В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

АДАШЕВ ЖОБИР КОДИРОВИЧ

НИЛПОТЕНТ ЛЕЙБНИЦ АЛГЕБРАЛАРИНИНГ ЕЧИМЛИ ВА МАРКАЗИЙ КЕНГАЙТМАЛАРИ ВА БЕРИЛГАН ХАРАКТЕРИСТИК КЕТМА-КЕТЛИККА ЭГА КОШУЛ МАЪНОСИДА ҚЎШМА АЛГЕБРАЛАРИНИНГ ТАСНИФЛАРИ

01.01.06 – Алгебра

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ (DSc) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ–2021

УДК: 512.554.1

Докторлик (DSc) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата докторской (DSc) диссертации

Contents of the Doctoral (DSc) Dissertation Abstract

В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

АДАШЕВ ЖОБИР КОДИРОВИЧ

НИЛПОТЕНТ ЛЕЙБНИЦ АЛГЕБРАЛАРИНИНГ ЕЧИМЛИ ВА МАРКАЗИЙ КЕНГАЙТМАЛАРИ ВА БЕРИЛГАН ХАРАКТЕРИСТИК КЕТМА-КЕТЛИККА ЭГА КОШУЛ МАЪНОСИДА ҚЎШМА АЛГЕБРАЛАРИНИНГ ТАСНИФЛАРИ

01.01.06 – Алгебра

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ (DSc) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ–2021

Фан доктори (DSc) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2021.2.DSc/FM73 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация В.И.Романовский номидаги Математика институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (http://kengash.mathinst.uz) ва «ZiyoNet» Ахборот таълим порталида(www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий маслаҳатчи:	**Омиров Бахром Абдазович** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Аллаков Исмаил** физика-математика фанлари доктори, доцент
	Кудайбергенов Каримберген Кадирбергенович физика-математика фанлари доктори, профессор
	Эшматов Фарход Хасанович физика-математика фанлари доктори, катта илмий ходим
Етакчи ташкилот:	**Самарқанд давлат университети**

Диссертация ҳимояси В.И.Романовский номидаги Математика институти ҳузуридаги DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2021 йил « 28 » октябр соат 17:00 даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 9-уй. Тел.: (+99871)-207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Диссертация билан В.И.Романовский номидаги Математика Институтининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (122–рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 9-уй. Тел.: (+99871)-207-91-40).

Диссертация автореферати 2021 йил « 15 » октябр куни тарқатилди.
(2021 йил « 15 » октябрдаги 2-рақамли реестр баённомаси).

У.А. Розиков
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор

У.У.Жамилов
Илмий даражалар берувчи Илмийкенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.д., катта илмий ходим

А.Р.Ҳаётов
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш ҳузуридаги Илмий семинар раис ўринбосари, ф.-м.ф.д., катта илмий ходим

КИРИШ (докторлик диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурияти. Бутун дунёда математиканинг турли соҳаларида олиб борилган кўплаб илмий ва амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда квант механикасининг элементар зарралар, иқтисодий муаммолар ва аҳоли биологиясини таҳлил қилиш каби масалаларга келтирилади. Ассоциатив бўлмаган алгебраларнинг муҳим турларидан бири Ли алгебралари бўлиб, бундай алгебралар XIX аср охирларида Ли группаларини ўрганиш билан боғлиқ натижалар орқали пайдо бўлган, ҳамда ноассоциатив алгебралар назариясини ўрганишда алоҳида аҳамиятга эга. Шуни таъкидлаш керакки, дастлаб Ли алгебралари «инфинитезимал группалар» атамаси билан юритилиб, Ҳ.Вейлнинг ишларидан кейингина бундай алгебралар Ли алгебралари деб номлана бошлаган. Ли группалари ва Ли алгебралари назарияси ўзаро чамбарчас боғлиқ бўлганлиги учун улар узоқ вақт давомида параллел равишда ривожланиб келмоқда. Масалан, Ли группасининг соддалиги, нилпотентлиги ва ечимлилиги каби хусусиятлар мос равишда Ли алгебраси учун ҳам ўхшаш хусусиятларни келтириб чиқаради. Физиканинг турли соҳаларида, квант механикасида ва математиканинг бошқа соҳаларидаги кўплаб тадқиқотлар билан боғлиқ муаммоларни ҳал этишда Ли алгебралари Ли группаларидан мустақил равишда замонавий алгебранинг муҳим йўналишларидан бири бўлиб келмоқда.

Ҳозирги вақтда алгебраик объектларни тадқиқ этишда бирор майдон устида берилган маълум ўлчамли алгебралар кўпхилликларини ёки А.Г.Курош термини бўйича элементар алгебралар синфини аниқлаш муҳим аҳамият касб этмоқда. Алгебраик кўпҳилликларга мисол қилиб коммутатив алгебралар, ассоциатив алгебралар, Ли алгебралари, Йордан алгебралари ва сўнгги йилларда ривожланаётган Лейбниц алгебралари кўпҳилликларини келтиришимиз мумкин. Таъкидлаш лозимки, чекли ўлчамли Ли алгебралари назариясининг кўплаб классик натижалари Лейбниц алгебралари учун ҳам ўринли бўлади. Берилган алгебралар кўпҳиллигини алгебраик таснифлашдан фарқли ўлароқ чекли ўлчамли Лейбниц алгебралар кўпхиллигини геометрик таснифлашга ва уларнинг чизиқли алгебраик группа таъсирида келтирилмас компоненталарини топишга келтирилади. Бу борада: бирор майдонда берилган ҳар қандай чекли ўлчамли Лейбниц алгебрасини ўлчами алгебра ўлчамининг кубига тенг бўлган аффин алгебраик кўпхиллиги нуқтаси сифатида қараб, берилган группа таъсири остидаги Лейбниц алгебраларининг изоморф синфларига мос келувчи ушбу нуқта орбитасини топиш ва барча орбиталарни таснифлаш мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий татбиқига эга долзарб йўналишлардан бири бўлган чекли ўлчамли Ли ва Лейбниц алгебраларининг структуравий назариясини тадқиқ этишга алоҳида эътибор кучайтирилди. Маълумки, Ли алгебраларининг учта асосий синфлари мавжуд бўлиб, улар ярим содда, ечимли ва ярим содда ҳам ечимли ҳам бўлмаган Ли алгебраларидир. Леви-Малцев теоремасига кўра, учинчи синфга тегишли алгебралар ярим содда ва ечимли алгебраларнинг ярим тўғри йиғиндисидан иборат бўлади. Ярим содда Ли алгебраларининг таснифи Картан томонидан тўлиқ ҳал қилинган бўлиб, улар содда идеалларнинг тўғри йиғиндисига ажралади. Шундай қилиб, Ли алгебраларининг асосий учта синфлардан иккинчиси ҳисобланган ечимли алгебраларни таснифлаш масаласи ўта долзарб муаммога айланган. Г.М.Мубаракзянов томонидан таклиф қилинган методга кўра, чекли ўлчамли ечимли Ли алгебраларини уларнинг максимал нилпотент идеаллари ва ушбу идеалларнинг ташқи дифференцаллашлари орқали ҳосил қилиш мумкин. Ушбу методдан ечимли Лейбниц алгебраларини таснифлашда ҳам қўллаш мумкинлиги исботланган бўлиб, бунда элементга ўнгдан кўпайтириш оператори ечимли Лейбниц алгебраси нилрадикалининг нил-эркли дифференциаллаши эканлиги муҳим рол ўйнайди. Охирги йилларда ечимли Лейбниц алгебраларини таснифлашга ва уларнинг кичик тартибли когомологик группаларини топишга оид салмоқли натижаларга эришилди. «Алгебра, сонлар назарияси ва функционал анализ» фанларининг устивор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифалари ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди[1]. Қарорнинг ижросини таъминлашда илмий натижалардан илм-фаннинг турдош соҳаларида фойдаланиш мақсадида чекли ўлчамли Лейбниц алгебраларининг структуравий назариясини қуриш ва алгебралар кўпхиллигидаги орбиталари очиқ бўлган алгебраларни аниқлаш муҳим аҳамиятга эга.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича харакатлар стратегияси тўғрисида»ги Фармони, 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сон «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ва 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

---

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий-тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш чора-тадбирлари тўғрисида»ги 292-сон қарори

Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий тадқиқотлар шарҳи. Ассоциатив бўлмаган алгебраларнинг структуравий назарияси ва уларнинг когомологик хусусиятларини ўрганиш бўйича тадқиқотлар кўплаб илмий марказлар ва хорижий мамлакатларнинг университетлари, жумладан, Севиля университети, Кадис университети, Сантяго де Компостела университети, Мадрид Комплутенсе университети, Экстремадура университети (Испания), Вена университети (Австрия), Лоранд Этвеш университети (Венгрия); Сан-Диего университети, Толедо университети, Шимолий Каролина университети (АҚШ); Шарқий Хитой педагогика университети (Хитой); Новосибирск давлат университети, Сибир Федерал университети (Россия); Малайзиянинг Путра университети (Малайзия); Математика ва математик моделлаштириш институти, Қозоғистон-Британия техника университети (Қозоғистон); Санта-Катарина федерал университети, Сан-Паулу университети (Бразилия), Порту университети (Португалия) ва бошқалар томонидан олиб борилмоқда.

