ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

ЯХШИБОЕВ МАХМАДИЁР УМИРОВИЧ

ЎЗГАРМАС ВА ЎЗГАРУВЧИЛИ КЎРСАТКИЧЛИ ЛЕБЕГ ФАЗОСИДА КЎП ЎЛЧОВЛИ КАСР ТАРТИБЛИ ИНТЕГРАЛ-ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАШ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ДОКТОРЛИК (DSc) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2021 йил

УДК: 517.983

Физика-математика фанлари бўйича докторлик (DSc) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата докторской диссертации (DSc) по физико-математическим наукам

Content of the Doctoral (DSc) Dissertation Abstract on physical-mathematical sciences

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

ЯХШИБОЕВ МАХМАДИЁР УМИРОВИЧ

ЎЗГАРМАС ВА ЎЗГАРУВЧИЛИ КЎРСАТКИЧЛИ ЛЕБЕГ ФАЗОСИДА КЎП ЎЛЧОВЛИ КАСР ТАРТИБЛИ ИНТЕГРАЛ-ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАШ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ДОКТОРЛИК (DSc) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2021 йил

Физика-математика фанлари бўйича (Doctor of Science) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида № B2018.2.DSc/FM152 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://ik-fizmat.nuu.uz/) ва «ZiyoNet» таълим ахборот тармоғида (http://www.ziyonet.uz/) жойлаштирилган.

Илмий маслаҳатчи: **Садуллаев Азимбой**
физика-математика фанлари доктори, академик

Расмий оппонентлар: **Ашуров Равшан Ражабович**
физика-математика фанлари доктори, профессор

Умарҳаджиев Салаудин Мусаевич
физика-математика фанлари доктори, профессор

Турметов Батырхан Худайбергенович
физика-математика фанлари доктори, профессор

Етакчи ташкилот: Урганч давлат университети

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2021 йил «07» октябр соат 10^00 даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+998 71) 227 12 24, факс: (+998 71) 246 53 21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (95 рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+998 71) 246 02 24).

Диссертация автореферати 2021 йил «25» сентябр куни тарқатилди.
(2021 йил «25» сентябр даги 2 рақамли реестр баённомаси).

Дж. Хаджиев
Илмий даражалар берувчи
илмий кенгаш раиси ўринбосари,
ф.-м.ф.д., академик

Н.К.Мамадалиев
Илмий даражалар берувчи илмий
кенгаш илмий котиби,
ф.-м.ф.ф.д. (PhD)

Р.Н.Ганиходжаев
Илмий даражалар берувчи илмий
кенгаш ҳузуридаги илмий семинар
раиси, ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (докторлик диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёс олиб борилаётган кўп сонли илмий-амалий тадқиқотлар натижасида юзага келадиган кўплаб амалий ва назарий муаммоларни ҳал қилиш каср тартибли интеграл ва дифференциаллаш физиканинг кўпгина мураккаб амалий масалаларини ечишда, биология, бошқариш назарияси, ночизиқли эластиклик назарияси, суюқлик механикаси, турли физик ҳодисаларни математик моделлаштириш ва ночизиқли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни ечишга оид масалалар ва бошқаларда кенг ҳизмат қилади. Мисол сифатида, кўплаб жараёнларни даражаси p ўзгармас ва ўзгарувчили кўрсаткичли Лебег ва Соболев фазолари ёрдамида самарали моделлаштириш мумкинлигини эслашнинг ўзи кифоя. Шунинг учун каср тартибли интеграл ва дифференциаллаш анъанавий усуллар билан ҳал қилинмайдиган ва кўплаб илмий тадқиқот ишларини ҳал этиш ҳозирги куннинг энг муҳим долзарб муаммолари ҳисобланади.

Ҳозирги кунда математик усуллар ва компьютерли моделлаштириш воситаларидан фойдаланиб, фан, техника, иқтисодиёт ва инсон фаолиятининг бошқа соҳаларида каср тартибли ҳосила ва интеграл турли соҳаларига татбиқлари сони тез ўсиб бормоқда, жумладан, эластиклик назариясида, гидромеханикада дифференциал тенгламалар назарияси, хусусан, вариацион масалалар, электрорелогик ва термореологик суюқликларни моделлаштириш, тасвирни қайта ишлаш ва ностандарт ўсишга эга дифференциал тенгламаларни тадқиқ этишда ўзгармас ва ўзгаручили кўрсаткичли Лебег фазолари ҳамда Соболев фазоси кенг қўлланилмоқда. Бу фазоларни гармоник анализдаги операторларнинг чегараланганлиги ва тескарланувчанлигини кўрсатишга боғлиқ масалаларни ҳал эиттишда учратиш мумкин. Шу боис ўзгармас, ўзгаручили кўрсаткичли ва катта Лебег фазоларини тадқиқ қилиш ва гармоник анализнинг юқоридаги масалаларини ечишнинг оптимал усулларини топиш долзарб масалалардан бири бўлиб қолмоқда.

Мустақиллик йилларда мамлакатимизда фундаментал фанларнинг амалий тадбиқига эга бўлган долзарб илмий йўналишларга эътибор кучайтирилди, жумладан, каср тартибли интеграл ва дифференциаллаш долзарб масалалар ҳал қилишда алоҳида эътибор қаратилди. Мазкур йўналишнинг ривожланиши натижасида математик физика, суюқлик механикаси, турли физик ҳодисаларни математик моделлаштириш ва ночизиқли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни ечишга оид масалаларни ечиш бўйича салмоқли натижаларга эришилди. “Математик анализ ва функционал анализ, гармоник анализ, дифференциал тенгламалар ва математик физика, амалий математика ва математик моделлаштириш, эҳтимоллар назарияси ва динамик системалар назарияси” фанларининг устивор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифалари ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди. Бу қарор ижросини таъминлаш мақсадида ўзгармас ва ўзгарувчили кўрсаткичли Лебег фазоларида кўп ўлчовли каср тартибли интеграл-дифференциаллашларни ўрганиш ва уларни ривожлантириш, олинган натижаларни фаннинг турдош соҳаларида қўллаш муҳим аҳамият касб этади.

Ушбу диссертация тадқиқоти Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги "Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида"ги ПФ-4947-сонли Фармони, 2018 йил 27 апрелдаги "Инновацион ғоялар, технологиялар ва лойихаларни амалий жорий қилиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида"ги ПҚ-3682-сонли Қарори, 2019 йил 17 июндаги "2019-2023 йилларда Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетида талаб юқори бўлган малакали кадрлар тайёрлаш тизимини тубдан такомиллаштириш ва илмий салоҳиятни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида"ги ПҚ-4358-сонли Қарори, 2020 йил 7 майдаги "Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида"ги ПҚ-4708-сонли Қарори ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий хужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда муайян даражада ҳизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур диссертация Ўзбекистон Республикаси фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий тадқиқотларни кўриб чиқиш.[1]

Адамар ва Адамар типидаги, Маршо-Адамар, Чжен, Чжен-Адамар касрли тартибли интеграл-диферециаллаш ва бир томонли шар потенциалларини ўрганишга оид илмий тадқиқотлар ва илмий изланишлар етакчи хорижий давлатларнинг илмий марказлари ҳамда олий таълим муассасаларида, жумладан, Жанубий Федерал университет (Ростов, Россия), Беларус давлат университети (Минск, Беларус), В. А. Стеклов номидаги математика институти (Москва, Россия), Жанубий Урал давлат университети (Челябинск, Россия), Математика ва математик моделлаштириш институти (Алмата, Қозоғистон), Аҳмад Яссавий университети (Қозоғистон), А.В. Размадзе (Тбилиси, Грузия), Rheinisch Westfälische Technische Hochschule Aachen (Aachen, Germany), Universidad de La Laguna, (La Laguna-Tenerife, Spain), National University of Sciences and Technology (Islamabad, Pakistan), Çankaya University (Ankara, Turkey), Research Group at King Abdulaziz University (Jeddah, Saudi Arabia), Imecc-Unicamp (Campinas, SP, Brazil),

---

[1] Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи: www. sfedu.ru, www. bsu.by , www.mi-ras.ru, www.susu.ru, www.math.kz, www.ayu.edu.kz, www.rmi.tsu.ge, www.rwth-aachen.de, www.ull.es, www.nust.edu.pk, www.ime.unicmp.br, www.unishivaji.ac.in, www.ualg.pt, www.apply.shu.edu.cn ва бошқа манбалар асосида ишлаб чиқилган.

Shivaji University (Maharashtra, India), University of Algarve (Faro, Portugal), Shanghai University (China) ларда олиб борилмоқда.

J. Vanterler da C. Sousa (Brazil), Kishor D. Kucche (Maharashtra, India), Fahad H.M. (Pakistan) ишларида умумлашган Риман-Лиувилл ва Капуто касрли ҳосилаларини икки параметрли Хилфер касрли ҳосила шаклида киритган ва умумлашган $L^p_{\psi,c}(a,b)$ фазода умумлашган $\psi-$Адамар операторининг муҳим янги хоссаларини исботлаган.

У. Нери, Т. Курокава ишларида ва И. Стейннинг китобида ўрама ўрталатувчи ва ўрама интеграл операторлари қаралади, уларнинг $L^p(\mathrm{R}^n)$ (ёки $L^p_{loc}(\mathrm{R}^n)$) фазода ҳам норма бўйича ва ҳам деярли ҳамма жойда $\varphi(\mathrm{x})$ га яқинлашувчилиги текширилади.

А.Грюнвалд ва А.В.Летников томонидан ихтиёрий тартибли айирманинг хоссаларини ўрганилиб, ўзининг ҳосиласи таърифи учун уларни қўллади. Маршо бутун сонли чекли айирма ёрдамида узоқлашувчи интегрални регулярлаштиришни таклиф қилди. Бу конструкцияларни қўллаш мумкин бўлган функциялар умуман дифференциалланмайди. Бу каср ҳосиланинг яна бир умумий хусусияти, уларни ҳар иккиси ҳам Риман-Лиувилл касрли ҳосиласи билан бошланади, кенгроқ функциялар синфига тадбиқ этиш учун уларни соддалаштириш керак.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Каср тартибли интеграл ва дифференциаллаш назариясининг асослари XIX аср бошларида Ж. Лиувиллнинг илмий ишларида баён этилган бўлиб ва кейинчалик А. Грюнвальд, А. В. Летников, Б. Риман, Х. Хольмгрен, Ж. Адамар, М. Рисс, Г. Вейль, А. Маршо, А. Эрдейи, Х. Кобер, М. М. Джрбашян, Т. Ослер, М. Капуто, Хильфер ва бошқа кўплаб олимларнинг илмий ишларида янада ривожлантирилган. Жумладан Адамар, Адамар типидаги ва Маршо-Адамар типидаги касрли интеграл ва ҳосилалар қуйидаги А. Е. Бекаев, В. В. Карачик, Б. Х. Турметов, А. С. Бердышев, Б.Ж. Кадиркулов, А.А. Килбас, А.А. Титюр, С.А. Марзан, Р.Г. Мамедов, Г.Н. Оруджев, С.Г. Самко, М.У. Яхшибоев, С.А. Шлапаков, P.L. Butzer, J.J. Trujillo, J. Hadamard, H.M. Srivastava, F. Jarad, L. Ma, C. Li, S. Pooseh, R. Almeida, Y. Wu ва бошқа математик олимларнинг илмий ишларида, Г.Р. Емгушева ва В.А. Ногиннинг ишида эса, кўп ўлчовли ҳолатда Рисс потенциалига ўхшаш адамар варианти қаралган. Адамар, Адамар типидаги ва Маршо-Адамар типидаги касрли интеграл ва ҳосилалар уларнинг ишларида етарлича таҳлил қилинган.

Р.Р.Ашуров, А.Кабад ва Б. Х.Турметовларнинг ишларида ўзгармас коэффициентли Капуто каср ҳосилали чизиқли дифференциал тенгламаларни ечиш ўрганилади. Оператор усулидан фойдаланиб, бундай тенгламаларни тузишнинг самарали йўлини келтирадилар. Ш.А. Алимов, Р.Р. Ашуров ва С.Умаровларнинг бир қатор илмий ишлари кузатув жойида белгиланган вақтда ечимлар бўйича каср тартибли ҳосила тўғри тартибини аниқлашнинг тескари масаласига бағишланган.

И.А.Киприяновнинг илмий ишларида йўналиш бўйича касрли ҳосилаларнинг турли хил хоссалари ўрганилган. М. В. Кукушкиннинг ишида эса Киприянов маъносида касрли дифференциал операторининг асосий хоссалари ўрганилган.

Р.Хилфер ўз ишида Риман-Лиувилл ва Капуто ҳосилаларини икки параметрли касрли ҳосила ${}_aD_x^{\alpha,\beta} f$ кўринишида умумлаштиришни таклиф этди. Sousa J. Vanterler da, Rodrigues Fabio, Oliveira Edmundo ларнинг ишларида ψ-Хилфер касрли ҳосиласи киритилади ва бу касрли операторларнинг катта синфларини бирлаштиришда муҳим рол ўйнайди. ψ-Хилфер операторининг бир қатор хоссалари Abdo Mohammed, Panchal Satish, Kucche Kishor, Kharade Jyoti, Sousa Vanterler da, Liu Kui, Wang JinRong, OˆaˆAegan Donal ишларида топиш мумкин. H.M. Fahad, M. Rehman, M. Siddiqiларнинг ишларида Адамар типидаги каср операторлар учун умумлашган кўринишни тақдим этади ва у ψ-Адамар типидаги каср операторлар деб номланади ҳамда умумлашган янги $L^p_{\psi,c}(a,b)$ фазода умумлашган $\psi-$Адамар операторларининг муҳим хоссалари олинган ва исботланган.

Табиий равишда умумлашган классик $L^p(\mathrm{R}^n)$ Лебег фазосининг p ўзгармас кўрсаткичи $\overline{p}$ векторга алмаштириб, 1961 йилда аралаш Лебег фазоси киритилади. A.Benedek ва R. Panzone томонидан Лебег фазосининг аралаш норма тушинчаси киритди ва илмий ишларида ўрганилди. П. И. Лизоркин, Н. Антонис, И. Ивес, А. Бенедек, А. П. Калдерон, Р. Панзоне, А. Стефанов ва Р. Х.Торрес ларнинг илмий ишлари аралаш Лебег фазосининг нормаси бўйича операторларнинг чегараланганлигини ўрганишга бағишланган. О.В. Бесов, В.П.Ильин, С.М. Никольскийниг китобидан аралаш Лебег фазосининг бир қатор хоссаларини топиш мумкин.

Ўзгарувчили кўрсаткичли Лебег фазоларига $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ бағишланган биринчи иш И. И. Шарапудиновнинг (бир ўлчамли ҳолатда) иши бўлиб, кўп ўлчовли ҳолдаги ишлар эса, шу жумладан, С. Г. Самко томонидан келтирилган. Ўзгарувчан кўрсаткичли Лебег фазолари $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ ностандарт ўсиш деб аталадиган моделларни ўрганишда қулай восита бўлиб хизмат қилади (масалан, эластиклик назариясида, гидромеханикада дифференциал тенгламалар назарияси, хусусан, $p(x)-$лапласиан тенгламалар, вариацион масалалар), масалан, В. В. Жиков, X. Fan, D. Zhao, M. Ruzicka ишларида. 1995-1999 йилларда Ruzickaнинг бир қатор мақолалари ўзгаручили кўрсаткичга эга бўлган фазоларга бағишланган реологик ва электро-реологик суюқликлар деб номланишдаги масалаларда пайдо бўлди. Ушбу мақолаларда олинган натижалар M. Ruzicka китобида келтирилган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетининг ОТ-Ф-4-(37-29) «A-аналитик функцияларнинг функционал хоссалари ва уларнинг тадбиқлари. Матрицавий соҳаларда комплекс анализнинг айрим масалалари» мавзусидаги илмий тадқиқот лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади. Мазкур диссертация ишнинг аосий мақсади ўзгармас ва ўзгарувчили кўрсаткичли Лебег фазоларида ўзгартирилган Адамар типидаги каср интеграл ва ҳосилалар, кесмада ψ-Адамар типидаги каср интеграл ва ҳосилалар, локал типидаги каср интеграллар (Чжен ва Адамар-Чжен конструкцияси), бир томонли шар потенциаллар ва ўрама шаклда бўлмаган интеграл операторларнинг хоссаларини тадқиқ қилишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари қуйидагилардан иборат:

Адамар типидаги ва Адамар-Чжен типидаги касрли интегралларнинг хоссаларини ўрганиш ва бўлакли-даражали вазнли жамланувчи функциялар фазосида чегараланганлигини исботлаш;

Лебег фазосида ψ-Маршо-Адамар типидаги ва Маршо-Адамар типидаги кесилган аралаш касрли ҳосилаларнинг интеграл ифодаларини қуриш;

Лебег фазосида ψ-Адамар ва ψ-Адамар типидаги касрли интеграл-лар учун эса тескари ва тавсиф теоремаларини исботлаш, ψ-Маршо-Адамарнинг оддий ва кесилган каср ҳосилалари ўртасида боғланишларни ўрнатиш;

вазнли аралаш Лебег фазоларида икки хил шаклларда бўлган Маршо-Адамар ва Грюнвалд-Летников-Адамар типидаги (йўналиш бўйича ва аралаш) касрли дифференциаллаш операторларининг аниқланиш соҳаларида устма-уст тушиши ҳақидаги теоремаларни исботлаш;

шар қатламида бир томонли шар потенциаллари орасида боғланишларни ўрнатиш ва ўзгарувчили кўрсаткичли Лебег фазосида бир томонли шар потенциалларининг чегараланганлиги ҳақидаги теоремаларни исботлаш;

ўрама бўлмаган интеграл операторларни жамланувчи функциялар фазоларида деярли ҳамма жойда ва норма бўйича яқинлашишни исботлаш.

Тадқиқотнинг объекти Адамар типидаги каср интеграллар ва ҳосилалар, кесмада ψ-Адамар типидаги каср интеграллар ва ҳосилалар, локал типидаги каср интеграллар (Чжен-Адамар конструкцияси), бир томонли шар потенциаллари, ўрама шаклда бўлмаган интеграл операторлар тадқиқотнинг объектлари ҳисобланади.

Тадқиқотнинг предмети тадқиқот предмети турли ностандарт функционал фазоларда интеграл операторлар назариясининг ривожланишига ҳисса қўшишда уларнинг ўзаро боғлиқлиги ва янги тасдиқларни олиш тадқиқотнинг предмети ҳисобланади.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертацияда функциялар назариясининг усуллари тадқиқот ишларида қўлланилади: интеграл ифодалар, мультипликаторлар назарияси, ўрама, сингуляр интеграллар воситаларидан кенг фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

Маршо-Адамар ва Маршо-Адамар типидаги (йўналиш бўйича ва аралаш) кесилган ҳосилаларнинг интеграл ифодалари олинади, вазнли аралаш нормали Лебег фазоларидан олинган функциялардан Адамар ва Адамар типидаги (йўналиш бўйича ва аралаш) интегралларнинг чегараланганлиги ва тескари теоремалар исботланган;

мультипликатив қадамли вектор касрли тартибли аралаш айирма тушунчалари киритилади ҳамда вазнли аралаш нормали Лебег фазоларида икки хил шаклларда бўлган Маршо-Адамар ва Грюнвалд-Летников-Адамар типидаги (йўналиш бўйича ва аралаш) касрли дифференциаллаш операторларининг аниқланиш соҳаларининг устма-уст тушиши ҳақидаги теоремалар исботланган;

Лебег фазосида ψ-Маршо-Адамар ва ψ-Маршо-Адамар типидаги деб аталувчи кесик каср ҳосилалар учун интеграл ифодалари олинади, ψ-Адамар ва ψ-Адамар типидаги касрли интеграллар учун эса тескари ва тавсиф теоремалари исботланади, ψ-Маршо-Адамарнинг оддий ва кесил-ган каср ҳосилалари ўртасида боғланишлар ўрнатилган;

вазнли ўгармас ва ўзгарувчили кўрсаткичли Лебег фазоларида Адамар-Чжен типидаги ва Чжен касрли интегралнинг чегараланганлиги ҳамда ўзгарувчили кўрсаткичли Лебег фазосида Чжен-Маршо касрли ҳосила билан Чжен касрли интеграл тескари эканлиги исботланган;

шар қатламида радиал-сингуляр операторлар орқали бир томонли шар потенциаллари орасида боғланишлар ўрнатилган, ўзгарувчили кўрсаткичли Лебег фазосида бир томонли шар потенциалнинг чегараланганлиги, Чжен-Маршо типидаги бир томонли шар потенциалнинг чегараланганлиги ва тескари теоремалар исботланган;

бир синфда ўрама бўлмаган ўрталатувчи ва ўрама бўлмаган операторлар тушунчаси киритилади ва уларнинг жамланувчи функциялар фазосида ҳам норма бўйича, ҳам деярли ҳамма жойда яқинлашиши исботланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари ностандарт функционал фазоларда операторлар назариясининг ривожланишига ёрдам беради. Тадқиқотда олинган натижалар нафақат функционал анализ ва оператор назарияси мутахассислари учун, балки у асосан хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар, вариацион ҳисоб ва амалий математика фанларининг ҳамда бошқа соҳа масалаларини ечиш имконини беришдан иборатдир.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги. Диссертацияда олинган тадқиқот натижаларининг ишончлилиги унда математик мулоҳазаларининг қатъийлиги, математик анализ, гармоник анализ, функционал анализ усуллари, комплекс ўзгарувчи функциялар назарияси, математик физика ва дифференциал тенгламаларидан фойдаланиш орқали асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти шундан иборатки, кесмада $\psi-$Маршо-

Адамар типидаги каср ҳосила, Адамар-Чжен касрли интеграл ва ҳосила, Чжен типидаги бир томонли шар потенциаллари ва ўрама бўлмаган ўрталатувчи ҳамда ўрама бўлмаган интеграл операторларнинг хоссаларини ўрганишда қўлланилиши мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти ишда олинган илмий натижалар каср тартибли чизиқли ва чизиқли бўлмаган дифференциал тенгламалар, хусусий ҳосилали диффереціал ва интеграл тенгламаларини ечишда тадбиқ этишда хизмат қилиши билан белгиланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Диссертация тадқиқоти жараёнида олинган илмий натижалар қуйидаги йўналишларда амалиётга жорий қилинган:

вазнли аралаш нормали Лебег фазосида Адамар типидаги касрли интегралнинг чегараланганлиги ҳақидаги Соболев типидаги теоремаларидан; модификацияланган каср интегралларнинг композицияси учун формулаларидан; Маршо-Адамар ва Маршо-Адамар типидаги йўналиш бўйича кесилган ҳосилаларнинг интеграл ифодаларидан; вазнли аралаш Лебег фазоларидан олинган функциялардан Адамар ва Адамар типидаги касрли интеграллар учун тескари теоремалардан; оддий ва кесилган касрли ҳосилалар орасидаги боғланишларига оид натижалардан ОТ-Ф4-64 «Биржинслимас ғовак муҳитларда суюқлик сизиши ва моддалар кўчирилиши гидродинамик моделларини тузиш ва сонли тадқиқ этиш» мавзусидаги фундаментал лойиҳанинг “Фрактал тузилишли биржинслимас ғовак муҳитларда модда сизиши ва аномал кўчиши гидродинамик моделларини тузиш ва сонли таҳлил қилиш” деб номланган ғовак муҳитларда модданинг аномал кўчиши жараёнларини математик моделлаштиришда фойдаланилган (Самарқанд давлат университетининг 2021 йил 25 май № 125/130- сонли маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши фрактал тузилишли икки зонали ғовак муҳитларда суспензиялар сизиши ва модданинг аномал кўчиши жараёнларини координата бўйича каср тартибли дифференциал тенгламаларини сонли аппроксимациялаш имконини берган;

шар қатламида радиал-сингуляр операторлар орқали бир томонли шар потенциаллари орасида боғланишларига оид натижалардан Россия Фанлар Академиясининг Х.И. Ибрагимов номидаги илмий тадқиқот институтининг илмий лойиҳаларида фойдаланилган (Россия Фанлар Академиясининг Х.И. Ибрагимов номидаги илмий тадқиқот институтининг 2021 йил 9 июнь № 10221/117- сонли маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши илмий-тадқиқот институти амалий математика лабораторияси тадқиқотчилари вазнли ўгармас ва ўзгарувчили кўрсаткичли Лебег фазоларида кўп ўлчовли интеграл операторларнинг хоссаларини текшириш ва таҳлил қилиш имконини берган.

