = Y_k\left(1 + c(t_k, X_k)\frac{\rho_k^2}{n}\right), \quad Y_0 = 1, \quad Z_{k+1} = Z_k + g(t_k, X_k)Y_k\frac{\rho_k^2}{n}, \quad Z_0 = 0$$

бўлсин. Бунда $\xi_1,\ldots,\xi_k,\ldots$- ўзаро боғлиқсиз изотроп векторлар кетма-кетлиги бўлсин. ρ_k кетма-кетликни қуйидагича аниқлаймиз. Агар $S(t_k, x_k, \rho_0) \subset R_+^n$ бўлса, у ҳолда $\rho = \rho_0$; акс ҳолда $S(t_k, x_k, \rho)$ соҳани R_+^m чегарага уринадиган қилиб $\rho < \rho_0$ ни танлаймиз.

Теорема 4.2. *u функция (16) масаланинг ечими бўлиб, Q соҳада узлуксиз ва чегараланган* $D_x^m D_t^k u$ $(0 \le m + 2k \le 4,\ k = 0,1)$ *ҳосилаларга эга бўлсин. У ҳолда*

$$E\left[\varphi(X_{t,X}(T))Y_{t,x,1}(T) + Z_{t,x,1,0}(T) - u(t,x)\right] = O(h).$$

Таклиф этилган усул бир неча риск активлари учун аниқланган опционнинг муқобил нархни баҳолаш учун қўлланилган.

4.2. параграфда об-ҳаво ҳосилаларининг нархини баҳолаш ва баҳо дисперсиясини камайтириш усуллари ўрганилган.

Иловада диссертацияда тадқиқ этилган эҳтимолий моделлар асосида ишлаб чиқилган «Иккинчи тартибли тенгламаларга қўйилган чегаравий масалалар ечиш учун эҳтимолий моделлар» амалий дастурлар мажмуанинг тавсиф, ҳусусиятлари ва структураси келтирилган.

ХУЛОСА

Диссертация иши эллиптик ва параболик турдаги чизиқсиз тенглама ва чизиқли системаларга қўйилган чегаравий масалалар ечимлари учун эҳтимолий моделлар яратишга бағишланган. Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат.

Чизиқсиз масала ечимлари учун тасодифий миқдорларнинг математик кутилмаси шаклидаги эҳтимолий кўринишлар олинган; эҳтимолий кўриш-ларга мувофиқ ҳолда тармоқланувчи тасодифий жараёнлар қурилган, уларни моделлаштириш формулалари аниқланган, қурилган жараёнлар бир эҳтимоллик билан тугалланиши ҳамда *n* чи авлод заррачалари сони бирдан кичиклиги исботланган;

жараён траекториясида силжимас баҳо, кам тармоқланган жараён траекториядарида ε силжиган баҳолар қурилган, қурилган баҳолари дисперсияси чегараланган, улар тармоқланиш сони чегараланган жараёнлар траекторияларида аниқланган ва моделлаштирилган; баҳоларнинг силжимаслиги ва дисперсияларининг чегараланганлиги марков моментлари ва мартингаллар назариялари ёрдамида исботланган;

анъанавий усуллардан фарқли, диссертация ишида келтирилган чизиқсиз масалалар ечимларининг баҳоларини рекуррент усулда аниқланиши бир қатор афзалликларга эга, шулар жумласидан, математик ёзувнинг ихчамлиги, траектория дарахтларининг мураккаб структурасини таснифлаш заруриятининг йўқолиши, мартингаллар назариясининг усулларидан фойдаланиш қулайликлари, ҳисоблашлар учун талаб қилинадиган компьютер хотираси ҳажми кичиклиги;

параболик тенгламалар системасига қуйилган биринчи чегаравий масала ечими учун сфероидлар бўйича тасодифий ҳаракатланиш алгоритмлари ишлаб чиқилган; ўрта қиймат формуласи асосида масаланинг ечими учун тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси шаклидаги эҳтимолий кўриниш олинган;

эллиптик тенгламалар системасига қўйилган Дирихле масаласи ечими учун сфералар бўйича тасодифий ҳаракат алгоритмлари ишлаб чиқилган; шар учун Грин формуласи асосида дифференциал тенгламалар системасидан интеграл тенгламалар системасига ўтилган; интеграл тенгламалар системаси учун итерацион усул яқинлашиши тадқиқ этилган;

системаларга қўйилган чегаравий масалалар учун эҳтимолий кўринишга мувофиқ тасодифий жараёнлар қурилган, жараёнлар траекториялари учун моделлаштириш формулалари аниқланган ва моделлаштириш алгоритми берилган; тасодифий жараёнлар траекторияларида масалалар ечимларининг дисперсияси чегараланган силжимас ва кам силжиган баҳолари қурилган;

вектор алгоритмларининг анъанавий усуллардан фарқли, қурилган баҳоларда матрицали «вазнлар» ишлатилмайди, бу эса ўз навбатида ҳисоблашлар хажмини кескин камайтиради.

бир неча риск активлари учун аниқланган опционнинг муқобил нархини баҳолаш учун марков занжирлари траекторияларида аниқланган функционалнинг математик кутилмаси кўринишидаги баҳога асосланган сонли усул ишлаб чикилган.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.27.06.2017.FM.01.02
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА**

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

РАИМОВА ГУЛНОРА МИРВАЛИЕВНА

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО И ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПОВ

01.01.03 – Вычислительная и дискретная математика
01.01.05 – Теория вероятностей и математическая статистика
(физико-математические науки)

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА (DSc)
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК**

г.Ташкент – 2017 год

Тема диссертации доктора наук (Doctor of Science) зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за №B2017.2.DSc/FM58.

Докторская диссертация выполнена в Институте математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский) размещен на веб-странице Научного совета (http://fti-kengash.uz/) и информационно-образовательном портале «ZiyoNet» (www.ziyonet.uz).

Научные консультанты:	**Форманов Шакир Касимович** доктор физико-математических наук, академик
	Расулов Абдужаббор Саттарович доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Пресман Эрнст Львович** доктор физико-математических наук, профессор (Россия, ЦЭМИ РАН)
	Шадиметов Холматвай Махкамбоевич доктор физико-математических наук, профессор
	Ходжибаев Вали Рахимджанович доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация:	**Казахский Государственый Университет имени Аль Фараби**

Защита диссертации состоится «____» _____________2017 года в ____ часов на заседании Научного совета DSc.27.06.2017.FM.01.02 при Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С докторской диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №_____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «____» _______________2017 года.
(протокол рассылки №________ от «____» _______________2017 года).

А.Р.Марахимов
Председатель Научного совета по присуждению научных степеней, д.т.н., профессор

З.Р.Рахмонов
Ученый секретарь Научного совета по присуждению научных степеней, д.ф.-м.н.

М.М.Арипов
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению научных степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация докторской диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научно-прикладные исследования, проводимые на мировом уровне, во многих случаях приводятся к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных втрого порядка и численное решение таких задач методом статистического моделирования (методом Монте Карло) имеет важное значение. Под численным статистическим моделированием понимают реализацию с помощью компьютера вероятностной модели некоторого объекта с целью оценивания изучаемых характеристик на основе закона больших чисел. Метод Монте-Карло естественно применяется при моделировании любого процесса, на протекание которого влияют случайные факторы, пример тому множество научно-практических исследований, проводимые в мировом масштабе, в частности, применение метода при решении задач статистической физики, теории турбулентности, теории переноса.

В годы независимости в нашей стране усилилось внимание к актуальным научным направлениям, имеющим прикладное значение. В настоящее время метод статистического моделирования имеет необычайно широкий спектр приложений: задачи переноса излучений (ядерные реакторы, атмосферная оптика), задачи газовой динамики (метод Бёрда, моделирование процессов коагуляции), задачи финансовой математики (моделирование управления ценными бумагами и рыночных ситуаций), задачи массового обслуживания (моделирование сложных производственных систем, систем связи и компьютерных сетей) и развитие исследований в этих направлениях является актуальной задачей современной науки. В постановлении Кабинета Министров обозначены «Основные задачи и направления ведения научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям теории вероятностей и математической статистики, прикладной математики и математического моделирования»[1]. Для обеспечения исполнения постановления имеет важное значение развитие численных методов, вычислительной математики, теории вероятностей и статистического моделирования.

В настоящее время важной задачей является расширение области применения алгоритмов метода Монте-Карло для различных задач математической физики, особенно на случай нелинейных краевых задач. Численное решение таких нелинейных задач обычно связано со значительными трудностями. Разработка, развитие и использование методов статистического моделирования, наряду с детерминированных методами, является актуальной задачей и позволяет получать численные результаты при решении прикладных задач, соответствующим постоянно усложняющимся моделям теории газовой динамики, финансовой математики, биологии и

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений академии наук республики Узбекистан» от 18 мая 2017 года.

других сфер. Научные исследования, проводимые в вышеупомянутых направлениях, подтверждают актуальность темы диссертации.

Эта диссертация, в определенной степени, служит осуществлению задач, обозначенных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан №-ПП-916 «О дополнительных мерах по стимулированию внедрения инновационных проектов и технологий в производство» от 15 июля 2008 года, №-ПП-2789 «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» от 17 февраля 2017 года и №-УП-4947 «О стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан» от 8 февраля 2017 года а также в других нормативно-правовых актах по данной деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации[2]. Научные исследования по методам Монте-Карло, их применияниям к прикладным задачам осуществляются в ведущих научных центрах и высших образовательных учреждениях мира, в том числе, ведутся в the Centre for Advanced Computing and Emerging Technologies, the University of Leicester (Великобритания), the Institute for Parallel Processing, Bulgarian Academy of Sciences (Болгария), the National Environmental Research Institute (Дания), the University of Mainz, the Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics (Германия), the University of North Carolina at Chapel Hill, the Florida State University, CIS Department of the Brooklyn College (США), Санкт-Петербургском Государственном Университете, Институте вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Уральском федеральном университете (Россия), Казахском национальном университете, Туркменском государственном университете.

В результате исследований, проведенных в мире, по развитию методов статистического моделирования для численного решения краевых задач, получены, в том числе, следующие результаты: построены и изучены весовые алгоритмы метода Монте-Карло для решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода (Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН), получены алгориты численного реше-ний уравнений в частных производных эллиптического и параболического типа (Санкт-Петербургский Государственный Университет), изучены свойства процессов блуждания по областям при численном решении задач теплопроводности (University of Texas, USA),

[2] Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации: Journal of Approximation Theory, Applied Mathematics and Computation, Journal of Computational and Applied Mathematics http://www.journals.elsevier.com/mathematics; Calcolo, Numerical Algorithms, BIT Numerical Mathematics, Сибирский журнал вычислительной математики, Журнал вычислительной математики и математической физики, http://www.springer.com/mathematics, также были использованы и другие источники.

построены функционалы от траектории марковской цепи, слабо аппроксимирующей решение системы стохастических дифференциальных уравнений, являющихся характеристической для краевых задач (the University of Leicester, Уральский федеральный университет).

Степень изученности проблемы. Связи между ветвящимися марковскими процессами и нелинейными уравнениями известны давно. Эта тема обсуждалась в работах Ю.Л.Далецкого, Л.Т.Заплитной, А.А.Скорохода, Б.А.Севостьянова, хотя вопрос об использовании метода Монте-Карло для них не затрагивался. Впервые в этом направлении оригинальные результаты были получены С.М.Ермаковым. В его работах осуществлено непосредственное обобщение схемы Неймана-Улама на случай нелинейных интегральных уравнений с полиномиальным вхождением неизвестной функции, использующие ветвящиеся марковские процессы. Дальнейшее развитие этой теории осуществлено в работах С.М.Ермакова, Г.А.Михайлова, В.В.Некруткина, А.С.Расулова, Р.Н.Макарова, А.А.Сипина, М.Т.Бакоева, А.З.Веселовской, П.Г.Скворцова, Н.А.Симонова и др.

Для решения нелинейных краевых задач с помощью моделирования ветвящихся процессов в настоящее время наиболее развиты две практические схемы метода Монте-Карло. Первый из них – блуждание по узлам сетки с ветвлением, второй метод случайных блужданий по областям (блуждание по сферам, блуждание по эллипсоидам, блуждание по границе области). Построением и обоснованием алгоритмов метода Монте-Карло для решения краевых задач для нелинейных уравнений параболического и эллиптического типов занимались С.М.Ермаков, Г.А.Михайлов, А.С.Расулов, А.А.Сипин, В.В.Некруткин, А.З.Веселовская, М.Т.Бакоев и др.

Векторные алгоритмы метода Монте-Карло, предназначенные для решения систем уравнений, подробно изучены в работах Г.А.Михайлова, А.В.Войтишека, В.В.Некруткина, С.В.Рогазинского, И.Н.Медведева. Редуксией краевых задач к задаче для системы стохастических уравнений, для решения которых используется эйлеровская аппроксимация, занимались Г.Н.Мильштейн, М.В. Третьяков и Я.И.Белопольская.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами научно исследовательского учреждения, в которой выполняется диссертация.

Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно-исследовательских работ Ф.1.1.1 «Стохастический и статистический анализ случайных процессов и применения» (2003-2007 гг.), Ф005-Ф008 «Асимптотический анализ случайных процессов и его применение в теории принятия решений» (2007-2011 гг.), Ф4-ФА-Ф009 «Задачи аппроксимации для распределения вероятностей и их применения в математической статистике» (2012-2016 гг.) Института математики при АН Узбекистана.

Целью исследования является построение и обоснование вероятностных моделей для решения краевых задач для нелинейных уравнений и линейных систем в частных производных второго порядка эллиптического и параболического типов

Задачи исследования:

найти вероятностные представления решений рассматриваемых задач в виде математического ожидания случайных величин, определенных на траекториях Марковских цепей;

построение несмещенных и малосмещенных оценок решений краевых задач для нелинейных эллиптических и параболических уравнений, а также систем линейных уравнений с ограниченной дисперсией;

создание способов моделирования распределений, необходимых для реализации алгоритмов, основанных на вероятностных моделях;

проведение вычислительных экспериментов на основе модельных задач и анализ результатов;

конструирование эффективных алгоритмов, компьютерная реализация построенных вычислительных методов и создание пакета прикладных программ.

Объект исследования – краевые задачи для нелинейных эллиптических и параболических уравнений, краевые задачи для систем линейных уравнений эллиптического и параболического типов.

Предмет исследования – интегральное представление решений нелинейных уравнений эллиптического и параболического типов, свойства Марковских цепей, на траекториях которых строятся несмещённые оценки исследуемых задач, применение теории мартингалов для доказательства несмещённости построенных оценок решения, математические модели и методы решения нелинейных краевых задач.

Методы исследования. В работе использовалась теория методов Монте-Карло, теория вероятностей, методы математической статистики, методы вычислительной математики, методы математического и функционального анализа, теория интегральных и дифференциальных уравнений. Для исследования свойств траекторий блуждания, и свойств самих оценок применяется аппарат теория мартингалов.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

получены вероятностные представления для решения первой и второй краевых задач для нелинейных уравнений эллиптического типа в виде бесконечного степенного ряда; на основе вероятностных представлений построены несмещенные оценки для решения задач в заданной точке;

разработаны численные методы, основанные на вероятностной модели решения краевых задач для нелинейных уравнений эллиптического типа;

получены вероятностные представления для решения краевых задач для нелинейных уравнений параболического типа в виде бесконечного степенного ряда с постоянными и переменными коэффициентами; на основе полученных представлений построены несмещенные оценки для решения задач в заданной точке;

разработаны численные методы, основанные на вероятностной модели решения краевых задач для нелинейных уравнений параболического типа с постоянными и переменными коэффициентами;

получено вероятностное представление для решения краевой задачи для эллиптической системы уравнений эллиптического типа; на основе вероятностного представления на траектории случайного сферического процесса построена несмещенная оценка для решения задачи в заданной точке и разработан численный метод;

получено вероятностное представление для решения краевой задачи для системы уравнений параболического типа; на основе представления на траектории случайного процесса блуждания по сфероидам построена несмещенная оценка для решения задачи в заданной точке, разработана схема численного решения.

Практические результаты исследования. Разработаны алгоритмы статистического моделирования для решений нелинейных уравнений и систем уравнений параболического и эллиптического типов и на основе эффективной компьютерной реализации разработанных вычислительных методов создан комплекс программ для решения изученных задач.

Достоверность результатов исследования обоснована строгостью математических рассуждений, использованием методов статистического моделирования, теории вероятностей, вычислительной математики, функционального анализа. Все результаты подтверждены численными расчетами.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научное значение результатов исследования заключается в том, что полученные в работе научные результаты могут быть использованы для дальнейших исследований нелинейных уравнений, а также уравнений, содержащих в правой части нелинейности в виде экспоненциальной, некоторых тригонометрических и гиперболических функций относительно неизвестной функции и для численного решения краевых задач для них.

Практическая значимость диссертации определяется применением полученных в работе научных результатов в изучении физических процессов, описываемых краевыми задачами для нелинейных уравнений и линейных систем параболеческого и эллиптического типа и численном решении задач.

Внедрение результатов исследования. Полученные в диссертации результаты по построению вероятностных моделей для решения краевых задач для уравнений эллиптического и параболического типов были использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

Оценки метода статистического моделирования для решения краевой задачи для параболической системы были использованы в научно-исследовательском гранте DFNI-102/8 для решения системы интегральных уравнений (справка от 14 августа 2017 года Института информационных и коммуникационных технологий Академии наук Болгарии). Применение результатов исследования позволило уменьшить дисперсии и улучшить статистические свойства оценок.

Построенные вероятностные модели для нелинейных эллиптических и параболических задач были использованы в научно-исследовательских проектах «Monte Carlo Methods in Biochemical Electrostatics», «Stochastic

Estimation of Material Properties» для решения некоторых задач биохимической электростатики и исследования стохастических свойств материалов (справка от 17 июля 2017 года, National Institute for Standards and Technology, USA). Применение этих научных результатов способствовало построение оценок статистического моделирования для решения задач.

Результаты, полученные для решения краевых задач для параболических уравнений, были использованы в научно-исследовательском проекте «Monte Carlo Methods and Big Data Applications» для получения несмещенных оценок решений линейных и нелинейных задач (справка №16/10 от 16 октября 2017 года, Department of Computer Science, Old Dominion University, USA,). Применение научных результатов дало возможность для получения численных оценок решений линейных и нелинейных краевых задач и уменьшения погрешностей оценивания.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования были обсуждены на 22 научно-практических конференциях, в том числе на 14 международных и 8 республиканских научно-практических конференциях.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 41 научная работа, в том числе одна монография и 15 статьи, напечатанных в журналах, которые входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты докторских диссертаций. Из них 6 статей опубликованы в зарубежных журналах и 9 статей в республиканских научных изданиях.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка использованной литературы и приложения. Объем диссертации составляет 200 страницы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной **«Вероятностные модели для решения краевых задач для полулинейных эллиптических уравнений»**, рассматриваются методы статистического моделирования для решения краевых задач для полулинейного уравнения Гельмгольца.

Параграф 1.1 носит вводный характер. В нём описывается общая схема построения вероятностных оценок для решения задачи Дирихле для линейного уравнения Гельмгольца. Приводится определение процесса блуждания по сферам, его свойства и некоторые известные сведения, относящиеся к данной тематике.

В параграфе 1.2 рассматривается задача Дирихле для полулинейного уравнения Гельмгольца. Пусть $D-$ ограниченная область в R^3 с границей Γ, $f(x,u)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x)u^n(x),$ причем коэффициенты ряда удовлетворяют условию $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\bar{a}_n}=0$, где $\sup\limits_{x\in D}|a_n(x)|\le\bar{a}_n$. Рассмотрим следующею задачу Дирихле:

$$-\Delta u(x)+cu(x)=f(x,u),\quad x\in D,\quad u|_{\Gamma}=\varphi. \tag{1}$$

Предполагается, что функции $\varphi(x)\in C(\bar{\Gamma})$, $a_n(x)\in C(\bar{D})$ $(n=0,1,2,\ldots)$ и коэффициент $c>0$ таковы, что существует единственное непрерывное решение полулинейной задачи. Пусть $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\bar{a}_n n<\infty.$ Используя формулу Грина, выписано специальное интегральное уравнение:

$$u(x)=q\int\limits_{S_R(x)}u(y)d\omega+(1-q)\int\limits_{K_R(x)}p(x,y)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n(y)}{c}u^n(y)dy. \tag{2}$$

где $R(x)=\min\limits_{y\in\Gamma}|x-y|$, K_R - шар радиуса R с центром в точке x, S_R- соответствующая сфера, $q=\dfrac{R\sqrt{c}}{\mathrm{sh}(R\sqrt{c})}$, ω- равномерное распределение на S_R,

$$p(x,y)=\frac{\mathrm{sh}[(R-|x-y|)\sqrt{c}]}{4\pi|x-y|(\mathrm{sh}(R\sqrt{c})-R\sqrt{c})}$$

плотность перехода из x в y $(x,y\in K_R)$.

В теореме 1.2 определены условия, обеспечивающие сходимость метода последовательных приближений для интегрального уравнения (2). В соответствии с представлением (2) построен процесс блуждания с ветвлением $\{Z_n\}$ в фазовом пространстве D, в котором участвуют частицы одного типа. Определена переходная функция $P(\mathrm{w},B)$, задан способ моделирования ветвящейся марковской цепи. Доказана следующая лемма.

Лемма 1.1. *Случайный ветвящийся процесс $\{Z_n\}$ с вероятностью единица либо вырождается в области D, либо сходится к точечному распределению $Z=(x^1,n^1;x^2,n^2;\ldots;x^k,n^k)$, где $x^i\in\Gamma$, $i=1,2,\ldots k$.*

На траетории случайного процесса построеная оценка, определенная рекуррентным способом. Пусть $\zeta_0(x)=u(x)$, $\zeta_k(x)=\Psi(\zeta_{k-1}(x))$, где

$$\Psi(\zeta(x))=\begin{cases}\zeta(y_1), & \textit{с вероятностью}\ \ q(x);\\ W_n(y_2)\prod\limits_{i=1}^{n}\zeta^{(i)}(y_2), & \textit{с вероятностью}\ \ (1-q(x))\pi_n,\quad n\ne0\,;\\ W_0(y_2), & \textit{с вероятностью}\ (1-q(x))\pi_0.\end{cases}$$

Здесь $\zeta^{(i)}(y)$ - независимые реализации случайной величины $\zeta(y)$,

$$W_n(y) = \frac{M a_n(y)}{c\bar{a}_n \alpha}, \quad W_0(y) = \frac{a_0(y)}{c\pi_0}.$$

Пусть $\Re_k$ - σ-алгебра, порожденная последовательностями $\{\omega_i\}_{i=0}^{k-1}$, $\left\{\alpha_i^0\right\}_{i=0}^{k-1}, \left\{\alpha_i^1\right\}_{i=0}^{k-1}, \left\{\alpha_i^2\right\}_{i=0}^{k-1}$. Доказана следующая теорема.

Теорема 1.3. *Последовательность* $\{\zeta_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ *образует мартингал относительно* $\{\Re_k\}_{k=0}^{\infty}$. *Если* $M < c$, *то* $\zeta_k(x,t)$ *равномерно интегрируемый мартингал.*

Пусть Γ_ε внутренняя ε окрестность границы, N_1 - момент обрыва процесса внутри области, N_ε - момент первого попадания всех частиц в Γ_ε. $N = \min\{N_1, N_\varepsilon\}$ - момент остановки процесса.

Теорема 1.4. *Если* $M < c$, *то* $\zeta_N(x)$ *является несмещенной оценкой для* $u(x)$ *с конечной дисперсией.*

В параграфе 1.3 описано построение вероятностной модели для решения задачи Неймана для полулинейного уравнения Гельмгольца.

Пусть D- ограниченная выпуклая область в R^m с границей G, $f(x,u) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x)u^n(x),$ причем коэффициенты ряда $b_i(x) \in C(\bar{D})$ $(i = 0,1,2,\ldots)$ и удовлетворяют условию $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\bar{b}_n} = 0$, где $\sup_{x\in D}|b_n(x)| \le \bar{b}_n$, функции $\varphi(x) \in C(G)$, $a(x) \in C(\bar{D})$, $a(x) > 0$, $n = n_x$ - внешняя нормаль к поверхности G в точке x. Рассмотрим следующую задачу:

$$-\Delta u(x) + a(x)u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i(x)u^i(x), x \in D, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_G = \varphi(x), \tag{3}$$

Предположим, что функции $\varphi(x)$, $b_i(x)$, $a(x)$ таковы, что существует единственное непрерывное решение $u(x) \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ задачи (3). Пусть $M = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{b}_k k < \infty.$ Используя формулу Грина и теорему о среднем значение, выписано специальное интегральное уравнение, связывающее значение функции $u(x)$ с ее интегралом по области D и границе области G:

$$u(x) = \frac{1 + I_G(x)}{\sigma_m} \int_D \frac{k_2(r)}{r^{m-1}} \left[\left[\frac{rf(y,u(y))}{c^2 r + c(m-3)} + \left(1 - \frac{a(y)r}{c^2 r + c(m-3)}\right) u(y) \right] dy + \right.$$
$$\left. + \int_G k_1(r) \frac{Cos\varphi_{xy}}{r^{m-1}} u(y) d_y S + \int_G \frac{\exp(-cr)}{r^{m-2}(m-2)} \varphi(y) d_y S \right]. \tag{4}$$

Здесь

$$k_1(r)=\left(1+\frac{cr}{m-2}\right)\exp(-cr),\quad k_2(r)=\frac{c^2r+c(m-3)}{(m-2)}\exp(-cr),\ Cos\varphi_{xy}=(y-x,n_y)/r,$$

$I_G(x)$ - индикатор границы G. Перепишим последнее выражение:

$$u(x)=\int\limits_{\bar{D}}p(x,y)\left\{(1-g(x,y))u(y)+g(x,y)\frac{f(y,u(y))}{a(y)}\right\}d\mu(y)+F(x). \qquad (5)$$

Здесь

$$p(x,y)=\frac{1+I_G(x)}{\sigma_m}\begin{cases}k_1(r)\dfrac{\cos\varphi_{xy}}{r^{m-1}}, & y\in G;\\ \dfrac{k_2(r)}{r^{m-1}}, & y\in D.\end{cases}\qquad g(x,y)=\begin{cases}0, & y\in G;\\ \dfrac{a(y)r}{c^2r+c(m-3)}, & y\in D.\end{cases}$$

$$F(x)=\frac{1+I_G(x)}{\sigma_m}\int\limits_G\frac{\exp(-cr)}{r^{m-2}(m-2)}\varphi(y)d_yS.$$

Мера μ - определена на σ-алгебре борелевских подмножеств $\bar{D}$ равенством $\mu(A)=\lambda(A)+S(A\cap G)$, λ - мера Лебега в R^m, S - площадь поверхности.