Охирги йилларда Лейбниц алгебраларининг марказий кенгайтмалари ва орбиталарини топишга, ҳамда нилрадикали берилган ечимли Лейбниц алгебраларининг таснифларига оид қатор долзарб масалалар ечилган ва муҳим натижаларга эришилган. Жумладан: уч ва тўрт ўлчамли Ли ва Лейбниц алгебраларининг геометрик таснифлари олинган (Гейнрих Гейне номидаги Дюсселдорф университети ва Бонн университети, Германия); нилрадикали нол-филиформ ва табиий усулда градуирланган филиформ алгебрасидан иборат бўлган ечимли Лейбниц алгебраларининг таснифи олинган ва когомологик группалари ҳисобланган (Сантяго де Компостела университети ва Мадрид Комплутенсе университети, Испания); Лейбниц алгебраларининг иккинчи тартибли когомологик группалари тривиаллигидан бундай алгебраларнинг қаттиқ бўлиши келиб чиқиши исботланган (Жасси-Париж Рив Гош номидаги Математика институти, Франция); нилрадикали Гейзенберг алгебраси ва иккинчи типдаги квази-филиформ Лейбниц алгебрасидан иборат бўлган ечимли Лейбниц алгебраларининг таснифи олинган (Бекли давлат университети, Ғарбий Виржиния университети, Толедо университети, АҚШ); Содда ва яримсодда Лейбниц алгебраларининг когомологик группалари нолга тенг эканлиги исботланган (Жанубий Алабама университети, АҚШ ва Нант университети, Франция), комплекс сонлар майдони устида берилган чекли ўлчамли Лейбниц алгебралари ярим содда Ли алгебраси ва унинг ечимли радикалининг ярим тўғри йиғиндиси кўринишида ёйиш мумкинлиги исботланган (Сидней университети, Австралия).

Дунёда сўнги йилларда чекли ўлчамли ечимли Лейбниц алгебраларининг структуравий назариясини қуриш ва уларни татбиқ этиш бўйича қатор илмий изланишлар, хусусан нилрадикаллари берилган ечимли Лейбниц алгебраларини таснифлаш; кичик ўлчамдаги Лейбниц алгебраларининг орбиталарини ёпилмасини топиш ва келтирилмас компоненталарни аниқлаш; ихтиёрий чекли ўлчамли Лейбниц алгебралари кўпхиллигида қаттиқ алгебраларни топиш; Лейбниц алгебраларининг дифференциаллашлари ва инфинитезимал деформацияларини таснифлаш; ечимли Лейбниц алгебраларининг когомологик группаларини ҳисоблаш каби устувор йўналишларда илмий-тадқиқот ишлари олиб борилмоқда.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Лейбниц алгебралари дастлаб А.М.Блох томонидан D-алгебралар номи остида киритилган бўлиб, кейинчалик, Ж.Л.Лоде Ли алгебраларининг антикоммутатив бўлмаган аналоги сифатида худди шундай айниятни қаноатлантирувчи алгебраларни аниқлаган ва Готфрид Вилгелм Лейбниц шарафига уларни Лейбниц алгебралари деб номлаган. Ҳозирги пайтда Лейбниц алгебралари учун Ли алгебралари назариясидаги кўплаб классик теоремаларнинг аналоглари исботланган. Хусусан, Д.Барнснинг ишида Лейбниц алгебралари учун Леви теоремасининг аналоги бўлган ҳар қандай чекли ўлчамли комплекс Лейбниц алгебрасини ечимли радикал ва ярим содда Ли қисм алгебрасининг ярим тўғри йиғиндисига ёйиш мумкинлиги исботланган. Шу сабабли, чекли ўлчамли комплекс Лейбниц алгебраларининг тузилишини тадқиқ этишда асосий муаммо бу – ечимли қисмнинг таснифи ҳисобланади. Ш.А.Аюпов, Х.М.Анкоче-Бермудес, М.Ладра, Ж.М.Касас, Л.М.Камачо, К.Мисра, Б.А.Омиров, И.С.Рахимов, А.Х.Худойбердиев, А.Шабанскаяларнинг ишларида нилрадикали Абел алгебраси, Гейзенберг алгебраси, нол-филиформ, филиформ, квази-филиформ Лейбниц алгебраси бўлган ечимли Лейбниц алгебраларининг таснифлари олинган.

Ечимли Лейбниц алгебраларининг тузилиш назариясидан уларнинг когомологик хоссаларини тадқиқ қилишда муҳим рол ўйновчи қаттиқ алгебраларни топишда фойдаланилади. Ли ва Лейбниц алгебралари кўпхиллиги, уларнинг деформациялари, ҳамда когомологик группалари Д.Балавуан, А.Мандал, А.Нейенхейс, Р.Ричардсон, Д.В.Миллионщиков ва А.Фиаловскиларнинг ишларида ўрганилган бўлиб, Лейбниц алгебрасининг иккинчи тартибли когомологик группаси нолга тенг эканлигидан унинг қаттиқ алгебралиги келиб чиқиши исботланган ва чекли ўлчамли Лейбниц алгебралари кўпхиллигидаги бир қанча келтирилмас компоненталар топилган.

Шунингдек, ушбу диссертацияда В.Гинзбург, М.Капранов ва Ж.Л.Лоделарнинг ишларида келтирилган Лейбниц алгебралари учун Кошул маъносида қўшма бўлган алгебраларнинг берилган характеристик кетма-кетликка эга синфларини таснифлашга оид масалалар ечилган. Ж.Л.Лоденинг ишларида Лейбниц алгебраларининг Кошул маъносидаги қўшма алгебралари учун айният топилиб, кейинчалик бу айниятни қаноатлантирувчи алгебраларни «Leibniz» сўзининг харфларини тескари тартибда ёзиш орқали «Zinbiel» алгебраси деб номланган. А.С.Джумадильдаев, В.Гинзбург, М.Капранов, Ж.Л.Лоде ва К.М. Туленбаевларнинг ишларида Зинбиел алгебраларининг муҳим хоссалари олинган. Хусусан, А.С.Джумадильдаев ва К.М.Туленбаевларнинг ишида ихтиёрий чекли ўлчамли комплекс Зинбиел алгебрасининг нилпотент бўлиши исботланган. Бундан ташқари, ихтиёрий майдонда берилган чекли ўлчамли Зинбиел алгебралари учун нилпотентлик, ниллик ва ечимлилик индекслари учун баҳолар кўрсатилган. Л.М.Камачо, Э.М.Канете, С.Гомес-Видал, И.А.Каримжанов, Н.Исмаилов, Б.А.Омиров, А.Х.Худойбердиевларнинг ишларида нилпотентлик индекси ва характеристик кетма-кетликларига маълум шартлар берилган Зинбиел алгебраларининг структуравий тузилишлари аниқланган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти В.И.Романовский номли Математика институти илмий-тадқиқот ишлари режасидаги Ф4-ФА-Ф013 рақамли «Операторлар ва ноассоциатив алгебралар, динамик системалар ва уларнинг статистик механика ва популяцион биологияга тадбиқлари» (2012-2016 йиллар), ОТ-Ф4-82+ОТ-Ф4-87 рақамли «Операторлар ва ноассоциатив алгебраларда локал дифференциаллаш ва автоморфизмлар, ночизикли динамик системаларда фаза алмашишлар ва хаос+Евклид ва псевдо-Евклид фазоларидаги эгри чизиқлар ва сиртларнинг глобал инвариантлари назарияси ва унинг механикага татбиқлари» (2017-2019 йиллар) ва ЁФА-Фтех-2018-77 рақамли «Ярим содда ва нилпотент алгебраларининг когомологик группалари» (2018-2019 йиллар) мавзусидаги фундаментал лойиҳалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади нилпотент Лейбниц алгебраларининг ечимли ва марказий кенгайтмаларини ва Лейбниц алгебраларига Кошул маъносида қўшма алгебраларнинг берилган характеристик кетма-кетликка эга бўлган синфларини таснифлашдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари қуйидагилардан иборат:

l-градуировкали филиформ Лейбниц алгебраларини таснифлаш;

нилрадикали Абел алгебраси бўлган максимал ечимли Лейбниц алгебраларини таснифлаш;

нилрадикали n-ўлчамли бўлган (2n–1)-ўлчамли ечимли Лейбниц алгебраларини таснифлаш;

нилрадикали табиий усулда градуирланган p-филиформ алгебраси бўлган ечимли Лейбниц алгебраларини таснифлаш;

Вирасоро алгебрасининг Лейбниц марказий кенгайтмаларини тривиал бўлишини исботлаш;

нол-филиформ ва табиий усулда градуирланган Ли бўлмаган филиформ Лейбниц алгебраларининг марказий кенгайтмаларини топиш;

Евклид Ли алгебраси билан боғлиқ бўлган Лейбниц алгебраларини таснифлаш;

содда Лейбниц алгебраларининг когомологик группаларини тадқиқ этиш;

нилиндекси n–2 ва характеристик кетма-кетлиги (n–3,2,1) га тенг бўлган табиий усулда градуирланган чекли ўлчамли Зинбиел алгебраларини таснифлаш;

характеристик кетма-кетлиги (n–p,p) га тенг бўлган табиий усулда градуирланган чекли ўлчамли Зинбиел алгебраларини таснифлаш.

Тадқиқотнинг объекти нилпотент, ечимли, ярим содда Лейбниц алгебралари, марказий кенгайтмалар ва Зинбиел алгебраларидан иборат.

Тадқиқотнинг предмети. Нилпотент, ечимли ва ярим содда Лейбниц алгебралар назарияси, Лейбниц алгебраларининг структуравий назарияси, ярим содда Лейбниц алгебраларининг когомологик группалари.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертацияда чизиқли алгебра усуллари, инвариантлар назарияси усуллари, Лейбниц алгебраларининг структуравий назарияси усуллари, шунингдек, когомологик алгебралар усуллари қўлланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

нилрадикали Абел алгебраси бўлган ечимли Лейбниц алгебралари ва нилрадикали n-ўлчамли бўлган (2n–1)-ўлчамли ечимли Лейбниц алгебраларини таснифланган;

нол-филиформ ва табиий усулда градуирланган Ли бўлмаган филиформ Лейбниц алгебраларининг марказий кенгайтмалари таснифланган ҳамда Вирасоро алгебрасининг Лейбниц марказий кенгайтмаларини тривиал бўлиши исботланган;

Евклид Ли алгебраси билан боғлиқ бўлган Лейбниц алгебралари қурилган ва уч ўлчамли содда Ли алгебраси билан боғлиқ содда Лейбниц алгебрасининг иккинчи тартибли когомологик группасининг тривиаллиги исботланган;

берилган характеристик кетма-кетликка эга табиий усулда градуирланган чекли ўлчамли Зинбиел алгебралари таснифланган.