Лебег фазосида ψ-Маршо-Адамар ва ψ-Маршо-Адамар типидаги деб аталувчи кесик каср ҳосилалар учун интеграл ифодаларидан, ψ-Адамар ва ψ-Адамар типидаги касрли интеграллар учун эса тескари ва тавсиф теоремаларидан, ψ-Маршо-Адамарнинг оддий ва кесилган каср ҳосилалари ўртасида боғланишларига оид натижалардан MRU-OT-9/2017 рақамли «Кўп ўлчовли комплекс анализ» мавзусидаги амалий лойиҳада матрицавий шарларда голоморф функцияларнинг интеграл ифодасини ҳосил қилишда фойдаланилган (М. Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллиий университетининг 2021 йил 23 июнь № 335/352- сонли маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши вазнли Лебег фазоларида ψ -Маршо-Адамарнинг кесилган каср ҳосилалари ёрдамида A(z)-аналитик функцияларнинг функционал хоссаларини исботлаш имконини берган.

Адамар типдаги ва Адамар-Чжен типидаги касрли ҳосилаларнинг турли усулларда кесилишига оид натижалар И.М. Губкин номидаги Россия давлати нефт ва газ университети олий математика кафедрасининг хорижий лойиҳаларида фойдаланилган (И.М. Губкин номидаги Россия давлати нефт ва газ университетининг 2021 йил 17 июнь № 535/5227- сонли маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши вазнли Лебег фазосида Адамар типдаги ва Адамар-Чжен типдаги каср тартибли интеграл-дифференциаллаш усуллари олий математика кафедрасининг амалий ва илмий текшириш ишларини таҳлил қилиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг аппробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 12 та халқаро ва 16 та республика илмий-амалий конференцияларида муҳокамадан ўтказилган ва академик А. Садуллаевнинг "Комплекс анализнинг замонавий муаммолари" (ЎзМУ, Тошкент) мавзусидаги семинарида бир неча бор муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 44 та илмий иш чоп этилган бўлиб, шулардан Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижалари чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 16 та мақола, жумладан 10 таси хорижий ва 6 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация таркиби кириш қисми, беш боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат. Диссертациянинг умумий ҳажми 216 бетни, шу жумладан 192 бет матнни ташкил этади. Фойдаланилган адабиётлар 129 номда бўлиб, 14 бетдан иборат.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Диссертациянинг кириш қисмида мавзунинг долзарблиги ва ва зарурати асослаб берилади, тадқиқотнинг республика фан-техника тараққиётининг устувор йўналишларига долзарблигини белгилайди, диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий тадқиқотларни кўриб чиқади ва муаммонинг ўрганилганлик даражасини кўрсатади, мақсад ва вазифаларни шакллантиради, тадқиқот объекти ва предметини белгилайди, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижаларини баён этади, олинган натижаларни назарий ва амалий натижаларни очиб беради, чоп этилган илмий ишлар ва диссертациянинг тузилиши ҳақида баён қилинади.

Биринчи боб "Вазнли Лебег фазоларида Адамар типидаги касрли интеграл-дифференциаллаш", чекли кесмада ψ-Маршо-Адамар типидаги касрли интеграл ва ҳосилаларни, ярим ҳақиқий сонлар ўқида эса Аадамар ва Маршо-Адамар типидаги касрли ҳосилаларни ўрганишга бағишланган.

Диссертациянинг I бобидаги 1.1- параграф ёрдамчи маълумотлардир. 1.1-§ да ушбу

$$\mathcal{L}^p\left(\mathrm{R}_+,\omega_{\tau,\nu}(x)\frac{dx}{x}\right)=\left\{f:\ \left\|f;\mathcal{L}^p_{\tau,\nu}\right\|=\left(\int_0^1|f(x)|^p x^{-\tau}\frac{dx}{x}+\int_1^\infty|f(x)|^p x^{-\nu}\frac{dx}{x}\right)^{\frac{1}{p}}<\infty\right\},$$

$1\le p<\infty,\ \tau,\nu\in\mathrm{R}$ ва

$$\mathcal{L}^{\overline{p}}_{\overline{\tau}}\left(\mathrm{R}^n_+,\frac{dx}{x}\right)=\left\{f:\left\|f;\ \mathcal{L}^{\overline{p}}_{\overline{\tau}}\right\|=\left\{\int_0^\infty[...(\int_0^\infty|f(x)|^{p_1}x_1^{-\tau_1}\frac{dx_1}{x_1})^{\frac{p_2}{p_1}}...]^{\frac{p_n}{p_{n-1}}}x_n^{-\tau_n}\frac{dx_n}{x_n}\right\}^{\frac{1}{p_n}}<\infty\right\},$$

$1\le p_i<\infty,\tau_i\ge 0,\ i=\overline{1,n}$ фазоларга тегишли бўлган дастлабки маълумотлар ва ёрдамчи леммалар исботланади.

1.2-§ да $\mathcal{L}^p_{\tau,\nu}$ фазода Адамар ва Адамар типидаги касрли интегралларнинг чегараланганлиги ҳақидаги теоремалар исботланади ва Маршо-Адамар типидаги кесилган касрли ҳосилалар учун интеграл ифодалар олинади. Адамар типидаги касрли интеграл қуйидаги

$$(J^\alpha_{+,\mu}\varphi)(x):=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\left(\frac{t}{x}\right)^\mu\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}\varphi(t)\frac{dt}{t},\ x>0,\alpha>0,$$

$$(J^\alpha_{-,\mu}\varphi)(x):=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^\infty\left(\frac{x}{t}\right)^\mu\left(\ln\frac{t}{x}\right)^{\alpha-1}\varphi(t)\frac{dt}{t},\ x>0,\alpha>0$$

кўринишда киритилади. Адамар типидаги касрли ҳосила қуйидаги

$$\left(\mathcal{D}^\alpha_{0+,\mu}f\right)(x):=x^{-\mu}\delta^n x^\mu(J^{n-\alpha}_{0+,\mu}f)(x),\ \ n=[\alpha]+1,\ \ x>0,\alpha>0,$$

$$\left(\mathcal{D}^\alpha_{-,\mu}f\right)(x):=x^\mu(-\delta)^n x^{-\mu}(J^{n-\alpha}_{-,\mu}f)(x),\ n=[\alpha]+1,\ \ x>0,\alpha>0$$

кўринишда бўлади, бунда $[\alpha]$ – α соннинг бутун қисми, $\delta=x\dfrac{d}{dx}$.

1-теорема. *Фараз қилайлик* $\tau\in\mathrm{R},\alpha>0,$ $\mu\in\mathbf{C}$ *и* $1\le p,r\le q\le\infty$, $\alpha>\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q},\ \dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{q}-\dfrac{1}{p}+1$ *бўлсин.*

i) *Агар* $\mathrm{Re}\,\mu>-\dfrac{\tau}{p},\ \ \tau>0$ *бўлса, у ҳолда* $J^\alpha_{+,\mu}$ *оператор* $\mathcal{L}^p_\tau$ *фазони* $\mathcal{L}^q_{\frac{q\tau}{p}}$ *фазога кўчиради ва*

$$\left\| J^{\alpha}_{+,\mu}\varphi\,;\mathcal{L}^{q}_{\frac{q\tau}{p}} \right\| \le T^{+}_{r}(\mu,\tau)\left\|\varphi\,;\mathcal{L}^{p}_{\tau}\right\|,$$

чегараланган бўлади, бунда $1<p<q,\ r<q$, *ёки* $q=\infty,\ r=p'$ *бўлганда,*
$T^{+}_{r}(\mu,\tau)=\left((\mathrm{Re}\,\mu+\frac{\tau}{p})r\right)^{1-\alpha-\frac{1}{r}}\frac{[\Gamma(1+(\alpha-1)r)]^{\frac{1}{r}}}{\Gamma(\alpha)}$; $1=p<q,\ r=q$ *бўлганда,*

$T^{+}_{r}(\mu,\tau)=((\mathrm{Re}\,\mu+\tau)r)^{1-\alpha-\frac{1}{r}}\frac{[\Gamma(1+(\alpha-1)r)]^{\frac{1}{r}}}{\Gamma(\alpha)}$; $p=q, r=1$ *бўлганда,*

$T^{+}_{1}(\mu,\tau)=\left(\mathrm{Re}\,\mu+\frac{\tau}{p}\right)^{-\alpha}$.

(ii) *Агар* $\mathrm{Re}\,\mu>\frac{\tau}{p},\quad \tau<0$ *бўлса, у ҳолда* $J^{\alpha}_{-,\mu}$ *оператор* $\mathcal{L}^{p}_{\tau}$ *фазони* $\mathcal{L}^{q}_{\frac{q\tau}{p}}$ *фазога кўчиради ва*

$$\left\| J^{\alpha}_{-,\mu}\varphi\,;\mathcal{L}^{q}_{\frac{q\tau}{p}} \right\| \le T^{+}_{r}(\mu,\tau)\left\|\varphi\,;\mathcal{L}^{p}_{\tau}\right\|,$$

чегараланган бўлади, бунда $1<p<q,\ r<q$, *ёки* $q=\infty,\ r=p'$ *бўлганда,*
$T^{+}_{r}(\mu,\tau)=\left((\mathrm{Re}\,\mu-\frac{\tau}{p})r\right)^{1-\alpha-\frac{1}{r}}\frac{[\Gamma(1+(\alpha-1)r)]^{\frac{1}{r}}}{\Gamma(\alpha)}$; $1=p<q,\ r=q$ *бўлганда,*

$T^{+}_{r}(\mu,\gamma)=((\mathrm{Re}\,\mu-\tau)r)^{1-\alpha-\frac{1}{r}}\frac{[\Gamma(1+(\alpha-1)r)]^{\frac{1}{r}}}{\Gamma(\alpha)}$; $p=q,\ r=1$ *бўлганда,*

$T^{+}_{1}(\mu,\tau)=\left(\mathrm{Re}\,\mu-\frac{\tau}{p}\right)^{-\alpha}$.

$\mathcal{L}^{p}_{\gamma,\nu}$ фазодаги функциялардан олинган касрли интеграллар учун тескари теорема исботланади .

2-теорема. *Айтайлик* $f=J^{\alpha}_{+,\mu;}\varphi,\varphi\in\mathcal{L}^{p}_{\tau,\nu}(\mathrm{R}_{+})$ *бўлсин, бунда* $1\le p<\infty, 0<\alpha<1,\ \mu\ge 0,\ \ \mu>-\frac{m}{p}, m=\min(\tau,\nu), \tau>0, \nu>0$. *У ҳолда*

$$\left(D^{\alpha}_{+,\mu}f\right)(x)=\lim_{\substack{\rho\to 1\\ \left(\mathcal{L}^{p}_{\tau,\nu}\right)}}\mathrm{D}^{\alpha}_{+,\mu;1-\rho}\ f=\varphi(x)$$

бўлади.

1.3-§ да кесмада ψ-Маршо-Адамар ҳосиласининг умумлашмаси киритилади. ψ-Маршо-Адамар ва Маршо-Адамар типидаги кесик касрли ҳосилаларнинг интеграл ифодалар олинган. ψ-Адамар ва ψ-Адамар типидаги касрли интегралларнинг тескари ва тавсиф теоремалари исботланади.

1-таъриф. *Айтайлик* $\alpha>0,\ -\infty\le a<b\le\infty,\ \mu\in\mathrm{C},\ \varphi$ *функция* $[a,b]$ *кесмада интегралланувчи ва* $\psi\in C^1([a,b])$ *бўлиб, мусбат ўсувчи функция ҳамда барча* $x\in(a,b)$ *лар учун* $\psi'(x)\ne 0$ *бўлсин. У ҳолда* $[a,b]$ *кесмада бошқа* ψ *функцияга нисбатан* α *тартибли ва* μ *параметрли* ψ *-Адамар типидаги чап ва ўнг томонли касрли интеграллар мос равишда қуйидагича аниқланади:*

$$\left(J_{a+,\mu}^{\alpha,\psi}\varphi\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left(\frac{\psi(t)}{\psi(x)}\right)^{\mu}\left(\ln\frac{\psi(x)}{\psi(t)}\right)^{\alpha-1}\varphi(t)\frac{\psi'(t)}{\psi(t)}dt,\ x>a,$$

ва

$$\left(J_{b-,\mu}^{\alpha,\psi}\varphi\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b\left(\frac{\psi(x)}{\psi(t)}\right)^{\mu}\left(\ln\frac{\psi(t)}{\psi(x)}\right)^{\alpha-1}\varphi(t)\frac{\psi'(t)}{\psi(t)}dt,\ x<b.$$

2-таъриф. *Айтайлик* $\alpha>0,\ n-1<\alpha\le n,\ n\in\mathrm{N},\ -\infty\le a<b\le\infty,\ \mu\in\mathrm{C},\ f$ *функция* $[a,b]$ *кесмада интегралланувчи ва* $\psi\in C^1([a,b])$ *бўлиб, мусбат ўсувчи функция ҳамда барча* $x\in(a,b)$ *лар учун* $\psi'(x)\ne 0$ *бўлсин. У ҳолда* $[a,b]$ *кесмада бошқа* ψ *функцияга нисбатан* α *тартибли ва* μ *параметрли* ψ *-Адамар типидаги чап ва ўнг томонли касрли ҳосилалар мос равишда қуйидагича аниқланади:*

$$\left(D_{a+,\mu}^{\alpha,\psi}f\right)(x)=(\psi(x))^{-\mu}\left(\frac{\psi(x)}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{n}(\psi(x))^{\mu}J_{a+,\mu}^{n-\alpha,\psi}f(x),n=[\alpha]+1,\ x>a$$

ва

$$\left(D_{b-,\mu}^{\alpha,\psi}f\right)(x)=(\psi(x))^{\mu}\left(-\frac{\psi(x)}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{n}(\psi(x))^{-\mu}J_{b-,\mu}^{n-\alpha,\psi}f(x),n=[\alpha]+1,x<b.$$

3-теорема. $f(x)=\left(J_{a+,\mu}^{\alpha,\psi}\varphi\right)(x),\ \varphi\in L_{\psi,c}^{p}(a,b),\quad 0<\alpha<1,\quad 1\le p<\infty,$ $\mu\ge 0,\ c\in\mathrm{R},\mu>c,\ 0<\rho<1$ *ва* $\psi\in C^1([a,b])$ *бўлиб, мусбат ўсувчи функция ҳамда барча* $x\in(a,b)$ *лар учун* $\psi'(x)\ne 0$ *бўлсин. У ҳолда*

$$\left(D_{a+,\mu}^{\alpha,\psi}f\right)(x)=\lim_{\rho\to 1-0}\left(D_{a+,\mu;1-\rho}^{\alpha,\psi}f\right)(x)=\varphi(x)$$

бўлади, бунда лимит $L_{\psi,c}^{p}(a,b)$ *фазода тушунилади.*

4-теорема. $f(x)$ *функцияни* $f(x)=\left(J_{a+,\mu}^{\alpha,\psi}\varphi\right)(x)$ *(бу ерда* $\varphi\in L_{\psi,c}^{p}(a,b),$ $0<\alpha<1,\ 1<p<\infty,\ \mu\ge 0,c\in\mathrm{R},\ \mu>c$ *ва* $\psi\in C^1([a,b])$ *бўлиб, мусбат ўсувчи функция ҳамда барча* $x\in(a,b)$ *лар учун* $\psi'(x)\ne 0$*) кўринишда ифодалаш учун* $\left(\frac{\psi(a)}{\psi(x)}\right)^{\mu}\left(\ln\frac{\psi(x)}{\psi(a)}\right)^{-\alpha}f(x)\in L_{\psi,c}^{p}(a,b)$ *бўлиши зарур ва етарли ҳамда* $L_{\psi,c}^{p}(a,b)$ *фазода* $\lim_{\rho\to 1-0}\varphi_\rho(x)$ *мавжуд бўлсин, бунда* $\varphi_\rho(x)=\left(D_{a+,\mu,1-\rho}^{\alpha,\psi}f\right)(x)$.

"**Аралаш норма бўйича вазнли Лебег фазоларида Адамар типидаги касрли интеграл-дифференциллаш**" деб номланувчи иккинчи боб вазнли Лебег фазоларида Адамар типидаги йўналиш ва аралаш каср интеграллар, яна шунингдек Маршо-Адамар ва Грюнвалд-Летников-Адамар типидаги йўналиш бўйича ва аралаш каср дифференциллашларни ўрганишга бағишланган.

2.1-§ да вазнли аралаш Лебег фазоларида Адамар типидаги йўналиш бўйича ва аралаш каср интегралларни чегараланганлиги исботланади.

5-теорема. *Айтайлик* $\tau_i \in \mathrm{R}, 1 \le p_i \le \infty, \alpha_i > 0$ *ва* $\mu_i \in \mathrm{C}, i = \overline{1,n}$ *бўлсин.*

(i) *Агар* $\operatorname{Re}\mu_i > -\tau_i^*$, *бу ерда*

$$\tau_i^* = \begin{cases} \dfrac{\tau_i}{p_i}, & 1 \le p_i < \infty, \\ \tau_i, & p_i = \infty, \; i = \overline{1,n}, \end{cases} \qquad (1)$$

бўлсин, у ҳолда $J^{\alpha}_{+\ldots+,\mu}$ *оператор* $\mathcal{L}^{\overline{p}}_{\overline{\tau}}$ *фазода чегараланган ва*

$$\left\| J^{\alpha}_{+\ldots+,\mu}\varphi \,; \mathcal{L}^{\overline{p}}_{\overline{\tau}} \right\| \le \theta^{+} \left\| \varphi \,; \mathcal{L}^{\overline{p}}_{\overline{\tau}} \right\|, \;\; \theta^{+} = \prod_{i=1}^{n} \left(\operatorname{Re}\mu_i + \tau_i^* \right)^{-\alpha_i} .$$

(ii) *Агар* $\operatorname{Re}\mu_i > \tau_i^*$, *(бу ерда* τ_i^*, $i = \overline{1,n}$ *– (1) даги ўзгармас сон) бўлсин, у ҳолда* $J^{\alpha}_{-\ldots-,\mu}$ *оператор* $\mathcal{L}^{\overline{p}}_{\overline{\tau}}$ *фазода чегараланган ва*

$$\left\| J^{\alpha}_{-\ldots-,\mu}\varphi ; \mathcal{L}^{\overline{p}}_{\overline{\tau}} \right\| \le \theta^{-} \left\| \varphi \,; \mathcal{L}^{\overline{p}}_{\overline{\tau}} \right\|, \;\; \theta^{-} = \prod_{i=1}^{n} \left(\operatorname{Re}\mu_i - \tau_i^* \right)^{-\alpha_i} .$$

(iii) *Агар* $\operatorname{Re}\mu > -\sum_{i=1}^{n} \tau_i^* \ln\omega_i$, *(бу ерда* τ_i^*, $i = \overline{1,n}$ *– (1) даги ўзгармас сон) бўлсин, у ҳолда* $J^{\alpha}_{\omega,\mu}$ *оператор* $\mathcal{L}^{\overline{p}}_{\overline{\tau}}$ *фазода чегараланган ва*

$$\left\| J^{\alpha}_{\omega,\mu}\varphi \,; \mathcal{L}^{\overline{p}}_{\overline{\tau}} \right\| \le \theta(\omega) \left\| \varphi ; \mathcal{L}^{\overline{p}}_{\overline{\tau}} \right\|, \;\; \theta(\omega) = \left(\operatorname{Re}\mu + \sum_{i=1}^{n} \tau_i^* \ln\omega_i \right)^{-\alpha} .$$

Аралаш норма бўйича вазнли Лебег фазоларида Адамар типидаги касрли интегралларнинг чегараланганлиги учун Соболев типидаги теорема исботланган.

6-теорема. *Айтайлик* $\tau_i \in \mathrm{R}$, $\alpha_i > 0$, $\mu_i \in \mathrm{C}, i = \overline{1,n}$ *ва* $1 \le p_i, r_i \le q_i \le \infty$, $\dfrac{1}{r_i} = \dfrac{1}{q_i} - \dfrac{1}{p_i} + 1$, $i = \overline{1,n}$, $\alpha_i > \dfrac{1}{p_i} - \dfrac{1}{q_i}$, $i = \overline{1,n}$ *бўлсин.*

(i) *Агар* $\operatorname{Re}\mu_i > -\tau_i^*$, $i = \overline{1,n}$, *(бу ерда* $\tau_i^*, i = \overline{1,n}$ *– (1) даги ўзгармас сон) бўлсин, у ҳолда* $J^{\alpha}_{+\ldots+,\mu}$ *оператор* $\mathcal{L}^{\overline{p}}_{\overline{\tau}}$ *фазони* $\mathcal{L}^{\overline{q}}_{\overline{\nu}}$ *фазога кўчиради ва*

$$\left\| J^{\alpha}_{+\ldots+,\mu}\varphi \,; \mathcal{L}^{\overline{q}}_{\overline{\nu}} \right\| \le \prod_{i=1}^{n} C^{+}_{r_i}\left(\mu_i, \tau_i^* \right) \left\| \varphi \,; \mathcal{L}^{\overline{p}}_{\overline{\tau}} \right\|,$$

чегараланган бўлади, бунда $\bar{\nu}=\left(\tau_1^* q_1,\ldots,\tau_n^* q_n\right)$, $1<p_i<q_i,\, r_i<q_i$, *ёки* $q_i=\infty,\, r_i=p_i',\, i=\overline{1,n}$, *бўлганда,* $C_{r_i}^{+}\left(\mu_i,\tau_i^*\right)=\left((\operatorname{Re}\mu_i+\tau_i^*)r_i\right)^{1-\alpha_i-\frac{1}{r_i}}\times$
$\times\dfrac{[\Gamma\left(1+\left(\alpha_i-1\right)r_i\right)]^{\frac{1}{r_i}}}{\Gamma\left(\alpha_i\right)}$, $1=p_i<q_i,\, r_i=q_i,\, i=\overline{1,n}$,*бўлганда,*

$C_{r_i}^{+}\left(\mu_i,\tau_i\right)=\left((\operatorname{Re}\mu_i+\tau_i)r_i\right)^{1-\alpha_i-\frac{1}{r_i}}\ \dfrac{[\Gamma\left(1+\left(\alpha_i-1\right)r_i\right)]^{\frac{1}{r_i}}}{\Gamma\left(\alpha_i\right)}$, $p_i=q_i, r_i=1$, $i=\overline{1,n}$ *бўлганда* $C_1^{+}\left(\mu_i,\tau_i^*\right)=\left(\operatorname{Re}\mu_i+\tau_i^*\right)^{-\alpha_i}$,.