В теореме 1.5 определены условия, обеспечивающие сходимость метода последовательных приближений для нелинейного интегрального уравнения (5). В $\bar{D}$ определен случайный ветвящийся процесс, согласованный вероятностным представлением (5). Пусть $Z_0=(x,1)$ - траектория ветвящегося процесса, где $Z_i=(x_i^1,n_i^1;x_i^2,n_i^2;\ldots;x_i^{l_i},n_i^{l_i})$ - точечное распределение в момент времени i.

Лемма 1.2. *Случайный ветвящийся процесс* Z_n *с вероятностью единица вырождается в области* $\bar{D}$.

Последовательность случайных величин $\{\xi_k(x)\}$ зададим рекуррентной формулой. Пусть $\xi_0(x)=u(x)$, $\xi_k(x)=\Psi(\xi_{k-1}(x))$, где

$$\Psi(\xi(x))=\begin{cases}\xi(y), & \textit{с вероятностью } 1-g(x,y);\\ W_n(y)\prod\limits_{i=1}^{n}\xi^{(i)}(y), & \textit{с вероятностью } \pi_n g(x,y);\\ \dfrac{1}{\pi_0}\left(\dfrac{b_0(y)}{a(y)}+\dfrac{\tilde{F}(y)}{g(x,y_2)(1-k_1(\rho))}\right), & \textit{с вероятностью } \pi_0 g(x,y).\end{cases}$$

Здесь y- случайная точка с плотностью распределения $p(x,z)$ при фиксированном x; $\rho=\rho(x,\omega)$; $\xi^{(i)}(y)$- независимые реализации случайной величины $\xi(y)$; $\tilde{F}(x)$- несмещенная оценка для интеграла $F(x)$, $W_n(y)=\dfrac{b_n(y)}{\bar{b}_n}\dfrac{M}{\alpha a(y)}$.

Пусть $\Im_n-\sigma$-алгебра, порожденная течением процесса до момента n, N - момент остановки процесса. Из леммы 1.2 следует, что $N<\infty$ (п.н.).

Теорема 1.6. *a) Последовательность* $\{\xi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ *образует мартингал относительно* $\{\Im_k\}_{k=0}^{\infty}$. *Если* $M < a$, *то* $\xi_k(x)$ *равномерно интегрируемый мартингал. b) Если* $\xi_k(x)$ *равномерно интегрируемый мартингал, то* $\xi_N(x)$ *является несмещенной оценкой для функции* $u(x)$. *Дисперсия ее конечна.*

Рассмотрен частный случай задачи (3) $m=3$ и $a(x)=c^2$. В этом случае $k_2(r)=c^2 r\exp(-cr)$ и второй объемный интеграл в выражении (4) равен нулю:

$$u(x)=\frac{1+I_G(x)}{\sigma_3}\left[\int_D \frac{k_2(r)}{r^2}\frac{f(y,u(y))}{c^2}dy+\int_G k_1(r)\frac{Cos\varphi_{xy}}{r^2}u(y)d_yS+\int_G \frac{\exp(-cr)}{r}\varphi(y)d_yS\right].$$

Вероятностное представление в этом случае отличается от (5) и имеет вид:

$$u(x)=\int_{\bar D} p(x,y)\Phi(u(y))d\mu(y)+F(x),\qquad \Phi(u)=\begin{cases} u(y), & y\in G;\\ \dfrac{f(y,u(y))}{c^2}, & y\in D.\end{cases}$$

Последовательность случайных величин $\{\eta_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ в этом случае определим следующим образом. Пусть $\eta_0(x)=u(x)$, $\eta_k(x)=\Theta(\eta_{k-1}(x))$, где

$$\Theta(\eta(x))=\begin{cases} \eta(y), & \textit{случай } 1;\\ W_n(y)\prod\limits_{i=1}^{n}\eta^{(i)}(y), & \textit{случай } 2;\\ \dfrac{1}{\pi_0}\left(\dfrac{b_0(y)}{c^2}+\dfrac{\tilde F(y)}{(1-k_1(\rho))}\right), & \textit{случай } 3.\end{cases}$$

Случай 1: с вероятностью $k_1(\rho)$ частица перешла $x\to y=y_1\in G$ и продолжила движение. **Случай 2:** с вероятностью $\pi_n\,(1-k_1(\rho))$ частица перешла $x\to y=y_2\in D$ и поделилась на $n\neq 0$ частиц. **Случай 3:** с вероятностью $\pi_0\,(1-k_1(\rho))$ частица перешла $x\to y=y_2\in D$ и частица в этой точке погибла. Здесь $\eta^{(i)}(y)$- независимые реализации случайной величины $\eta(y)$, $W_n(y)=\dfrac{b_n(y)}{\bar b_n}\dfrac{M}{\alpha\, c^2}$.

Теорема 1.7. *a) Последовательность* $\{\eta_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ *образует мартингал относительно* $\{\Im_k\}_{k=0}^{\infty}$. *Если* $M < c^2$, *то* $\eta_k(x)$ *равномерно интегрируемый мартингал. b) Если* $\eta_k(x)$ *равномерно интегрируемыймартингал, то* $\eta_N(x)$ *является несмещенной оценкой для функции* $u(x)$. *Дисперсия ее конечна.*

Вторая глава **«Вероятностные модели для решения краевых задач для полулинейных параболических уравнений»** посвящена разработке и обоснованию вероятностных методов для решения задач, описываемых полулинейными уравнениями параболического типа.

В параграфе 2.1 рассматривается следующая задача для полулинейного параболического уравнения. Пусть D ограниченная область в R^m с границей ∂D, $\Omega = D\times[0,T]$, $T>0$. Функции $y_0(x)\in C(\bar{D})$, $y(x,t)\in C(\partial D\times[0,T])$, $a_n(x,t)\in C(\bar{\Omega})$ $(n=0,1,2,\ldots)$ и коэффициенты $c>0$ и $a>0$. Пусть $f(x,t,u)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x,t)u^n(x,t),$ причем коэффициенты ряда удовлетворяют условию $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\bar{a}_n}=0$, где $\sup\limits_{(x,t)\in\Omega}|a_n(x,t)|\le \bar{a}_n.$ Рассмотрим начально-краевую задачу для параболического уравнения

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-a\Delta u(x,t)+cu(x,t)=f(x,t,u),\quad (x,t)\in\Omega, \tag{6}$$

с начально-краевыми условиями:

$$\begin{cases} u(x,t)=y(x,t), & x\in\partial D,\ t\in[0,T],\\ u(x,0)=y_0(x), & x\in D. \end{cases} \tag{7}$$

Предположим, что функции $a_n(x,t)$, $(n=0,1,2,\ldots)$, $y_0(x)$, $y(x,t)$ и коэффициенты a,c таковы, что существует единственное непрерывное решение полулинейной задачи. Пусть $M=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\bar{a}_n n<\infty.$ Пусть $Z(x,t;y,\tau)$ фундаментальное решение уравнения теплопроводности, семейство областей $Q_r(x,t)$ зависит от параметра $r>0$ и точки $(x,t)\in R^{m+1}$: $Q_r(x,t)=\left\{(y,\tau): Z(x,t;y,\tau)>(4\pi ar)^{-m/2},\tau<t\right\}.$

Лемма 2.1. *Пусть функция* $u(x,t)$ *удовлетворяет уравнению*

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-a\Delta u(x,t)=f(x,t),\quad (x,t)\in\Omega.$$

Тогда справедливо следующее соотношение о среднем значении:

$$u(x,t)=a\iint\limits_{\partial Q_r(x,t)}\left(1-\frac{t-\tau}{r}\right)\left(-\frac{\partial Z(x,t;y,\tau)}{\partial n_y}\right)u(y,\tau)ds\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{r}\iint\limits_{Q_r(x,t)} Z_r(x,t;y,\tau)u(y,\tau)dy\,d\tau+F_r(x,t),$$

где $F_r(x,t)=\frac{1}{r}\iint\limits_{Q_r(x,t)}(r-(t-\tau))Z_r(x,t;y,\tau)f(y,\tau)dy\,d\tau,\quad Z_r=Z-(4\pi ar)^{-m/2},$

ds *элемент площади сферы* $\partial B(x,R(t-\tau)).$

Пусть $r=r(x,t)=\min\left\{\frac{eR^2(x)}{2ma},t,\frac{1}{c}\right\}$. Тогда $\overline{Q_r(x,t)}\subset\Omega$ и при фиксированных (x,t) функции

$$p_1(x,t;y,\tau)=\frac{\left(1-\frac{t-\tau}{r}\right)a}{1-q_m}\left(-\frac{\partial Z(x,t;y,\tau)}{\partial n_y}\right)I_{\partial Q_r(x,t)}(y,\tau),$$

$$p_2(x,t;y,\tau)=\frac{\left(1-\left(r-(t-\tau)\right)c\right)Z_r(x,t;y,\tau)}{rq_m(1-rq_{1m}c)}I_{Q_r(x,t)}(y,\tau),$$

$$p_3(x,t;y,\tau)=\frac{Z_r(x,t;y,\tau)}{rq_m}I_{Q_r(x,t)}(y,\tau)$$

являются в $\bar{Q}_r(x,t)$ плотностями вероятностей перехода. Здесь $q_{1m}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{m+2}{m+4}\right)^{1+m/2}$. Введем обозначения: $\alpha_1=1-q_m, \alpha_2=q_m(1-rcq_{1m})$, $\alpha_3=rcq_mq_{1m}$. Отметим, что $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$.

Теорема 2.1. *Для решения задачи (2.1)-(2.2) справедливо вероятностное представление:*

$$u(x,t)=\alpha_1Eu(y_1,\tau_1)+\alpha_2Eu(y_2,\tau_2)+$$
$$+\alpha_3E\left(1-v^{2/m}\exp\left(-\frac{2\xi_1}{m+2}\right)\right)\frac{f(y_3,\tau_3,u(y_3,\tau_3))}{cq_{1m}}, \tag{8}$$

где (y_i,τ_i) *случайная точка шароида* $Q_r(x,t)$, *имеющая при фиксированных* (x,t) *плотность вероятности перехода* $p_i(x,t;y,\tau)$ $(i=\overline{1,3})$, υ *- бета распределенная случайная величина с параметрами* $(2,2/m)$, ξ_1 *-гамма распределенная случайная величина с параметрами* $(m/2,1)$.

Определим операторы $\Re_1$, $\Re_2$ и $\Re_3$, действующие на функции из $C(\bar{\Omega})$ по формулам: $\Re_i u(x,t)=\iint\limits_{\bar{\Omega}} p_i(x,t;y,\tau)u(y,\tau)d\mu, \quad (x,t)\in\bar{\Omega}, \quad (i=\overline{1,3})$. Здесь мера μ - определена на σ алгебре борелевских подмножеств $\bar{\Omega}$ равенством $\mu(A)=\lambda(A)+S(A\cap\partial\Omega)$, λ - мера Лебега в R^m, S - площадь поверхности. Рассмотрим нелинейный интегральный оператор F:

$$\mathbf{F}u(x,t)=\alpha_1\Re_1u(x,t)+\alpha_2\Re_2u(x,t)+\alpha_3/(cq_{1m})\sum_{n=0}^{\infty}\Re_3\left(a_n(x,t)u^n(x,t)\right).$$

В теореме 2.2 определены условия, накладываемые на коэффициенты, обеспечивающие сходимость метода последовательных приближений для нелинейного интегрального уравнения $u(x,t)=\mathbf{F}u(x,t)$. В соответствии с представлением (8) построен случайный процесс в фазовом пространстве Ω, задана переходная функцию $P((x,t,1),B)$ процесса, определен способ моделирования траектории процесса. Пусть $Z_0=(x,t,1),Z_1,Z_2,\ldots,Z_n,\ldots$ - траектория ветвящегося процесса. Доказана следующая лемма.