Тадқиқотнинг амалий натижаси нилрадикали берилган ечимли Лейбниц алгебраларни ўрганишда зарур бўлган нилпотент алгебраларнинг ташқи дифференциаллашлар ёрдамида ечимли Ли ва Лейбниц алгебраларини таснифлаш усулларини баён қилинганлигидан иборат.

Диссертация ишидаги содда Лейбниц алгебраларининг иккинчи когомологик группаларига оид натижалари уч ўлчамли содда Ли алгебраси ёрдамида ҳосил қилинган содда Лейбниц алгебраси билан боғлиқ бўлиб, бу ярим содда Лейбниц алгебраларининг иккинчи тартибли когомологик группасининг тривиаллиги тўғрисида гипотезани ўрнатишга имкон берди.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги, алгебраларнинг бошқа синфларидаги маълум усулларидан, тасвирлар назарияси ва Ли алгебраларининг структуравий назариясидаги фундаментал натижалардан фойдаланилганлиги билан асосланади. Mathematica 12 математик дастурлаш тилида яратилган махсус дастурлар ёрдамида кичик ўлчамлардаги таснифлаш натижалари текширилди.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти ишда олинган илмий натижалар бошқа алгебралар кўпхиллигининг кейинги тадқиқотлар учун ишлатилаши мумкинлиги, шунингдек ишлаб чиқилган усуллар ярим содда Лейбниц алгебралари учун Уайтхеднинг иккинчи лемма муаммосини ҳал қилишда фойдаланилганлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти берилган нилрадикалли ечимли Лейбниц алгебраларини таснифлаш бўйича олинган натижалар, бошқа нилрадикалли ечимли Лейбниц алгебралари ҳақида гипотезалар яратишга имкон бериши билан изоҳланади. Хусусан, уларни Сноблнинг комплекс майдонда берилган нилпотент Ли алгебралари максимал кенгайтмаларини ягоналиги ҳақидаги гипотезасини исботлашга татбиқ этиш билан белгиланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Нилпотент Лейбниц алгебраларининг ечимли ва марказий кенгайтмалари ва берилган характеристик кетма-кетликка эга Кошул маъносида қўшма алгебраларининг таснифлари бўйича олинган натижалар асосида:

нилрадикали Абел алгебраси бўлган ечимли Лейбниц алгебралари таснифидан №МТМ2016-79661-Р рақамли «Группа ва ноассоциатив алгебраларнинг гомологиялари, гомотопик ва категорик инвариантлари» мавзусидаги хорижий грант лойиҳасида нилрадикали табиий усулда градуирланган p-филиформ ва коўлчами бирга тенг бўлган ечимли Лейбниц алгебраларини таснифлашда фойдаланилган (Сантяго де Компостела университетининг 2021 йил 20 июлдаги маълумотномаси, Испания). Илмий натижанинг қўлланилиши нилрадикали табиий усулда градуирланган p-филиформ ва коўлчами максимал бўлган ечимли Лейбниц алгебраларини таснифлашни ва олинган алгебраларнинг тўлалигини ва қаттиқлигини исботлаш имконини берган;

Евклид Ли алгебраси билан боғлиқ бўлган Лейбниц алгебраси таснифидан № ЁФА-Фтех-2018-79 рақамли «Лейбниц алгебраларининг тасвири» мавзусидаги фундаментал лойиҳасида Витт алгебраси билан боғлиқ бўлган Лейбниц алгебраларини таснифлашда фойдаланилган (Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг 2021 йил 24 сентябрдаги 2/1255-2620-сонли маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши Витт алгебраси билан боғлиқ бўлган чексиз ўлчамли Лейбниц алгебраларини таснифлашни ва Витт алгебраси билан боғлиқ бўлган Лейбниц алгебраларининг кичик тартибли когомологик группалари тривиаллигини исботлаш имконини берган;

нол-филиформ ва табиий усулда градуирланган Ли бўлмаган филиформ Лейбниц алгебраларининг марказий кенгайтмалари таснифидан хорижий илмий журналлардаги мақолаларда (Communications in Algebra, 2019, 47(1), 173-181; Algebras and Representation Theory, 2021, 24(1), 135-148; Communications in Algebra, 2020, 48(8), 3608-3623) нилпотент ассосимметрик ва антикоммутатив алгебраларнинг марказий кенгайтмаларини тавсифлашда фойдаланилган. Илмий натижанинг қўлланилиши кичик ўлчамдаги ассосимметрик ва антикоммутатив алгебраларни таснифлаш имконини берган;

берилган характеристик кетма-кетликка эга табиий усулда градуирланган чекли ўлчамли Зинбиел алгебралари таснифидан хорижий илмий журналлардаги мақолаларда фойдаланилган (Linear and Multilinear Algebra, 2018, 66(4), 704-716; Communications in Algebra, 2020, 48(1), 204-209; Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, 2019, 12(2), 173-184). Илмий натижанинг қўлланилиши комплекс майдонда берилган беш ўлчамли нилпотент Торткара алгебраларининг алгебраик ва геометрик таснифлаш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 4 та халқаро ва 21 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 41 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 16 та илмий мақола, жумладан, 8 таси хорижий ва 8 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, тўртта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат. Диссертациянинг ҳажми 194 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурияти асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи ва муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертациянинг тузилиши бўйича маълумотлар берилган.

Француз математиги Ж.Л.Лоде ва унинг шогирдларининг ишларида қуйидагича категориялар диаграммаси келтирилган:

$$\begin{tikzcd}
 & & \chi \arrow[dr] & & \\
 & \mathrm{Dend} \arrow[ur, thick] \arrow[dr] & & \mathrm{Dias} \arrow[dr] & \\
\mathrm{Zinb} \arrow[ur, thick] \arrow[dr] & & \mathrm{As} \arrow[ur, thick] \arrow[dr] & & \mathrm{Leib} \\
 & \mathrm{Com} \arrow[ur, thick] \arrow[dr] & & \mathrm{Lie} \arrow[ur, thick] & \\
 & & \mathrm{Vect} \arrow[ur, thick] & &
\end{tikzcd}$$

бу ерда Zinb, Dend, χ, Com, As, Dias, Vect, Lie, Leib белгилашлар мос равишда Зинбиел, дендриформ, χ-алгебр, ассоциатив-коммутатив, ассоциатив, диассоциатив, Абел Ли алгебра (яъни, ҳамма кўпайтмалари нолга тенг бўлган алгебра), Ли ва Лейбниц алгебралар категорияларини ифодалайди. Берилган диаграммада $A \longrightarrow B$ белги A категорияни B категорияга қисм эканлигини, $A \to B$ белги эса A категориядаги ихтиёрий алгебрада янги кўпайтма аниқласак, у ҳолда ҳосил бўлган алгебра B категорияга тегишли эканлигини билдиради. Хусусан,

ассоциатив алгебралари Ли алгебраларига қуйидаги қоида бўйича ўтади:

$$(As, \cdot\,) \to (Lie, \mathbf{[-,-]}): \qquad [x, y] = x\cdot y - y\cdot x;$$

Зинбиел алгебралари ассоциатив-коммутатив алгебраларига қуйидаги қоида бўйича ўтади:

$$(Zinb, \circ\,) \to (Com, \bullet\,): \qquad x\bullet y = x\circ y + y\circ x;$$

дендриформ алгебралари ассоциатив алгебраларига қуйидаги қоида бўйича ўтади:

$$(Dend, <, >) \to (Ass, \cdot\,): \qquad x\cdot y = x < y + y > x;$$

диассоциатив алгебралари Лейбница алгебраларига қуйидаги қоида бўйича ўтади:

$$(Dias, \dashv, \vdash) \to (Leib, \mathbf{[-,-]}): \qquad [x, y] = x \dashv y - y \vdash x;$$

коммутатив алгебралари Абел Ли алгебраларига қуйидаги қоида бўйича ўтади:

$$(Com, \bullet\,) \to (Vect, \mathbf{[-,-]}): \qquad [x, y] = x\bullet y - y\bullet x;$$

χ-алгебралари диассоциатив алгебраларига қуйидаги қоида бўйича ўтади:

$$(\chi, \nwarrow, \swarrow, \nearrow, \searrow) \to (Dias, \dashv, \vdash): \qquad \begin{aligned} x \dashv y &= x \nwarrow y + x \swarrow y, \\ x \vdash y &:= x \nearrow y + x \searrow y. \end{aligned}$$

Таъкидлаш жоизки, юқоридаги диаграммада келтирилган алгебралар категориялари ассоциатив алгебралар категорияси орқали ўтувчи вертикал жойлашган тўғри чизиққа нисбатан Кошул маъносида қўшма категориялардан иборат бўлади, бундай алгебраларни берилган алгебрага қўшма алгебра дейилади. Бунда χ-алгебралар ва Vect – Абел Ли алгебралар Кошул маъносида ўз-ўзига қўшма алгебралар бўлади.

Чекли ўлчамли Лейбниц алгебралари тадқиқ этишда нилпотент Лейбниц алгебраларининг ечимли ва марказий кенгайтмалари таснифлари жуда муҳимдир, чунки бу таснифлар чекли ўлчамли Лейбниц алгебраларининг Ли алгебрасидаги ўринли хоссалари ва бошқа янги хоссаларини ўрганиш жараёнига хизмат қилади.

Диссертациянинг «**Градуирланган Лейбниц ва Зинбиел алгебраларининг таснифлари**» деб номланган биринчи бобида зарурий таъриф ва тушунчалар келтирилиб, l-градуирланган филиформ Лейбниц алгебраларининг таснифлари келтирилган.

Биринчи бобнинг биринчи параграфи ёрдамчи характерга эга бўлиб, бу ерда Ли ва Лейбниц алгебралари назарияларига оид маълумотлар келтирилган.

1-таъриф. F майдон устида аниқланган G алгебранинг ихтиёрий x, y, z элементлари учун қуйидаги айниятлар бажарилса,

$[x, x] = 0$ – антикоммутативлик айнияти,

$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ – Якоби айнияти,

у ҳолда G алгебра Ли алгебраси дейилади, бу ерда [-,-] – G алгебрада аниқланган кўпайтириш амали.