(ii) *Агар* $\operatorname{Re}\mu_i>\tau_i^*$, $i=\overline{1,n}$, *(бу ерда* τ_i^*, $i=\overline{1,n}$ *– (1) даги ўзгармас сон) бўлсин, у ҳолда* $J_{-\ldots-,\mu}^{\alpha}$ *оператор* $\mathcal{L}_{\bar{\tau}}^{\bar{p}}$ *фазони* $\mathcal{L}_{\bar{\nu}}^{\bar{q}}$ *фазога кўчиради ва*

$$\left\|J_{-\ldots-,\mu}^{\alpha}\varphi\,;\mathcal{L}_{\bar{\nu}}^{\bar{q}}\right\|\le\prod_{i=1}^{n}C_{r_i}^{-}\left(\mu_i,\tau_i^*\right)\left\|\varphi\,;\mathcal{L}_{\bar{\tau}}^{\bar{p}}\right\|,$$

чегараланган бўлади, бунда $\bar{\nu}:=\left(\tau_1^* q_1,\ldots,\tau_n^* q_n\right)$, $1<p_i<q_i,\, r_i<q_i$, *ёки* $q_i=\infty,\, r_i=p_i'$, $i=\overline{1,n}$, *бўлганда* $C_{r_i}^{-}\left(\mu_i,\tau_i^*\right)=\left((\operatorname{Re}\mu_i-\tau_i^*)r_i\right)^{1-\alpha_i-\frac{1}{r_i}}$
$\dfrac{[\Gamma\left(1+\left(\alpha_i-1\right)r_i\right)]^{\frac{1}{r_i}}}{\Gamma\left(\alpha_i\right)}$, $1=p_i<q_i,\, r_i=q_i$, $i=\overline{1,n}$, *бўлганда,*

$C_{r_i}^{-}\left(\mu_i,\tau_i\right)=\left((\operatorname{Re}\mu_i-\tau_i)r_i\right)^{1-\alpha_i-\frac{1}{r_i}}\ \dfrac{[\Gamma\left(1+\left(\alpha_i-1\right)r_i\right)]^{\frac{1}{r_i}}}{\Gamma\left(\alpha_i\right)}$, $p_i=q_i, r_i=1$, $i=\overline{1,n}$ *бўлганда* $C_1^{+}\left(\mu_i,\tau_i^*\right)=\left(\operatorname{Re}\mu_i-\tau_i^*\right)^{-\alpha_i}$.

2.2-§ да Маршо-Адамар типидаги (йўналиш бўйича, аралаш) кесик касрли ҳосилалари учун интеграл ифодалари олинади.

2.3-§ да $\mathcal{L}_{\bar{\tau}}^{\bar{p}}$ фазодаги функциялардан олинган Адамар типидаги аралаш касрли интеграллар учун тескари теоремалар исботланади.

7-теорема. *Айтайлик* $f=J_{\omega,\mu}^{\alpha}\varphi,\ \varphi\in\mathcal{L}_{\bar{\tau}}^{\bar{p}}$, *бунда* $0<\alpha<1, \mu\ge 0, 1\le p_i<\infty$, $\tau_i,\ \ln\omega_i\in\mathrm{R}$, $i=\overline{1,n},\ \mu+\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\tau_i}{p_i}\ln\omega_i>0$ *ва* $0<\rho<1$ *бўлсин. У ҳолда*

$$(D_{\omega,\mu}^{\alpha}f)(x)=\lim_{\rho\to 1}(D_{\omega,\mu;1-\rho}^{\alpha}f)(x)=\varphi(x)$$

бўлади, бу ердаги лимитни $\mathcal{L}_{\bar{\tau}}^{\bar{p}}$ *фазодаги деб тушунилади.*

8-теорема. *Айтайлик* $f=J_{+\cdots+,\mu}^{\alpha}\varphi,\ \varphi\in\mathcal{L}_{\bar{\tau}}^{\bar{p}}$, *бунда* $\tau_i>0,\ 0<\alpha_i<1,\ \mu_i\ge 0$, $1\le p_i<\infty,\ \mu_i>-\tau_i^*$, $i=1,\ldots,n$ *бўлсин. У ҳолда*

$$\left(\mathrm{D}_{+\cdots+,\mu}^{\alpha}f\right)(x)=\lim_{\rho\to 1}\left(\mathrm{D}_{+\cdots+,\mu;1-\rho}^{\alpha}f\right)(x)=\varphi(x)$$

бўлади, бу ердаги лимитни $\mathcal{L}_{\tau}^{\bar{p}}$ *фазодаги деб тушунилади.*

2.4-§ да вазнли аралаш Лебег фазоларида икки хил кўринишда бўлган Маршо-Адамар ва Грюнвалда-Летников-Адамар типидаги (йўналиш бўйича ва аралаш) касрли дифференциаллаш операторларининг аниқланиш соҳаларида мос тушиши ҳақидаги теоремалар исботланади.

9-теорема (йўналиш бўйича касрли ҳосила ҳолати). *Фараз қилайлик* $f(x)\in \mathcal{L}_{-\bar{\lambda}}^{\bar{r}},\ 1\le r_i<\infty,\ \lambda_i\ge 0$ *ва* $\mu_i\ge 0,\ i=\overline{1,n}$ *бўлсин. У ҳолда* ω *йўналиш бўйича Грюнвальд-Летников-Адамар типидаги касрли ҳосила, яъни*

$$\left(D_{\omega,\mu}^{\alpha)} f\right)(x)=\lim_{\substack{\rho\to 1-0\\ \left(\mathcal{L}_{\tau}^{\bar{p}}\right)}}\frac{\left(\tilde{\Delta}_{\rho^{\ln\omega}}^{\alpha,\mu} f\right)(x)}{(1-\rho)^{\alpha}}$$

ва Маршо-Адамара маъносидаги ω *йўналиш бўйича касрли ҳосилалар*

$$\left(D_{\omega,\mu}^{\alpha} f\right)(x)=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\lim_{\substack{\rho\to 1-0\\ \left(\mathcal{L}_{\tau}^{\bar{p}}\right)}}\int_0^{\rho} t^{\mu}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{-1-\alpha}\left(\tilde{\Delta}_{t^{\ln\omega}}^{1} f\right)(x)\frac{dt}{t}+\mu^{\alpha} f(x)$$

барча $\alpha,\ 0<\alpha<1$ *учун* $\mu-\bar{\lambda}*\circ\ln\omega\ge 0$ *бўлганда, фазода* $f\in \mathcal{L}_{\tau}^{\bar{p}}$, $1\le p_i<\infty,\ \tau_i\ge 0, i=\overline{1,n}$ *бир вақтда мавжуд ва устма-уст тушади, бу ерда* $\bar{\lambda}*\circ\ln\omega=\lambda_1^{*}\ln\omega_1+\ldots+\lambda_n^{*}\ln\omega_n,\ \lambda_i^{*}$ *–(1) даги ўзгармас сон.*

10-теорема (аралаш касрли ҳосила ҳолати). *Фараз қилайлик* $f(x)\in \mathcal{L}_{-\bar{\lambda}}^{\bar{r}},\ 1\le r_i<\infty,\ \lambda_i\ge 0, \mu_i\ge 0,\ i=\overline{1,n}$ *бўлсин. У ҳолда Грюнвальд-Летников-Адамар типидаги аралаш каср ҳосила*

$$\left(D_{+\ldots+,\mu}^{\alpha)} f\right)(x)=\lim_{\substack{h\to 1-0\\ \left(\mathcal{L}_{\tau}^{\bar{p}}\right)}}\frac{\left(\tilde{\Delta}_{h}^{\alpha,\mu} f\right)(x)}{(1-h)^{\alpha}}$$

(бу ерда $h=(h_1,\ldots,h_n)$*) ва Маршо-Адамара маъносидаги аралаш каср ҳосила*

$$D_{+\ldots+,\mu}^{\alpha} f=\lim_{\substack{\delta\to 0-0\\ \left(\mathcal{L}_{\tau}^{\bar{p}}\right)}} D_{+\ldots+,\mu;\delta}^{\alpha} f=$$

$$=\lim_{\substack{\delta\to 0-0\\ \left(\mathcal{L}_{\tau}^{\bar{p}}\right)}}\left(\tilde{D}_{+,\mu_1;\delta_1}^{\alpha_1}+\mu_1^{\alpha_1}E\right)\otimes\left(\tilde{D}_{+,\mu_2;\delta_2}^{\alpha_2}+\mu_2^{\alpha_2}E\right)\otimes\ldots\otimes\left(\tilde{D}_{+,\mu_n;\delta_n}^{\alpha_n}+\mu_n^{\alpha_n}E\right)f$$

(бу ерда $(\tilde{D}_{+,\mu_i;\delta_i}^{\alpha_i} f)+\mu_i^{\alpha_i} f(x)=\dfrac{\alpha_i}{\Gamma(1-\alpha_i)}\displaystyle\int_0^{1-\delta_i} t^{\mu_i}\left(\ln\frac{1}{t_i}\right)^{-\alpha_i-1}\left(\tilde{\Delta}_{t_i}^{1} f\right)(x)\frac{dt_i}{t_i}+\mu_i^{\alpha_i} f(x)$*)*

барча $0\le\alpha_i<1, i=\overline{1,n}$ *учун* $f(x)\in \mathcal{L}_{\tau}^{\bar{p}},\ 1\le\bar{p}<\infty,\ \bar{\tau}\ge 0$ *фазода бир вақтда мавжуд ва устма-уст тушади.*

"**Вазнли Лебег фазосида Адамар типидаги ва Адамар-Чжен типидаги касрли интеграл-дифференциаллаш**" деб номланувчи учинчи бобда вазнли Лебег фазосида Адамар-Чжен типидаги ва Лиувилл каср интегралларининг Чжен модификацияларини ўрганишга бағишланган.

3.1-§ да айрим қўзғалмас $c \in R_+$ нуқтага "боғланган" (Адамар-Чжен конструкцияси) ярим сон ўқида Адамар касрли интеграл-дифференциаллаш модификациясини қараймиз:

$$(J_c^\alpha \varphi)(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_c^x \dfrac{\varphi(t)}{\left(\ln \frac{x}{t}\right)^{1-\alpha}} \dfrac{dt}{t}, x > c, \\ \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_x^c \dfrac{\varphi(t)}{\left(\ln \frac{t}{x}\right)^{1-\alpha}} \dfrac{dt}{t}, x < c \end{cases} \quad (2)$$

ва

$$(\mathcal{D}_c^\alpha f)(x) = \frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)\left|\ln \frac{x}{c}\right|^\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\min(x,c)}^{\max(x,c)} \frac{f(x) - f(t)dt}{\left|\ln \frac{x}{t}\right|^{1+\alpha}} \frac{dt}{t} \quad (3)$$

бу ерда $x \in R_+$, $0 < \alpha < 1.$(3) касрли дифференциал учун Маршо-Чжен-Аадамар конструкцияларини кесилишларнинг турли усуллари қўрилди. Бу кесилиш вариантлар $L_{loc}^p(R_+)$ фазодан олинган функцияларнинг (2) каср интеграллари учун тескариланувчанлигига ишлатилади. Олинган натижалар одатдаги $J_\pm^\alpha = J_\mp^\alpha \infty,\ D_\pm^\alpha = D_\mp^\alpha \infty$ Адамар каср интеграл-дифференциаллаш нисбатан $J_c^\alpha,\ D_c^\alpha$ Чжен-Адамар каср интегро-дифференциаллашнинг афзаллигини мисол сифатида қараш мумкин. Ушбу афзаликларини R_+ ярим сон ўқда $L_{loc}^p(R_+)$ фазодан олинган функцияларни чексиз ва нолда, ҳар қандай ҳолатда кўриб чиқиш имкониятидан иборат. Бўлакли-даражали вазнли жамланувчи функциялар фазосида Адамар-Чжен ва Адамар-Чжен типидаги каср интегралларнинг чегараланганлиги ва ярим группа хоссалари исботланади.

11-теорема. *Фараз қилайлик* $\tau, \nu \in R, 1 \le p \le \infty, \alpha > 0,\ 0 < a < c < b < \infty$ *ва* $\mu \in C$ *бўлсин. Агар* $\operatorname{Re}\mu > \dfrac{\tau}{p},\ \operatorname{Re}\mu > -\dfrac{\nu}{p}$ *бўлса, уҳолда* $J_{c,\mu}^\alpha$ *оператор* $\mathcal{L}_{\omega_{\tau,\nu}^c}^p$ *фазода чеграланган ва*

$$\left\| J_{c,\mu}^\alpha \varphi; \mathcal{L}_{\omega_{\tau,\nu}^c}^p \right\| \le d_{c,\mu}(\tau,\nu) \left\| \varphi; \mathcal{L}_{\omega_{\tau,\nu}^c}^p \right\|,$$

бу ерда

$$d_{c,\mu}(\tau,\nu) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} \dfrac{\gamma\left(\alpha, (\mu - \frac{\tau}{p})\ln \frac{c}{a}\right)}{\left(\mu - \frac{\tau}{p}\right)^\alpha} + \dfrac{\gamma\left(\alpha, (\mu + \frac{\nu}{p})\ln \frac{b}{c}\right)^\alpha}{\left(\mu + \frac{\nu}{p}\right)^\alpha}, 1 \le p < \infty \\ \dfrac{\gamma\left(\alpha, (\mu - \tau)\ln \frac{c}{a}\right)}{(\mu - \tau)^\alpha} + \dfrac{\gamma\left(\alpha, (\mu + \nu)\ln \frac{b}{c}\right)^\alpha}{(\mu + \nu)^\alpha}, p = \infty \end{cases}$$

12-теорема. *Фараз қилайлик* $f(x)=(J_c^{\alpha})(x),$ *бу ерда* $\varphi\in L^p(\mathrm{R}_+),\ 1\le p<\infty, c>0,\ 0<\alpha<1$ *бўлсин. У ҳолда*

$$\mathrm{D}_c^{\alpha} f=\lim_{\substack{\rho\to 1-0\\ (L^p(\mathrm{R}_+))}}\left(\mathrm{D}_{c,1-\rho}^{\alpha} f\right)(x)=\varphi(x).$$

3.2-§ да ўзгаручили кўрсаткичли Лебег фазосида Чжен-Маршо касрли ҳосиланинг чапдан Чжен касрли интегралга тескари эканлиги исботланади.

Фараз қилайлик $\Omega=[a,b]$ бўлсин, бу ерда $-<\infty<a<c<b<\infty.$ Ушбу

$$\rho_c(x)=\begin{cases}|x-c|^{\mu(x)}\ |b-x|^{\nu(x)}, & x>c,\\ |x-a|^{\mu(x)}\ |c-x|^{\nu(x)}, & x<c,\end{cases}\tag{4}$$

вазнга эга бўлган $L^{p(\cdot)}[(a,b),\rho_c]$ фазони қараймиз, бунда $\mu(x),\nu(x)$кўрсаткичлар чегараланган функциялар бўлиб, улар чекли лемитларга эга

$$\mu(a)=\lim_{x\to a}\mu(x),\ \nu(b)=\lim_{x\to b}\nu(x)\ \mu(c)=\nu(c)=\lim_{x\to c}\mu(x)=\lim_{x\to c}\nu(x).$$

Кўрсаткичли синфлар учун қуйидаги белгилашлар керак бўлади.

3-таъриф. *Фараз қилайлик* $\Omega=(a,b)$, *бу ерда* $-\infty<a<c<b<\infty$ *ва* $x_0\in[a,b]$*бўлсин. Ушбу*$\omega-Lip_{x_0}(\Omega)$ *оқали қуйидаги синфни белгилаймиз:*

$$\omega-Lip_{x_0}(\Omega)=\left\{\mu\in L^{\infty}(\Omega):|\mu(x)-\mu(x_0)|\le\frac{A}{\ln\frac{1}{|x-x_0|}},\ |x-x_0|\le\frac{1}{2}\right\}.$$

$\mu\in\omega-Lip_a(a,b)\cap\omega-Lip_c(a,b)$ ва $\nu\in\omega-Lip_c(c,b)\cap\omega-Lip_b(c,b)$ *лар учун* $-\infty<a<c<b<\infty$ бўлганда, қуйидагиларга эга бўламиз

$$|x-a|^{\mu(x)}|c-x|^{\nu(x)}\approx|x-a|^{\mu(a)}|c-x|^{\nu(c)},\quad a<x<c,$$

$$|x-c|^{\mu(x)}|b-x|^{\nu(x)}\approx|x-c|^{\mu(c)}|b-x|^{\nu(b)},\quad c<x<b.$$

13-теорема. *Айтайлик* $\alpha>0,-\infty<a<c<b<+\infty,$ *(4) кўринишдаги* ρ_c *вазн билан ва* $p\in\mathcal{P}(a,b)\cap\omega-Lip(a,b),$ $x<c$ *бўлганда* $\mu\in\omega-Lip_a(a,b),$ $\nu\in\omega-Lip_c(a,b),$ $x>c$ *бўлганда эса,* $\mu\in\omega-Lip_c(a,b),$ $\nu\in\omega-Lip_b(a,b)$ *бўлса. У ҳолда ушбу*

$$\begin{gathered}-\frac{1}{p(a)}<\mu(a)<\frac{1}{p'(a)},\quad -\frac{1}{p(c)}<\nu(c)<\frac{1}{p'(c)},\ x<c,\\ -\frac{1}{p(c)}<\mu(c)<\frac{1}{p'(c)},\quad -\frac{1}{p(b)}<\nu(b)<\frac{1}{p'(b)},x>c.\end{gathered}\tag{5}$$

шартда $\varphi\in L^{p(\cdot)}((a,b),\rho_c)$ *функция учун қуйидаги*

$$\left|\frac{1}{|x-c|^{\alpha}}\int_{\min(x,c)}^{\max(x,c)}\frac{\varphi(t)}{|x-t|^{1-\alpha}}dt\right|\le C\|\varphi\|_{L^{p(\cdot)}[(a,b),\rho_c]}$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

14-теорема. *Фараз қилайлик* $-\infty < a < c < b < +\infty,\ 0 < \alpha < 1$ *ва* $f = I_c^\alpha \varphi$, $\varphi \in L^{p(\cdot)}[(a,b),\rho_c]$, *бу ерда* $p \in \mathcal{P}(a,b) \cap w - Lip(a,b)$ *ҳамда (4) кўринишдаги* $\rho_c(x)-$ *вазн билан,* $x < c$ *бўлганда* $\mu \in w - Lip_a(a,c), \nu \in w - Lip_c(a,c)$, $c < x$ *бўлганда эса,* $\mu \in w - Lip_c(c,b)$, $\nu \in w - Lip_b(c,b)$ *бўлса. У ҳолда*

$$D_c^\alpha f = \varphi,$$

бўлади, бу ерда $D_c^\alpha f = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} D_{c,\varepsilon}^\alpha f$ *лимит (5) шартда* $L^{p(\cdot)}[(a,b),\rho_c]$ *фазонинг нормаси бўйича тушунилади.*

"**Лебег фазосида бир томонли шар потенциаллари**" деб аталувчи IV боб R^n даги ўзгармас ва ўзгарувчили кўрсаткичли Лебег фазолари ҳамда гранд Лебег фазоларида Чжен типидаги бир томонли шар потенциаллар ва бир томонли шар потециалларни ўрганиш бағишланган.

Ушбу $U(a,b), 0 \le a \le b \le \infty$ шар қатламида α тартибли бир томонли шар потенциаллари (шар касрли интеграл- ball fractional integrals) қуйидаги

$$\left(B_{a+}^\alpha \varphi\right)(x) = \gamma_{n,\alpha} \int\limits_{a \le |y| < |x|} \frac{\left(|x|^2 - |y|^2\right)^\alpha}{|x-y|^n} \varphi(y)dy,\ |x| > a\text{, } \left(B_{b-}^\alpha \varphi\right)(x) = \gamma_{n,\alpha} \int\limits_{|x| < |y| < b} \frac{\left(|y|^2 - |x|^2\right)^\alpha}{|x-y|^n} \varphi(y)dy,\ |x| < b,$$

кўринишда аниқланади, бу ерда $\gamma_{n,\alpha} = \dfrac{2}{\omega_{n-1}\Gamma(\alpha)} = \dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi^n}\,\Gamma(\alpha)}$. Потенциаллар $B_{a+}^\alpha \varphi$ чап томонли ва $B_{b-}^\alpha \varphi$ эса ўнг томонли деб аталади. $a = 0,\ b = \infty$ бўлганда эса, мос равишда $B_+^\alpha \varphi,\ \ B_-^\alpha \varphi$ кўринишда ёзиш мумкин.

4.1-параграфда шар қатламида радиал-сингуляр операторлар ёрдамида бир томонли шар потенциаллари орасидаги боғланиш ўрнатилади.