Лемма 2.2. *Случайный ветвящийся процесс* $\{Z_n\}$ *с вероятностью единица либо вырождается в области* Ω, *либо сходится к точечному распределению* $T=(x^1,t^1,n^1;x^2,t^2,n^2;\ldots;x^k,t^k,n^k)$, *где* $(x^i,t^i)\in\partial\Omega$, $i=\overline{1,k}$..

Последовательность случайных величин $\{\zeta_k(x,t)\}_{k=0}^{\infty}$, определенных на траектории ветвящегося случайного процесса, зададим рекуррентной формулой. Пусть $\zeta_0(x,t)=u(x,t)$, $\zeta_k(x,t)=\Psi(\zeta_{k-1}(x,t))$, где

$$\Psi(\zeta(x,t))=\begin{cases}\zeta(y_1,\tau_1), & \text{с вероятностью } \alpha_1(x,t);\\ \zeta(y_2,\tau_2), & \text{с вероятностью } \alpha_2(x,t);\\ W_n(y_3,\tau_3)\prod\limits_{i=1}^{n}\zeta^{(i)}(y_3,\tau_3), & \text{с вероятностью } \pi_n\alpha_3(x,t)\,(n\neq 0);\\ W_0(y_3,\tau_3)\dfrac{a_0(y_3,\tau_3)}{\pi_0}, & \text{с вероятностью } \pi_0\alpha_3(x,t).\end{cases}$$

Здесь (y_i,τ_i) - точка, распределенная по плотности вероятностей перехода $p_i(x,t;y,\tau)$ при фиксированных (x,t), $(i=1,2,3)$, $\zeta^{(i)}(y,\tau)$ - независимые реализации случайной величины $\zeta(y,\tau)$. Множители определим следующим образом:

$$W(y,\tau)=\frac{1}{cq_{1m}}\left(1-v^{2/m}\exp\left(-\frac{2\xi}{m+2}\right)\right),$$

$$W_n(y,\tau)=W(y,\tau)\frac{a_n(y,\tau)}{\bar{a}_n}\frac{M}{\alpha},\quad W_0(y,\tau)=W(y,\tau)\frac{a_0(y,\tau)}{\pi_0},$$

где ξ - гамма распределенная случайная величина с параметрами $(m/2,1)$, v - бета распределенная случайная величина с параметрами $(2,2/m)$.

Пусть $\Re_k$ σ алгебра, порожденная случайными величинами $\{\xi_n\}_{n=0}^{k}$, $\{\omega_n\}_{n=0}^{k}$, $\{\xi'_n\}_{n=0}^{k}$, $\{v'_n\}_{n=0}^{k}$, $\{\xi''_n\}_{n=0}^{k}$, $\{v''_n\}_{n=0}^{k}$, которые использовались при определении значений координат траектории.

Теорема 2.3. *Последовательность* $\{\zeta_k(x,t)\}_{k=0}^{\infty}$ *образует мартингал относительно* $\{\Re_k\}_{k=0}^{\infty}$. *Если* $M<cq_{1m}$, *то* $\zeta_k(x,t)$ - *равномерно интегрируемый мартингал.*

Возьмем ε достаточно малым и рассмотрим внутреннюю ε-окрестность границы $(\partial\Omega)_\varepsilon$. Пусть N_1 - момент обрыва процесса внутри области, N_ε - момент первого попадания всех частиц в $(\partial\Omega)_\varepsilon$. $N=\min\{N_1,N_\varepsilon\}$ - момент остановки процесса. Тогда вероятность обрыва траектории в точке будет равна:

$$g(x_n,t_n)=\begin{cases}1, & \text{если } (x_n,t_n)\in(\partial\Omega)_\varepsilon;\\ \pi_0, & \text{если } (x_n,t_n)\in\bar{\Omega}\setminus(\partial\Omega)_\varepsilon.\end{cases}$$

Из леммы 2.2 следует, что $N<\infty$ (п.н.).

Теорема 2.4. *Пусть* $\zeta_k(x,t)$ *является равномерно интегрируемым мартингалом. Тогда* $\zeta_N(x,t)$ *является несмещенной оценкой для* $u(x,t)$ *с конечной дисперсией.*

Для частных случаев, когда $f(x,t,u)$ определяется как $g\exp(u), g\sin(u), g\cos(u), g\ \mathrm{sh}(u), g\ \mathrm{ch}(u)\ (g-const)$ определены значения вероятностей размножения $\{\pi_k\}_{k=0}^{\infty}$.

В **параграфе 2.2** рассматривается задача Коши для полулинейного параболического уравнения. Пусть $\Omega = R^m \times (0,T]$, $F(x,t,u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x,t)u^n(x,t)$ и $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\bar{a}_n} = 0$, здесь $\sup_{(x,t)\in\Omega} |a_n(x,t)| \le \bar{a}_n$. Рассмотрим задачу Коши для следующего параболического уравнения:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - a\Delta u(x,t) + \sum_{i=1}^{m} b_i(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} + c(x,t)u(x,t) = F(x,t,u),\ (x,t)\in\Omega, \tag{9}$$

с начальным условием:

$$u(x,0) = \varphi(x). \tag{10}$$

Пусть функции $\varphi(x)$, $c(x,t)$, $b_i(x,t)$, $i=\overline{1,m}$, $a_k(x,t)$, $k=0,1,2,\cdots$ таковы, что существует единственное непрерывное решение задачи (9)-(10). Предположим $M = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n n < \infty.$ При этих предположениях построена несмещенная оценка на траекториях ветвящегося процесса. Для этого, используя специальное соотношение о среднем, выписано интегральное уравнение относительно функции $u(x,t)$.

$$u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{R^m} Z(x,t;y,\tau)\times$$
$$\times\left(k(x,t;y,\tau)u(y,\tau) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(y,\tau)u^k(y,\tau)\right)dy + \int_{R^m} Z(x,t;y,0)\varphi(y)dy,$$

здесь $k(x,t;y,\tau) = \sum_{i=1}^{m}\left[\frac{\left(b_i(x,t)-b_i(y,\tau)\right)}{2a(t-\tau)}\left(y_i - x_i - (t-\tau)b_i(x,t)\right) + \frac{\partial b_i(y,\tau)}{\partial y_i}\right] - c(y,\tau).$

Пусть $r(t,\tau)$- переходная плотность по τ, удовлетворяющая условиям $r(t,\tau)\ge c_0 > 0$ и $\int_0^t r(t,\tau)d\tau \le c_1 < 1$ при любых $0<\tau<t$; $r(t,\tau)=0$ при $\tau \ge t$ и $\tau < 0$. Далее, пусть $q(t) = 1 - \int_0^t r(t,\tau)d\tau > 0$, $q(t) < 1$. Тогда функция $p(x,t;y,\tau) = \frac{r(t,\tau)}{1-q(t)} Z(x,t;y,\tau)$ является плотностью вероятностей перехода. Для определения закона ветвления ведем параметр $\alpha\in(0;1)$ и определим числовую последовательность $\pi_k = \alpha \cdot \overline{a_k} / M$ для $k = 1, 2, \ldots$ с $\pi_0 = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k$.

Нетрудно заметить, что для произвольного k: $0 \le \pi_k < 1$, $\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = 1$, $\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \pi_k = \alpha$.

Справедливо следующее вероятностное представление решения задачи:

$$
\begin{gathered}
u(x,t) = (1 - q(t)) \int_0^t d\tau \int_{R^m} p(x,t;y,\tau) \times \\
\times \left(\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k W_k(x,t;y,\tau) u^k(y,\tau) \right) dy + q(t) \int_{R^m} Z(x,t;y,0) \frac{\varphi(y)}{q(t)} dy.
\end{gathered} \tag{11}
$$

Значения W_k определяются следующим образом:

$$
W_0(x,t;y,\tau) = \frac{a_0(y,\tau)}{\pi_0 r(t,\tau)}, \; W_1(x,t;y,\tau) = \frac{M}{\alpha \cdot \bar{a}_1} \left(\frac{k(x,t;y,\tau) + a_1(y,\tau)}{r(t,\tau)} \right),
$$

$$
W_k(x,t;y,\tau) = \frac{M}{\alpha \cdot \bar{a}_k} \frac{a_k(y,\tau)}{r(t,\tau)}, \quad k = 2, 3, \ldots.
$$

Определен случайный ветвящийся процесс согласованный вероятностным представлением (11), задана переходная функция процесса $P((x,t,1),B)$, определен способ моделирования траектории процесса.

Пусть $Z_0 = (x,t,1), Z_1, Z_2, \ldots, Z_n, \ldots$- траектория ветвящегося процесса.

Лемма 2.3. *Случайный ветвящийся процесс* Z_n *с вероятностью единица вырождается в области* Ω.

Последовательность случайных величин $\{\zeta_k(x,t)\}_{k=0}^{\infty}$ зададим рекуррентной формулой. Пусть $\zeta_0(x,t) = u(x,t)$, $\zeta_k(x,t) = \Psi(\zeta_{k-1}(x,t))$, где

$$
\Psi(\zeta(x,t)) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x^*)}{q(t)}, & \text{\textit{случай} } 1; \\ W_k(x,t;y,\tau) \prod_{i=1}^{k} \zeta^{(i)}(y,\tau), & \text{\textit{случай} } 2. \end{cases}
$$

Случай 1. При переходе $(x,t) \to (y,\tau)$ частица поглотилась с вероятностью $q(t)$. **Случай 2.** При переходе $(x,t) \to (y,\tau)$ с вероятностью $(1 - q(t))\pi_k$ появилось k новых частиц *(k=0,1,…)*. Здесь $\zeta^{(i)}(y,\tau)$ - независимые реализации случайной величины $\zeta(y,\tau)$, $\varphi(x^*)$ - оценка по одному случайному узлу интеграла $\int_{R^n} Z(x,t;y,0)\varphi(y)dy$.

Пусть $\Re_k$ – σ-алгебра, порожденная последовательностями $\{\tau_i\}_{i=1}^{k}$, $\{\gamma_i\}_{i=1}^{k}$, $\{\omega_i\}_{i=1}^{k}$, здесь τ_i, γ_i, ω_i случайные величины, участвующие в определении значения y_i. Доказано следующее утверждение.

Теорема 2.6. *Последовательность* $\{\zeta_k(x,t)\}_{k=0}^{\infty}$ *образует мартингал относительно* $\{\Re_k\}_{k=0}^{\infty}$. *Если* $M<1$, *то* $\zeta_k(x,t)$ *равномерно интегрируемый мартингал.*

Пусть N момент обрыва процесса. Из леммы 2.3 следует, что $N<\infty$ (п.н.).

Теорема 2.7. *Пусть* $M<1$. *Тогда* $\zeta_N(x,t)$ *является несмещенной оценкой для* $u(x,t)$ *с конечной дисперсией.*

В параграфе 2.3 рассматривается вероятностный подход для решения начально-краевой задачи для нелинейного параболического уравнения с переменными коэффициентами при младших членах. Пусть $\Omega = D\times(0,T]$, D - ограниченная область в R^m, S - граница области D, $\Gamma = S\times(0,T]$ и $\partial\Omega = \Gamma\cup\left(D\times\{0\}\right)$. Пусть $f(x,t,u)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x,t)u^n(x,t)$, причем коэффициенты ряда удовлетворяют условию $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\overline{a}_n}=0$, где $\sup\limits_{(x,t)\in\Omega}\left|a_n(x,t)\right|\le\overline{a}_n$. Рассмотрим для уравнения

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-a\Delta u(x,t)+\sum_{i=1}^{m}b_i(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}+c(x,t)u(x,t)=f(x,t,u)$$

задачу Дирихле в области Ω. При предположении существования решения построена несмещенная оценка на траекториях ветвящегося процесса.

В третьей главе **«Вероятностные модели для решения краевых задач для систем уравнений параболического и эллиптического типов»** рассмотрены вероятностные методы для решения краевых задач для систем уравнений параболического и эллиптического типов.

В параграфе 3.1 приведены некоторые известные факты о векторных алгоритмах статистического моделирования, которые используются при построении оценок решения систем интегральных уравнений.

В параграфе 3.2 построены оценки решения задачи Дирихле для системы эллиптических уравнений.

Пусть D ограниченная область в R^3 с регулярной границей Γ. Рассмотрим задачу Дирихле для следующей системы эллиптических уравнений:

$$\begin{cases}-\Delta u_1(x)+c_{11}u_1(x)=c_{12}u_2(x)+\ldots+c_{1n}u_n(x)+f_1(x),\\ -\Delta u_2(x)+c_{22}u_2(x)=c_{21}u_1(x)+\ldots+c_{2n}u_n(x)+f_2(x),\\ \vdots\\ -\Delta u_n(x)+c_{nn}u_n(x)=c_{n1}u_1(x)+\ldots+c_{(n-1)n}u_{n-1}(x)+f_n(x),\end{cases}\qquad x\in D,$$

с граничными условиями: $u_i(x)=\varphi_i(x),\quad x\in\Gamma,\quad i=\overline{1,n}.$ Здесь $c_{ii}>0$, $i=\overline{1,n}$. Предположим, что функции $f_i(x)$, $\varphi_i(x)$ и коэффициенты c_{ij}, $(i,j=\overline{1,n})$

таковы, что существует единственное непрерывное решение задачи $u_i(x) \in C\left(\bar{D}\right) \cap C^2\left(\bar{D}\right)$, $(i = \overline{1,n})$.