2-таъриф. F майдон устида аниқланган L алгебранинг ихтиёрий x, y, z элементлари учун қуйидаги Лейбниц айнияти бажарилса,

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y],$$

у ҳолда L алгебра Лейбниц алгебраси дейилади, бу ерда [-,-] – L да аниқланган кўпайтириш амали.

Агар Лейбниц алгебрасининг ихтиёрий x и y элементлари учун $[x,y]=-[y,x]$ шарт бажарилса, у ҳолда Лейбниц айнияти Якоби айниятига айланишини осонгина текширимиз мумкин. Шунинг учун Лейбниц алгебралари Ли алгебраларининг умумлашмасидан иборат бўлади.

Ихтиёрий L Лейбниц алгебраси учун қуйидаги ҳосилавий ва қуйи марказий қаторларни аниқлаймиз:

а) $L^{[1]} = L,\ L^{[n+1]} = [L^{[n]}, L^{[n]}]$; б) $L^1 = L,\ L^{n+1} = [L^n, L^1]$.

3-таъриф. Лейбниц алгебраси учун шундай m натурал сон мавжуд бўлиб, $L^{[m]}= \{0\}$ бўлса, у ҳолда L ечимли Лейбниц алгебраси дейилади.

Агар Лейбниц алгебраси учун шундай s натурал сон мавжуд бўлиб, $L^s=\{0\}$ бўлса, у ҳолда L *нилпотент* Лейбниц алгебраси дейилади. Ушбу $L^{s-1} \neq \{0\}$ ва $L^s = \{0\}$ шартларни қаноатлантирувчи энг кичик s сонга L алгебранинг *нилпотентлик индекси* (*нилиндекси*) дейилади.

Лейбниц алгебрасининг максимал нилпотент идеали унинг *нилрадикали* дейилади.

Айтайлик, G – аддитив группа бўлсин. Агар L алгебрани $[L_{g_i}, L_{g_j}] \subseteq L_{g_i \circ g_j}$ шартни қаноатлантирувчи $L = L_{g_1} \oplus L_{g_2} \oplus \cdots \oplus L_{g_k}$ кўринишда ёйиш мумкин бўлса, у ҳолда L алгебра G-градуирланган алгебра дейилади.

Бизга чекли ўлчамли нилпотент L Лейбниц алгебраси берилган бўлсин. Агар $gr(L)_i:=L^i/L^{i+1}$, $1 \leq i \leq s–1$ ва $grL=gr(L)_1 \oplus gr(L)_2 \oplus \cdots \oplus gr(L)_{s-1}$ каби белгиласак, у ҳолда $[gr(L)_i, gr(L)_j] \subseteq gr(L)_{i+j}$ хоссани ва grL градуирланган алгебрани ҳосил қиламиз, бу ерда s – L алгебранинг нилиндекси.

4-таъриф. Юқоридаги кўринишда ҳосил қилинган градуировкага табиий усулдаги градуировка дейилади. Агар L Лейбниц алгебраси grL алгебрага изоморф бўлса, у ҳолда L алгебрага табиий усулда градуирланган Лейбниц алгебраси дейилади.

5-таъриф. Агар n ўлчамли L Лейбниц алгебраси учун $\dim L^i = n–i$, $2 \leq i \leq n$ шарт бажарилса, у ҳолда L алгебра филиформ Лейбниц алгебраси дейилади.

Маълумки, Ш.А.Аюпов ва Б.А.Омировларнинг ишларида ихтиёрий n ўлчамли филиформ Лейбниц алгебрасида шундай $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ базис топилиб, бу базисда алгебранинг кўпайтмасини қуйидаги учта кесишмайдиган синфлардан бирига келтириш мумкинлиги исботланган:

$F_1(\alpha_4, \alpha_5, ..., \alpha_n, \theta)$: $[e_1, e_1] = e_3$, $[e_i, e_1] = e_{i+1}$, $2 \leq i \leq n – 1$,
$[e_1, e_2] = \alpha_4 e_4+\alpha_5 e_5+ \ldots +\alpha_{n–1}e_{n–1}+\theta e_n$,
$[e_j, e_2] = \alpha_4 e_{j+2}+\alpha_5 e_{j+3}+ \ldots +\alpha_{n+2–j}e_n$, $2 \leq j \leq n – 2$,
$F_2(\beta_4, \beta_5, \ldots, \beta_n, \gamma)$: $[e_1, e_1] = e_3$, $[e_i, e_1] = e_{i+1}$, $3 \leq i \leq n – 1$,
$[e_1, e_2] = \beta_4 e_4+\beta_5 e_5+ \ldots +\beta_n e_n$, $[e_2, e_2] = \gamma e_n$,

$$\begin{array}{lll} & [e_j, e_2] = \beta_4 e_{j+2}+\beta_5 e_{j+3}+ \ldots +\beta_{n+2-j} e_n, & 3 \le j \le n-2, \\ F_3(\theta_1, \theta_2, \theta_3): & [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \le i \le n-1, \\ & [e_1, e_i] = -e_{i+1}, & 3 \le i \le n-1, \\ & [e_1, e_1] = \theta_1 e_n, \quad [e_1, e_2] = -e_3+\theta_2 e_n, & [e_2,e_2] = \theta_3 e_n, \\ & [e_2, e_j] = -[e_j, e_2] \in \{e_{j+2}, e_{j+3}, \ldots, e_n\}, \ \ 3 \le j \le n-2, & \\ & [e_i, e_j] = -[e_j, e_i] \in \{e_{i+j}, e_{i+j+1}, \ldots, e_n\}, \ 3 \le i \le [\frac{n}{2}], \ i \le j \le n-i, & \end{array}$$

бу ерда α_i, θ, β_i, $\gamma \in \mathbb{C}$ ва келтирилмаган кўпайтмалар нолга тенг.

Биринчи бобнинг учинчи параграфида табиий усулда ҳосил қилинган градуировкадан фарқли l-градуировка тушунчаси киритилган. Бунда l-градуировка тушунчаси филиформ Ли алгебралари учун Ф.Эчарте, М.Маркес ва Х.Нунесларнинг ишларида қаралганлигини эслатиб ўтиш жоиз.

6-таъриф. Айтайлик n ўлчамли L Лейбниц алгебранинг бирор $\{g_i\}_{i\ge1}$ градуировкаси берилган бўлиб, бу градуировкада L алгебрани агар $l > 2$ учун

$$L=g_1 \oplus \{0\} \oplus \cdots \oplus \{0\} \oplus g_l \oplus g_{l+1} \oplus \cdots \oplus g_{n+l-2},$$

кўринишда ёки агар $l = 2$ учун $L = g_1 \oplus g_2 \oplus \cdots \oplus g_n$ кўринишда ёйиш мумкин бўлса, у ҳолда L Лейбниц алгебрасига l-градуирланган алгебра дейилади, бу ерда барча i лар учун $\dim g_i \neq 0$.

7-таъриф. Агар L филиформ Лейбниц алгебраси l-градуировка берилган бўлса, у ҳолда L алгебрага l-градуирланган филиформ Лейбниц алгебраси дейилади.

Қуйидаги теоремаларда l-градуирланган Ли бўлмаган филиформ Лейбниц алгебраларининг таснифлари келтирилган.

1-теорема. $F_1(\alpha_4, \alpha_5, ..., \alpha_n, \theta)$ синфдан олинган ихтиёрий n ўлчамли l-градуирланган $(3 \le l \le n-2)$ филиформ Лейбниц алгебраси қуйидаги ўзаро изоморф бўлмаган алгебралардан бирига изоморф бўлади:

$$\begin{array}{lll} L_1: & [x_i, x_1] = x_{i+1}, & 2 \le i \le n-1; \\ L_2(l): & [x_i, x_1] = x_{i+1}, & 2 \le i \le n-1, \\ & [x_i, x_2] = x_{i+l}, & 2 \le i \le n-l, \end{array}$$

бу ерда келтирилмаган кўпайтмалар нолга тенг, $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ – алгебраларнинг базислари.

2-теорема. $F_2(\beta_4, \beta_5, \ldots, \beta_n, \gamma)$ синфда l-градуирланган $(3 \le l \le n-2)$ филиформ Лейбниц алгебраси мавжуд эмас.

3-теорема. $F_3(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ синфда l-градуирланган $(3 \le l \le n-2)$ филиформ Лейбниц алгебраси мавжуд эмас.

Диссертациянинг «**Нилпотент Лейбниц алгебраларнинг ечимли кенгайтмалари**» деб номланган иккинчи бобида нилрадикаллари Абел алгебраси, алгебранинг квадрати бирга тенг, табиий усулда градуирланган p-филиформ Лейбниц алгебралари ва коўлчамлари минимал ва максимал бўлган ечимли Лейбниц алгебраларининг таснифларига бағишланган.

Нилрадикали N га тенг бўлган ечимли L Лейбниц алгебраси берилган бўлса, у ҳолда L Лейбниц алгебрани $L = N \oplus Q$ кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда Q тўплам N нилрадикалнинг L алгебрагача тўлдирувчи қисм фазоси.

R(N, s) орқали нилрадикали N га тенг бўлган барча ечимли Лейбниц алгебралари оиласини белгилаймиз, бунда $\dim Q = s$.

Иккинчи бобнинг биринчи параграфида нилрадикали n ўлчамли a_n Абел алгебраси бўлган 2n ўлчамли ечимли Лейбниц алгебралари таснифланиб, уларнинг қаттиқлиги кўрсатилган.

Лейбниц айниятидан алгебранинг x элементи учун ўнгдан кўпайтириш оператори R_x дифференциаллаш бўлиши осонгина келиб чиқади. Лейбниц алгебраларининг бундай дифференциаллашларини *ички дифференциаллашлар* деб атаймиз. Агар Лейбниц алгебрасининг маркази тривиал ва барча дифференциаллашлари ички бўлса, у ҳолда бундай алгебрага *тўлиқ* алгебра дейилади.