1-лемма. *Айтайлик* $0 < \alpha < 1$ *ва* $\varphi(x) \in C_{0,0}^\infty(U(a,b))$ *бўлсин. Ушбу тенгликлар ўринли бўлади:*

$$((B_{a+}^\alpha)^{-1} B_{b-}^\alpha \varphi)(x) = \cos\alpha\pi\, \varphi(x) + \sin\alpha\pi (N_\alpha^a \varphi)(x)\,,$$
$$((B_{b-}^\alpha)^{-1} B_{a+}^\alpha \varphi)(x) = \cos\alpha\pi\varphi(x) - \sin\alpha\pi (N_\alpha^b \varphi)(x)\,,$$

бу ерда

$$(N_a^\alpha \varphi)(x) := \frac{2}{\pi}\left(\frac{a}{|x|}\right)^{n-2} \int\limits_{a<|y|<b} \left(\frac{|y|^2 - a^2}{|x|^2 - a^2}\right)^\alpha \frac{P(x', \frac{a^2}{|x||y|} y')}{|y|^2 - |x|^2} \frac{\varphi(y)}{|y|^{n-2}} dy +$$
$$+ \frac{2}{\pi} \int\limits_{a<|y|<b} \frac{F(|y|,|x|,x'y')}{|y|^2 - |x|^2} \varphi(y)dy\,. \qquad (6)$$

Бунда

$$F_1(\rho,r,w)=\frac{2}{\omega_{n-1}(n-2)}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{n}{2}+k-1)C_k^{\frac{n}{2}-1}(w)R_k(\rho,r)\text{, } R_k(\rho,r)=\begin{cases}Q_k(\rho,r), \ \rho<r \text{ бўлганда,}\\ P_k(\rho,r), \ \rho>r \text{ бўлганда,}\end{cases}$$

$$Q_k(\rho,r)=(\frac{n}{2}+k-1)(\rho r)^{2-k-n}\int_0^{\rho^2-a^2}\left(\frac{t}{r^2-\rho^2+t}\right)^{\alpha}(\rho^2-t)^{\frac{n}{2}+k-2}dt\,,$$

$$P_k(\rho,r)=(\frac{n}{2}+k-1)(\rho r)^{2-k-n}\int_0^{r^2-a^2}\left(\frac{\rho^2-r^2+t}{t}\right)^{\alpha}(r^2-t)^{\frac{n}{2}+k-2}dt.$$

$$\left(N_b^{\alpha}\varphi\right)(x)=\frac{2}{\pi b^{n-2}}\int_{a<|y|<b}\left(\frac{b^2-|y|^2}{b^2-|x|^2}\right)^{\alpha}\varphi(y)\frac{P\left(x',\frac{|x||y|}{b^2}y'\right)}{|y|^2-|x|^2}dy+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_{a<|y|<b}\frac{F_2(|y|,|x|,x'y')}{|y|^2-|x|^2}\varphi(y)dy\,, \qquad (7)$$

бу ерда $F_2(\rho,r,w)=\frac{2}{\omega_{n-1}(n-2)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{n}{2}+k-1\right)C_k^{\frac{n}{2}-1}(w)\widetilde{R}_k(\rho,r),$

$$\widetilde{R}_k(\rho,r)=\begin{cases}\widetilde{Q}_k(\rho,r), \quad \rho<r \text{ бўлганда,}\\ \widetilde{P}_k(\rho,r), \quad \rho>r \text{ бўлганда,}\end{cases}$$

$$\widetilde{Q}_k(\rho,r)=\left(\frac{n}{2}+k-1\right)(\rho r)^k\int_0^{b^2-r^2}\left(\frac{r^2-\rho^2+t}{t}\right)^{\alpha}\left(r^2+t\right)^{-k-\frac{n}{2}}dt\,,$$

$$\widetilde{P}_k(\rho,r)=\left(\frac{n}{2}+k-1\right)(\rho r)^k\int_0^{b^2-\rho^2}\left(\frac{t}{\rho^2-r^2+t}\right)^{\alpha}\left(\rho^2+t\right)^{-k-\frac{n}{2}}dt.$$

15-теорема. *Фараз қилайлик* $0<\alpha<1,\quad \varphi\in L_p\ (U(a,b),\omega),\ 1<p<\infty.$ *бўлсин. У ҳолда* N_a^{α}, N_a^{b} *сингуляр операторлар ва* $B_{a+}^{\alpha},B_{b-}^{\alpha}$ *бир томонли шар потенциаллари қуйидаги ўзаро муносабатлар билан боғлиқ*

$$B_{b-}^{\alpha}\varphi=\cos\alpha\pi\ B_{a+}^{\alpha}\varphi+\sin\alpha\pi\ B_{a+}^{\alpha}N_a^{\alpha}\varphi\,,$$

$$B_{a+}^{\alpha}\varphi=\cos\alpha\pi\ B_{b-}^{\alpha}\varphi-\sin\alpha\pi\ B_{b-}^{\alpha}N_b^{\alpha}\varphi\,,$$

бу ерда N_a^{α}, N_b^{α} *– (6), (7) сингуляр операторлар.*

4.2-§ да ўзгарувчили кўрсаткичли Лебег фазосида бир томонли шар потенциалларининг чегараланганлиги ҳақидаги теорема исботланади.

16-теорема. *Фараз қилайлик* $p\in P^{\log}\left(\mathrm{R}^n\right),\quad 0<\alpha<n,$ *ва* $1<p_-\le p(x)\le p_+<\frac{n}{\alpha}$ *бўлсин. У ҳолда* $\|f\|_{p(\cdot)}\le 1$ *бўлганда, барча* $f\in L^{p(\cdot)}$ *учун* B_+^{α} *оператор чегараланган ва*

$$\left\||x|^{-\alpha}B_+^{\alpha}f\right\|_{L^{q(\cdot)}}\le C(n,p,\alpha)\|f\|_{L^{p(\cdot)}}$$

бўлади, бу ерда C ўзгармас сон p, $c_{\log}(p), p_-$ *ва* p_+, ларга боғлиқ, $\dfrac{1}{q(x)}=\dfrac{1}{p(x)}-\dfrac{\alpha}{n}$.

17-теорема. *Айтайлик* $\Omega \subset R^n$ *очиқ чегараланган тўплам ва* $p \in P_1(\Omega)$, $0<\alpha<n$ *ҳамда* $1<p_- \le p_+ <\infty$ *бўлсин. Агар* $p_- > \dfrac{n}{\alpha}$ *бўлса, у ҳолда* $\|f\|_{p(\cdot)} \le 1$ *бўлганда барча* $x \in \Omega$ *ва* $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *лар учун*

$$\left|B_+^{\alpha} f\right| \le c|x|^{\frac{2\alpha-n}{P(x)}+n}$$

бўлади,буерда $P(x)=\begin{cases} p'_-, |x|\ge 1, \\ p'_+, |x| \le 1 \end{cases}$ ва c ўзгармас α, n, p_-, p_+ боғлиқ сон.

4.3-§ да Чжен типидаги бир томонлама шар потенциаллари киритилади. Бўлакли даражали жамланувчи функциялар фазосида Чжен типидаги бир томонлама шар потенциалларининг ярим группа ва чегараланганлиги ҳақидаги теоремалар исботланади. Бундан ташқари, $(B_c^{\alpha}\varphi)(r,x')$ потенциал қийматлари $L_q\left(S^{n-1}\right)$ фазода ётувчи $r \in [a,b]$ аргументнинг узлуксиз функцияси эканлиги исботланади.

18-теорема. *Фараз қилайлик* $0<a<c<b<\infty$, $1<p<\infty, \lambda<\dfrac{1}{p'}, \alpha>0$ *бўлсин. У ҳолда* B_c^{α} *оператор* $L^p\left(U(a,b),\omega^{\lambda}\right)$ *фазони* $L^p\left(U(a,b),\omega^{\lambda-\alpha}\right)$ *фазога кўчиради ва*

$$\left\|\omega^{\lambda-\alpha}B_c^{\alpha}\varphi; L^p(U(a,b))\right\| \le k_{\lambda}\left(\left\|\omega_+{}^{\lambda}\varphi; L^p(U(c,b))\right\|+\left\|\omega_-{}^{\lambda}\varphi; L^p(U(a,c))\right\|\right),$$

чегараланган бўлади, бу ерда

$$\omega(x)=\begin{cases} \omega_+ = |x|^2-c^2, \ c<|x|<b, \\ \omega_- = c^2-|x|^2, \ a<|x|<c, \end{cases}, \quad k_{\lambda}=\frac{2^{1/p}\Gamma\left(\frac{1}{p'}-\lambda\right)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{p'}-\lambda\right)}.$$

19-теорема. *Фараз қилайлик* $f=B_c^{\alpha}\varphi, \ \alpha>0, \ \varphi \in L^p(U(a,b)), 1\le p<\infty$, $0<a<c<b<\infty$ *бўлсин. У ҳолда*

$$D_c^{\alpha} f=\lim_{\varepsilon \to 0} D_{c,\varepsilon}^{\alpha}B_c^{\alpha}\varphi=\varphi,$$

бўлади, бу ерда лимит $L^p(U(a,b))$ *фазонинг нормаси бўйича тушунилади.*

20-теорема. *Фараз қилайлик* $f=B_c^{\alpha}\varphi, \alpha>0, \ \varphi \in L^p(U(a,b)), 1\le p<\infty$, $0<a<c<b<\infty$ *бўлсин. У ҳолда*

$$D_c^{\alpha} f=\lim_{\varepsilon \to 0} D_{c,\tilde{\varepsilon}}^{\alpha}B_c^{\alpha}\varphi=\varphi, \ \tilde{\varepsilon}=\varepsilon\left||x|^2-c^2\right|$$

бўлади, бу ерда лимит $L^p(U(a,b))$ *фазонинг нормаси бўйича тушунилади.*

Бешинчи бобда Лебег фазосида кўп ўлчовли ўрама бўлмаган интеграл операторлар ҳолини қараймиз. Лебег фазосида кўп ўлчовли ўрама бўлмаган интеграл операторлар ҳолида деярли ҳамма жойда яқинлашувчи эканлиги ҳақидаги теорема исботланган. Исботланган теоремалар етарли даражада умумийроқ (шу жумладан, ўрама бўлган интеграл операторлар учун ҳам) ва ядроси кенгроқ синфларни ҳам қамраб олади.

5.1-§ да ўрама бўлмаган ўрталатувчи синф қаралади:

$$\left(\mathrm{A}_{\varepsilon} f\right)(x)=\int_0^{\frac{1}{\varepsilon_1}}\cdots\int_0^{\frac{1}{\varepsilon_n}} k_1(y_1)\cdots k_1(y_n)\varphi(x-\varepsilon\circ y\circ(x-c))dy_1\cdots dy_n,$$

бу ерда $c\in\mathrm{R}^n,\ 0<\varepsilon_i<1,\ \int_0^{\infty}k_i(y_i)dy_i=1,\ i=\overline{1,n}$ ва $L^{\overline{p}}\left(\mathrm{R}^n\right)$ (ёки $L^{\overline{p}}_{loc}\left(\mathrm{R}^n\right)$) фазоларда функцияга норма бўйича ва деярли ҳамма жойда яқинлашувчилиги текширилади.

21-теорема. *Фараз қилайлик $k_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, ядро қўйидаги шартларни қаноатлантирсин:*

$$\sup_{0<\varepsilon_i<1}\int_0^{1/\varepsilon_i}|k_i(t)|\frac{dy}{(1-\varepsilon_i t)^{1/p_i}}<+\infty,\quad \int_0^{\infty}k_i(y_i)dy_i=1,\ i=1,\dots,n. \tag{8}$$

У ҳолда:

1) $\varphi\in L^{\overline{p}}_{loc}(\mathrm{R}^n)$, $1<\overline{p}<+\infty$ лар учун

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\mathrm{A}_{\varepsilon}\varphi)(x)=\varphi(x) \tag{9}$$

тенглик ўринли, бу ерда чап томондаги қаралаётган лимитнинг ҳам каррали ва ҳам такрорий лимитлари $L^{\overline{p}}_{loc}(\mathrm{R}^n)$ фазода мавжуд.

2) агар $\varphi\in L^{\overline{p}}(\mathrm{R}^n)$ бўлиб ва қандайдир $0<\mu_i<1,\ i=\overline{1,n}$ лар учун (8) билан бирга

$$\lim_{\varepsilon_i\to 0}\int_{\mu_i/\varepsilon_i}^{1/\varepsilon_i}|k_i(t)|\frac{dt}{(1-\varepsilon_i t)^{1/p_i}}=0,\ i=\overline{1,n}$$

шарт бажарилса, у ҳолда (9) муносабат $L^{\overline{p}}(\mathrm{R}^n)$, $1<\overline{p}<+\infty$ фазонинг нормаси бўйича яқинлашиш маъносида ўринлидир.

5.2-§ да ўрама бўлмаган операторни қараймиз

$$(\mathrm{K}_{\varepsilon}\varphi)(x)=\int_{\mathrm{R}^n}K_{\varepsilon}(x,y)\varphi(x-y)dy,\ x\in\mathrm{R}^n.$$

Бизни $\varepsilon\to 0$ да $\mathrm{K}_{\varepsilon}\varphi$ функциянинг ҳолати қизиқтиради.

22-теорема. *Айтайлик $\varphi\in L^p\left(\mathrm{R}^n\right), 1\le p\le\infty$ ва ҳар қандай етарли кичик $\mu>0$ учун, қуйидаги шартлар бажарилсин:*

1) деярли ҳамма x лар учун $\varepsilon\to 0$ да $\int_{|y|<\mu}K_{\varepsilon}(x,y)dy\to 1$;

2) деярли ҳамма x лар учун $\varepsilon\to 0$ да, агар $p>1$ бўлганда

$$\int_{|y|>\mu} |K_\varepsilon(x,y)|^{p'} dy \to 0$$ *ва агар* $p=1$ *бўлганда эса,* $\sup_{|y|>\mu} |K_\varepsilon(x,y)| \to 0$*;*

3) шундай $\alpha>0, \beta>0$ *сонлар ва деярли ҳамма жойда чекли* $a(x)>0,\ c(x)>0$ *функциялар мавжуд бўлиб,* $|y|<\mu$ *бўлганда,*

$$|K_\varepsilon(x,y)| \le \begin{cases} c(x)|y|^{\alpha-1} \cdot \varepsilon^{-\alpha}, & |y| \le a(x)\cdot\varepsilon, \\ c(x)|y|^{-\beta-1}\varepsilon^{\beta}, & |y| > a(x)\cdot\varepsilon. \end{cases}$$

бўлсин. У ҳолда деярли ҳамма x *лар учун*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(K_\varepsilon\varphi)(x) = \varphi(x) \qquad (10)$$

тенглик ўринли бўлади.

Агар ҳар қандай етарли кичик ε *учун* $|y| \ge N = N(x)$ *бўлганда* $K_\varepsilon(x,y)\equiv 0$ *бўлса, у ҳолда* $\varphi \in L^p_{loc}(\mathrm{R}^n)$ *учун (10) тенглик тўғри.*

Муаллиф ўзининг илмий маслаҳатчиси, физика-математика фанлари доктори, профессор, академик Азимбой Садуллаевга доимий ёрдами ва кўмаги учун чуқур миннатдорчилик билдиради. Муаллиф диссертация натижаларини муҳокама қилишда қимматли маслаҳатларини аямаган профессор С.Г. Самко ва профессор Г. Худайбергановларга ҳамда математик анализ кафедрасининг барча профессор-ўқитувчиларига чуқур миннатдорчилик билдиради.

ХУЛОСА

Диссертация тадқиқотининг барча асосий натижалари янги бўлиб, Лебег фазосида ўзгартирилган Адамар типидаги каср интеграллар ва ҳосилалар, кесмада ψ -Адамар типидаги каср интеграллар ва ҳосилалар, локал типидаги каср интеграллар (Чжен ва Адамар-Чжен конструкцияси), бир томонли шар потенциаллар ва ўрама бўлмаган интеграл операторларнинг яқинлашиши хоссаларини ўрганишга бағишланган.

Ишда қуйидаги янги натижалар олинган:

1. Вазнли аралаш нормали Лебег фазосида Адамар типидаги касрли интегралнинг чегараланганлиги ҳақидаги Соболев типидаги теоремалар исботланиб, модификацияланган каср интегралларнинг композицияси учун формулалар исботланади.

2. Маршо-Адамар ва Маршо-Адамар типидаги йўналиш бўйича кесилган ҳосилаларнинг интеграл ифодалари олинади, вазнли аралаш Лебег фазоларидан олинган функциялардан Адамар ва Адамар типидаги касрли интеграллар учун тескари теоремалар ҳамда оддий ва кесилган касрли ҳосилалар орасидаги боғланишлар исботланади.

3. Вазнли аралаш нормали Лебег фазосида Маршо-Адамар ва Маршо-Адамар типидаги кесилган аралаш касрли ҳосилалар учун интеграл

ифодалари олинади ва шу фазодан олинган функциядан Адамар ва Адамар типидаги аралаш касрли интеграллар учун тескари теоремалар исботланган.

4. Мультипликатив қадамли вектор касрли тартибли аралаш айирма тушунчалари киритилади ва унинг хоссалари ўрганилади. Бунинг баъзи хоссалари Меллин алмаштириши ёрдамида исботланади.

5. Вазнли аралаш нормали Лебег фазоларида икки хил шаклларда бўлган Маршо-Адамар ва Грюнвалд-Летников-Адамар типидаги (йўналиш бўйича ва аралаш) касрли дифференциаллаш операторларининг аниқланиш соҳаларининг устма-уст тушиши ҳақидаги теоремалар исботланган ва Маршо-Адамар типидаги йўналиш бўйича касрли ҳосиланинг мавжудлигининг зарурий ва етарли шартлари олинган.

6. Бўлакли вазнли жамланувчи функциялар фазосида Адамар типидаги ва Адамар-Чжен типидаги касрли интегралларнинг чегараланганлиги ҳақидаги теорема ва ярим группа ҳоссалари исботланган.

7. Кесмада ψ -Маршо-Адамар деб аталадиган касрли ҳосила тушунчаси киритилади. Лебег фазосида ψ -Маршо-Адамар ва ψ -Маршо-Адамар типидаги деб аталувчи кесик каср ҳосилалар учун интеграл ифодалари олинади, ψ -Адамар ва ψ -Адамар типидаги касрли интеграллар учун эса тескари ва тавсиф теоремалари исботланади, ψ -Маршо-Адамарнинг оддий ва кесилган каср ҳосилалари ўртасида боғланишлар ўрнатилади.

8. Вазнли ўзгарувчили кўрсаткичли Лебег фазосида Чжен касрли интегралнинг чегараланганлиги ва Чжен-Маршо касрли ҳосила билан Чжен касрли интеграл тескари эканлиги исботланади.

9. Шар қатламида радиал-сингуляр операторлар орқали бир томонли шар потенциаллари орасида боғланишлар ўрнатилган ва ўзгарувчили кўрсаткичли Лебег фазоларида бир томонли шар потенциаллари учун чегараланганлиги ва Соболев типидаги теоремалар исботланган.

10. Чжен типидаги бир томонли шар потенциал операторининг қуйидаги хоссалари ўрнатилади: Чжен-Маршо типидаги бир томонли шар потенциалларини турли усулларида “кесилиши” ҳақида; бир томонли шар потенциаллари учун интеграл ифодалари; “қарийиб-ўрама” кесилган бир томонли шар потенциаллари учун тескари теорема.

11. Бир синфда ўрама бўлмаган ўрталатувчи ва ўрама бўлмаган операторлар тушунчаси киритилади ва уларнинг $L^{\bar{p}}\left(\mathrm{R}^{n}\right)$ (ёки $L^{\bar{p}}_{loc}\left(\mathrm{R}^{n}\right)$) фазо ҳам норма бўйича, ҳам деярли ҳамма жойда $\varphi(\mathrm{x})$ га яқинлашиши текширилади.

Олинган барча натижалар тақрибий ва касрли интеграл-дифференциаллаш назарияси, улар шунингдек, физиканинг аниқ муаммоларини ҳал қилиш учун, механика, кимё, тиббиёт, бошқариш назарияси, каср дифференциал ва интеграл тенгламалар билан ифодаланадиган бошқа амалий фанларнинг назарий тадқиқотларда фойдаланиши мумкин. Натижалардан яна махсус курсларнинг таълим жараёнида ҳам фойдаланиш мумкин.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc. 3.30.12. 2019. FM 01.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА ИМЕНИ МИРЗО УЛУГБЕКА

ЯХШИБОЕВ МАХМАДИЁР УМИРОВИЧ

МНОГОМЕРНОЕ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ДРОБНОГО ПОРЯДКА В ПРОСТРАНСТВЕ ЛЕБЕГА С ПОСТОЯННЫМИ И ПЕРЕМЕННЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

01. 01. 01 – математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА (DSc) ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

Ташкент – 2021

Тема докторской (DSc) диссертации зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2018.2.DSc/FM152.

Диссертация выполнена в Национальном университете Узбекистана им. Мирзо Улугбека.
Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (http://ik-fizmat.nuu.uz/) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (http://www.ziyonet.uz/).

Научный консультант:	**Садуллаев Азимбой** доктор физико-математических наук, академик
Официальные оппоненты:	**Ашуров Равшан Ражабович** доктор физико-математических наук, профессор
	Умарходжиев Салаудин Мусаевич доктор физико-математических наук, профессор
	Турметов Батырхан Худайбергенович доктор физико-математических наук , профессор
Ведущая организация:	Ургенчский государственный университет

Защита диссертации состоится «07» октября 2021 года в 10^00 на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+998 71) 227 12 24, факс: (+998 71) 246 53 21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за № 95). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+998 71) 246 02 24).

Автореферат диссертации разослан «25» сентября 2021 года.
(протокол рассылки № 2 от «25» сентября 2021 года).

Дж.Хаджиев
Зам председателя Научного
совета по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., академик

Н.К.Мамадалиев
Ученый секретарь Научного
совета по присуждению ученых
степеней, д.ф.ф.-м.н. (PhD)

Р.Н.Ганиходжаев
Председатель научного семинара
при Научном совете по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация докторской диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. Дробное интегродифферецирование используется при решении многих сложных прикладных задач, возникающих в результате многочисленных научно-прикладных исследований проводимых на мировом уровне, таких как задачи физики, биологии, теории управления, нелинейной теории упругости, механике жидкости, математическом моделировании различных физических явлений и задачах разрешимости нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и др., которые нельзя решить обычными средствами и чему в настоящее время посвящено большое количество исследований. В качестве примера мы хотели бы напомнить, что многие процессы могут быть эффективно смоделированы с использованием пространств Лебега и Соболева, где порядок суммируемости p постоянное число.

В настоящее время использование математических методов и компьютерного моделирования в различных областях науки, техники, экономики и других областях человеческой деятельности стремительно расширяется, особенно в теории упругости, теории дифференциальных уравнений, в гидромеханике, в частности, вариационных задачах, в вопросах моделирования электрологических и термореголологических жидкостей, теории обработки изображений и исследовании дифференциальных уравнений с нестандартным ростом, широко использующиеся в постоянных и переменных пространствах Лебега и пространстве Соболева. Эти пространства можно встретить при решении задач, связанных с демонстрацией ограниченности и обратимости операторов в гармоническом анализе. Поэтому изучение инвариантных и переменных экспоненциальных пространств Лебега и поиск оптимальных способов решения перечисленных выше задач гармонического анализа остается одной из наиболее актуальных проблем.

В нашей стране в годы независимости большое внимание уделяется актуальным научным направлениям, которые имеют практическое применение в фундаментальных науках. В частности, особое внимание было уделено решению актуальных задач дробных интегралов и дробного дифференцирования. В результате развития этого направления были достигнуты значительные результаты в математической физике, механике жидкости, математическом моделировании различных физических явлений и решении задач, связанных с решением нелинейных частных дифференциальных уравнений. Основными задачами и направлениями деятельности математической науки являются проведение исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям «Математический анализ и функциональный анализ, гармонический анализ, дифференциальные уравнения и математическая физика, прикладная математика и математическое моделирование, теория вероятностей и теория динамических систем». Чтобы обеспечить выполнение этого решения, важно изучить и разработать многомерное дифференцирование дробного порядка в пространствах Лебега с постоянными и переменными показателями, для того чтобы применить эти результаты в смежных областях науки.

Исследования данной диссертации в определенной степени служат решению задач, указанных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан № УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», № ПП-3682 от 27 апреля 2018 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов», № ПП-4358 от 17 июня 2019 года «О мерах по коренному совершенствованию системы подготовки востребованных квалифицированных кадров и развитию научного потенциала в Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека в 2019–2023 годах», № ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» и другие нормативные правовые акты, связанные с этими мероприятиями.