Выписана специальная система интегральных уравнений, связывающих значения функций с их интегралами по сферам и шарам:

$$\begin{cases} u_1(x) = q_1 \int\limits_{S_R} u_1(y)\, d\omega + (1-q_1) \int\limits_{K_R} p_1(x,y) \dfrac{1}{c_{11}} \left(c_{12}u_2(y) + \cdots + c_{1n}u_n(y) + f_1(y) \right) dy \\ \vdots \\ u_k(x) = q_k \int\limits_{S_R} u_k(y)\, d\omega + (1-q_k) \int\limits_{K_R} p_k(x,y) \dfrac{1}{c_{kk}} \left(\sum\limits_{i=\overline{1,n};\, i\neq k} c_{ki}u_i(y) + f_k(y) \right) dy \\ \vdots \\ u_n(x) = q_n \int\limits_{S_R} u_n(y)\, d\omega + (1-q_n) \int\limits_{K_R} p_n(x,y) \dfrac{1}{c_{nn}} \left(c_{n1}u_1(y) + \cdots + c_{n(n-1)}u_{n-1}(y) + f_n(y) \right) dy \end{cases}$$

Здесь $q_k = \dfrac{R\sqrt{c_{kk}}}{\operatorname{sh}\left(R\sqrt{c_{kk}}\right)}$, $p_k(x,y) = \dfrac{\operatorname{sh}\left[\left(R - |x-y|\right)\sqrt{c_{kk}}\right]}{4\pi |x-y| \left(\operatorname{sh}\left(R\sqrt{c_{kk}}\right) - R\sqrt{c_{kk}}\right)}$. Определим в D случайный процесс следующим образом. Зададим матрицу $A(x) = \left\{\alpha_{ij}\right\}_{i,j=\overline{1,n+1}}$, переходных вероятностей: $\alpha_{ii} = q_i$, $M_i = \sum\limits_{j=\overline{1,n};\; j\neq i} |c_{ij}|$,

$\alpha_{i(n+1)} = \dfrac{1-q_i}{n}$, $\alpha_{ij} = (1-q_i)\dfrac{(n-1)}{n}\dfrac{|c_{ij}|}{M_i}$, $(i,j=\overline{1,n};\, i\neq j)$, $\alpha_{(n+1)i} = 0$, $(i=\overline{1,n})$,

$\alpha_{(n+1)(n+1)} = 1$ и матрицу переходных плотностей: $P(x,y) = \left\{p_{ij}(x,y)\right\}_{i,j=\overline{1,n+1}}$,

здесь $p_{ii}(x,y) = I_{S_R}(y)\dfrac{1}{4\pi R^2}, (i=\overline{1,n})$, $p_{ij}(x,y) = I_{K_R}(y)\, p_i(x,y)$, $(i=\overline{1,n},\, j=\overline{1,n+1}, i\neq j)$, $p_{(n+1)i}(x,y) = 0$, $(i=\overline{1,n})$, $p(x,y)_{(n+1)(n+1)} = 1$. Далее, фиксируем номер уравнения $i_0 \in \{1,2,\ldots,n\}$ и начальную точку $x_0 = x$. Пусть в начальный момент имеется частица в точке $x_0 = x$. За один шаг осуществляется переход $i_k \to i_{k+1}$ в соответствии с матрицей переходных вероятностей $A(x_k)$ и переход $x_k \to x_{k+1}$ в соответствии $P(x_k, y)$ матрицей плотностей переходных вероятностей, т.е. с вероятностью $\alpha_{i_k,i_{k+1}}(x_k)$ и частица переходит из точки x_k в точку x_{k+1}, имеющую плотность распределения $p_{i_k i_{k+1}}(x_k, y)$. Вероятность обрыва процесса в точке x_n равна:

$$g(x_n) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x_n \in \Gamma; \\ \alpha_{i_{n-1}n}(x_{n-1}), & \text{если} \quad x_n \in D. \end{cases}$$

В случайном процессе $\{(i_k, x_k)\}_k$, определенном подобным образом, процесс $\{x_k\}_k$ является, модифицированным сферическим процессом, т.е. очередная точка выбирается с вероятностью q_i равномерно на сфере максимального радиуса S_R, содержащейся в D, либо с вероятностью $1-q_i$ распределена в шаре K_R с плотностью p_i. Определен способ моделирования траектории случайного процесса $\{(i_k, x_k)\}_k$.

Пусть $\Theta_0 = 1$, $\Theta_n = \Theta_{n-1} \times V_{i_{n-1}i_n}$, где V_{ij} определяются следующим образом: $V_{ii} = 1, V_{ij} = \dfrac{nM_i \operatorname{sgn}(c_{ij})}{(n-1)c_{ii}}, V_{i(n+1)} = \dfrac{n}{c_{ii}}, (i, j = \overline{1,n};\ i \neq j).$ Определим на траектории процесса последовательность случайных величин $\{\eta_n(i_0, x_0)\}_{n=0}^{\infty}$:

$$\eta_n(i_0, x_0) = \Theta_n \times F(x_n) = \Theta_n \times \begin{cases} u_j(x_n), i_n = j,\ j \neq n+1; \\ f_{i_{n-1}}(x_n), i_n = n+1. \end{cases}$$

Если произошел обрыв в момент времени n, то положим $\eta_{n+k}(i_0, x_0) = \eta_n(i_0, x_0)$, $(i_{n+k}, x_{n+k}) = (i_n, x_n), k = 1, 2, \ldots$ Пусть $\Re_n$ - σ алгебра, порожденная случайными величинами $\{\omega_k\}_{k=0}^{n-1}, \{\alpha_{0k}\}_{k=0}^{n-1}$, $\{\alpha_{1k}\}_{k=0}^{n-1}$, $\{\alpha_{2k}\}_{k=0}^{n-1}$.

Теорема 3.2. *Последовательность $\{\eta_n(i_0, x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ образует мартингал относительно $\{\Re_n\}_{n=1}^{\infty}$. Если $M_i < \dfrac{(n-1)c_{ii}}{n}$ и $\max\limits_{x \in D} | f_i(x) | \leq c_0$, ($c_0 = const$, $i = \overline{1,n}$), то $\{\eta_n(i_0)\}$ -равномерно интегрируемый мартингал.*

Возьмем ε - достаточно малым, рассмотрим внутреннюю ε окрестность границы Γ_ε. Пусть N_1 - момент обрыва процесса внутри области и N_ε - момент первого попадания в Γ_ε. $N = \min\{N_1, N_\varepsilon\}$ - момент остановки процесса. Тогда вероятность обрыва траектории в точке будет равна:

$$g(x_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_n \in \Gamma_\epsilon; \\ \alpha_{i_{n-1}n}(x_{n-1}), & \text{если } x_n \in \bar{D} \setminus \Gamma_\epsilon. \end{cases}$$

Теорема 3.3. *Пусть $\eta_n(i_0)$ является равномерно интегрируемым мартингалом. Тогда $\eta_N(i_0, x_0)$ является несмещенной оценкой для $u_{i_0}(x_0)$ с конечной дисперсией.*

В параграфе 3.3 построены оценки решения задачи Дирихле для системы параболических уравнений.

Пусть D ограниченная область в R^m с границей ∂D и $\Omega = D \times [0, T]$ - цилиндр, $T > 0$. Функции $y_{oi}(x) \in C(\bar{D})$, $y_i(x,t) \in C(\partial D \times [0, T])$, $f_i(x,t) \in C(\bar{\Omega})$ и коэффициенты $a_i > 0$, $c_{ij} > 0$, $(i, j = \overline{1,n})$. Рассмотрим начально-краевую задачу для следующей системы параболических уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} - a_1 \Delta u_1(x,t) + c_{11}u_1(x,t) - c_{12}u_2(x,t) - \ldots - c_{1n}u_n(x,t) = f_1(x,t) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial u_k(x,t)}{\partial t} - a_k \Delta u_k(x,t) + c_{kk}u_k(x,t) - \sum\limits_{i=1,n;\, i \neq k} c_{ki}u_i(x,t) = f_k(x,t) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial u_n(x,t)}{\partial t} - a_n \Delta u_n(x,t) + c_{nn}u_n(x,t) - c_{n1}u_1(x,t) - \ldots - c_{n(n-1)}u_{n-1}(x,t) = f_n(x,t) \end{cases} \quad (12)$$

при $(x,t) \in \Omega$ с начально-краевыми условиями:

$$\begin{cases} u_i(x,t) = y_i(x,t), \quad x \in \partial D, \quad t \in [0,T], \quad i = \overline{1,n}, \\ u_i(x,0) = y_{oi}(x), \quad x \in D, \quad i = \overline{1,n}. \end{cases} \quad (13)$$

В дальнейшем будем предполагать, что система (12) при начально-краевых условиях (13) имеет имеет единственное непрерывное решение

$$u_i(x,t) \in C\left(\bar{D} \times [0,T]\right) \cap C^{2,1}\left(\bar{D} \times [0,T]\right) \quad (i = \overline{1,n}).$$

Отметим, что подобная система уравнений имеет практическое значение и встречается в задачах теории фильтрации.

С помощью фундаментального решения и используя формулу Грина совершается переход от системы дифференциальных уравнений к системе интегральных уравнений. Пусть

$$Z^{(i)}(x,t;y,\tau) = \left(4\pi a_i(t-\tau)\right)^{-m/2} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4a_i(t-\tau)}\right), \; Z_r^{(i)} = Z^{(i)} - \left(4\pi a_i r\right)^{-m/2}.$$

Определим семейство областей $Q_r^{(i)}(x,t)$, зависящих от параметра $r > 0$ и точки $(x,t) \in R^{m+1}$, пологая $Q_r^{(i)}(x,t) = \left\{(y,\tau) : Z_r^{(i)}(x,t;y,\tau) > 0, \, \tau < t\right\}$. Пусть $(x,t) \in \Omega$ и $r = r(x,t) = \min\left\{\dfrac{R_1^2(x)e}{2a_1 m}, \ldots, \dfrac{R_1^2(x)e}{2a_n m}, t\right\}$, где $R_1(x)$ - расстояние от x до границы области D. В этом случае $Q_r^{(i)}(x,t) \subset \bar{\Omega}$. Применяя соотношение о среднем, приведенное в Лемме 2.1 к каждому из уравнений, получим следующую систему интегральных уравнений $(i = \overline{1,n})$:

$$\begin{aligned} u_i(x,t) = a_i \iint\limits_{\partial Q_r^{(i)}(x,t)} \left(1 - \frac{t-\tau}{r}\right)\left(-\frac{\partial Z^{(i)}(x,t;y,\tau)}{\partial n_y}\right) u_i(y,\tau)\, ds\, d\tau + \\ + \frac{1}{r} \iint\limits_{Q_r^{(i)}(x,t)} (1 - (r - (t-\tau))c_{ii}) Z_r^{(i)}(x,t;y,\tau) u_i(y,\tau)\, dy\, d\tau + \\ + \frac{1}{r} \iint\limits_{Q_r^{(i)}(x,t)} (r - (t-\tau)) Z_r^{(i)}(x,t;y,\tau) \sum_{j=1,n;\, j \neq i} c_{ij} u_j(y,\tau)\, dy\, d\tau + \end{aligned} \quad (14)$$

$$+\frac{1}{r}\iint\limits_{Q_r^{(i)}(x,t)}(r-(t-\tau))Z_r^{(i)}(x,t;y,\tau)f_i(y,\tau)dyd\tau.$$

Пусть $r=r(x,t)=\min\left\{\frac{eR_1^2(x)}{2ma_1},\cdots,\frac{eR_1^2(x)}{2ma_n};\frac{1}{c_{11}},\cdots,\frac{1}{c_{nn}};t\right\}$, тогда $\overline{Q_r^{(i)}}(x,t)\in\Omega$ и функции

$$p_0^{(i)}(x,t;y,\tau)=\frac{\left(1-\frac{t-\tau}{r}\right)}{1-q_m}\left(-\frac{\partial Z^{(i)}(x,t;y,\tau)}{\partial n_y}\right)I_{\partial Q_r^{(i)}(x,t)}(y,\tau),$$

$$p_1^{(i)}(x,t;y,\tau)=\frac{\left(1-\left(r-(t-\tau)\right)c_i\right)Z_r^{(i)}(x,t;y,\tau)}{rq_m(1-rq_{1m}c_i)}I_{Q_r^{(i)}(x,t)}(y,\tau),$$

$$p_2^{(i)}(x,t;y,\tau)=\frac{Z_r^{(i)}(x,t;y,\tau)}{rq_m}I_{Q_r^{(i)}(x,t)}(y,\tau),$$