Энди нилрадикали a_n Абел алгебраси бўлган 2n ўлчамли ечимли Лейбниц алгебраларининг таснифини келтирамиз. Маълумки, изоморфизм аниқлигида иккита икки ўлчамли ечимли Лейбниц алгебралари мавжуд:

$$l_2\colon [e, x] = e \text{ ва } r_2\colon [e, x] = e,\ [x, e] = -e.$$

4-теорема. R(a_n, n) оиладан олинган ихтиёрий алгебра n та тривиал бўлмаган икки ўлчамли ечимли Лейбниц алгебраларнинг тўғри йиғиндисидан иборат бўлади. Яъни R(a_n, n) дан олинган иҳтиёрий алгебра қуйидаги алгебрага изоморф:

$$L_t = \underbrace{l_2 \oplus l_2 \oplus \cdots \oplus l_2}_{t \text{ марта}} \oplus \underbrace{r_2 \oplus r_2 \oplus \cdots \oplus r_2}_{(n-t) \text{ марта}}$$

бу ерда t ($0 \leq t \leq n$) L_t алгебрада қатнашган l_2 алгебралар сони.

Изоҳ. R(a_k, k) оиладаги ўзаро изоморф бўлмаган алгебралар сони k+1 га тенг.

Айтайлик, L Лейбниц алгебраси ва унинг M тасвири берилган бўлиб, $n \geq 0$ учун қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$C^n(L,M) := \mathrm{Hom}(L^{\otimes n}, M) \text{ (агар } n < 0 \text{ бўлса, у ҳолда } C^n(L,M)=0).$$

Айтайлик $C^{\bullet}(L,M) := \bigoplus\limits_{n \in Z} C^n(L,M)$ бўлсин. $C^{\bullet}(L,M)$ тўплам элементлари қиймати M дан олинган L нинг козанжирлари, $C^n(L,M)$ тўплам элементлари эса даражаси n бўлган козанжирлар дейилади.

$d^n : C^n(L,M) \to C^{n+1}(L,M)$ – гомоморфизм қуйидагича аниқланган бўлсин:

$$(d^n f)(x_1,\ldots,x_{n+1}) := [x_1, f(x_2,\ldots,x_{n+1})] + \sum_{i=2}^{n+1} (-1)^i [f(x_1,\ldots, \widehat{x}_i, \ldots, x_{n+1}), x_i] +$$

$$+ \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (-1)^{j+1} (f(x_1,\ldots,x_{i-1},[x_i,x_j],x_{i+1}, \widehat{x}_i, \ldots, \ldots, x_{n+1}),$$

бу ерда $f \in C^n(L,M)$, $x_i \in L$ ва $\widehat{x}$ белги x элементнинг қатнашмаганлигини билдиради.

d^n операторнинг ядроси элементларини n-коцикллар ($\mathrm{Ker} d^n := ZL^n(L,M)$ билан белгилаймиз) ва d^{n+1} оператор образи элементларини n-кочегаралар ($\mathrm{Im} d^{n+1} := BL^n(L,M)$ билан белгилаймиз) деб атаймиз. $d^{n+1} \circ d^n = 0$ эканлигидан $BL^n(L,M) \subseteq ZL^n(L,M)$ ўринли бўлишини кўришимиз мумкин. Ушбу $HL^n(L,M) := ZL^n(L,M)/BL^n(L,M)$ фактор фазо қиймати M дан олинган L алгебранинг n-тартибли когомологик группаси дейилади.

8-таъриф. Агар L Лейбниц алгебраси учун $HL^2(L,L)=\{0\}$ бўлса, у ҳолда L Лейбниц алгебраси когомологик қаттиқ дейилади.

5-теорема. Барча t ($0 \le t \le n$) лар учун L_t алгебралар 2n ўлчамли Лейбниц алгебралари кўпхиллигида когомологик қаттиқ.

Иккинчи бобнинг иккинчи параграфида нилрадикали n ўлчамли a_n Абел алгебраси ва коўлчами s га тенг бўлган ечимли Лейбниц алгебраларига оид натижалар исботланган. Бундан ташқари, нилрадикалининг ўлчами n га тенг бўлган (2n–1) ўлчамли ечимли Лейбниц алгебралари таснифланган ва уларнинг орасида қаттиқ алгебралар топилган.

Қулайлик учун a_n алгебранинг базиси сифатида $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, Q фазода эса $\{x_1, x_2, ..., x_s\}$ оламиз.

6-теорема. $R(a_n, s)$ синфдан олинган ихтиёрий ечимли R Лейбниц алгебраси учун шундай базис мавжудки, бу базисда $R_{x_i|_{a_n}}$, $1 \le i \le s$ операторларни қўринишлари бир вақтнинг ўзида Жордан нормал шаклига келади.

6-Теоремага кўра, $R(a_n, s)$ синфдан олинган ечимли R Лейбниц алгебранинг кўпайтириш жадвали қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\begin{cases} [e_t, x_i] = \lambda^i_{t,t} e_t + \lambda^i_{t,t+1} e_{t+1}, 1 \le t \le n-1, 1 \le i \le s, \\ [e_n, x_i] = \lambda^i_{n,n} e_n, \qquad 1 \le i \le s, \end{cases}$$

бу ерда $\lambda^i_{t,t}$ – $R_{x_i|_{a_n}}$ операторнинг хос қиймати ва $\lambda^i_{t,t+1} \in \{0,1\}$..

7-теорема. Айтайлик R – $R(a_n, s)$ синфдан олинган ечимли Лейбниц алгебраси бўлсин. У ҳолда қуйидаги муносабат ўринли:

$$n - s \ge m,$$

бу ерда m – қандайдир i учун $\lambda^i_{t,t+1} = 1$ бўладиган t лар сони.

Энди нилрадикали ўлчами n га тенг бўлган (2n–1) ўлчамли ечимли Лейбниц алгебралар таснифини келтирамиз. Маълумки, бундай ечимли Лейбниц алгебраларнинг нилрадикали ёки n ўлчамли Абел алгебраси ёки алгебранинг квадрати бир ўлчамли бўлган нилпотент Лейбниц алгебраларидан иборат бўлади. Нилрадикали n ўлчамли Абел алгебраси бўлган ҳоли Р.К.Гайбуллаев, А.Х.Худойбердиев ва К.Полларнинг ишларида тўлиқ таснифланган. Шунинг учун ушбу диссертация ишида нилрадикали алгебранинг квадрати бир ўлчамли бўлган n ўлчамли нилпотент Лейбниц алгебралари бўлган ҳоли қаралган.

Таъкидлаш жоизки, агар n = 2 бўлса, у ҳолда уч ўлчамли ечимли Лейбниц алгебрасига эга бўламиз, бундай алгебралар Х.Касас, М.Инсуа, М.Ладра ва С.Ладраларнинг ишларида ўрганилган, n = 3 бўлганда беш ўлчамли ечимли Лейбниц алгебралари ҳосил бўлади, бўндай алгебралар А.Х.Худойбердиев, И.С.Рахимов ва Ш.К.Саид-Хусаинлар томонидан таснифланган. Энди ихтиёрий n учун таснифни келтирамиз.

8-теорема. Айтайлик R – R(N, n–1) синфдан олинган ечимли алгебра бўлиб $\dim N^2 = 1$ шарт бажарилсин. У ҳолда R алгебра қуйидаги изоморф бўлмаган алгебралардан бирига изоморф бўлади:

$$L_1(\beta_2,\beta_3,\ldots,\beta_{n-1}):\begin{cases}[e_2,e_1]=e_n, & [e_1,e_2]=\beta_2 e_n, & [e_i,x_i]=e_i, & 1\le i\le n-1,\\ [e_n,x_1]=e_n, & [e_n,x_2]=e_n, & [x_1,e_1]=-e_1, & \\ [x_i,e_i]=\beta_i e_i, & [x_2,e_n]=\beta_2 e_n, & [x_1,e_n]=\beta_2 e_n, & 2\le i\le n-1,\end{cases}$$

$$L_2(\beta_2,\beta_3,\ldots,\beta_{n-1}):\begin{cases}[e_1,e_1]=e_n, & [e_i,x_i]=e_i, & [e_n,x_1]=2e_n, & 1\le i\le n-1,\\ [x_1,e_1]=-e_1, & [x_i,e_i]=\beta_i e_i, & & 2\le i\le n-1,\end{cases}$$

бу ерда $\beta_i \in \{-1, 0\}$ ва $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$ – алгебранинг базиси.

1-тасдиқ. $L_1(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_{n-1})$ ва $L_2(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_{n-1})$ алгебралар оиласининг ихтиёрий алгебраси тўлиқ.

9-теорема. Барча β_i лар учун $L_1(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_{n-1})$ ва $L_2(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_{n-1})$ оилалардан олинган ихтиёрий алгебра когомологик қаттиқ.

Иккинчи бобнинг учинчи, тўртинчи ва бешинчи параграфлари нилрадикали табиий усулда градуирланган p-филиформ бўлган ечимли Лейбниц алгебраларини таснифлашга бағишланган.

Бизга нилпотент L Лейбниц алгебраси берилган бўлиб, $x\in L\backslash L^2$ бўлсин. Ўнгдан кўпайтириш оператори R_x нинг Жордан катаклари ўлчамларининг камайиш тартибида тузилган $C(x)=(n_1, n_2, ..., n_k)$ кетма-кетликни қарайлик ва бундай кетма-кетликлар лексикографик тартиб ёрдамида таққослансин.

9-таъриф. Ушбу $C(L) = \max\limits_{x\in L\backslash L^2} C(x)$ кетма-кетликка L алгебранинг характеристик кетма-кетлиги дейилади.

10-таъриф. Агар L Лейбниц алгебранинг характеристик кетма-кетлиги $C(L)=(n-p,\underbrace{1,1,\ldots,1}_{\text{p-марта}})$ кўринишда бўлса, у ҳолда L алгебра p-филиформ Лейбниц алгебраси дейилади, бу ерда $p \ge 0$.