Связь исследования с приоритетными направлениями развития науки и технологий республики. Данная диссертациия выполнена в соответствии с приоритетными направлениеми развития науки и технологий Республики Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации.[2]

Научные исследования, направленные на изучение дробного интегродифференцирования Адамара и типа Адамара, Маршо-Адамара, Чженя, Чженя-Адамара и односторонних шаровых потенциалов проводятся в ведущих научных центрах и высших образовательных учреждениях мира, таких как Южный федеральный университет (Ростов, Россия) , Белорусский государственный университет (Минск, Беларусь), Институт математики им. В.А. Стеклова (Москва, Россия), Южно-Уральский государственный университет (Челябинск, Россия), Институт математики и математического моделирования (Алматы, Казахстан), Университет Ахмеда Ясави (Казахстан), Математический институт имени А. Размадзе (Тбилиси, Грузия), Rheinisch Westfälische Technische Hochschule Aachen (Aachen, Germany), Universidad de La Laguna, (La Laguna-Tenerife, Spain), National University of Sciences and Technology (Islamabad, Pakistan), Çankaya University (Ankara, Turkey), Research Group at King Abdulaziz University (Jeddah, Saudi Arabia), Imecc-Unicamp (Campinas, SP, Brazil), Shivaji University (Maharashtra, India), University of Algarve (Faro, Portugal), Shanghai University (China).

---

[2] Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации разработан по источникам: www. sfedu.ru, www. bsu.by , www.mi-ras.ru, www.susu.ru, www.math.kz, www.ayu.edu.kz, www.rmi.tsu.ge, www.rwth-aachen.de, www.ull.es, www.nust.edu.pk, www.ime.unicmp.br, www.unishivaji.ac.in, www.ualg.pt, www.apply.shu.edu.cn и др.

В работах J. Vanterler da C. Sousa (Brazil), Kishor D. Kucche (Maharashtra, India), Fahad H.M. (Пакистан) предложено обобщение производных Римана-Лиувилля и Капуто в виде двухпараметрической дробной производной Хильфера и доказаны важные свойства новых обобщенных операторов ψ -Адамара в обобщенном пространстве $L^p_{\psi,c}(a,b)$.

В работах U. Neri, T. Kurokawa и в книге И. Стейна рассмотрены сверточные усреднения и сверточные интегральные операторы, исследована их сходимость к $\varphi(\mathrm{x})$ как по норме $L^p(\mathrm{R}^n)$ (или $L^p_{loc}(\mathrm{R}^n)$), так и почти всюду.

А.Грюнвальд и А.В.Летников изучили свойства разностей произвольного порядка и применили их для определения своей производной. Маршо предложил регуляризацию расходящегося интеграла с помощью конечных разностей целочисленного порядка. Функции, к которым могут быть применены эти конструкции, вообще не дифференцируемы. Еще одной общей чертой этих дробных производных является то, что обе они начинаются с дробной производной Римана–Лиувилля, которую необходимо упростить, чтобы применить к довольно широкому классу функций.

Степень изученности проблемы. Основы теории дробного интегродифференцирования были заложены еще в начале XIX века в работах Ж. Лиувилля и развиты в дальнейшем в трудах А. Грюнвальда, А. В. Летникова, Б. Римана, Ж. Адамара, Х. Хольмгрена, М. Рисса, Г. Вейля, А. Маршо, Х. Кобера, Ю.Чженя, А. Эрдейи, М. М. Джрбашяна, Т. Ослера, М. Капуто, Хильфера и др. Дробные интегралы и производные Адамара, типа Адамара и типа Маршо-Адамара использовались в работах А. Е. Бекаева, В. В. Карачик, Б. Х. Турметова, А. С. Бердышева, Б.Ж. Кадиркулова, А.А. Килбас, А.А. Титюра, С.А. Марзана, Р.Г. Мамедова, Г.Н. Оруджева, С.Г. Самко, М.У. Яхшибоева, С.А. Шлапакова, P.L. Butzer, J.J. Trujillo, J. Hadamard, H.M. Srivastava, F. Jarad, L. Ma, C. Li, S. Pooseh, R. Almeida, Y. Wu, а Г.П. Емгушевой и В.А. Ногиным вводились адамаровские аналоги риссовых потенциалов в многомерном случае.

В работе Р.Р. Ашурова, А.Кабада, Б.Х.Турметова изучены линейно дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами с дробным производным Капуто. Используя операторный метод они дали эффективный способ построения таких уравнений. Серия работ Ш.А.Алимова, Р.Р. Ашурова и С.Умарова посвящены обратной задаче определения правильного порядка дробной производной по решениям на фиксированный момент времени в месте наблюдения.

В работах И.А.Киприянова изучены различные свойства дробных производных по направлению, а в работе М.В.Кукушкина изучены качественные свойства оператора дробного дифференцирования в смысле Киприянова.

Р.Хильфер предложил обобщение производных Римана-Лиувилля и Капуто в виде двухпараметрической дробной производной ${}_aD_x^{\alpha,\beta} f$. В работе

Sousa J. Vanterler da, Rodrigues Fabio, Oliveira Edmundo была введена дробная производная ψ-Хильфера, которая играет важную роль в объединении большого класса дробных операторов. Ряд свойств операторов ψ-Хильфера можно найти в работах Abdo Mohammed, Panchal Satish, Kucche Kishor, Kharade Jyoti, Sousa Vanterler da, Liu Kui, Wang JinRong, OˆaˆAegan Donal. В статье H.M. Fahad, M. Rehman, M. Siddiqi представлена обобщенная форма для дробных операторов типа Адамара, названных дробными операторами типа ψ-Адамара, получены и доказаны важные свойства новых обобщенных операторов ψ–Адамара в обобщенном пространстве $L^{p}_{\psi,c}(a,b)$.

В 1961 году смешанное пространство Лебега $L^{\bar{p}}(\mathrm{R}^{n})$ было введено как естественное обобщение классического пространства Лебега $L^{p}(\mathrm{R}^{n})$ путем замены постоянной p вектором $\bar{p}$. Пространства Лебега со смешанной нормой были введены и изучены в работе A.Benedek и R. Panzone. Изучению ограниченности операторов в пространствах смешанных норм посвящены работы П.И. Лизоркина, N. Antonic, I. Ivec, A. Benedek, A.P. Calderon, R. Panzone, A. Stefanov, R. H. Torres. Ряд свойств смешанных пространств Лебега можно найти в книге О.В. Бесова, В.П. Ильина, С.М. Никольского.

Впервые пространства Лебега $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ с переменным показателем в одномерном случае были специально изучены в работе И. И. Шарапудинова. В последующем полученные результаты были обобщены в работах С.Г.Самко, в том числе был рассмотрен многомерный случай. Как выяснилось позже (см. например работы В.В.Жикова, X. Fan, D. Zhao, M. Ruzicka), указанные пространства Лебега $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ стали эффективным аппаратом при исследовании математических моделей, которые имеют “нестандартный рост”. К таким задачам можно отнести задачи, возникающие в теории упругости, гидромеханике, теории дифференциальных уравнений, в частности, в теории уравнений с $p(x)$– лапласианом, а также в вариационных задачах. В дальнейшем, в 1995-1999 годах были опубликованы работы Ruzicka, в которых исследовались пространства с переменными показателями, возникающие в задачах так называемых реологических и электрореологических жидкостей. Результаты, полученные к тому времени были объединены в книге Ruzicka.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами учреждения высшего образования, где выполнялась диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой Национального университета Узбекистана и отражена в фундаментальном научном проекте ОТ-Ф-4-(37-29) «Функциональные свойства A-аналитических функций и их применения. Некоторые задачи комплексного анализа в матричных областях» (2017 – 2020 гг.).

Цель исследования. Цель работы: изучить свойства модифицированных дробных интегралов и производных типа Адамара, дробных интегралов и производных типа ψ-Адамара на отрезке, дробного интегрирования локального типа (конструкция Чженя и Адамара-Чженя), односторонних шаровых потенциалов (о.ш.п.) и одного класса несверточных усреднений в классах Лебега с постоянными и переменными показателями.

Задачи исследования, решаемые в данной работе, состоят в следующем:

исследовать свойства дробных интегралов типа Адамара и типа Адамара-Чженя и доказать теоремы ограниченности этих операторов в кусочно-степенных весовых пространствах суммируемых функций;

построить интегральные представления усеченных смешанных дробных производных типа Маршо-Адамара и типа ψ-Маршо-Адамара в пространствах Лебега;

доказать теоремы обращения и описания дробных интегралов ψ-Адамара и типа ψ-Адамара, установить связи между обыкновенными и усеченными дробными производными типа ψ-Маршо-Адамара в пространствах Лебега;

доказать теоремы о совпадении областей определений двух различных форм операторов дробного дифференцирования типа Маршо-Адамара и Грюнвальда-Летникова-Адамара (по направлению и смешанных) в весовых смешанных пространствах Лебега;

установить связь между односторонними шаровыми потенциалами и доказать теоремы ограниченности односторонних шаровых потенциалов в пространствах Лебега с переменным показателем;

доказать сходимость несверточных интегральных операторов почти всюду и по норме в пространстве суммируемых функций.

Основными объектами исследования в диссертации являются дробные интегралы и производные типа Адамара; дробные интегралы и производные типа ψ-Адамара на отрезке; дробное интегрирование локального типа (конструкция Чженя-Адамара); односторонние шаровые потенциалы; операторы несверточных усреднений.

Предметом исследования диссертации является изучение объектов исследования с целью установки их взаимосвязей и получения новых утверждений, которые способствовали дальнейшему развитию теории интегральных операторов в различных нестандартных функциональных пространствах.

Методы исследования. В работе широко используются методы теории функций: интегральные представления, теория мультипликаторов, усреднения, сингулярные интегралы.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

получены интегральные представления усеченных дробных производных Маршо-Адамара и типа Маршо-Адамара (по направлению и смешанных), доказаны теоремы обращения и ограниченности дробных интегралов Адамара и типа Адамара (по направлению и смешанных) от функций в весовых пространствах Лебега со смешанной нормой;

введено понятие смешанной разности векторного дробного порядка с мультипликативным шагом и доказаны теоремы о совпадении областей определений двух различных форм операторов дробного дифференцирования типа Маршо-Адамара и Грюнвальда-Летникова-Адамара (по направлению и смешанных) в весовых пространствах Лебега со смешанной нормой;

рассмотрено интегральное представление усечённой дробной производной ψ-Маршо-Адамара и типа ψ-Маршо-Адамара и получена теорема обращения и описания дробных интегралов ψ-Адамара и типа ψ-Адамара, установлены связи между обыкновенными и усеченными дробными производными типа ψ-Маршо-Адамара в пространствах Лебега;

доказаны теоремы об ограниченности дробных интегралов Чженя и типа Адамара-Чженя в весовых пространствах Лебега с постоянными и переменными показателями, а также показано, что в рамках весовых пространств Лебега с переменным показателем дробная производная Чженя-Маршо является левым обратным оператором для дробного интегрального оператора Чженя;

установлена связь между односторонними шаровыми потенциалами с помощью радиально-сингулярных операторов в шаровом слое, доказаны ограниченности односторонних шаровых потенциалов в пространствах Лебега с переменным показателем, доказаны теоремы обращения и ограниченности односторонних шаровых потенциалов типа Чженя-Маршо;

введено понятие одного класса несверточных усреднений и несверточных операторов, и доказано, что они сходятся как по норме, так и почти всюду в пространстве суммируемых функций.

Практические результаты исследования состоят в развитии теории операторов в нестандартных функциональных пространствах. Результаты, полученные автором в диссертации безусловно вызовут интерес не только у специалистов в области функционального и гармонического анализа, а также теории операторов для которых она рассчитана в первую очередь, но и для математиков работающих в таких областях как уравнения с частными производными, вариационные задачи и других смежных науках.

Достоверность результатов исследования обоснована применением методов математического анализа, гармонического анализа, функционального анализа и теории функций комплексного переменного, а также дифференциальных уравнений и математической физики.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов исследования заключается в том, что полученные в диссертации результаты могут быть использованы для дньейшего развития дробной производной типа ψ-Маршо-Адамара, дробного интеграла и производной Адамара-Чженя, односторонних шаровых потенциалов типа Чженя, а также одного класса несверточных усреднений и несверточных интегральных операторов.

Практическая значимость результатов исследования заключается в том, что полученные научные результаты применяются решению дробно-линейных и нелинейных дифференциальных уравнений, дифференциальных и интегральных уравнений в частных производных.

Внедрение результатов исследования. Полученные в диссертации результаты были внедрены в следующих научно-исследовательских направлениях:

теоремы Соболева об ограниченности дробного интеграла типа Адамара в пространстве Лебега со смешанной нормой; формулы композиции модифицированных дробных интегралов; интегральные выражения производных усечённых по направлению Маршо-Адамара и типа Маршо-Адамара; обратные теоремы для дробных интегралов Адамара и типа Адамара от функций, полученных в пространстве Лебега со смешанной нормой. Результаты соотношений простых и усеченных дробных производных были использованы при математическом моделировании процессов аномальной миграции в простых средах по теме «Разработка и численное исследование гидродинамических моделей утечки жидкости и перемещения веществ в неоднородных пористых средах» фундаментального проекта ОТ-Ф4-64 (Самаркандский государственный университет, справка № 125/130, 25 мая 2021 года). Применение научных результатов позволило выполнить покоординатную численную аппроксимацию дробно-дифференциальных уравнений процессов утечки суспензий и аномального перемещения вещества в двухзонных пористых средах с фрактальной структурой.

Результаты о связи между односторонними шаровыми потенциалами через радиально-сингулярные операторы в шаровом слое были использованы в научных исследованиях Комплексного научно-исследовательского института им. Х.И.Ибрагимова Академии наук России (Комплексный научно-исследовательский институт им. Х.И.Ибрагимова Академик наук России, справка № 10221/117 от 9 июня 2021 года). Применение научных результатов позволило сотрудникам лаборатории прикладной математики Комплексного научно-исследовательского института исследовать и анализировать свойства многомерных интегральных операторов в весовых пространствах Лебега с постоянными и переменными показателями.

Из интегральное представление усечённой дробной производной $\psi-$Маршо-Адамара и типа $\psi-$Маршо-Адамара; из теоремы обращения и описания дробных интегралов $\psi-$Адамара и типа $\psi-$ Адамара; установленные связи между обыкновенными и усеченными дробными производными типа ψ-Маршо-Адамара в пространствах Лебега были использованы в прикладном проекте MRU-OT-9/2017 «Многомерный комплексный анализ» для создания интегрального выражения голоморфных функций в матричных сферах (Национальный университет Узбекистана имени М. Улугбека, справка № 335/352 от 23 июня 2021 года). Применение научных результатов позволило доказать функциональные свойства A(z) - аналитических функций с использованием усеченными дробными производными типа ψ -Маршо-Адамара в пространствах Лебега.

Результаты различных методов усеченных дробных производных типа Адамара и типа Адамар-Чженя были использованы в исследованиях кафедры высшей математики университета нефти и газа им. И.М. Губкина (Университет нефти и газа им. И.М. Губкина, справка № 535/5227 от 17 июня 2021 года). Применение научных результатов позволило проанализировать практические и научно-исследовательские работы кафедры высшей математики, связанные с дробно-интегрально-дифференциальными методами типа Адамара и типа Адамара-Чженя в весовом пространстве Лебега.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования докладывались на 12 международных и 16 республиканских научно-практических конференциях и неоднократно обсуждались на семинаре академика А. Садуллаева по «Современным проблемам комплексного анализа» (НУУз г. Ташкент).

Публикация результатов исследования. По теме диссертации исследования опубликовано 44 работы, в том числе 16 статей, входящих в Перечень Высшей аттестационной комиссии Республики Узбекистан или включенных в международные реферативные базы данных и системы цитирования Scopus, в том числе 10 из них опубликованы в зарубежных журналах и 6 в республиканских научных изданиях.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка использованной литературы. Общий объем диссертации 216 страниц, из них 192 страницы текста. Библиография включает 129 наименований на 14 страницах.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, проведен обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и показана степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава «**Дробное интегродифференцирование типа Адамара в весовых пространствах Лебега**», посвящена исследованию дробных интегралов и производных типа ψ -Маршо-Адамара на конечном отрезке и дробных производных типа Адамара и типа Маршо-Адамара на действительной полуоси.

Параграф 1.1 главы I диссертации является вспомогательной. § 1.1 носит предварительные сведения и вспомогательные леммы, связанные с пространствами

$$\mathcal{L}^p\left(\mathrm{R}_+, \omega_{\tau,\nu}(x)\frac{dx}{x}\right) = \left\{ f : \left\| f ; \mathcal{L}^p_{\tau,\nu} \right\| = \left(\int_0^1 |f(x)|^p x^{-\tau} \frac{dx}{x} + \int_1^\infty |f(x)|^p x^{-\nu} \frac{dx}{x} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\},$$

$1 \le p < \infty,\ \tau, \nu \in \mathrm{R}$ и

$$\mathcal{L}^{\overline{p}}_{\overline{\tau}}\left(\mathrm{R}^n_+, \frac{dx}{x}\right) = \left\{ f : \left\| f ; \mathcal{L}^{\overline{p}}_{\overline{\tau}} \right\| = \left\{ \int_0^\infty [\ldots(\int_0^\infty |f(x)|^{p_1} x_1^{-\tau_1} \frac{dx_1}{x_1})^{\frac{p_2}{p_1}} \ldots]^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} x_n^{-\tau_n} \frac{dx_n}{x_n} \right\}^{\frac{1}{p_n}} < \infty \right\},$$

$1 \le p_i < \infty, \tau_i \ge 0,\ i = \overline{1,n}.$

В § 1.2 доказана теорема об ограниченности дробного интегрирования по Адамару и типа Адамара в $\mathcal{L}^p_{\tau,\nu}$, получено интегральное представление для усеченных дробных производных типа Маршо-Адамара. Дробные интегралы типа Адамара имеют вид

$$(J^\alpha_{+,\mu}\varphi)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left(\frac{t}{x}\right)^\mu \left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \varphi(t)\frac{dt}{t},\ x > 0, \alpha > 0,$$

$$(J^\alpha_{-,\mu}\varphi)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty \left(\frac{x}{t}\right)^\mu \left(\ln\frac{t}{x}\right)^{\alpha-1} \varphi(t)\frac{dt}{t},\ x > 0, \alpha > 0.$$

Дробная производная типа Адамара имеет вид

$$\left(\mathcal{D}^\alpha_{0+,\mu} f\right)(x) := x^{-\mu}\delta^n x^\mu (J^{n-\alpha}_{0+,\mu} f)(x),\ \ n = [\alpha]+1,\ \ x > 0, \alpha > 0,$$

$$\left(\mathcal{D}^\alpha_{-,\mu} f\right)(x) := x^{\mu}(-\delta)^n x^{-\mu} (J^{n-\alpha}_{-,\mu} f)(x),\ n = [\alpha]+1,\ \ x > 0, \alpha > 0,$$

где $[\alpha]$ – целая часть числа α, $\delta = x\frac{d}{dx}$.

Теорема 1. *Пусть* $\tau \in \mathrm{R}, \alpha > 0,\ \mu \in \mathbf{C}$ *и* $1 \le p, r \le q \le \infty$, $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p} + 1.$

i) *Если* $\operatorname{Re}\mu > -\frac{\tau}{p}$, *то оператор* $J^\alpha_{+,\mu}$ *ограничен из* $\mathcal{L}^p_\tau$ *в* $\mathcal{L}^q_{\frac{q\tau}{p}}$, *и*

$$\left\| J^\alpha_{+,\mu}\varphi ; \mathcal{L}^q_{\frac{q\tau}{p}} \right\| \le T^+_r(\mu,\tau) \left\| \varphi ; \mathcal{L}^p_\tau \right\|,$$

где $T^+_r(\mu,\tau) = \left((\operatorname{Re}\mu + \frac{\tau}{p})r \right)^{1-\alpha-\frac{1}{r}} \frac{[\Gamma(1+(\alpha-1)r)]^{\frac{1}{r}}}{\Gamma(\alpha)}$, *при* $1 < p < q, r < q$, *или*

$$q=\infty,\ r=p',\ T_r^+(\mu,\tau)=\left((\operatorname{Re}\mu+\tau)r\right)^{1-\alpha-\frac{1}{r}}\frac{[\Gamma(1+(\alpha-1)r)]^{\frac{1}{r}}}{\Gamma(\alpha)},\quad \text{при}\quad 1=p<q,\ r=q,$$

$$T_1^+(\mu,\tau)=\left(\operatorname{Re}\mu+\frac{\tau}{p}\right)^{-\alpha},\ \text{при}\ \ p=q, r=1.$$

(*ii*) *Если* $\operatorname{Re}\mu>\dfrac{\tau}{p}$, *то оператор* $J_{-,\mu}^{\alpha}$ *ограничен из* $\mathcal{L}_{\tau}^{p}$ *в* $\mathcal{L}_{\frac{q\tau}{p}}^{q}$, *и*

$$\left\| J_{-,\mu}^{\alpha}\varphi\,;\mathcal{L}_{\frac{q\tau}{p}}^{q}\right\| \le T_r^+(\mu,\tau)\left\|\varphi\,;\mathcal{L}_{\tau}^{p}\right\|,$$

где $T_r^+(\mu,\tau)=\left((\operatorname{Re}\mu-\dfrac{\tau}{p})r\right)^{1-\alpha-\frac{1}{r}}\dfrac{[\Gamma(1+(\alpha-1)r)]^{\frac{1}{r}}}{\Gamma(\alpha)}$, *при* $1<p<q,\ r<q$, *или*

$$q=\infty,\ r=p',\ T_r^+(\mu,\gamma)=\left((\operatorname{Re}\mu-\tau)r\right)^{1-\alpha-\frac{1}{r}}\frac{[\Gamma(1+(\alpha-1)r)]^{\frac{1}{r}}}{\Gamma(\alpha)},\text{при } 1=p<q,\ r=q,$$

$$T_1^+(\mu,\tau)=\left(\operatorname{Re}\mu-\frac{\tau}{p}\right)^{-\alpha},\text{при}\ \ p=q, r=1.$$

Доказана теорема обращения дробных интегралов от функций из $\mathcal{L}_{\gamma,\nu}^{p}$.

Теорема 2. *Пусть* $f=J_{+,\mu;}^{\alpha}\varphi,\varphi\in\mathcal{L}_{\tau,\nu}^{p}(\mathrm{R}_+)$, *где* $1\le p<\infty, 0<\alpha<1$, $\tau,\nu\in\mathrm{R}\ \ \mu\ge 0,\ \ \mu>-\dfrac{m}{p}, m=\min(\tau,\nu)$. *Тогда*

$$\left(D_{+,\mu}^{\alpha}f\right)(x)=\lim_{\substack{\rho\to 1\\ \left(\mathcal{L}_{\tau,\nu}^{p}\right)}}\mathrm{D}_{+,\mu;1-\rho}^{\alpha}\,f=\varphi(x).$$

В §1.3 введено обобщение производной ψ-Маршо-Адамара на отрезке. Установлены интегральные представления усечённой дробной производной ψ-Маршо-Адамара и типа ψ-Маршо-Адамара. Доказаны теоремы обращения и описания дробных интегралов ψ-Адамара и типа ψ-Адамара.