являются плотностями распределений соответственно в $Q_r^{(i)}(x,t)$ при фиксированных (x,t). Здесь $q_{1m}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{m+2}{m+4}\right)^{1+m/2}$. Пусть $(y_2^{(i)},\tau_2^{(i)})$ случайная точка шароида $Q_r^{(i)}(x,t)$, имеющая при фиксированных (x,t) плотность распределения $p_1^{(i)}(x,t;y,\tau)$ $(i=1,n)$. Тогда для $(i=\overline{1,n})$

$$\frac{1}{r}\iint\limits_{Q_r^{(i)}(x,t)}(1-(r-(t-\tau))c_{ii})Z_r^{(i)}(x,t;y,\tau)u_i(y,\tau)dyd\tau=q_m(1-rc_{ii}q_{1m})Eu_i\left(y_2^{(i)},\tau_2^{(i)}\right).$$

Теорема 3.5. *Для решения системы (12) справедливо следующее вероятностное представление:*

$$u_i(x,t)=(1-q_m)Eu_i\left(y^{(i)}(\xi,\omega),\tau(\xi)\right)+q_m(1-rc_{ii}q_{1m})Eu_i\left(y_2^{(i)},\tau_2^{(i)}\right)+$$
$$+q_mrE\left\{\left(1-\upsilon^{2/m}\exp\left(-\frac{2\xi_1}{m+2}\right)\right)\sum_{j=1,n;\,j\neq i}c_{ij}u_j\left(y_1^{(i)}(\xi_1,\upsilon,\omega),\tau_1(\xi_1,\upsilon)\right)\right\}+\quad(15)$$
$$+q_mrE\left(\left(1-\upsilon^{2/m}\exp\left(-\frac{2\xi_1}{m+2}\right)\right)f_i\left(y_1^{(i)}(\xi_1,\upsilon,\omega),\tau_1(\xi_1,\upsilon)\right)\right),$$

где, $y^{(i)}(\xi,\omega)=x+\sqrt{4r\xi a_i\exp\left(-\frac{2\xi}{m}\right)}\omega,\quad \tau(\xi)=t-r\exp\left(-\frac{2\xi}{m}\right),\left(i=\overline{1,n}\right),$

$$y_1^{(i)}(\xi_1,\upsilon,\omega)=x+\sqrt{\frac{4m}{m+2}ra_i\xi_1\upsilon^{2/m}\exp\left(-\frac{2\xi_1}{m+2}\right)}\omega,\ \tau_1(\xi_1,\upsilon)=t-r\upsilon^{2/m}\exp\left(-\frac{2\xi_1}{m+2}\right)$$

$\xi-$ *случайная величина, имеющая плотность распределения*

$$q_1(\rho)=\rho^{m/2}\exp(-\rho)\left(1-\exp\left(-\frac{2\rho}{m}\right)\right)\left((1-q_m)\Gamma\left(1+\frac{m}{2}\right)\right)^{-1},$$

ω- случайная точка поверхности единичной сферы, σ_m- площадь поверхности единичной сферы, ξ_1- гамма распределения с параметрами $(m/2,1)$ случайная величина, υ- бета распределения с параметрами $(2,2/m)$ случайная величина, $\Gamma(\cdot)$- гамма функция.

При построении оценок метода Монте-Карло для решения систем интегральных уравнений вида $U = \mathrm{K}U + H$, необходимо , что спектральный радиус удовлентворял условию $\rho(\mathrm{K}) < 1$. Доказано, что для рассматриваемой задачи $\rho(\mathrm{K}) < 1$. Далее в Ω построен случайный процесс согласованный с вероятностным представлением (15) следующим образом. Зададим матрицу переходных вероятностей $A(x,t) = \left\{\alpha_{ij}\right\}_{i,\, j=\overline{1,n+1}}$, где $\alpha_{ii} = 1 - q_m c_{ii} q_{1m} r(x,t)$,

$\beta_i = q_m c_{ii} q_{1m} r(x,t)(n-1)/n$, $\alpha_{ij} = \dfrac{\beta_i c_{ij}}{M_i}, (i, j = \overline{1,n}; i \neq j)$, $M_i = \sum\limits_{j=1,n;\, j\neq i} c_{ij}$,

$\alpha_{i(n+1)} = \dfrac{q_m q_{1m} r(x,t) c_{ii}}{n}, (i = \overline{1,n}),\ \alpha_{(n+1)i} = 0, (i = \overline{1,n}), \alpha_{(n+1)(\mathrm{n}+1)} = 1.$

Определим матрицу $P(x,t;y,\tau)$ плотностей переходных вероятностей: $P(x,t;y,\tau) = \left\{p_{ij}(x,t;y,\tau)\right\}_{i,\, j=\overline{1,n+1}}$, здесь $p_{ij}(x,t;y,\tau) = p_2^{(i)}(x,t;y,\tau)$, $(i = \overline{1,n};$, $j = \overline{1,n+1}; i \neq j)$, $p_{(n+1)i}(x,t;y,\tau) = 0$, $(i = \overline{1,n})$, $p(x,t;y,\tau)_{(n+1)(\mathrm{n}+1)} = 1,$.

$$p_{ii}(x,t;y,\tau) = \frac{\left(1-q_m\right) p_0^{(i)}\left(x,t;y,\tau\right) + q_m \left(1 - r q_{1m} c_{ii}\right) p_1^{(i)}\left(x,t;y,\tau\right)}{1 - r(x,t) q_{1m} c_{ii} q_m}, (i = \overline{1,n}).$$

Фиксируем номер уравнения $i_0 \in \{1,\ldots,n\}$ и начальную точку $(x_0,t_0) = (x,t)$. Пусть в начальный момент частица находится в точке $(x_0,t_0) = (x,t)$. За один шаг осуществляется переход $i_k \to i_{k+1}$ в соответствии с матрицей переходных вероятностей $A(x_k,t_k)$ и переход $(x_k,t_k) \to (x_{k+1},t_{k+1})$ в соответствии матрицей плотностей переходных вероятностей $P(x_k,t_k;y,\tau)$, т.е. с вероятностью $\alpha_{i_k,i_{k+1}}(x_k,t_k)$ и частица переходит из точки (x_k,t_k) в точку (x_{k+1},t_{k+1}) с плотностью распределения $p_{i_k i_{k+1}}(x_k,t_k;y,\tau)$. Вероятность обрыва траектории в точке (x_n,t_n) равна:

$$g(x_n,t_n) = \begin{cases} 1, & (x_n,t_n) \in \partial\Omega; \\ \alpha_{i_{n-1}n+1}(x_{n-1},t_{n-1}), & (x_n,t_n) \in \Omega. \end{cases}$$

Для случайного процесса соглосованного с вероятностным представлением определен способ моделирования траектории $\left\{x_n,t_n\right\}_n$ процесса. В случае, когда произойдет обрыв в момент времени n, положим $(x_{n+k},t_{n+k}) = (x_n,t_n)$, $k = 0,1,2,\ldots$. Очевидно, последовательность координат частицы $\left(x_n,t_n\right)$ образует марковскую цепь.

Лемма 3.1. *С вероятностью* 1 *марковская цепь* $\{x_n,t_n\}_{n=0}^{\infty}$ *либо сходится при* $n\to\infty$ *к случайной точке границы* $(x_\infty,t_\infty)\in\partial\Omega$, *либо обрывается внутри области.*

Пусть $(x_k,t_k)_{k=0}^{\infty}$ траектория случайного процесса, описанного выше и $\Theta_0=1$, $\Theta_n=\Theta_{n-1}\cdot V_{i_{n-1}i_n}(x_{n-1},t_{n-1};x_n,t_n)$, где $V_{ij}(x_{n-1},t_{n-1};x_n,t_n)$ определяются как:

$$V_{ij}(x_{n-1},t_{n-1};x_n,t_n)=\frac{nM_i}{(n-1)c_{ii}q_{1m}}\left(1-v_n^{2/m}\exp\left(-\frac{2\zeta_n}{m+2}\right)\right), V_{ii}(x_{n-1},t_{n-1};x_n,t_n)=1,$$

$$V_{i(n+1)}(x_{n-1},t_{n-1};x_n,t_n)=\frac{n}{c_{ii}q_{1m}}\left(1-v_n^{2/m}\exp\left(-\frac{2\zeta_n}{m+2}\right)\right), (i,j=\overline{1,n};\ j\neq i).$$

Здесь $\{\zeta_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$- последовательности независимых гамма распределенных случайных величин с параметрами $(m/2,1)$, бета распределенных случайных величин с параметрами $(2,2/m)$ соответственно. Определим последовательность $\{\eta_n(i_0)\}$:

$$\eta_n(i_0)=\Theta_n\times F(x_n,t_n)=\Theta_n\times\begin{cases} u_j(x_n,t_n), & i_n=j,\quad j\neq n+1,\\ f_{i_{n-1}}(x_n,t_n), & i_n=n+1.\end{cases}$$

Если произошел обрыв в момент времени n, то положим $\eta_{n+k}(i_0)=\eta_n(i_0)$, $(x_{n+k},t_{n+k})=(x_n,t_n)$, $k=1,2,\ldots$. Пусть $\Re_n-$ σ алгебра, порожденная случайными величинами $\{\omega_k\}_{k=0}^{n-1},\{v_k\}_{k=0}^{n-1},\{\xi_k\}_{k=0}^{n-1},\{v'_k\}_{k=0}^{n-1},\{\xi'_k\}_{k=0}^{n-1}$, которые используются при определении траектории $\{x_k,t_k\}_{k=0}^{n}$. Доказана следующая

Теорема 3.6. *Последовательность* $\{\eta_n(i_0)\}_{n=1}^{\infty}$ *образует мартингал относительно* $\{\Re_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Если* $\sum\limits_{j=1,n;\,j\neq i} c_{ij}<\frac{(n-1)c_{ii}q_{1m}}{n}$, $\max\limits_{(x,t)\in\Omega}\left|f_i(x,t)\right|\le c_0$, $(c_0=const,\ i=\overline{1,n})$, *то* $\eta_n(i_0)$ *равномерно интегрируемый мартингал.*

Выберем ε достаточно малым и рассмотрим внутреннюю ε окрестность границы $(\partial\Omega)_\varepsilon$. Пусть N_1- момент обрыва процесса внутри области и N_ε - момент первого попадания в ε окрестность границы $(\partial\Omega)_\varepsilon$. $N=\min\{N_1,N_\varepsilon\}$- момент остановки процесса $\{(x_n,t_n)\}$. Тогда вероятность обрыва траектории в точке $\{(x_n,t_n)\}$ будет равна:

$$g(x_n,t_n)=\begin{cases} 1, & (x_n,t_n)\in(\partial\Omega)_\varepsilon,\\ \alpha_{i_{n-1}(n+1)}(x_{n-1},t_{n-1}), & (x_n,t_n)\in\bar{\Omega}\setminus(\partial\Omega)_\varepsilon.\end{cases}$$

Из леммы 3.1 следует, что $N<\infty$ (п.н.).

Теорема 3.7. *Пусть* $\eta_n(i_0)$ *равномерно интегрируемый мартингал. Тогда* $\eta_N(i_0)$ *является несмещенной оценкой, имеющей конечную дисперсию для* $u_{i_0}(x,t)$ - i_0 *ой компоненты вектора решения системы* $u(x,t)$.

Четвертая глава называется **«Вероятностные модели для решения некоторых прикладных задач финансовой математики»**. В параграфе 4.1. «Стохастическая модель рациональной стоимости опциона на несколько рисковых активов» рассмотрена прикладная задача финансовой математики. Как известно, рациональная цена опциона на несколько рисковых активов удовлетворяет многомерному параболическому уравнению с частичными производными. Динамика стоимости рисковых активов определяются системой стохастических уравнений.

Пусть $Q=\left[t_0,T\right)\times R_+^n$. Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t,x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum\limits_{i=1}^{n}b_i(t,x)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}+c(t,x)u+g(t,x)=0, \quad (t,x)\in Q,\\ u(T,x)=\varphi(x), \quad x\in R_+^n.\end{cases} \tag{16}$$

Решение задачи (16) допускает вероятностное представление:

$$u(t,x)=E\left[\varphi(T,X_{t,x}(T))Y_{t,x,1}(T)+Z_{t,x,1,0}(T)\right], \tag{17}$$

где $X_{t,x}(s)$, $Y_{t,x,y}(s)$, $Z_{t,x,y,z}(s)$ $(s\ge t)$ - решение задачи Коши для системы стохастических дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}dX=b(s,X)ds+\sigma(s,X)d\omega(s), \quad X(t)=x,\\ dY=c(s,X)Yds, \quad Y(t)=y,\\ dZ=g(s,X)Yds, \quad Z(t)=z.\end{cases}$$

Здесь $(t,x)\in Q$, $\omega(s)=\left(\omega^1(s);\ldots,\omega^n(s)\right)^T$ - стандартный винеровский процесс, Y и Z - скаляры; $b(s,x)$ - n - мерный вектор-столбец, составленный из коэффициентов $b_i(s,x)$, матрица $\sigma(s,x)$ получается из представления $\sigma(s,x)\sigma^T(s,x)=a(s,x)$, где $a(s,x)=\left\{a_{ij}(s,x)\right\}$ $(i,j=\overline{1,n})$.