Ихтиёрий n ўлчамли табиий усулда градуирланган Ли бўлмаган p-филиформ ($n - p \ge 4$) Лейбниц алгебралари Л.М.Камачо, Х.Р.Гомес, А.Х.Гонсалес ва Б.А.Омировларнинг ишида таснифланган бўлиб, бундай алгебралар қуйидаги ўзаро изоморф бўлмаган алгебралардан бирига изоморф бўлади:

агар $p = 2k$ бўлса, у ҳолда

μ_1: $[e_i, e_1] = e_{i+1}$, $1 \le i \le n–2k–1$, $[e_1, f_j] = f_{k+j}$, $1 \le j \le k$,

μ_2: $[e_i, e_1] = e_{i+1}$, $1 \le i \le n–2k–1$, $[e_1, f_1] = e_2 + f_{k+1}$,
$[e_i, f_1] = e_{i+1}$, $2 \le i \le n–2k–1$, $[e_1, f_j] = f_{k+j}$, $2 \le j \le k$,

агар $p=2k+1$ бўлса, у ҳолда

μ_3: $[e_1, e_1] = e_3$, $[e_i, e_1] = e_{i+1}$, $2 \le i \le n–2k–1$,
$[e_1, f_j] = f_{k+j}$, $[e_2, f_j] = f_{k+j}$, $1 \le j \le k$,

бўлади, бу ерда $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n–p}, f_1, f_2, \ldots, f_p\}$ алгебраларнинг базиси.

Энди нилрадикаллари μ_1, μ_2, μ_3 ва коўлчами экстремал (минимал ёки максимал) бўлган ечимли Лейбниц алгебраларнинг таснифларини келтирамиз. Қуйидаги теоремада μ_i, $i = 1, 2, 3$ алгбраларнинг коўлчамлари учун баҳолар келтирилган.

10-теорема. Айтайлик R – нилрадикаллари μ_i, $i = 1, 2, 3$ бўлган ечимли Лейбниц алгебраси бўлсин. У ҳолда нилрадикалларнинг коўлчамлари қуйидаги тенгсизликни қаноатлантиради:

$$\dim Q(\mu_i) \le k+2\left[\frac{i}{3}\right].$$

Бу теоремадан кўринадики, нилрадикаллари μ_1, μ_2 ва μ_3 бўлган ечимли Лейбниц алгебралари коўлчамларининг энг катта қийматлари мос равишда k, k ва k+2 ларга тенг бўлади.

11-теорема. $R(\mu_1, k)$ оиладан олинган ихтиёрий алгебранинг шундай базиси мавжудки, бу базисда алгебранинг кўпайтириш жадвали қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$R(\mu_1,k)(a_{i,j},\varphi_{i,j},\delta_{i,j}):\begin{cases}[e_i,x_j]=\sum\limits_{t=i+1}^{n-2k}a_{t-i+1,j}e_t, & 1\le i\le n-2k, \quad 1\le j\le k,\\ [f_i,x_i]=-[x_i,f_i]=f_i, & [f_{k+i},x_i]=f_{k+i}, \quad 1\le i\le k,\\ [x_i,f_j]=\varphi_{i,j}f_{k+j}, & 1\le i\ne j\le k,\\ [x_i,x_j]=\delta_{i,j}e_{n-2k}, & 1\le i,j\le k.\end{cases}$$

12-теорема. $R(\mu_2, k)$ оиладан олинган ихтиёрий алгебранинг шундай базиси мавжудки, бу базисда алгебранинг кўпайтириш жадвали қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$R(\mu_2,k)(b_i,\beta_i,\varphi_{i,j},\theta_{i,j}):\begin{cases}[e_1,x_1]=f_1+b_1f_{k+1}, & [e_2,x_1]=e_2+f_{k+1}, & \\ [e_j,x_1]=(j-1)e_j, & 3\le j\le n-2k, & \\ [x_1,e_1]=-f_1+\beta_1f_{k+1}, & [e_1,x_i]=b_if_{k+1}, & 2\le i\le k,\\ [f_i,x_i]=f_i, & [x_i,f_i]=-f_i, & 1\le i\le k,\\ [f_{k+i},x_i]=f_{k+i}, & [x_i,e_1]=\beta_if_{k+1}, & 2\le i\le k,\\ [x_i,f_j]=\varphi_{i,j}f_{k+j}, & 1\le i\le k,\ 2\le j\le k, & i\ne j,\\ [x_i,x_j]=\theta_{i,j}f_{k+1}, & 1\le i,j\le k. & \end{cases}$$

13-теорема. $R(\mu_3, k + 2)$ оиладан олинган ихтиёрий алгебранинг шундай базиси мавжудки, бу базисда алгебранинг кўпайтириш жадвали қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$R(\mu_3,k+2):\begin{cases}[e_1,y_1]=e_1, & [e_j,y_1]=(j-2)e_j, & 2\le j\le n-2k,\\ [y_1,e_1]=-e_1, & [e_j,y_2]=e_j, & 2\le j\le n-2k,\\ [f_{k+i},y_2]=f_{k+i}, & [f_i,x_i]=f_i, & 1\le i\le k,\\ [f_{k+i},x_i]=f_{k+i}, & [x_i,f_i]=-f_i, & 1\le i\le k.\end{cases}$$

Изоҳ. 13-Теоремада келтирилган алгебрада $k = 0$ деб олинса, у ҳолда нилрадикали табиий усулда градуирланган ёйилмайдиган филиформ Лейбниц алгебрасидан иборат бўлган ечимли Лейбниц алгебраси ҳосил бўлади ва бундай алгебраларнинг таснифи Х.М.Касас, М.Ладра, Б.А.Омиров, И.А.Каримжановларнинг ишида келтирилган.

Қуйидаги теоремада $R(\mu_3, k+2)$ алгебранинг кичик тартибли когомологик группаларига оид натижалар келтирилган.

14-теорема. Ечимли $R(\mu_3, k+2)$ Лейбниц алгебраси k параметрнинг ихтиёрий қийматларида тўлиқ ва когомологик қаттиқ.

Диссертациянинг учинчи боби «**Лейбниц алгебраларининг мазказий кенгайтмалари ва Евклид Ли алгебраси билан боғлиқ Лейбниц алгебралари таснифи**» деб номланган бўлиб, унда Вирасоро алгебраси, нол-филиформ ва табиий усулда градуирланган Ли бўлмаган филиформ Лейбниц алгебраларининг марказий кенгайтмаларига оид масалалар ечилган. Шунингдек, Евклид Ли алгебраси билан боғлиқ бўлган Лейбниц алгебралари таснифланган ва содда Лейбниц алгебраларининг иккинчи тартибли когомологик группалари тривиаллиги исботланган.

Маълумки, Ли алгебраларининг марказий кенгайтмаси тушунчаси группаларнинг марказий кенгайтмалари тушунчаси ўхшаб Т.Скелбред ва Т.Сундлар томонидан киритилган. Ўз навбатида Лейбниц алгебрасининг марказий кенгайтмаси тушунчаси худди шундай аниқланади. Нилпотент Лейбниц алгебраларини таснифлашда марказий кенгайтмалар ёндашуви шундан иборатки, кичик ўлчамдаги нилпотент Лейбниц алгебраларининг иккинчи тартибли когомологик группалари ёрдамида катта ўлчамли нилпотент Лейбниц алгебраларини қуриш мумкин. Хусусан, физикада кўплаб татбиқларга эга бўлган Гейзенберг алгебраси Абел алгебрасини марказий кенгайтмасидан, ўз навбатида Гейзенберг алгебрасининг марказий кенгайтмаси Диамант Ли алгебрасидан иборат бўлади.

Бизга F майдони устида берилган L Лейбниц алгебраси берилган бўлсин. Ушбу

$$0 \to V \xrightarrow{\varepsilon} \widehat{L} \xrightarrow{\lambda} L \to 0,$$

қисқа аниқ кетма-кетликка L Лейбниц алгебрасининг *марказий кенгайтмаси* дейилади, бу ерда $\mathrm{Im}\varepsilon = \mathrm{Ker}\lambda$ – $\widehat{L}$ алгебранинг маркази.

L Лейбниц алгебрасининг иккита

$$0 \to V \xrightarrow{\varepsilon} \widehat{L} \xrightarrow{\lambda} L \to 0, \quad 0 \to V \xrightarrow{\varepsilon'} \widehat{L}' \xrightarrow{\lambda'} L \to 0$$

марказий кенгайтмалари учун шундай $\varphi : \widehat{L} \to \widehat{L}'$ изоморфизм мавжуд бўлиб, $\varphi \circ \varepsilon = \varepsilon'$, $\lambda' \circ \varphi = \lambda$ шартлар бажарилса, у ҳолда берилган марказий кенгайтмалар *эквивалент* дейилади.

Айтайлик $\theta \in CL^2(L,V)$ бўлсин, у ҳолда таърифга кўра $L_\theta = L \oplus V$ марказий кенгайтмадаги кўпайтиришни қуйидагича аниқлаймиз:

$$[x+u, y+v] = [x,y]_L + \theta(x,y), \ \ x, y \in L, \ u, v \in V.$$

Унда L_θ алгебра Лейбниц алгебраси бўлиши учун $\theta \in ZL^2(L,V)$ шартнинг бажарилиши зарур ва етарли. L_θ алгебрага эса L Лейбниц алгебрасининг V марказ бўйича *марказий кенгайтмаси* дейилади.

Учинчи бобнинг биринчи параграфи Вирасоро алгебрасининг Лейбниц марказий кенгайтмаларига бағишланган. Классик бўлмаган чексиз ўлчамли алгебраларга биринчи мисол Э.Витт томонидан қурилган бўлиб, бундай алгебралар унинг шарафига Витт алгебраси деб номланган ва унинг кўпайтмаси қуйидагича бўлади:

$$W: [e_i, e_j] = (j - i)\, e_{i+j}, \quad i, j \in \mathbb{Z}.$$

Вирасоро алгебраси – Витт алгебрасининг ёйилмайдиган марказий кенгайтмаси ва у қуйидаги кўпайтириш жадвали билан берилади:

$$\mathrm{Vir} : [e_i, e_j] = (j - i)e_{i+j} + \frac{1}{12}\delta_{i,-j}(i^3 - i)c, \ i, j \in \mathbb{Z},$$

бу ерди $\delta_{i,-j}$ – Кронекер символлари. Вирасоро алгебрасининг Ли марказий кенгайтмаси Вирасоро алгебраси ва Абел алгебрасининг тўғри йиғиндисидан иборат бўлади. Қуйидаги теорема Вирасоро алгебрасининг иккинчи тартибли когомологик группасининг тривиаллигини кўрсатади.