Определение 1. *Пусть* $\alpha>0$, $-\infty\le a<b\le\infty$ *и* $\mu\in\mathrm{C}$, *и пусть функция* φ *интегрируема на отрезке* $[a,b]$ *и* $\psi\in C^1([a,b])$ *является положительной возрастающей функцией такой, что* $\psi'(x)\ne 0$ *для всех* $x\in(a,b)$. *Тогда левосторонние и правосторонние дробные интегралы типа* ψ*-Адамара функции* φ *относительно другой функции* ψ *на отрезке* $[a,b]$, *с порядком* α *и параметром* μ, *определяются следующим образом:*

$$\left(J_{a+,\mu}^{\alpha,\psi}\varphi\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left(\frac{\psi(t)}{\psi(x)}\right)^{\mu}\left(\ln\frac{\psi(x)}{\psi(t)}\right)^{\alpha-1}\varphi(t)\frac{\psi'(t)}{\psi(t)}dt\ \ \text{при}\ \ x>a,$$

и

$$\left(J^{\alpha,\psi}_{b-,\mu}\varphi\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b\left(\frac{\psi(x)}{\psi(t)}\right)^{\mu}\left(\ln\frac{\psi(t)}{\psi(x)}\right)^{\alpha-1}\varphi(t)\frac{\psi'(t)}{\psi(t)}dt \text{ при } x<b$$

соответственно.

Определение 2. *Пусть* $\alpha>0,\ n-1<\alpha\le n,\ n\in\mathrm{N}$, $-\infty\le a<b\le\infty$ *и* $\mu\in\mathrm{C}$ *и пусть функция* f *интегрируема на отрезке* $[a,b]$ *и* $\psi\in C^1([a,b])$ *является положительной возрастающей функцией такой, что* $\psi'(x)\ne 0$ *для всех* $x\in(a,b)$. *Тогда левосторонние и правосторонние производные типа* ψ *- Адамара функции* f *относительно другой функции* ψ *на* $[a,b]$, *с порядком* α *и параметром* μ, *определяются следующим образом:*

$$\left(D^{\alpha,\psi}_{a+,\mu}f\right)(x)=(\psi(x))^{-\mu}\left(\frac{\psi(x)}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{n}(\psi(x))^{\mu}J^{n-\alpha,\psi}_{a+,\mu}f(x), n=[\alpha]+1,\ x>a$$

и

$$\left(D^{\alpha,\psi}_{b-,\mu}f\right)(x)=(\psi(x))^{\mu}\left(-\frac{\psi(x)}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{n}(\psi(x))^{-\mu}J^{n-\alpha,\psi}_{b-,\mu}f(x), n=[\alpha]+1, x<b$$

соответственно.

Теорема 3. *Пусть* $f(x)=\left(J^{\alpha,\psi}_{a+,\mu}\varphi\right)(x),\ \varphi\in L^p_{\psi,c}(a,b),\ 0<\alpha<1,\ 1\le p<\infty$, $\mu\ge 0,\ c\in\mathrm{R}, \mu>c$, $0<\rho<1$ *и пусть* $\psi\in C^1([a,b])$ *является положительной возрастающей функцией такой, что* $\psi'(x)\ne 0$ *для всех* $x\in(a,b)$. *Тогда*

$$\left(D^{\alpha,\psi}_{a+,\mu}f\right)(x)=\lim_{\rho\to 1-0}\left(D^{\alpha,\psi}_{a+,\mu;1-\rho}f\right)(x)=\varphi(x),$$

где предел понимается в пространстве $L^p_{\psi,c}(a,b)$.

Теорема 4. *Для того чтобы функция* $f(x)$ *была представима в виде* $f(x)=\left(J^{\alpha,\psi}_{a+,\mu}\varphi\right)(x)$, $\varphi\in L^p_{\psi,c}(a,b)$, *где* $0<\alpha<1$, $1<p<\infty$, $\mu\ge 0, c\in\mathrm{R}$, $\mu>c$, $\psi\in C^1([a,b])$ *является положительной возрастающей функцией такой, что* $\psi'(x)\ne 0$ *для всех* $x\in(a,b)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\left(\frac{\psi(a)}{\psi(x)}\right)^{\mu}\left(\ln\frac{\psi(x)}{\psi(a)}\right)^{-\alpha}f(x)\in L^p_{\psi,c}(a,b)$ *и чтобы в* $L^p_{\psi,c}(a,b)$ *существовал* $\lim\limits_{\rho\to 1-0}\varphi_\rho(x)$, *где* $\varphi_\rho(x)=\left(D^{\alpha,\psi}_{a+,\mu,1-\rho}f\right)(x)$.

Вторая глава «**Дробное интегродифференцирование типа Адамара в весовых пространствах Лебега со смешанной нормой**», посвящена исследованию дробного интегрирования типа Адамара (по направлению, смешанные), а также дробного дифференцирования типа Маршо-Адамара и Грюнвальда-Летникова-Адамара (по направлению и смешанных) в весовых пространствах Лебега со смешанной нормой.

В § 2.1 доказана ограниченность дробного интегрирования типа Адамара (по направлению, смешанные) в весовых пространствах Лебега со смешанной нормой.

Теорема 5. *Пусть* $\tau_i \in \mathrm{R}, 1 \le p_i \le \infty, \alpha_i > 0$ *и* $\mu_i \in \mathrm{C}, i = \overline{1,n}.$

(i) *Если* $\operatorname{Re}\mu_i > -\tau_i^*$, *где*

$$\tau_i^* = \begin{cases} \dfrac{\tau_i}{p_i}, \ 1 \le p_i < \infty, \\ \tau_i, p_i = \infty, i = \overline{1,n}, \end{cases} \tag{1}$$

то оператор $J^{\alpha}_{+\ldots+,\mu}$ *ограничен в* $\mathcal{L}^{\bar{p}}_{\bar{\tau}}$, *и*

$$\left\| J^{\alpha}_{+\ldots+,\mu}\varphi\,; \mathcal{L}^{\bar{p}}_{\bar{\tau}} \right\| \le \theta^{+} \left\| \varphi\,; \mathcal{L}^{\bar{p}}_{\bar{\tau}} \right\|, \ \ \theta^{+} = \prod_{i=1}^{n} \left(\operatorname{Re}\mu_i + \tau_i^* \right)^{-\alpha_i}.$$

(ii) *Если* $\operatorname{Re}\mu_i > \tau_i^*$, *где* τ_i^*, $i = \overline{1,n}$ – *постоянные из (1), то оператор* $J^{\alpha}_{-\ldots-,\mu}$ *ограничен в* $\mathcal{L}^{\bar{p}}_{\bar{\tau}}$, *и*

$$\left\| J^{\alpha}_{-\ldots-,\mu}\varphi; \mathcal{L}^{\bar{p}}_{\bar{\tau}} \right\| \le \theta^{-} \left\| \varphi\,; \mathcal{L}^{\bar{p}}_{\bar{\tau}} \right\|, \ \theta^{-} = \prod_{i=1}^{n} \left(\operatorname{Re}\mu_i - \tau_i^* \right)^{-\alpha_i}.$$

(iii) *Если* $\operatorname{Re}\mu > -\sum\limits_{i=1}^{n} \tau_i^* \ln\omega_i$, *где* τ_i^*, $i = \overline{1,n}$ – *постоянные из (1), то оператор* $J^{\alpha}_{\omega,\mu}$ *ограничен в* $\mathcal{L}^{\bar{p}}_{\bar{\tau}}$, *и*

$$\left\| J^{\alpha}_{\omega,\mu}\varphi\,; \mathcal{L}^{\bar{p}}_{\bar{\tau}} \right\| \le \theta(\omega) \left\| \varphi; \mathcal{L}^{\bar{p}}_{\bar{\tau}} \right\|, \ \ \theta(\omega) = \left(\operatorname{Re}\mu + \sum_{i=1}^{n} \tau_i^* \ln\omega_i \right)^{-\alpha}.$$

Доказаны теоремы типа Соболева ограниченности дробного интегрирования типа Адамара в весовых пространствах Лебега со смешанной нормой.

Теорема 6. *Пусть* $\tau_i \in \mathrm{R}, \alpha_i > 0$, $\mu_i \in \mathrm{C}, i = \overline{1,n}$ *и* $1 \le p_i, r_i \le q_i \le \infty$, $\dfrac{1}{r_i} = \dfrac{1}{q_i} - \dfrac{1}{p_i} + 1, \ i = \overline{1,n}, \ \alpha_i > \dfrac{1}{p_i} - \dfrac{1}{q_i}, \ i = \overline{1,n}.$

(i) *Если* $\operatorname{Re}\mu_i > -\tau_i^*$, *где* $\tau_i^*, i = \overline{1,n}$ – *постоянные из (1), то оператор* $J^{\alpha}_{+\ldots+,\mu}$ *ограничен из* $\mathcal{L}^{\bar{p}}_{\bar{\tau}}$ *в* $\mathcal{L}^{\bar{q}}_{\bar{\nu}}$, *и*

$$\left\| J^{\alpha}_{+\ldots+,\mu}\varphi\,; \mathcal{L}^{\bar{q}}_{\bar{\nu}} \right\| \le \prod_{i=1}^{n} C^{+}_{r_i}\left(\mu_i, \tau_i^*\right) \left\| \varphi\,; \mathcal{L}^{\bar{p}}_{\bar{\tau}} \right\|,$$

где $\bar{\nu} := \left(\tau_1^* q_1, \ldots, \tau_n^* q_n \right), C^{+}_{r_i}\left(\mu_i, \tau_i^*\right) = \left((\operatorname{Re}\mu_i + \tau_i^*) r_i \right)^{1-\alpha_i-\frac{1}{r_i}} \dfrac{[\Gamma(1+(\alpha_i-1)r_i)]^{\frac{1}{r_i}}}{\Gamma(\alpha_i)}$, *при* $1 < p_i < q_i, r_i < q_i$, *или* $q_i = \infty, r_i = p_i'$, $i = \overline{1,n}$, $C^{+}_{r_i}\left(\mu_i, \tau_i\right) = \left((\operatorname{Re}\mu_i + \tau_i) r_i \right)^{1-\alpha_i-\frac{1}{r_i}} \times$ $\times \dfrac{[\Gamma(1+(\alpha_i-1)r_i)]^{\frac{1}{r_i}}}{\Gamma(\alpha_i)}$, *при* $1 = p_i < q_i, r_i = q_i, i = \overline{1,n}$, $C^{+}_{1}\left(\mu_i, \tau_i^*\right) = \left(\operatorname{Re}\mu_i + \tau_i^* \right)^{-\alpha_i}$, *при* $p_i = q_i, r_i = 1, \ \ i = \overline{1,n}$.

(ii) *Если* $\operatorname{Re}\mu_i > \tau_i^*$, *где* τ_i^*, $i=\overline{1,n}$ – *постоянные из (1), то оператор* $J^{\alpha}_{-\dots-,\mu}$ *ограничен из* $\mathcal{L}^{\bar p}_{\bar\tau}$ *в* $\mathcal{L}^{\bar q}_{\bar\nu}$, *и*

$$\left\| J^{\alpha}_{-\dots-,\mu}\varphi\,;\mathcal{L}^{\bar q}_{\bar\nu}\right\| \le \prod_{i=1}^{n} C^{-}_{r_i}\left(\mu_i,\tau_i^*\right)\left\|\varphi\,;\mathcal{L}^{\bar p}_{\bar\tau}\right\|,$$

где $\bar\nu := \left(\tau_1^* q_1,\dots,\tau_n^* q_n\right)$, $C^{-}_{r_i}\left(\mu_i,\tau_i^*\right)=\left((\operatorname{Re}\mu_i-\tau_i^*)r_i\right)^{1-\alpha_i-\frac{1}{r_i}}\dfrac{[\Gamma(1+(\alpha_i-1)r_i)]^{\frac{1}{r_i}}}{\Gamma(\alpha_i)}$, *при* $1<p_i<q_i$, $r_i<q_i$, *или* $q_i=\infty$, $r_i=p_i'$, $i=\overline{1,n}$, $C^{-}_{r_i}\left(\mu_i,\tau_i\right)=\left((\operatorname{Re}\mu_i-\tau_i)r_i\right)^{1-\alpha_i-\frac{1}{r_i}}\times$ $\times\dfrac{[\Gamma(1+(\alpha_i-1)r_i)]^{\frac{1}{r_i}}}{\Gamma(\alpha_i)}$, *при* $1=p_i<q_i$, $r_i=q_i$, $i=\overline{1,n}$, $C^{+}_{1}\left(\mu_i,\tau_i^*\right)=\left(\operatorname{Re}\mu_i-\tau_i^*\right)^{-\alpha_i}$, *при* $p_i=q_i, r_i=1$, $i=\overline{1,n}$.

В §2.2 получено интегральное представление усеченных дробных производных типа Маршо-Адамара (по направлению, смешанные).

В §2.3 доказаны теоремы обращения и дано описание смешанных дробных интегралов типа Адамара от функций из $\mathcal{L}^{\bar p}_{\bar\tau}$.

Теорема 7. *Пусть* $f=J^{\alpha}_{\omega,\mu}\varphi$, $\varphi\in\mathcal{L}^{\bar p}_{\bar\tau}$, *где* $0<\alpha<1, \mu\ge 0, 1\le p_i<\infty$, τ_i, $\ln\omega_i\in\mathrm{R}$, $i=\overline{1,n}$, $\mu+\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\tau_i}{p_i}\ln\omega_i>0$ *и* $0<\rho<1$. *Тогда*

$$(D^{\alpha}_{\omega,\mu}f)(x)=\lim_{\rho\to 1}(D^{\alpha}_{\omega,\mu;1-\rho}f)(x)=\varphi(x),$$

где предел понимается как в $\mathcal{L}^{\bar p}_{\bar\tau}$.

Теорема 8. *Пусть* $f=J^{\alpha}_{+\cdots+,\mu}\varphi$, $\varphi\in\mathcal{L}^{\bar p}_{\bar\tau}$, *где* $\tau_i\in\mathrm{R}$, $0<\alpha_i<1$, $\mu_i\ge 0$, $1\le p_i<\infty$, $\mu_i>-\tau_i^*$, $i=1,\dots,n$. *Тогда*

$$\left(\mathrm{D}^{\alpha}_{+\cdots+,\mu}f\right)(x)=\lim_{\rho\to 1}\left(\mathrm{D}^{\alpha}_{+\cdots+,\mu;1-\rho}f\right)(x)=\varphi(x),$$

где предел понимается как в $\mathcal{L}^{\bar p}_{\bar\tau}$.

В § 2.4 доказаны теоремы о совпадении областей определений двух различных форм операторов дробного дифференцирования типа Маршо-Адамара и Грюнвальда-Летникова-Адамара (по направлению и смешанных) в весовых пространствах Лебега со смешанной нормой. Кроме того, введено понятие смешанной разности векторного дробного порядка с мультипликативным шагом и изучены ее свойства.

Теорема 9 (Случай дифференцирования по направлению). *Пусть* $f(x)\in\mathcal{L}^{\bar r}_{-\bar\lambda}$, $1\le r_i<\infty$, $\lambda_i\ge 0$ *и* $\mu_i\ge 0$, $i=\overline{1,n}$. *Тогда дробная производная типа Грюнвальда-Летникова-Адамара по направлению* ω, *т.е.*

$$\left(D^{\alpha)}_{\omega,\mu} f\right)(x) = \lim_{\substack{\rho\to 1-0 \\ \left(\mathcal{L}^{\bar p}_{\bar\tau}\right)}} \frac{\left(\widetilde{\Delta}^{\alpha,\mu}_{\rho^{\ln\omega}} f\right)(x)}{(1-\rho)^{\alpha}}$$

и дробная производная в смысле Маршо-Адамара по направлению ω*:*

$$\left(D^{\alpha}_{\omega,\mu} f\right)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{\substack{\rho\to 1-0 \\ \left(\mathcal{L}^{\bar p}_{\bar\tau}\right)}} \int_0^{\rho} t^{\mu}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{-1-\alpha} \left(\widetilde{\Delta}^{1}_{t^{\ln\omega}} f\right)(x)\frac{dt}{t} + \mu^{\alpha} f(x)$$

существуют в $f(x)\in \mathcal{L}^{\bar p}_{\bar\tau}$, $1\le p_i<\infty,\ \tau_i\ge 0, i=\overline{1,n}$*, одновременно и совпадают при всех* $\alpha, 0<\alpha<1$*, если* $\mu-\bar\lambda^{*}\cdot\ln\omega\ge 0,$ *где* $\bar\lambda^{*}\cdot\ln\omega=\lambda_1^{*}\ln\omega_1+\ldots+\lambda_n^{*}\ln\omega_n$, λ_i^{*} *– числа (1).*

Теорема 10 (Случай смешанного дробного дифференцирования). *Пусть* $f(x)\in\mathcal{L}^{\bar r}_{-\bar\lambda}$, $1\le r_i<\infty,\ \lambda_i\ge 0, \mu_i\ge 0,\ i=\overline{1,n}$. *Тогда дробная смешанная производная типа Грюнвальда-Летникова-Адамара*

$$\left(D^{\alpha)}_{+\ldots+,\mu} f\right)(x) = \lim_{\substack{h\to 1-0 \\ \left(\mathcal{L}^{\bar p}_{\bar\tau}\right)}} \frac{\left(\widetilde{\Delta}^{\alpha,\mu}_{h} f\right)(x)}{(1-h)^{\alpha}},$$

где $(\widetilde{\Delta}^{\alpha,\mu}_{h} f)(x)=\widetilde{\Delta}^{\alpha_1,\mu_1}_{h_1}[\ldots(\widetilde{\Delta}^{\alpha_n,\mu_n}_{h_n} f)](x)==\sum\limits_{0\le|j|\le\infty}(-1)^{|j|}\binom{\alpha}{j}h^{j\mu} f\left(x\cdot h^{j}\right)$ *– смешанная разность дробного порядка* $\alpha\in \mathrm{R}^n_+$ *с «мультипликативным» векторным шагом* $h\in\mathrm{R}^n_+$ *и смешанная дробная производная Маршо-Адамара*

$$D^{\alpha}_{+\ldots+,\mu} f = \lim_{\substack{\delta\to 0-0 \\ \left(\mathcal{L}^{\bar p}_{\bar\tau}\right)}} D^{\alpha}_{+\ldots+,\mu;\delta} f =$$

$$= \lim_{\substack{\delta\to 0-0 \\ \left(\mathcal{L}^{\bar p}_{\bar\tau}\right)}} \left(\widetilde{D}^{\alpha_1}_{+,\mu_1;\delta_1}+\mu_1^{\alpha_1}E\right)\otimes\left(\widetilde{D}^{\alpha_2}_{+,\mu_2;\delta_2}+\mu_2^{\alpha_2}E\right)\otimes\ldots\otimes\left(\widetilde{D}^{\alpha_n}_{+,\mu_n;\delta_n}+\mu_n^{\alpha_n}E\right)f,$$

(где $(\widetilde{D}^{\alpha_i}_{+,\mu_i;\delta_i} f)+\mu_i^{\alpha_i} f(x)=\dfrac{\alpha_i}{\Gamma(1-\alpha_i)}\displaystyle\int_0^{1-\delta_i} t^{\mu_i}\left(\ln\frac{1}{t_i}\right)^{-\alpha_i-1}\left(\widetilde{\Delta}^{1}_{t_i} f\right)(x)\frac{dt_i}{t_i}+\mu_i^{\alpha_i} f(x)$*)*

существует в $f(x)\in\mathcal{L}^{\bar p}_{\bar\tau}$, $1\le\bar p<\infty,\ \bar\tau\ge 0$*, одновременно и совпадает при всех* $0\le\alpha_i<1, i=\overline{1,n}$.

Третья глава **«Дробное интегродифференцирование типа Адамара и типа Адамара-Чженя в весовых пространствах Лебега»**, посвящена исследованию так называемой модификации Чженя дробных интегралов Лиувилля и типа Адамара-Чженя в весовых пространствах Лебега.

В § 3.1 рассматривается модификация адамаровского дробного интегродифференцирования на полуоси R_+, «привязанная» к некоторой фиксированной точке $c\in\mathrm{R}_+$ (конструкция Адамар-Чженя):

$$(J_c^\alpha \varphi)(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_c^x \dfrac{\varphi(t)}{\left(\ln \frac{x}{t}\right)^{1-\alpha}} \dfrac{dt}{t}, x > c, \\ \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_x^c \dfrac{\varphi(t)}{\left(\ln \frac{t}{x}\right)^{1-\alpha}} \dfrac{dt}{t}, x < c \end{cases} \tag{2}$$

и

$$(\mathcal{D}_c^\alpha f)(x) = \frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)\left|\ln \frac{x}{c}\right|^\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\min(x,c)}^{\max(x,c)} \frac{f(x) - f(t)dt}{\left|\ln \frac{x}{t}\right|^{1+\alpha}} \frac{dt}{t} \tag{3}$$

$x \in \mathrm{R}_+$, $0 < \alpha < 1$. Построены различными способами урезания конструкций Маршо-Чженя-Адамара для дробного дифференцирования (3). Эти варианты урезания применяются для описания и обращения дробных интегралов (2) от функций из $L_{loc}^p(\mathrm{R}_+)$. Полученные результаты можно рассматривать как иллюстрацию преимущества дробного интегродифференцирования J_c^α, D_c^α перед обычным интегродифференцированием Адамара $J_\pm^\alpha = J_\mp^\alpha \infty$, $D_\pm^\alpha = D_\pm^\alpha = D_\mp^\alpha \infty$. Это преимущество состоит в возможности рассматривать на полуоси R_+ функции из $L_{loc}^p(\mathrm{R}_+)$ с любым поведением на бесконечности и в нуле. Доказаны теоремы ограниченности и полугрупповые свойства в кусочно-степенных весовых пространствах суммируемых функций дробных интегралов по Адамару-Чжену и типа Адамара-Чженя.

Теорема 11. *Пусть* $\tau, \nu \in \mathrm{R}, 1 \le p \le \infty, \alpha > 0$, $0 < a < c < b < \infty$ $\tau, \nu \in \mathrm{R}$ *и* $\mu \in \mathrm{C}$. *Если* $\operatorname{Re} \mu > \dfrac{\tau}{p}$, $\operatorname{Re} \mu > -\dfrac{\nu}{p}$, *то оператор* $J_{c,\mu}^\alpha$ *ограничен в* $\mathcal{L}_{\omega_{\tau,\nu}^c}^p$, *и*

$$\left\| J_{c,\mu}^\alpha \varphi; \mathcal{L}_{\omega_{\tau,\nu}^c}^p \right\| \le d_{c,\mu}(\tau,\nu) \left\| \varphi; \mathcal{L}_{\omega_{\tau,\nu}^c}^p \right\|,$$

где

$$d_{c,\mu}(\tau,\nu) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} \dfrac{\gamma\left(\alpha, (\mu - \frac{\tau}{p}) \ln \frac{c}{a}\right)}{\left(\mu - \frac{\tau}{p}\right)^\alpha} + \dfrac{\gamma\left(\alpha, (\mu + \frac{\nu}{p}) \ln \frac{b}{c}\right)^\alpha}{\left(\mu + \frac{\nu}{p}\right)^\alpha}, 1 \le p < \infty \\ \dfrac{\gamma\left(\alpha, (\mu - \tau) \ln \frac{c}{a}\right)}{(\mu - \tau)^\alpha} + \dfrac{\gamma\left(\alpha, (\mu + \nu) \ln \frac{b}{c}\right)^\alpha}{(\mu + \nu)^\alpha}, p = \infty \end{cases}$$

Теорема 12. *Пусть* $f(x) = (J_c^\alpha)(x)$, *где* $\varphi \in L^p(\mathrm{R}_+), 1 \le p < \infty, c > 0$, $0 < \alpha < 1$. *Тогда*

$$\mathrm{D}_c^\alpha f = \lim_{\substack{\rho \to 1-0 \\ (L^p(\mathrm{R}_+))}} \left(\mathrm{D}_{c,1-\rho}^\alpha f\right)(x) = \varphi(x)\cdot$$

В § 3.2 показано, что в рамках весовых пространств Лебега с переменным показателем, дробная производная Чженя-Маршо является левым обратным оператором для дробного интегрального оператора Чженя.