Для численной реализации представления (17) используется схема Мильштейна. Введем дискретизацию по времени: $T=t_N>t_{N-1}>\cdots>t_0$ с шагом $h=\dfrac{T-t_0}{N}$. Пусть $(t_0,x_0)\in Q$, ξ - точка, равномерно распределенная на поверхности открытого шара $S_1(0)\subset R^n$ радиуса единица с центром в начале координат, $\rho_0=\sqrt{nh}$. Введем эллипсоид $S(t_0,x_0,\rho)$, полученный при помощи линейного преобразования $\rho\sigma(t_0,x_0)$ шара $S_1(0)$ и сдвига на $x_0+\dfrac{\rho^2}{n}b(t_0,x_0)$. Пусть $\rho=\rho_0$. Если $S(t_0,x_0,\rho)\not\subset R_+^n$, то находим $\rho<\rho_0$ такое что $S(x_0,t_0,\rho)$ касается границы R_+^m. Пусть

$$t_1=t_0+h, \quad X_1=x_0+b(t_0,x_0)\frac{\rho^2}{n}+\rho\sigma(t_0,x_0)\xi,$$

$$Y_1 = y_0\left(1 + c(t_0, x_0)\frac{\rho^2}{n}\right), \quad Z_1 = z_0 + g(t_0, x_0) y_0 \frac{\rho^2}{n}.$$

Ясно, что точка X_1 будет лежать на поверхности сфероида $S(t_0, x_0, \rho)$. Каждая последующая точка траектории моделируется аналогичным способом. Пусть $X_{N+k} = X_k$ и $\Im_k = \sigma(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$. Очевидно, что построенная таким образом последовательность пространственных координат векторного процесса $\{X_k\}$ образует мартингал относительно $\Im_k = \sigma(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$.

Пусть $(t_0, x_0) \in Q$, $S = S(t_0, x_0, \rho)$ эллипсоид, определенный выше, P - цилиндр $P = S \times [t_0, t_0 + h)$. Следующая теорема устанавливает порядок точности одношаговой аппроксимации.

Теорема 4.1. *Пусть f является сужением в $\bar{P}$ решения задачи (16), обладающего непрерывными производными $D_x^m D_t^k f$, $0 \le m + 2k \le 4$, $k = 0{,}1$. Пусть $X_{t_0, x_0}(s)$, $Y_{t_0, x_0, y_0}(s)$, $Z_{t_0, x_0, y_0, z_0}(s)$ - решение системы (4.3), а τ - время выхода процесса $(X_{t_0, x_0}(s), s)$ на границу P. Тогда*

$$E\Big[f(t_1, X_1)Y_1 + Z_1 - f\left(\tau, X_{t_0, x_0}(\tau)\right)Y_{t_0, x_0, y_0}(\tau) - Z_{t_0, x_0, y_0, z_0}(\tau)\Big] = O(h^2). \qquad (4.4)$$

Построен метод, основанный на одношаговой аппроксимации. Пусть

$$t_{k+1} = t_k + h, \qquad X_{k+1} = X_k + b(t_k, X_k)\frac{\rho_k^2}{n} + \rho_k \sigma(t_k, X_k)\xi_k,$$

$$Y_{k+1} = Y_k\left(1 + c(t_k, X_k)\frac{\rho_k^2}{n}\right), \quad Y_0 = 1, \quad Z_{k+1} = Z_k + g(t_k, X_k)Y_k\frac{\rho_k^2}{n}, \quad Z_0 = 0.$$

Здесь $\xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots$- последовательность независимых в совокупности изотропных векторов пространства R^n. Последовательность ρ_k определяется следующим образом. Если $S(t_k, x_k, \rho_0) \subset R_+^n$, то $\rho = \rho_0$; иначе находим $\rho < \rho_0$ такое, что $S(t_k, x_k, \rho)$ касается границы R_+^m.

Теорема 4.2. *Пусть u является решением задачи (16), обладающим непрерывными и ограниченными производными в Q: $D_x^m D_t^k u$, $0 \le m + 2k \le 4$, $k = 0{,}1$. Тогда справедлива оценка*

$$E\Big[\varphi(X_{t,X}(T))Y_{t,x,1}(T) + Z_{t,x,1,0}(T) - u(t,x)\Big] = O(h).$$

Предложенный метод использован для определения рациональной стоимости опциона на несколько рисковых активов.

В параграфе 4.2. рассмотрены способы оценивания и возможности понижения дисперсии оценок для погодных производных.

В приложении **«Пакет прикладных программ «Вероятностные модели решения краевых задач для уравнений эллиптического и параболического типов»»** приводится общая характеристика и описание пакета прикладных программ составленного на основе разработанных в рамках настоящей докторской диссертации вероятностных моделей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена построению вероятностных моделей решений краевых задач нелинейных уравнений и линейных систем параболического и эллиптического типов. Основные результаты исследования состоят в следующем.

Для нелинейных задач получены вероятностные представления решений задач в виде математического ожидания случайных величин; в соответствии с вероятностными представлениями построены ветвящиеся процессы, заданы моделирующие формулы для ветвящихся процессов; доказано, что ветвящиеся процессы с вероятностью единица вырождаются и среднее число частиц n ого поколения для этих процессов меньше единицы;

построены несмещенная оценка на траектории случайного процесса и ε смещенная оценка на процессе с меньшим числом ветвлений; полученные оценки решения имеют ограниченную дисперсию, строится на траекториях ветвящегося процесса с ограниченным средним числом ветвлений и легко моделируется; используя аппарат теории мартингалов и марковских моментов, доказывается несмещенность и ограниченность дисперсии построенных оценок;

в отличие от классического способа, предложенный в работе рекуррентный способ задания оценок при решении нелинейных задач, имеет ряд важных преимуществ, таких так: компактность математической записи, избежание громоздкого описания структур самих деревьев, удобность для применения аппарата теории мартингалов, малый объем, требуемой машинной памяти и простота реализаций оценок;

разработаны алгоритмы случайного блуждания по сфероидам для решения первой краевой задачи для системы параболических уравнений; на основании формулы о среднем, получено вероятностное представление задачи в виде математического ожидания случайной величины;

разработаны алгоритмы случайного блуждания по сферам для решения задачи Дирихле для системы эллиптических уравнений; на основании формулы Грина для шара осуществляется переход от системы дифференциальных уравнений к системе интегральных уравнений;

в соответствии с вероятностными представлениями построены случайные процессы, заданы моделирующие формулы для процессов и определены алгоритмы моделирования; доказано, что координаты случайного процесса блуждания по сфероидам образуют цепь Маркова, доказана сходимость процесса к границе данной области; на траекториях случайных процессов строятся несмещенные и малосмещенные оценки; используя аппарат теории мартингалов и марковских моментов, доказывается несмещенность и ограниченность дисперсии построенных оценок;

в отличии от классических векторных методов Монте-Карло, в предложенном способе построения оценок, не используются матричные «веса», что значительно сокращает объем вычислительной работы;

предложен метод оценивания рациональной стоимости опциона на несколько рисковқх активов, основанный на построении Марковской цепи с поглощением, аппроксимирующий решение этой системы так, что математическое ожидание определенного функционала от траектории цепи близко к решению исходной задачи; для метода получены теоремы сходимости с указанием порядка точности относительно шага аппроксимации.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.27.06.2017.FM.01.02 AT NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

INSTITUTE OF MATHEMATICS

RAIMOVA GULNORA MIRVALIEVNA

PROBABILISTIC MODELS FOR THE SOLUTION OF THE BOUNDARY PROBLEMS FOR THE EQUATIONS OF ELLIPTIC AND PARABOLIC TYPES

01.01.03 – Computational and discrete mathematics
01.01.05 – Theory of probability and mathematical statistics
(Physical and Mathematical Sciences)

DISSERTATION ABSTRACT OF DOCTORAL DISSERTATION (DSc) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent – 2017

The theme of doctoral dissertation (DSc) was registered in the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan with number №B2017.2.DSc/FM58.

Doctoral dissertation has been prepared at Institute of Mathematics.

Abstract of dissertation in posted in three languages (Uzbek, Russian and English (summary)) on the website http://ik-fizmat.nuu.uz/ and an the website of «ZiyoNet» Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific consultant:	**Formanov Shakir Kasimovich** doctor of physical and mathematical Sciences, academic
	Rasulov Abdujabbor Sattarovich doctor of physical and mathematical Sciences, professor
Official opponents:	**Presman Ernst Lvovich** doctor of physical and mathematical Sciences, professor (CEMI RAS)
	Shadimetov Kholmat Makhkamboevich doctor of physical and mathematical Sciences, professor
	Khodjibaev Vali Rahimdjanovich doctor of physical and mathematical Sciences, professor
Leading organization:	**Al-Farabi Kazakh National University**

Defense will take place on «___»____________2017 at _____ at the meeting of Scientific Council number DSc.27.06.2017.FM.01.02 at National University of Uzbekistan (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar area, University str.4, Ph.: (+99871) 227-12-24, fax: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Doctoral dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered №____) (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar area, University str.4, Ph.: (+99871) 246-02-24.)

Abstract of dissertation sent out on «___»_______________2017.
(mailing report № ___________on «___»_______________2017)

A.R.Marakhimov
Chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, D.T.S., professor

Z.R.Rakhmonov
Scientific Secretary of Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.M.S.

M.M.Aripov
Chairman of Scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.M.S., professor

INTRODUCTION (abstract of DSc thesis)

The urgency and relevance of the dissertation topic.

At the present time, In the word, an expand the field of application of algorithms of the method Monte Carlo for various problems of mathematical physics, especially nonlinear boundary value problems is one of the important tasks. Numerical solution of such nonlinear problems is usually connected with considerable difficulties. Design, development and use of statistical modeling techniques, along with the deterministic methods is an actual problem and allows to obtain numerical results in the solution of applied tasks corresponding to increasingly complex models of the theory of gas dynamics, financial mathematics, biology and other fields. Research conducted in the aforementioned areas, confirm the relevance of the topic of the thesis

The aim of the research work is to construct and substantiate probabilistic models for solving boundary problems for nonlinear equations and systems of equations of elliptic and parabolic types in partial derivatives of the second order.

The tasks of the research work:

to find probabilistic representations of the solutions of the problems which represented in the form of a mathematical expectation of random variables defined on trajectories of Markov chains;

to construction of unbiased and epsilon biased estimates with bounded variance of solutions of boundary value problems for nonlinear elliptic and parabolic equations, as well as systems of linear equations;

to creating methods for modelling the distributions needed to implement algorithms based on probabilistic models;

to do computational experiments based on model tasks and analysis of results;

to effective computer realization of the constructed numerical methods and creation of a package of applied programs.

The object of the research work is boundary value problems for nonlinear elliptic and parabolic equations, boundary value problems for systems of linear differential equations of elliptic and parabolic types.

The scientific novelty of the research work is as follows:

numerical methods based on the probabilistic model for solving boundary value problems for nonlinear equations of parabolic type with constant and variable coefficients in the form of an infinite power series are developed;

numerical methods based on the probabilistic model for solving the first and second boundary value problems for nonlinear equations of elliptic type are developed;

numerical methods based on the probabilistic model for solving boundary value problems for systems of equations of elliptic and parabolic types are developed.

The outline of the thesis. The dissertation work is devoted to the construction of probabilistic models of solutions of boundary value problems of nonlinear equations and linear systems of parabolic and elliptic types. The main results of the study are as follows.

For nonlinear problems probabilistic representations of the solutions of problems in the form of a mathematical expectation of some random variables are obtained; branching processes are constructed in accordance with probabilistic representations, simulating formulas for branching processes are given; It is proved that the constructed branching processes degenerate with probability one and the average number of particles of the n -th generation for these processes is less than or equal to one;

an unbiased estimator is constructed on the trajectory of the random process and ε- biased estimator on the process with a smaller number of branches is constructed; The resulting estimates of the solution have a finite variance, is constructed on the trajectories of a branching process with a limited average number of branches and is easily modelled; Using the apparatus of the theory of martingales and Markov times, one can prove the unbiasedness and boundedness of the variance of the constructed estimators;

in contrast to the classical method, the recurrent method of specifying estimates of the solution of non-linear problems proposed in the work has a number of important advantages, such as the compactness of the mathematical notation, the avoidance of a cumbersome description of the structures of the trees themselves, the convenience of using the apparatus of martingale theory, the small volume required computer memory and ease of implementation of estimators.