15-теорема. Вирасоро алгебра учун $HL^2(\mathrm{Vir}, V) = \{0\}$ муносабат ўринли.

Бу теоремадан кўринадики, $\mathrm{Vir}_\theta = \mathrm{Vir} \oplus V$ фазосида аниқланган кўпайтмага кўра ихтиёрий Вирасоро алгебрасининг Лейбниц марказий кенгайтмаси ҳам Вирасоро алгебраси ва Абел алгебрасининг тўғри йиғиндисидан иборат бўлади.

Учинчи бобнинг иккинчи параграфида нол-филиформ ва табиий усулда градуирланган Ли бўлмаган филиформ Лейбниц алгебраларининг марказий кенгайтмалари таснифланган.

Маълумки, ихтиёрий n ўлчамли нол-филиформ Лейбниц алгебралари изомофизм аниқлигида ягона ва бирор $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ базисда бу алгебранинг кўпайтмаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$NF_n: [e_i, e_1] = e_{i+1}, \ 1 \le i \le n-1,$$

бу ерда қатнашмаган кўпайтмалар нолга тенг.

16-теорема. Комплекс майдон устида берилган n ўлчамли нол-филиформ Лейбниц алгебрасининг марказий кенгайтмаси қуйидаги изоморф бўлмаган алгебралардан бирига изоморф:

$$NF_n \oplus a_k, \quad NF_{n+1} \oplus a_{k-1}.$$

Энди табиий усулда градуирланган Ли бўлмаган филиформ Лейбниц алгебраларининг марказий кенгайтмалари таснифига оид теоремаларни келтирамиз. Ихтиёрий n ўлчамли комплекс табиий усулда градуирланган Ли бўлмаган филиформ Лейбниц алгебралари Ш.А.Аюпов ва Б.А.Омировлар томонидан тўла ўрганилган ва қуйидагилардан иборат:

$$F_n^1: \quad [e_1, e_1] = e_3, \ [e_i, e_1] = e_{i+1}, \ 2 \le i \le n-1,$$

$$F_n^2: \quad [e_1, e_1] = e_3, \ [e_i, e_1] = e_{i+1}, \ 3 \le i \le n-1.$$

Лейбниц алгебраларининг марказий кенгайтмаси таърифига кўра табиий усулда градуирланган Ли бўлмаган филиформ Лейбниц алгебраларининг иккинчи тартибли когомологик группаси таснифидан бундай алгебраларнинг кўпи билан тўрт ўлчамли марказий кенгайтмалари мавжуд. Қуйидаги теоремаларда F_n^1 ва F_n^2 алгебраларининг тўрт ўлчамли ёйилмайдиган марказий кенгайтмалари таснифини берамиз.

17-теорема. F_n^1 алгебранинг ихтиёрий тўрт ўлчамли ёйилмайдиган марказий кенгайтмаси қуйидаги алгебрага изоморф:

$$\begin{cases}[e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\le i\le n-2, \quad [e_{n-1},e_1]=e_{n+2},\\ [e_n,e_1]=e_2+e_{n+1}, & [e_1,e_n]=e_{n+3}, \quad [e_n,e_n]=e_{n+4}.\end{cases}$$

18-теорема. F_n^2 алгебранинг ихтиёрий тўрт ўлчамли ёйилмайдиган марказий кенгайтмаси қуйидаги алгебрага изоморф:

$$\begin{cases}[e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\le i\le n-2, \quad [e_{n-1},e_1]=e_{n+2},\\ [e_n,e_1]=e_{n+1}, & [e_1,e_n]=e_{n+3}, \quad [e_n,e_n]=e_{n+4}.\end{cases}$$

Учинчи бобнинг учинчи параграфида Евклид Ли алгебраси билан боғлиқ бўлган Лейбниц алгебраларини таснифланган.

Ихтиёрий Ли бўлмаган L Лейбниц алгебраси элементларнинг квадратларидан тузилган I = span{[x,x], $x\in L$} хос идеалга эга ва L/I фактор-алгебра Ли алгебрасини ҳосил қилади (баъзи манбаларда бу жараённи L ни Лиелизациялаш деб номланади.

Қуйидагича аниқланган $I\times\overline{L}\to I,\ (i,\overline{x})\mapsto[i,x]$ акслантириш I идеалнинг ўнг $\overline{L}$-модул бўлишини билдиради (I – идеал ўнг аннуляторда ётганлиги учун бу таъриф коррект аниқланган).

Маълумки, берилган G Ли алгебраси ва M ўнг G-модул учун $G\oplus M$ кўринишидаги Лейбниц алгебрасини қуйидагича аниқлашимиз мумкин:

$$(g_1, g_2) := [g_1, g_2],\ (g, m): = 0,\ (m, g): = m*g,\ (m_1, m_2): = 0,$$

бу ерда $g, g_1, g_2 \in G$ ва $m, m_1, m_2 \in M$.

Энди Q(L) = $\overline{L}\oplus I$ деб белгилаб, унда (–,–) кўринишида амал қараймиз:

$$(\overline{x},\overline{y})=\overline{[x,y]},\ (\overline{x},i)=0,\ (i,\overline{x})=[i,x],\ (i,j)=0,\ x,y\in L, i,j\in I.$$

Лейбниц алгебраларининг структуравий назариясидаги усуллардан бири $\overline{L}$ = L/I фактор алгебра берилган Ли алгебрасига изоморф бўлиб, I идеалда аниқланган $\overline{L}$-модул аввалдан берилган M тўпламдаги G-модул билан устма-уст тушадиган Лейбниц алгебраларини таснифлашдан иборат.

Энди биз матрицалар орқали берилган e(n) Евклид Ли алгебраси билан боғлиқ Лейбниц алгебраларини қараймиз. e(n) Евклид Ли алгебрасининг шундай $\{E_{i,j}, H_k \mid i < j, 1 \le i, j, k\le n\}$ базиси мавжудки, бу базисда унинг кўпайтмаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$[E_{i,j}, E_{j,k}] = E_{i,k},\ [E_{i,j}, H_j] = H_i,\ [E_{i,j}, H_i] = -H_j,$$

бу ерда $E_{i,j} = - E_{j,i}$.

Айтайлик (n+1) ўлчамли V вектор фазода $\{X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}\}$ базис берилган бўлиб, gl(V) эса V фазонинг эндоморфизмларидан ҳосил қилинган Ли алгебраси бўлсин. Қуйидагича аниқланган φ: e(n) $\to$ gl(V) тасвирни қараймиз:

$$\varphi(E_{i,j}) = e_{i,j} - e_{j,i},\ 1 \le i \ne j \le n,\ \varphi(H_k) = e_{k,n+1},\ 1 \le k \le n.$$

Ҳар бир тасвирга ягона модул мос келганлиги сабабли юқоридаги тасвир учун V фазо ҳам e(n)-модул бўлиб, ундаги таъсир қуйидагича аниқланади

$$(X_i, E_{i,j}) = X_j, \ 1 \leq i, j \leq n, \ (X_i, H_i) = X_{n+1}, \ 1 \leq i \leq n. \qquad (1)$$

19-теорема. Айтайлик L Лейбниц алгебраси учун $L/I \cong e(n)$ $(n \geq 3)$ бўлиб, I идеал (1) кўринишда аниқланган ўнг e(n)-модул бўлсин. У ҳолда L да шундай $\{E_{i,j}, H_k, X_t \mid 1 \leq i < j \leq n, 1 \leq k \leq n, 1 \leq t \leq n+1\}$ базис мавжудки, унинг бу базисдаги кўпайтмаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$[E_{i,j}, E_{j,k}] = E_{i,k}, \quad [E_{i,j}, H_j] = H_i, \quad [E_{i,j}, H_i] = -H_j,$$
$$[X_i, E_{i,j}] = X_j, \quad [X_i, H_i] = X_{n+1}.$$

Учинчи бобнинг тўртинчи параграфи содда Ли алгебраси орқали ҳосил қилинган содда Лейбниц алгебраларининг иккинчи тартибли когомологик группаларини ўрганишга бағишланган.

11-таъриф. Идеаллари фақат {0}, I, L бўлиб, $L^2 \neq I$ шартни қаноатлантирувчи L Лейбниц алгебраси содда дейилади.

12-таъриф. Максимал ечимли идеали I га тенг бўлган L Лейбниц алгебраси ярим содда дейилади.

Маълумки, Уайтхеднинг иккинчи леммасига кўра, агар G – характеристикаси нолга тенг бўлган майдонда берилган ярим содда Ли алгебраси бўлса, у ҳолда ихтиёрий чекли ўлчамли M – G-модул учун $H^1(G, M) = H^2(G, M) = \{0\}$ тенгликлар ўринли бўлади. Ушбу параграфда sl_2 уч ўлчамли содда Ли алгебраси орқали ҳосил қилинган содда Лейбниц алгебраси учун Уайтхеднинг иккинчи леммасининг аналоги исботланган. И.С.Рахимов, Б.А.Омиров ва Р.М.Турдибаевларнинг ишида sl_2 уч ўлчамли содда Ли алгебраси орқали ҳосил қилинган $L = sl_2 \dotplus I$ содда Лейбниц алгебраси ўрганилган ва бундай алгебраларнинг кўпайтмалари қуйидаги кўринишда бўлиши кўрсатилган:

$$\begin{array}{lll}
[e, h] = 2e, & [h, f] = 2f, & [e, f] = h, \\
[h, e] = -2e, & [f, h] = 2f, & [f, e] = -h, \\
[x_i, e] = -i(m+1-i)x_{i-1}, & 1 \leq i \leq m, & \\
[x_i, f] = x_{i+1}, & 0 \leq i \leq m-1, & \\
[x_i, h] = (m-2i)x_i, & 0 \leq i \leq m, &
\end{array}$$

бу ерда $\{e, f, h\}$ – sl_2 содда Ли алгебрасининг базиси, $\{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$ эса I– sl_2-модулнинг базиси.

Қуйидаги теоремада диссертациянинг асосий натижаларидан бири келтирилган.