Пусть $\Omega=[a,b]$, где $-<\infty<a<c<b<\infty.$ Рассмотрим пространство $L^{p(\cdot)}[(a,b),\,\rho_c]$ с весом

$$\rho_c(x)=\begin{cases}|x-c|^{\mu(x)}\ \ |b-x|^{\nu(x)}, & x>c,\\ |x-a|^{\mu(x)}\ \ |c-x|^{\nu(x)}, & x<c,\end{cases} \tag{4}$$

где показатели $\mu(x),\nu(x)$ являются ограниченными функциями, которые имеют конечные пределы

$$\mu(a)=\lim_{x\to a}\mu(x),\ \nu(b)=\lim_{x\to b}\nu(x)\ \mu(c)=\nu(c)=\lim_{x\to c}\mu(x)=\lim_{x\to c}\nu(x).$$

Нам понадобятся следующие обозначения для класса показателей.

Определение 3. *Пусть* $\Omega=(a,b)$, *где* $-\infty<a<c<b<\infty$ *и* $x_0\in[a,b]$. *Через* $\omega-Lip_{x_0}(\Omega)$ *обозначим класс*

$$\omega-Lip_{x_0}(\Omega)=\left\{\mu\in L^\infty(\Omega):|\mu(x)-\mu(x_0)|\le\frac{A}{\ln\dfrac{1}{|x-x_0|}},\,|x-x_0|\le\frac{1}{2}\right\}.$$

Для $\mu\in\omega-Lip_a(a,b)\cap\omega-Lip_c(a,b)$ *и* $\nu\in\omega-Lip_c(c,b)\cap\omega-Lip_b(c,b)$ *при* $-\infty<a<c<b<\infty$ *имеем*

$$|x-a|^{\mu(x)}|c-x|^{\nu(x)}\approx|x-a|^{\mu(a)}|c-x|^{\nu(c)},\quad a<x<c,$$
$$|x-c|^{\mu(x)}|b-x|^{\nu(x)}\approx|x-c|^{\mu(c)}|b-x|^{\nu(b)},\quad c<x<b.$$

Теорема 13. *Пусть* $\alpha>0,-\infty<a<c<b<+\infty,$ ρ_c *и* $p\in\mathcal{P}(a,b)\cap\omega-Lip(a,b)$ *есть весовые формы* (4) *с* $\mu\in\omega-Lip_a(a,b)$, $\nu\in\omega-Lip_c(a,b)$ *при* $x<c$, $\mu\in\omega-Lip_c(a,b)$, $\nu\in\omega-Lip_b(a,b)$ *при* $x>c$. *Тогда для* $\varphi\in L^{p(\cdot)}((a,b),\rho_c)$ *при условиях*

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{p(a)}<\mu(a)<\frac{1}{p'(a)},\quad -\frac{1}{p(c)}<\nu(c)<\frac{1}{p'(c)},\ x<c,\\ &-\frac{1}{p(c)}<\mu(c)<\frac{1}{p'(c)},\quad -\frac{1}{p(b)}<\nu(b)<\frac{1}{p'(b)},x>c.\end{aligned} \tag{5}$$

имеет место неравенство

$$\left|\frac{1}{|x-c|^\alpha}\int_{\min(x,c)}^{\max(x,c)}\frac{\varphi(t)}{|x-t|^{1-\alpha}}dt\right|\le C\|\varphi\|_{L^{p(\cdot)}[(a,b),\rho_c]}$$

Теорема 14. *Пусть* $-\infty<a<c<b<+\infty,\ 0<\alpha<1$ *и* $f=I_c^\alpha\varphi$, $\varphi\in L^{p(\cdot)}[(a,b),\rho_c]$, *где* $p\in\mathcal{P}(a,b)\cap w-Lip(a,b)$ *и* $\rho_c(x)-$*вес формы* (4) *с* $\mu\in w-Lip_a(a,c),\nu\in w-Lip_c(a,c)$ *при* $x<c$, $\mu\in w-Lip_c(c,b)$, $\nu\in w-Lip_b(c,b)$ *при* $c<x$. *Тогда*

$$\mathrm{d}\,_c^\alpha f=\varphi,$$

где $\mathrm{d}\,_c^\alpha f=\lim_{\varepsilon\to 0}\mathrm{d}\,_{c,\varepsilon}^\alpha f$ *с пределом по норме пространства* $L^{p(\cdot)}[(a,b),\rho_c]$ *при условиях (5).*

Четвертая глава «**Односторонние шаровые потенциалы в пространствах Лебега»,** посвящена исследованию односторонних шаровых потенциалов и односторонних шаровых потенциалов типа Чженя в пространстве Лебега с постоянными и переменными показателями.

Односторонние шаровые потенциалы (шаровые дробные интегралы-ball fractional integrals) порядка α в шаровом слое $U(a,b), 0 \le a \le b \le \infty$, определим равенствами

$$\left(B_{a+}^{\alpha}\varphi\right)(x) = \gamma_{n,\alpha} \int_{a \le |y| < |x|} \frac{\left(|x|^2 - |y|^2\right)^{\alpha}}{|x-y|^n} \varphi(y)dy, \ |x| > a, \quad \left(B_{b-}^{\alpha}\varphi\right)(x) = \gamma_{n,\alpha} \int_{|x| < |y| < b} \frac{\left(|y|^2 - |x|^2\right)^{\alpha}}{|x-y|^n} \varphi(y)dy, \ |x| < b,$$

где $\gamma_{n,\alpha} = \dfrac{2}{\omega_{n-1}\Gamma(\alpha)} = \dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi^n}\,\Gamma(\alpha)}$. Потенциалы $B_{a+}^{\alpha}\varphi$ назовем левосторонними, а $B_{b-}^{\alpha}\varphi$ правосторонними. При $a = 0,\ b = \infty$ будем писать соответственно $B_{+}^{\alpha}\varphi$, $B_{-}^{\alpha}\varphi$.

В параграфе 4.1 устанавливается связь между односторонними шаровыми потенциалами с помощью радиально-сингулярных операторов в шаровом слое.

Лемма 1. *Пусть* $0 < \alpha < 1$ *и* $\varphi(x) \in C_{0,0}^{\infty}(U(a,b))$. *Справедливы равенства*

$$((B_{a+}^{\alpha})^{-1} B_{b-}^{\alpha}\varphi)(x) = \cos\alpha\pi\,\varphi(x) + \sin\alpha\pi(N_{\alpha}^{a}\varphi)(x),$$

$$((B_{b-}^{\alpha})^{-1} B_{a+}^{\alpha}\varphi)(x) = \cos\alpha\pi\varphi(x) - \sin\alpha\pi(N_{\alpha}^{b}\varphi)(x),$$

где

$$(N_{a}^{\alpha}\varphi)(x) := \frac{2}{\pi}\left(\frac{a}{|x|}\right)^{n-2} \int_{a<|y|<b} \left(\frac{|y|^2 - a^2}{|x|^2 - a^2}\right)^{\alpha} \frac{P(x', \frac{a^2}{|x||y|} y')}{|y|^2 - |x|^2} \frac{\varphi(y)}{|y|^{n-2}} dy +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_{a<|y|<b} \frac{F(|y|,|x|,x'y')}{|y|^2 - |x|^2} \varphi(y)dy \qquad (6)$$

Здесь

$$F_1(\rho,r,w) = \frac{2}{\omega_{n-1}(n-2)} \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{n}{2} + k - 1) C_k^{\frac{n}{2}-1}(w) R_k(\rho,r), \ R_k(\rho,r) = \begin{cases} Q_k(\rho,r), при\, \rho < r, \\ P_k(\rho,r), при\ \rho > r, \end{cases}$$

$$Q_k(\rho,r) = (\frac{n}{2} + k - 1)(\rho r)^{2-k-n} \int_0^{\rho^2 - a^2} \left(\frac{t}{r^2 - \rho^2 + t}\right)^{\alpha} (\rho^2 - t)^{\frac{n}{2}+k-2} dt,$$

$$P_k(\rho,r) = (\frac{n}{2} + k - 1)(\rho r)^{2-k-n} \int_0^{r^2 - a^2} \left(\frac{\rho^2 - r^2 + t}{t}\right)^{\alpha} (r^2 - t)^{\frac{n}{2}+k-2} dt.$$

$$\left(N_{b}^{\alpha}\varphi\right)(x) = \frac{2}{\pi b^{n-2}} \int_{a<|y|<b} \left(\frac{b^2 - |y|^2}{b^2 - |x|^2}\right)^{\alpha} \varphi(y) \frac{P\left(x', \frac{|x||y|}{b^2} y'\right)}{|y|^2 - |x|^2} dy +$$

$$+\frac{2}{\pi}\int\limits_{a<|y|<b}\frac{F_2(|y|,|x|,x'y')}{|y|^2-|x|^2}\varphi(y)dy, \qquad (7)$$

где

$$F_2(\rho,r,w)=\frac{2}{\omega_{n-1}(n-2)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{n}{2}+k-1\right)C_k^{\frac{n}{2}-1}(w)\tilde{R}_k(\rho,r),\ \tilde{R}_k(\rho,r)=\begin{cases}\tilde{Q}_k(\rho,r), & при\,\rho<r,\\ \tilde{P}_k(\rho,r), & при\,\rho>r,\end{cases}$$

$$\tilde{Q}_k(\rho,r)=\left(\frac{n}{2}+k-1\right)(\rho r)^k\int\limits_0^{b^2-r^2}\left(\frac{r^2-\rho^2+t}{t}\right)^{\alpha}\left(r^2+t\right)^{-k-\frac{n}{2}}dt,$$

$$\tilde{P}_k(\rho,r)=\left(\frac{n}{2}+k-1\right)(\rho r)^k\int\limits_0^{b^2-\rho^2}\left(\frac{t}{\rho^2-r^2+t}\right)^{\alpha}\left(\rho^2+t\right)^{-k-\frac{n}{2}}dt.$$

Теорема 15. *Пусть* $0<\alpha<1,\quad \varphi\in L_p\ \left(U(a,b),\omega\right),\ 1<p<\infty$. *Тогда о.ш.п.* $B_{a+}^{\alpha}, B_{b-}^{\alpha}$ *и сингулярные операторы* N_a^{α}, N_a^{b} *связаны между собой соотношениями:*

$$B_{b-}^{\alpha}\varphi=\cos\alpha\pi\ B_{a+}^{\alpha}\varphi+\sin\alpha\pi\ B_{a+}^{\alpha}N_a^{\alpha}\varphi,$$
$$B_{a+}^{\alpha}\varphi=\cos\alpha\pi\ B_{b-}^{\alpha}\varphi-\sin\alpha\pi\ B_{b-}^{\alpha}N_b^{\alpha}\varphi,$$

где N_a^{α}, N_b^{α} *– сингулярные операторы (6), (7).*

В § 4.2 доказана теорема об ограниченности односторонних шаровых потенциалов в пространстве Лебега с переменными показателями на R^n.

Теорема 16. *Пусть* $p\in P^{\log}\left(\mathrm{R}^n\right),\ 0<\alpha<n,$ *и* $1<p_-\le p(x)\le p_+<\dfrac{n}{\alpha}$. *Тогда имеет место следующая оценка для оператора* B_+^{α}

$$\left\||x|^{-\alpha}B_+^{\alpha}f\right\|_{L^{q(\cdot)}}\le C(n,p,\alpha)\|f\|_{L^{p(\cdot)}},$$

для всех $f\in L^{p(\cdot)}$ *при* $\|f\|_{p(\cdot)}\le 1$, *где константа* C *зависит только от* p, $c_{\log}(p)$, p_- *и* p_+, $\dfrac{1}{q(x)}=\dfrac{1}{p(x)}-\dfrac{\alpha}{n}$.

Теорема 17. *Пусть* $\Omega\subset\mathrm{R}^n$ *ограниченное открытое множество и пусть* $p\in P_1(\Omega)$, $0<\alpha<n$, *и* $1<p_-\le p_+<\infty$. *Если* $p_->\dfrac{n}{\alpha}$, *то*

$$\left|B_+^{\alpha}f\right|\le c|x|^{\frac{2\alpha-n}{P(x)}+n}$$

для всех $f\in L^{p(\cdot)}(\Omega)$при $\|f\|_{p(\cdot)}\le 1$ *и для всех* $x\in\Omega$, *где константа* c *зависит от* α, n, p_- *и* p_+, *где* $P(x)=\begin{cases}p_-', |x|\ge 1,\\ p_+', |x|\le 1.\end{cases}$

В § 4.3 введены односторонние шаровые потенциалы типа Чженя. Доказаны теоремы ограниченности и полугрупповые свойства в кусочно-степенных весовых пространствах суммируемых функций односторонних шаровых потенциалов типа Чженя. Кроме того доказано, что потенциал $(B_c^\alpha \varphi)(r,x')$ является непрерывной функцией аргумента $r\in[a,b]$ со значениями в $L_q\left(S^{n-1}\right)$.

Теорема 18. *Пусть* $0<a<c<b<\infty, 1<p<\infty, \lambda<\frac{1}{p'}, \alpha>0$. *Тогда оператор* B_c^α *ограничен из* $L^p\left(U(a,b),\omega^\lambda\right)$ *в* $L^p\left(U(a,b),\omega^{\lambda-\alpha}\right)$, *т.е.*

$$\left\|\omega^{\lambda-\alpha}B_c^\alpha\varphi;L^p(U(a,b))\right\|\le k_\lambda\left(\left\|\omega_+{}^\lambda\varphi;L^p(U(c,b))\right\|+\left\|\omega_-{}^\lambda\varphi;L^p(U(a,c))\right\|\right),$$

где $\omega(x)=\begin{cases}\omega_+=|x|^2-c^2,\ c<|x|<b,\\ \omega_-=c^2-|x|^2,\ a<|x|<c.\end{cases}=\omega_+P_{c+}+\omega_-P_{c-}$, $k_\lambda=\dfrac{2^{1/p}\Gamma\left(\frac{1}{p'}-\lambda\right)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{p'}-\lambda\right)}$.

Теорема 19. *Пусть* $f=B_c^\alpha\varphi, \alpha>0, \varphi\in L^p(U(a,b)), 1\le p<\infty, 0<a<c<b<\infty$. *Справедливы формулы обращения*

$$D_c^\alpha f=\lim_{\varepsilon\to0}D_{c,\varepsilon}^\alpha B_c^\alpha\varphi=\varphi,$$

где предел понимается по норме пространства $L^p(U(a,b))$.

Теорема 20. *Пусть* $f=B_c^\alpha\varphi, \alpha>0, \varphi\in L^p(U(a,b)), 1\le p<\infty, 0<a<c<b<\infty$. *Справедливы формулы обращения*

$$D_c^\alpha f=\lim_{\varepsilon\to0}D_{c,\tilde\varepsilon}^\alpha B_c^\alpha\varphi=\varphi,\ \tilde\varepsilon=\varepsilon\left||x|^2-c^2\right|,$$

где предел понимается по норме пространства $L^p(U(a,b))$.

В пятой главе рассматривается случай многомерных несверточных интегральных операторов в пространствах Лебега. Доказаны теоремы о сходимости почти всюду в случае многомерных несверточных интегральных операторов в пространствах Лебега. Доказанные теоремы являются существенно более общими (в том числе и для сверточных интегральных операторов) и охватывающими широкий класс ядер.

В § 5.1 рассматриваются класс несверточных усреднений

$$(\mathrm{A}_\varepsilon f)(x)=\int_0^{\frac{1}{\varepsilon_1}}\cdots\int_0^{\frac{1}{\varepsilon_n}}k_1(y_1)\cdots k_1(y_n)\varphi(x-\varepsilon\cdot y\cdot(x-c))dy_1\cdots dy_n,$$

где $c\in\mathrm{R}^n, 0<\varepsilon_i<1, \int_0^\infty k_i(y_i)dy_i=1, i=\overline{1,n}$ и исследуется сходимость к функции $\varphi(x)$ по норме и почти всюду в $L^{\bar p}\left(\mathrm{R}^n\right)$ (или $L_{loc}^{\bar p}\left(\mathrm{R}^n\right)$).

Теорема 21. *Пусть ядро* $k_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, *удовлетворяет условиям:*

$$\sup_{0<\varepsilon_i<1}\int_0^{1/\varepsilon_i}|k_i(t)|\frac{dy}{(1-\varepsilon_i t)^{1/p_i}}<+\infty,\ \int_0^\infty k_i(y_i)dy_i=1,\ i=1,\dots,n. \qquad (8)$$

Тогда:

1) справедливо равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\mathrm{A}_{\varepsilon}\varphi)(x)=\varphi(x) \qquad (9)$$

для $\varphi\in L^{\bar{p}}_{loc}(\mathrm{R}^n)$, $1<\bar{p}<+\infty$, *где предел в левой части может рассматриваться как кратный или повторный пределы существующие в пространстве* $L^{\bar{p}}_{loc}(\mathrm{R}^n)$.

2) если $\varphi\in L^{\bar{p}}(\mathrm{R}^n)$, *то соотношение (9) также справедливо в смысле сходимости по норме* $L^{\bar{p}}(\mathrm{R}^n)$, $1<\bar{p}<+\infty$, *если наряду с (8) выполняется следующее условие*

$$\lim_{\varepsilon_i\to 0}\int_{\mu_i/\varepsilon_i}^{1/\varepsilon_i}|k_i(t)|\frac{dt}{(1-\varepsilon_i t)^{1/p_i}}=0$$

при каком-нибудь $0<\mu_i<1,\ i=\overline{1,n}$.

В § 5.2 рассматривается оператор несвёртки

$$(\mathrm{K}_{\varepsilon}\varphi)(x)=\int_{\mathrm{R}^n}K_{\varepsilon}(x,y)\varphi(x-y)dy,\ x\in\mathrm{R}^n.$$

Нас будет интересовать поведение функции $\mathrm{K}_{\varepsilon}\varphi$ при $\varepsilon\to 0$.

Теорема 22. *Пусть* $\varphi(x)\in L^p(\mathrm{R}^n)$, $1\le p\le\infty$ *и пусть для любого достаточно малого* $\mu>0$, *выполнены условия:*

1) $\int_{|y|<\mu}K_{\varepsilon}(x,y)dy\to 1$ *при* $\varepsilon\to 0$ *почти для всех* x;

2) $\int_{|y|>\mu}|K_{\varepsilon}(x,y)|^{p'}dy\to 0$, *если* $p>1$ *и*

$\sup_{|y|>\mu}|K_{\varepsilon}(x,y)|\to 0$, *если* $p=1$, *при* $\varepsilon\to 0$ *почти для всех* x;

3) Существуют числа $\alpha>0,\ \beta>0$ *и почти всюду конечные функции* $a(x)>0,\ c(x)>0$, *такие, что при* $|y|<\mu$

$$|K_{\varepsilon}(x,y)|\le\begin{cases}c(x)|y|^{\alpha-1}\cdot\varepsilon^{-\alpha},\ |y|\le a(x)\cdot\varepsilon,\\ c(x)|y|^{-\beta-1}\varepsilon^{\beta},\ |y|>a(x)\cdot\varepsilon.\end{cases}$$

Тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(K_{\varepsilon}\varphi)(x)=\varphi(x) \qquad (10)$$

справедливо почти для всех x.

Если $K_{\varepsilon}(x,y)\equiv 0$ *при* $|y|\ge N=N(x)$ *при любом достаточно малом* ε, *то (10) верно для* $\varphi(x)\in L^p_{loc}(\mathrm{R}^n)$.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному консультанту, доктору физика-математических наук, профессору, академику Азимбайу Садуллаеву за его постоянную помощь и поддержку. Автор благодарен также профессору С.Г.Самко и профессору Г. Худайберганову за

полезное обсуждение результатов работы. Я также хотел бы воспользоваться возможностью, чтобы поблагодарить всех коллег и друзей с кафедры математического анализа НУУз за обеспечение дружественной и стимулирующей рабочей обстановки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Все основные результаты данного диссертационного исследования являются новыми и работа посвящена изучению свойства модифицированных дробных интегралов и производных типа Адамара, дробных интегралов и производных типа ψ-Адамара на отрезке, дробного интегрирования локального типа (конструкция Чженя и Адамара-Чженя), односторонних шаровых потенциалов (о.ш.п.) и сходимость несверточных интегралных операторов в пространствах Лебега.

Основные результаты исследования состоят в следующем:

1. Доказаны теоремы типа Соболева об ограниченности дробного интегрирования типа Адамара в весовых пространствах Лебега со смешанной нормой и доказаны формулы композиций модифицированных дробных интегралов.

2. Получены интегральные представления усеченных дробных производных Маршо-Адамара и типа Маршо-Адамара по направлению, доказаны теоремы обращения дробных интегралов Адамара и типа Адамара по направлению от функций в весовых пространствах Лебега со смешанной нормой, установлены связи между обыкновенными и усеченными дробными производными типа Маршо-Адамара по направлению в весовых пространствах Лебега со смешанной нормой.

3. Получены интегральные представления усеченных смешанных дробных производных Маршо-Адамара и типа Маршо-Адамара в весовых пространствах Лебега со смешанной нормой, доказаны теоремы обращения смешанных дробных интегралов Адамара и типа Адамара от функций в весовых пространствах Лебега со смешанной нормой.

4. Введено понятие смешанной разности векторного дробного порядка с мультипликативным шагом и изучены ее свойства. Некоторые из этих свойств доказываются с помощью преобразования Меллина.

5. Доказаны теоремы о совпадении областей определений двух различных форм операторов дробного дифференцирования типа Маршо-Адамара и Грюнвальда-Летникова-Адамара (по направлению и смешанных) в весовых пространствах Лебега со смешанной нормой и получены необходимые и достаточные условия существования дробной производной типа Маршо-Адамара по направлению.

6. Доказаны теоремы ограниченности и полугрупповые свойства в кусочно-степенных весовых пространствах суммируемых функций дробных интегралов типа Адамара и типа Адамара-Чженя.

7. Введено понятие, так называемой дробной производной ψ-Маршо-Адамара на отрезке. Рассмотрено интегральное представление, так называемой усечённой дробной производной ψ-Маршо-Адамара и типа ψ-Маршо-Адамара и получена теорема обращения и описания дробных интегралов ψ-Адамара и типа ψ-Адамара, установлены связи между обыкновенными и усеченными дробными производными типа ψ-Маршо-Адамара в пространствах Лебега.