For systems of equations algorithms of random walk on spheroids for solving the first boundary-value problem for a system of parabolic equations were developed for the first time; On the basis of the mean-value formula, a probabilistic representation of the problem is obtained in the form of a mathematical expectation of some random variable; The convergence of the iteration method for the system of integral equations is studied;

algorithms of random walk on spheres for solving the Dirichlet problem for a system of elliptic equations are developed; On the basis of the Green formula for the sphere, a transformation is made from a system of differential equations to a system of integral equations; the convergence of the iteration method for the system of integral equations is studied;

for each of the problems in accordance with the probabilistic representations random processes are constructed, simulation formulas for random processes are given, algorithms for modelling a random process are given;it is proved that the coordinates of the random process of walk on spheroids form a Markov chain, the convergence of the process to the boundary of a given domain is proved;

unbiased and ε- biased estimators are constructed on the trajectories of the corresponding random processes; using the apparatus of the theory of martingales and Markov moments, one proves the unbiasedness and boundedness of the variance of the constructed estimators;

in contrast to classical vector Monte Carlo methods, the proposed method of constructing estimators does not use matrix "weights", which significantly reduces the complexity of computational work.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (Часть I; Part I)

1. Rasulov A.S., Raimova G.M., Mascagni M. Monograph. Monte-Carlo Methods for Solution Linear and Nonlinear boundary value problems// Tashkent, UWED, 2006, 347 p.
2. Rasulov A.S., Raimova G.M., Mascagni M. Monte-Carlo solution of Cauchy problem for a nonlinear parabolic equation// J. Mathematics and Computers in Simulation, Volume 80, Issue 6 (February 2010), p.1118-1123. (3. Scopus. IF=1.43)
3. Раимова Г.М. Построение вероятностных оценок для решения одной задачи для системы параболических уравнений// Доклады АН РУз, №1, 2010, С.11-15. (01.00.00; №7)
4. Formanov Sh., Rasulov A., Raimova G. Quasirandom sequences in branching random walks// Узбекский математический журнал, №1, 2010, С.145-149. (01.00.00; №6)
5. Раимова Г.М. Решение задачи Коши для параболического уравнения с помощью системы стохастических дифференциальных уравнений// Узбекский математический журнал, №2, 2010, С.128-133. (01.00.00; №6)
6. Raimova G.M. Application variance reduction techniques of Monte-Carlo methods for the pricing weather derivatives// Узбекский математический журнал, №1, 2011, С.109-118. (01.00.00; №6)
7. Раимова Г.М. Вероятностный подход к решению задачи Неймана для нелинейного уравнения Гельмгольца// Узбекский математический журнал, 2012, №2, 86-98 стр. (01.00.00; №6)
8. Раимова Г.М. Вероятностное представление решения начально-краевой задачи для системы параболических уравнений// Теория Вероятностей и ее Применения, 2012, том 57, выпуск 4, С.800-809. (1. Web of Science. IF=0.479)

   (English version) Raimova G.M. Probabilistic Representation of the Solution of the Initial-Boundary Value Problem for the System of Parabolic Equations. J. Theory Probab. Appl. 57-4 (2013), pp. 688-697. (3. Scopus. IF=0.42)
9. Rasulov A., Kilicman A, Eshkuvatov Z., Raimova G. A New Algorithm for System of Integral Equations// J.Abstract and Applied Analysis, Volume 2014 (2014), Article ID 236065, 12 pages. (3. Scopus. IF=0.59)
10. Расулов А.С., Раимова Г.М. Применение метода Монте Карло для вычисления цен многомерных опционов// Узбекский математический журнал, №3, 2014, С. 95-99. (01.00.00; №6)
11. Rasulov A., Raimova G. Monte Carlo solution of the Neumann problem for the nonlinear Helmholtz equation// J. Mathematics and Computers in Simulation, Volume 117, November 2015, Pages 1–9. (3. Scopus. IF=1.43)

12. Raimova G. Probabilistic Approach to Solution of the Neumann Problem for some Nonlinear Equation// J. Communications in Statistics-Simulation and Computation, Volume 45, 2016 - Issue 8, Pages 2981-2990. (3.Scopus. IF=0.58)

13. Раимова Г.М. Вероятностные модели для решения задачи Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений// Узбекский математический журнал, № 1, 2017, С. 114-123. (01.00.00; №6).

14. Раимова Г.М. Вероятностные модели для решения задачи Дирихле для системы эллиптических уравнений// Узбекский математический журнал, № 3, 2017, С. 94-101. (01.00.00; №6).

15. Rasulov A., Raimova G. Monte Carlo method for solution of initial–boundary value problem for nonlinear parabolic equations// J. Mathematics and Computers in Simulation, Available online 26 April 2017, 11 pages, https://doi.org/10.1016/j.matcom.2017.04.003. (3.Scopus. IF=1.43)

16. Расулов А.С., Раимова Г.М. Метод статистического моделирования для решения одной нелинейной задачи// Проблемы вычислительной и прикладной математики, №4(10), 2017, С. 45-52. (01.00.00; №9).

II бўлим (Часть II; Part II)

17. Raimova G. The Solution of the Initial-Boundary Problem for Nonlinear the Parabolic Equation by a Method Monte-Carlo// International silk road conference «Quantum theory, partial differential equations of mathematical physics and their applications, 30 september-3 October 2003, Book of abstracts, p.55-56.

18. Rasulov A.S., Karaivanova A., Raimova G.M., Mascagni M. Quasi-random Sequences in Branching Random Walks// MCM-2004, IMACs conference, Berlin, October-2004, Book of abstracts, p.9.

19. Rasulov A.S., G.M.Raimova G.M. Solution of Neumann's Problem for Nonlinear Equation Using Quasirandom Sequences// Fifth IMACS Seminar on Monte-Carlo Methods MCM 2005, May 16-20, 2005. Tallahassee Florida, Book of abstracts, p.34.

20. Rasulov A.S., Raimova G.M., Mascagni M. Monte-Carlo Solution of Initial Boundary Problem for Some Nonlinear Parabolic Equation// Fifth IMACS Seminar on Monte-Carlo Methods MCM 2005, May 16-20, 2005. Tallahassee Florida Book of abstract, p. 21.

21. Раимова Г.М. Решение задачи Коши для нелинейного параболического уравнения с переменными коэффициентами при младших членах методом статистического моделирования// Материалы республиканской научной конференции «Современные проблемы математического моделирования» 17-18 ноября 2005 года. КГУ им. Бердаха, г. Нукус.

22. Rasulov A.S., Raimova G.M. Comparison analysis of Monte-Carlo and Layer methods to the solution of the Neumann problem for nonlinear parabolic equations // 7th International Conference on Monte-Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods MCQMC 2006 Preliminary Abstracts. 14-18 August, 2006, Ulm University Germany, p 118.

23. Rasulov A.S., Raimova G.M., Mascagni M. Quazi-random “Walks on the Boundary” for the solution of boundary-value problems for the Laplace Equation// 7th International Conference on Monte-Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods MCQMC 2006 Preliminary Abstracts. 14-18 August, 2006, Ulm University Germany, p 117.

24. Rasulov A.S., Raimova G.M., Gemma M. Monte Carlo Solution of European Multi-Asset Rainbow Options// The 8th Ritsumeikan International Symposium on Stochastic Processes and Application to Mathematical Finance and 8th Columbia Jafee Conference on Mathematical Finance. 19-22 March 2008, Ritsumeikan University Book of abstracts, 1p.

25. Раимова Г.М. Решение начально-краевой задачи для системы параболических уравнений методом статистического моделирования// Тезисы конференции «Вычислительные технологии и математическое моделирование», апрель 2009, Ташкент, 1 стр.

26. Ермаков С.М., Расулов А.С., Раимова Г.М. Несмещенная и ε-смещенная оценки решения начально-краевой задачи для систем параболических уравнений// Тезисы докладов Международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий Аль Хорезми 2009» Ташкент 18-21 сент. 2009, С. 57.

27. Расулов А.С., Раимова Г.М. Application of Monte-Carlo method for the solutions of European Multi-Asset Option// Тезисы докладов республиканского научно практического семинара по теории вероятностей и математической статистике, посвященного 90-летию акад. С.Х. Сираждинова (Ташкент, 10 мая 2010г.), С. 40-41.

28. Formanov Sh, Rasulov A., Raimova G. Application Monte Carlo Methods for the Pricing Weather Derivatives// SMRLO’10 . February 8-11, 2010, Beer Sheva, Izrael.

29. Rasulov A.S., Raimova G.M. Application Monte Carlo Methods for the Pricing Weather Derivatives// The 8th IMACS Seminar on Monte Carlo Methods MCM 2011, August 29 – September 2, 2011, Borovets, Bulgaria

30. Раимова Г.М. Способы понижения дисперсии при оценивании стоимости погодных опционов// Прикладная Эконометрика, 1(21) - 2011 январь-февраль-март, С.3-15.

31. Formanov Sh., Rasulov A., Raimova G. Construction of the unbiased estimators for the solution of the nonlinear Neumann problem// Book of abstracts, IV congress of the Turkic world mathematical society, 1-3 July 2011, Baku, Azerbaijan, p 196.

32. Раимова Г.М. Способы понижения дисперсии при оценивании погодных опционов// Материалы VI Ферганской конференции «Предельные теоремы теории вероятностей и их приложения», Ферганский коллоквиум посвященной памяти академика С.Х.Сирожиддинова (г.Фергана, 10-12 мая 2011 года), 98-102 стр.

33. Formanov Sh., Rasulov A., Raimova G. Solution of initial-boundary value problems for nonlinear parabolic equations by method of statistical modeling//

J.Proceedings of IAM (Institute of Applied Mathematics). Contents V1, N.2, 2012, p. 203-218.

34. Раимова Г.М. Эконометрические модели, используемые при оценивании стоимости погодных производных// Сборник тезисов республиканской научно-практической конференции «Халқаро иқтисодиётнинг ривожланишини таҳлил ва прогноз қилишнинг методологик масалалари», ЖИДУ, Ташкент, 2012, 4 с.

35. Rasulov A. S., Raimova G.M., Monte Carlo Solution of the Neumann Problem for the Nonlinear Helmholtz Equation// Abstract, International Conference on Mathematical sciences and statistics, 5-7 February, 2013 (ICMSS2013), UPM, Kuala Lumpur, Malaysia, p.125.

36. Rasulov A. S., Raimova G.M., Monte Carlo Method for Solution of Initial-Boundary Value Problems for Nonlinear Parabolic Equations// Proceedings of 9th IMACS, Annecy-le-Vieux, France, July 15-19, 2013, p.87.

37. Raimova G.M., Probabilistic Approach to solution of the Neumann problem for some Nonlinear equation// «Материалы конференции «Предельные теоремы теории вероятностей и их приложения»»», посвященной памяти академика С.Х.Сирождинова, 2015, 11-12 мая, С.154-158.

38. Rasulov A. S., Raimova G.M., Monte Carlo solution system of parabolic equations// Book of abstracts 10th IMACS, 6-10 July, 2015, Linz, Austria , p. 38.

39. Rasulov A., Raimova G. Monte Carlo Approach for the Pricing of the European Options// Proceeding of International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, Costa Ballena, Cadiz, Spain , July 4– 8, 2016, p.1038-1046.

40. Раимова Г.М. Метод статистического моделирования для решения начально-краевой задачи для одного уравнения теории горения// «Кубатурные формулы и их приложения», Тезисы докладов научного семинара, посвященного 85-летию со дня рождения Г.Н.Салихова (15–16 марта 2017 г.), С.45.

41. Rasulov A.S., Raimova G.M., Bakoev M.T., Rahmatov M.Y. Monte Carlo method for calculation the price of multi-assets options// Abstracts of the Uzbek-Israel International Scientific Conference “Contemporary problems in mathematics and physics”, October 6-10, 2017, Tashkent, p.101-103.

42. Раимова Г.М. Пакет прикладных программ «Вероятностные модели решения краевых задач для уравнений второго порядка»// Свидетельство №DGU 04148 от 05 января 2017 года.

43. Раимова Г.М. Программа «Стохастическая модель для определения рациональной стоимости опциона МАО (Multi-AssetOption)»// Свидетельство №DGU 04455 от 09 июня 2017 года;

44. Раимова Г.М. Программа «Оценка стоимости погодных производных (фьючерсов) и способы понижения дисперсии оценки»// Свидетельство №DGU 04457от 10 июня 2017 года.

Авторефератнинг ўзбек, рус ва инглиз тилларидаги нусхалари
«Ўзбекистон математика журнали» таҳририятида таҳрирдан ўтказилди
(07.12.2017 йил).

Босишга рухсат этилди: 14.12.2017 йил
Бичими 60x45 $^{1}/_{8}$, «Times New Roman»
гарнитурада рақамли босма усулида босилди.
Шартли босма табоғи 4,2. Адади: 100. Буюртма: № 360.

Ўзбекистон Республикаси ИИВ Академияси,
100197, Тошкент, Интизор кўчаси, 68

«АКАДЕМИЯ НОШИРЛИК МАРКАЗИ»
Давлат унитар корхонасида чоп этилди.