8. Получены различные способы усечения, связанные с дробным дифференцированием Чженя, показано, что в рамках весовых пространств Лебега с переменным показателем, дробная производная Чженя-Маршо является левым обратным оператором для дробного интегрального оператора Чженя.

9. Установлена связь между односторонними шаровыми потенциалами с помощью радиально-сингулярных операторов в шаровом слое и доказаны теоремы типа Соболева об ограниченности односторонних шаровых потенциалов $B_{\pm}^{\alpha}$ из пространства $L^{p(\cdot)}$ в пространство $L^{q(\cdot)}$.

10. Установлены следующие свойства оператора односторонних шаровых потенциалов типа Чженя: о различных способах "усечения" односторонних шаровых потенциалов типа Чженя-Маршо; интегральные представления для усеченных односторонних шаровых потенциалов; теорема обращения в терминах "квазисверточных" усеченных односторонних шаровых потенциалов.

11. Введены понятия одного класса несверточных усреднений и несверточных операторов, исследуется их сходимость к $\varphi(\mathrm{x})$ как по норме $L^{\bar{p}}\left(\mathrm{R}^{n}\right)$ (или $L_{loc}^{\bar{p}}\left(\mathrm{R}^{n}\right)$), так и почти всюду.

Все полученные результаты могут быть использованы в теоретических исследованиях теории приближения, в теории дробного интегродифференцирования, а также могут применены при решении конкретных задач физики, механики, теории управления, химии, медицины и других прикладных науках, описываемых дифференциальными уравнениями дробного порядка и интегральными уравненими. Результаты также могут быть использованы в учебном процессе при чтении спецкурсов.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES
DSc. 03/30.12.2019.FM.01.01 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

YAKHSHIBOEV MAKHMADIYOR UMIROVICH

MULTI-DIMENSIONAL INTEGRODIFFERENTIATION OF A FRACTIONAL ORDER IN LEBESGUE'S SPACE WITH CONSTANT AND VARIABLE EXPONENT

01.01.01 – Mathematical analysis

ABSTRACT OF DOCTORAL DISSERTATION (DSc)
ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent – 2021

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical scienc registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2018.2.PhD/FM208.

Dissertation has been prepared at National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (resume)) on the website of Scientific Council (http://ik-fizmat.nuu.uz/) and the "ZiyoNet" Information and educational portal (http://www.ziyonet.uz/).

Scientific supervisor: **Sadullaev Azimbay**
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, academician

Official opponents: **Ashurov Ravshan Rajabovich**
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor

Umarkhadzhiev Salaudin Musaevich
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor

Turmetov Batirkhan Khudaybergenovich
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor

Leading organization: Urgench state university

Defense will take place on "07" october 2021 at 10[00] at the meeting of Scientific Council DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 at National University of Uzbekistan. (Address: 4 University str., Almazar district, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Tel.: (+998 71) 246 53 21, Fax: (+998 71) 246 53 21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource center at National University of Uzbekistan (registered for No. 95). (Address: 4 University str., Almazar district, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Tel.: (+998 71) 246 02 24).

Abstract of dissertation sent out on "25" september 2021.
(Mailing report No. 2 on "25" september 2021).

Dzh. Khadzhiev
Deputy chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Academician

N.K.Mamadaliev
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees,
PhD in Math. and Physics

R.N.Ganikhodjaev
Chairman of Scientific seminar under
Scientific Council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Professor

INTRODUCTION (abstract of doctoral dissertation)

The relevance and importance of the topic of the dissertation. Fractional integro-differentiation is used in solving many difficult applied problems arising from numerous scientific and applied research conducted at the world level, such as problems of physics, biology, control theory, nonlinear elasticity theory, fluid mechanics, mathematical modeling of various physical phenomena and problems solvability of nonlinear partial differential equations, etc., which cannot be solved by conventional means and to which a large number of studies are currently devoted. As an example, we would like to note that many processes could be efficiently modeled using Lebesgue and Sobolev spaces, where the order of summability p is a constant number.

At present, the use of mathematical methods and computer modeling in various fields of science, technology, economics and other areas of human activity is rapidly expanding. In the theory of elasticity, theory of differential equations in hydromechanics, in particular, Laplace equations, variational problems, modeling of electrological and thermorheological fluids, the image processing and the study of differential equations with non-standard growth in constant and variable Lebesgue and Sobolev spaces are widely used. These spaces can be found in solving problems related to the demonstration of the boundedness and reversibility of operators in harmonic analysis. Therefore, the study of invariant and variable exponential Lebesgue spaces and the search for optimal ways to solve the above problems of harmonic analysis remains one of the most urgent problems.

The aim of the research is to study the properties of modified fractional integrals and derivatives of Hadamard type, fractional integrals and derivatives of ψ-Hadamard type on an interval, fractional integration of local type (Chen and Hadamard-Chen construction), unilateral ball potentials (u.b.p.) and one class of non-convolutional averaging in Lebesgue classes with constant and variable exponents Lebesgue spaces.

The main objects of research in the dissertation are:

fractional integrals and derivatives of Hadamard type; fractional integrals and derivatives of ψ-Hadamard type on an interval; fractional integration of local type (Chen-Hadamard construction); unilateral ball potentials; operators of non-convolutional averaging.

The scientific novelty of the research is as follows:

integral representations of truncated fractional derivatives of Marchaud-Hadamard and Marchaud-Hadamard type (in direction and mixed ones) were obtained, theorems of inversion and boundedness of fractional integrals of Hadamard and Hadamard type (in direction and mixed ones) of functions in weighted Lebesgue spaces with mixed norm were proved;

the concept of a mixed difference of a vector fractional order with a multiplicative step was introduced and theorems were proved on the coincidence of the domains of two different forms of fractional differentiation operators of the

Marchaud-Hadamard and Grunwald-Letnikov-Hadamard type (in direction and mixed ones) in weighted Lebesgue spaces with a mixed norm;

integral representations of the truncated fractional derivative of the ψ-Marchaud-Hadamard and ψ-Marchaud-Hadamard type were considered and a theorem for the inversion and description of the fractional integrals of the ψ-Hadamard and ψ-Hadamard type was obtained, connections were established between the ordinary and truncated fractional derivatives of the ψ-Marchaud-Hadamard type in Lebesgue spaces;

theorems on the boundedness of fractional integrals of Chen and Hadamard-Chen type in weighted Lebesgue spaces with constant and variable exponents were proved, and it was shown that, in the framework of weighted Lebesgue spaces with variable exponents, the fractional Chen-Marchaud derivative is a left inverse operator for the fractional integral Chen operator;

a connection was established between unilateral ball potentials using radial-singular operators in a spherical layer, the boundedness of unilateral ball potentials in Lebesgue spaces with a variable exponent was proved, the theorems of inversion and boundedness of unilateral ball potentials of the Chen-Marchaud type were proved;

the concept of one class of non-convolutional averaging and non-convolutional operators was introduced, and it is proved that they converge both in the norm and almost everywhere in the space of summable functions.

Scientific and practical significance of the research results.

In the dissertation, the concepts of a fractional derivative of the Marsh-Hadamard type, a fractional integral, and a Hadamard-Chern derivative are introduced for the first time, one-sided ball potentials of the Chern type, as well as a class of non-convolutional averaging and non-convolutional integral operators.

Practical significance of the research results the obtained scientific results are used for solving fractional-linear and nonlinear differential equations, differential and integral partial differential equations.

Implementation of research results. The results obtained in the dissertation were implemented in the following research areas:

Sobolev theorems on the boundedness of a fractional integral of Hadamard type in a Lebesgue space with a mixed norm; formulas for modified fractional integrals composition; integral expressions for the derivatives truncated in direction of the Marchaud-Hadamard and Marchaud-Hadamard type; converse theorems for fractional integrals of the Hadamard and Hadamard type of functions obtained in a Lebesgue space with mixed norm. The results of the relations of ordinary and truncated fractional derivatives were used in mathematical modeling of anomalous migration processes in simple media on the topic "Development and numerical study of hydrodynamic models of fluid leakage and movement of substances in heterogeneous porous media" of the fundamental project OT-F4-64 (Samarkand State University, Certificate No. 125/130, May 25, 2021). Application of scientific results made it possible to carry out a coordinate-wise numerical approximation of fractional differential equations of the processes of suspension leakage and anomalous movement of matter in two-zone porous media with a fractal structure;

results on the connection between unilateral ball potentials through radial-singular operators in a spherical layer were used in scientific research of the Complex Research Institute named after Kh.I. Ibragimov of the Academy of Sciences of Russia (Certificate No. 10221/117 dated June 9, 2021). The application of scientific results allowed the staff of the Laboratory of Applied Mathematics of the Complex Research Institute to investigate and analyze the properties of multidimensional integral operators in weighted Lebesgue spaces with constant and variable exponents;

integral representations of the truncated fractional derivative of the ψ-Marchaud-Hadamard and ψ-Marchaud-Hadamard type were considered and a theorem for the inversion and description of the fractional integrals of the ψ-Hadamard and ψ-Hadamard type was obtained, the connections established between ordinary and truncated fractional derivatives of the ψ-Marshaud-Hadamard type in Lebesgue spaces were used in the applied project MRU-OT-9/2017 "Multivariate Complex Analysis" to create an integral expression for holomorphic functions in matrix spheres (the National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Certificate No. 335/352 dated June 23, 2021). Application of scientific results made it possible to prove the functional properties of *A(z)*-analytic functions using truncated fractional derivatives of the ψ-Marchaud-Hadamard type in Lebesgue spaces;

the results of various methods of truncated fractional derivatives of the Hadamard and Hadamard-Chen type were used in the studies of the Department of Higher Mathematics of the Gubkin University of Oil and Gas; Certificate No. 535/5227 dated June 17, 2021). The application of scientific results made it possible to analyze the practical and research work of the Department of Higher Mathematics related to fractional-integral-differential methods of the Hadamard and Hadamard-Chen type in the weighted Lebesgue space.

The volume and structure of the dissertation.

The dissertation consists of an introduction, five chapters, a conclusion and a list of references. The total volume of the dissertation is 216 pages, including 192 pages of text. The bibliography includes 129 references typed on 14 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (Часть I; Part I)

1. Samko S.G., Yakhshiboev M.U. On a class of identity approximation operators of a non-convolution type // J. Fractional calculus and Applied Analysis. 2001. Vol. 4, No. 4. pp. 523-530. (No 41. SCImago. IF=0.11).
2. Rafeiro H., Yakhshiboev M.U. The Chen-Marchaud fractional integro-differentiation in the variable exponent Lebesgue spaces // J. Fractional calculus and Applied Analysis. 2011. Vol. 14, No. 3. pp. 343-360. (№ 3. Scopus. IF=0.6).
3. Samko S.G., Yakhshiboev M.U. A Chen-type Modification of Hadamard Fractional Integro-Dfferentiation // Operator Theory, Operator Advances and Applications. 2014. Vol. 242. pp. 325-339. (№ 3. Scopus . IF: 2.88).
4. Яхшибоев М.У. О дробном интегрировании типа Адамара-Чженя в кусочно-степенных весовых пространствах суммируемых функций // Вестник НУУз. 2017. №2/2. сс. 274-281 (01.00.00; №8).
5. Yakhshiboev M.U. Unilateral ball potentials on generalized Lebesgue spaces with variable exponent // Springer Proceedings in Mathematics and Statisics. Differential Equations and Dynamical Systems. 2018. Vol. 268. pp. 183-195. (№ 3. Scopus. IF: 0.43).
6. Яхшибоев М.У. Связь между односторонними шаровыми потенциалами // Современная математика. Фундаментальные направления. 2018. Том 64, №4. сс. 736-748. (№36. CrossRef. IF=0.207).
7. Yakhshiboev M.U. A Chen-type Modification of Ball Fractional Integro-Differentiation // Uzbek Mathematical Journal. 2019. № 2. pp.135-153. (01.00.00; № 6) .
8. Yakhshiboev M.U. Hadamard-type Fractional Integrals and Marchaud-Hadamard-type Fractional Derivatives in the Spaces With Power Weight // Uzbek Mathematical Journal. 2019. № 3. pp. 155-174. (01.00.00; №6)
9. Yakhshiboev M. U. Convergence Almost Everywhere of Non-convolutional Integral Operators in Lebesgue Spaces // J. Mathematics and Statistics. 2020. Vol. 8, No. 6, pp. 705 - 710. (№ 3. Scopus. IF: 0.43).
10. Яхшибоев М.У. О дробном интегродифференцировании Адамара и типа Адамара по направлению в весовых пространствах Лебега со смешанной нормой // Владикавказский математический журнал. 2020, Том 22, Выпуск 4, сс. 106-121. (№ 3. Scopus. IF: 0.44).
11. Яхшибоев М.У. Дробное интегро-дифференцирование на полуоси, инвариантное относительно растяжения // Вестник Академии наук Чеченской Республики . 2020. 2 (49), сс. 5-20 . (IF: 0.248) .
12. Yakhshiboev M.U. On some properties of the one-sided ball potentials of Chen-type // Uzbek Mathematical Journal. 2020. № 1. P. 144-158 (01.00.00;№ 6).

13. Yakhshiboev M.U. ψ-Marchaud-Hadamard-type fractional derivative and the inversion of ψ-Hadamard-type fractional integrals // Uzbek Mathematical Journal. 2020. № 3. P. 141-162. (01.00.00; № 6).

14. Yakhshiboev M.U. Fractional differentiation of the Grunwald-Letnikov-Hadamard type and the difference of the fractional order with a multiplicative step // Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences. 2020, Vol. 3, Issue 2, P. 147-177. (01.00.00; № 8) .

15. Яхшибоев М.У.Сходимость несверточных интегралных операторов в пространствах Лебега со смешанной нормой. // Вестник Академии наук Чеченской Республики . 2021. 1 (52), сс. 9-22. (IF: 0.248) .

16. Яхшибоев М.У. Об ограниченности дробного интегрирования по Адамару и типа Адамара в пространствах Лебега со смешанной нормой // Современная математика. Фундаментальные направления. 2021. Принята для опубликования

I I бўлим (Часть I I; Part I I)

17. Яхшибоев М.У.Описание дробных интегралов от функций из L_p. Операторные алгебры и квантовая теория вероятностей // Тезисы докладов международной конференции, посвященная 90 летию академика Т. Саримсокова . 7-10 сентября 2005 г., г.Тошкент, Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека и Институт математики, с.. 243-244.

18. Яхшибоев М.У., Яхшибоева Б.М., Газиев А. Интегральные представление для усеченных дробных производных Адамара – Чженя // Замонавий математиканинг долзарб муаммолари. Ўзбекистон Республикаси мустақиллигининг 20 йиллигига бағишланган, Республика илмий- амалий анжумани материаллари. 22-23 апрел 2011 й., Қарши шаҳри, Қарши ДУ ва ТАТУ Қарши филиали, 270-272 бет..

19. Яхшибоев М.У., Яхшибоева Б.М. Обращение и описание дробных интегралов Адамара-Чжения в терминах усеченных дробных производных с «перемнных» урезанием // Операторные алгебры и смежные проблемы. Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых. 12-14 сентября 2012 г., Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека и Институт математики, сс. 266-267.

20. Yakshiboev M.,Yakshiboeva B.One sided ball potential generalized Lebesgue spaces with variable exponent //Актуальные вопросы комплексного анализа. Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых. 19-21 сентября 2013 г., Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, сс.44.

21. Яхшибоев М.У., Яхшибоева Б.М., Газиев А. Односторонние шаровые потенциалы в пространствах Лебега с переменным показателем // Современные методы математической физики и их приложения. Республиканская научная конференция. 15-17 апреля 2015 г., Тошкент, НУУз и филиал МГУ, сс. 88-90.

22. Яхшибоев М.У., Диёров А. Совпадение дробной производной Грюнвальда-Летникова-Адамара с производной Маршо-Адамара // Математика ва унинг долзарб муаммолари. Республика илмий конференциялар материаллари. 20-21май 2016 , АндижонДУ, 415-416 бет..

23. Яхшибоев М.У. Исследование некоторых свойства дробного интеграла Адамара // VI Российско-Армянское совещание по математическому анализу, математической физике и аналитической механике. Международная научная конференция. 11-16 сентября 2016 г., г.Ростов наДону (Россия), сс. 44.

24. Яхшибоев М.У., Мардонова Б.М. Действие операторов дробного интегрирование в пространствах $L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\left(R_+^n,\frac{dx}{x}\right)$ // International conference on nonlinear analysis and its applications. Srptember 19-21, 2016 y., Samarkand, Uzbekiston. SamSU, pp.43-44.

25. Яхшибоев М.У. О дробном интегрировании Адамара в кусочно-степенных весовых пространствах суммируемых функций // Contemporary Problems in Mathematics and Physics. Scientific Program of the Uzbek-Israel Conference. October 6-10, 2017 y., National University of Uzbekistan, pp. 227-228.

26. Yakhshiboev M.U. Unilateral ball potentials on generalized Lebesgue spaces $\boldsymbol{L}^{(\cdot)}$ // Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения VIII. Международная научная конференция. 22-27 апреля, 2018 г., г.Ростов на Дону, Южный Федеральный университет, сс. 28-29.

27. Яхшибоев М.У., Усманов А. Обращение односторонних шаровых потенциалов типа Чженя // Математический анализ и его приложение к современной математической физике. Международная научная конференция. 17- 20-сентября 2018 г., г. Самарканд, СамГУ, сс. 37-38.

28. Яхшибоев М.У., Нарзуллаев У.Х..Об одностороннем шаровом потенциале типа Чженя // Новые результаты математики и их приложения. Тезисы докладов Республиканской научной конференции. 14-15 мая 2018 г., г. Самарканд, СамГУ, сс. 54-56.

29. Яхшибоев М.У., Нарзуллаев У.Х. Ограниченность односторонних шаровых потенциалов типа Чженя в весовых пространствах суммируемых функций // Современные проблемы теории вероятностей и математической статистики. Тезисы докладов Республиканской научной конференции. 30 апреля-1 мая 2019 г., г.Ташкент. НУУз., сс. 196-198.

30.Yakhshiboev M.U., Gaziev A. The inversion theorem truncated ball fractional derivatives // Science + Technology + Education + Mathematics + Medicine. Международная научная конференция. 13-17 мая 2019 г., г.Ташкент. НУУз., сс. 141-142.

31. Яхшибоев М.У. О дробном интегрировании типа Адамара в кусочно-степенных весовых пространствах суммируемых функций //Обратные и

некорректные задачи. Международная научная конференция. 2-4 октября 2019 г., г. Самарканд, СамГУ, сс. 155-157.

32. Яхшибоев М.У., Газиев А. Усеченная дробная производная типа Маршо-Адамара в весовых пространствах суммируемых функций //Таҳлилнинг долзарб муаммолари ва татбиқлари. Республика илмий конференция. 4-5 октябр 2019 йил, Қарши давлат университети, 51-53 бет..

33.Yakhshiboev M.U. On a class of non-convolution operators //Актуальные проблемы анализа, дифференциальных уравнений и алгебры. Международная научная конференция. 16-19 октября 2019 г., г. Нур-Слтан Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, сс.62-63.

34. Яхшибоев М.У., Нарзуллаев У.Х. О дробном интегрировании типа Адамара функций многих переменных //Современные проблемы геометрии и топологии и их приложения. Международная научная конференция. 21-23 ноября 2019 г., г.Ташкент. НУУз., сс. 191-192.

35. Яхшибоев М.У. Обращение дробных интегралов Адамара и типа Адамара от функций в весовых смешанных пространствах Лебега // Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов. Международная научная конференция. 12-13марта 2020 г., ФерГУ, сс. 123-126.

36. Яхшибоев М. У., Нарзуллаев У.Х. Совпадение дробной производной типа Грюнвальда-Летникова-Адамара с производной типа Маршо-Адамара // Ахборот коммуникация технологиялари ва дастурий таъминот яратишда инновацион ғоялар. Республика илмий ва техник анжуман. 15-16 май 2020 йил, ТАТУ Самарқанд филиали, 7-10 бет..

37. Яхшибоев М. У. Дробная производная типа ψ-Маршо-Адамара и обращение дробных интегралов типа ψ-Адамара // Современные проблемы математики. Республика илмий анжумани. 20 мая 2020 г., г.Нукус. Каракалпакский государствееннй университет, сс. 98-100.

38. Яхшибоев М. У., А.Газиев Описание смешанных дробных интегралов Адамара и типа Адамара от функций в весовых смешанных пространствах Лебега // Современные проблемы стохастического анализа. Международная научно-практическая конференция посвященная 100 летию академика С.Х.Сираждинова. 21-22 сентября 2020, Ташкент. НУУз., сс. 267-271.

39.Yakhshiboev M.U. Fractional differentiation of the Grunwald-Letnikov-Hadamard typ // Frontier in mathematics and computer science. Abstracts of the International Online Conference. October 12–15, 2020, Tashkent. National University of Uzbekistan-Holon Institute of Technology, pp. 158-159.

40. Яхшибоев М. У. О дробном интегродифференцировании типа Адамара по направлению в весовых пространствах Лебега со смешанной нормой // Математиканинг замонавий масалалари: муаммолар ва ечимлар. Республика илмий анжумани. Термиз давлат университети, 2020 йил 21-23 октябр, 206-209 бет..

41.Yakhshiboev M.U., Narzullaev U.X. Convergence of non-convolutional integral operators in Lebesgue spaces // Теории функций одного и многих комплексных переменных. Международная научно-практическая конференция. 26-28 ноября 2020, НукусГПИ. сс. 38-41.

42. Яхшибоев М. У. Интегральное представление усеченных смешанных дробных производных Маршо-Адамара и типа Маршо-Адамара //Актуальные проблемы стохастического анализа. Материалы Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученных. 20-21 февраля 2021г., г. Ташкент. Институт математики им. В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан и НУУз. сс. 351-354.

43. Яхшибоев М. У., Нарзуллаев У.Х. Об ограниченности дробных интегралов типа ψ-Адамара на отрезке // Ахборот коммуникация технологиялари ва дастурий таъминот яратишда инновацион ғоялар номли Республика миқёсидаги илмий-техник конференцияси. 2021 йил 17-18 май, Муҳаммад Ал-Хоразмий номидаги Тошкент ахборот технологиялари университети Самарқанд филиали. сс. 93-94.

44. Яхшибоев М. У. Интегралные представления для усеченных дробных производных типа ψ-Маршо-Адамара // “Глобаллашув даврида математика ва амалий математиканинг долзарб масалалари” номли Респулика миқёсида илмий-амалий анжуман. 2021 йил 1-2 июн, Тошкент давлат техника университети. сс. 134-137.

Авторефератнинг ўзбек, рус ва инглиз тилларидаги нусхалари “Ўзбекистон математика журнали” таҳририятидан таҳрирдан ўтказилди.
23 октябрь 2021 йил.

2021-йил 23-сентябрданоширлик бўлимига қабул қилинди.
2021-йил 24-сентябрда оргинал-макетдан босишга рухсат этилди.
Бичими 60х84/ 1,16. «Times New Roman» гранитураси.
Офсет қоғози. Шартли босма табоғи 4,0.
Адади 100 нусха. 483-буюртма.

СамДУ таҳририй-нашриёт бўлимида чоп этилди.
140104, Самарқанд ш., Университет хиёбони, 15