20-теорема. Айтайлик $L = sl_2 \dotplus I$ – содда Лейбниц алгебраси бўлсин. У ҳолда $HL^2(L, L) = \{0\}$.

Диссертациянинг «**Берилган характеристик кетма-кетликка эга табиий усулда градуирланган чекли ўлчамли комплекс Зинбиел алгебраларининг таснифи**» деб номланган тўртинчи бобида Лейбниц алгебралари учун Кошул маъносида қўшма бўлган Зинбиел алгебраларга оид натижалар келтирилган. Яъни, табиий усулда градуирланган чекли ўлчамли Зинбиел алгебраларининг характеристик кетма-кетликлари хоссалари ўрганилган. Шунингдек, характеристик кетма-кетлиги (n–3,2,1) ва (n–p,p) га тенг бўлган табиий усулда градуирланган чекли ўлчамли Зинбиел алгебраларининг таснифлари келтирилган.

13-таъриф. F майдон устида аниқланган A алгебранинг ихтиёрий x, y, z элементлари учун қуйидаги айният бажарилса,

$$(x\circ y)\circ z = x\circ(y\circ z) + x\circ(z\circ y),$$

у ҳолда A алгебра Зинбиел алгебраси дейилади, бу ерда $\circ$ – A алгебрада аниқланган кўпайтириш амали.

Бизга маълумки, 2005 йилда А.Джумадилдаев ва У.Туленбаевлар комплекс сонлар майдони устида берилган чекли ўлчамли Зинбиел алгебралари нилпотент эканлигини исботлашган. Ж.Л.Лоденинг ишларида Лейбниц ва Зинбиел алгебралари ёрдамида Ли алгебрасини қуриш кўрасатилган бўлиб, бу эса уларнинг ўзаро боғлиқлигиги кўрсатади.

Айтайлик L – Лейбниц ва A – Зинбиел алгебралари берилган бўлсин. У ҳолда $L\otimes A$ тензор кўпайтма

$$[x \otimes a, y \otimes b]=[x, y] \otimes (a \circ b) – [y, x] \otimes (b \circ a),$$

амалга нисбатан Ли алгебрасини ташкил қилади, бу ерда $x, y \in L$, $a, b \in A$.

Зинбиел алгебралари учун нилпотентлик, табиий усулдаги градуировка ва характеристик кетма-кетлик тушунчалари юқорида келтирилган Лейбниц алгебраларидаги ўхшаш аниқланади. Зинбиел алгебралари учун қуйи марказий қатор қуйидагича киритилади:

$$A^1 = A,\ \ A^{k+1} = A \circ A^k,\ \ k \geq 1.$$

Тўртинчи бобнинг биринчи параграфида табиий усулда градуирланган чекли ўлчамли Зинбиел алгебраларининг характеристик кетма-кетликларига оид баъзи натижалар келтирилган.

Айтайлик A – Зинбиел алгебраси ва $C(A)=(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ бўлсин. У ҳолда шундай $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ базис мавжудки, бу базисда e_1 элементга чапдан кўпайтириш операторининг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$L_{e_1,\sigma} = \begin{pmatrix} J_{n_{\sigma(1)}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{n_{\sigma(2)}} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{n_{\sigma(s)}} \end{pmatrix},$$

бу ерда $\sigma(i)\in\{1, 2, \ldots, s\}$ ва $n_{\sigma(2)} \geq n_{\sigma(i)}$ $(3 \leq i \leq s)$ тенгсизлик ўринли.

21-теорема. Айтайлик A – характеристик кетма-кетлиги $(n_1, n_2, ..., n_k)$ га тенг бўлган табиий усулда градуирланган Зинбеил алгебраси ва $n_{\sigma(1)} = 1$ бўлсин. У ҳолда $n_{\sigma(2)} < 4$.

Тўртинчи бобнинг иккинчи параграфида характеристик кетма-кетлиги $(n–3,2,1)$ га тенг бўлган табиий усулда градуирланган чекли ўлчамли Зинбиел алгебраларининг тўлиқ таснифи келтирилган. Худди шундай хусусиятли ихтиёрий ўлчамли Лейбниц алгебраларининг таснифи эса Л.М.Камачо, Э.М.Канете, Х.Р.Гомес ва Ш.Б.Реджеповларнинг ишларида келтирилган.

Характеристик кетма-кетликнинг таърифига кўра, характеристик кетма-кетлиги $(n–3,2,1)$ га тенг бўлган табиий усулда градуирланган Зинбиел алгебрасининг шундай $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ базиси мавжудки, бу базисда L_{e_1} (e_1

элементга чандан кўпайтириш) оператор қуйидаги учта кўринишлардан бирига эга бўлади:

$$\text{I.}\begin{pmatrix} J_{n-3} & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 \end{pmatrix}, \quad \text{II.}\begin{pmatrix} J_2 & 0 & 0 \\ 0 & J_{n-3} & 0 \\ 0 & 0 & J_1 \end{pmatrix}, \quad \text{III.}\begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_{n-3} & 0 \\ 0 & 0 & J_2 \end{pmatrix}.$$

14-таъриф. Агар L_{e_1} оператор I (мос равишда II ёки III) кўринишга эга бўлса, у ҳолда A биринчи типдаги (мос равишда иккинчи ёки учинчи типдаги) Зинбиел алгебраси дейилади.

Биринчи типдаги Зинбиел алгебраси берилган бўлсин ($n \geq 8$). У ҳолда A Зинбиел алгебрасида шундай $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ базис топилиб, бу базисда алгебранинг кўпайтмасини қуйидаги иккита кесишмайдиган синфлардан бирига ёки A_{21} алгебрага келтириш мумкин:

$$A(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6): \begin{cases} e_i \circ e_j = C^j_{i+j-1}e_{i+j}, & 2 \leq i+j \leq n-3, \quad\quad e_1 \circ e_{n-2} = e_{n-1}, \\ e_{n-2} \circ e_1 = a_1 e_{n-1}, & e_{n-2} \circ e_{n-2} = a_2 e_{n-1}, \quad e_{n-2} \circ e_n = a_3 e_{n-1}, \\ e_n \circ e_1 = a_4 e_{n-1}, & e_n \circ e_{n-2} = a_5 e_{n-1}, \quad e_n \circ e_n = a_6 e_{n-1}, \end{cases}$$

$$B(\beta_1,\beta_2,\gamma_1,\gamma_2): \begin{cases} e_i \circ e_j = C^j_{i+j-1}e_{i+j}, & 2 \leq i+j \leq n-3, \\ e_{n-2} \circ e_1 = \beta_1 e_{n-1} + \gamma_1 e_n, & e_1 \circ e_{n-2} = e_{n-1}, \\ e_{n-2} \circ e_{n-2} = \beta_2 e_{n-1} + \gamma_2 e_n, & (\gamma_1,\gamma_2) \neq (0,0). \end{cases}$$

$$C: \begin{cases} e_i \circ e_j = C^j_{i+j-1}e_{i+j}, \quad 2 \leq i+j \leq n-3, \\ e_1 \circ e_{n-2} = e_{n-1}, \quad e_{n-2} \circ e_1 = -e_{n-1}, \quad e_{n-2} \circ e_{n-1} = e_n. \end{cases}$$

22-теорема. Биринчи типдаги ихтиёрий n ўлчамли ($n \geq 8$) комплекс Зинбиел алгебраси қуйидаги ўзаро изоморф бўлмаган алгебралардан бирига изоморф бўлади:

$A_1(1, 0, 0, 0, 1, 0)$, $A_2(0, 0, 0, 0, 1, 0)$, $A_3(0, 1, 0, 1, 0, 0)$,
$A_4(0, 0, 0, 1, 0, 0)$, $A_5(0, 1, 0, 0, 0, 0)$, $A_6(1, 1, 0, 0, 0, 0)$,
$A_7(\lambda, 0, 0, 0, 0, 0)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $A_8(0, \lambda, 1, 0, 0, 1)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,
$A_9(\alpha, -\frac{\alpha}{(\alpha-1)^2}, 1, 0, 0, 1)$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$, $A_{10}(0, 0, 1, 0, 1, 1)$,
$A_{11}(1, 0, 1, 0, 1, 1)$, $A_{12}(0, 0, 1, 1, 0, 0)$, $A_{13}(0, 0, 1, 0, 0, 0)$,
$A_{14}(\lambda, 1, 1, 0, 1, 1)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $A_{15}(0, 1, 1, -1, 1, 1)$, $A_{16}(1, 1, 1, 0, 1, 1)$.
$B_1(\lambda, 0, 0, 1)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $B_2(1, 0, 1, 1)$, $B_3(0, 1, 1, 0)$, $B_4(0, 0, 1, 0)$, C.

23-теорема. Иккинчи типдаги ихтиёрий Зинбиел алгебрасининг ўлчами саккиздан кичик.

24-теорема. Учинчи типдаги ихтиёрий Зинбиел алгебрасининг ўлчами еттидан кичик.

Тўртинчи бобнинг учинчи параграфи характеристик кетма-кетлиги $(n-p,p)$ га тенг бўлган табиий усулда градуирланган чекли ўлчамли Зинбиел алгебраларининг таснифига бағишланган. Маълумки, К.К.Масутова, Б.А.Омиров ва А.Х.Худойбердиевларнинг ишида характеристик кетма-кетлиги $(n-p,p)$ га тенг бўлган табиий усулда градуирланган чекли ўлчамли

Лейбниц алгебрасининг таснифи келтирилган бўлиб, унда p параметрнинг ҳар бир қийматида кесишмайдиган алгебралар оиласи олинган ва p параметрнинг фиксирланган қийматида таснифлаш алгоритми берилган.

Айтайлик A – характеристик кетма-кетлиги (n–p,p) га тенг бўлган табиий усулда градуирланган Зинбиел алгебраси бўлсин. У ҳолда e_1 элементга чандан кўпайтириш оператор қуйидаги кўринишлардан бирига келади:

$$\text{I.}\begin{pmatrix} J_{n-p} & 0 \\ 0 & J_p \end{pmatrix}; \ \text{II.}\begin{pmatrix} J_p & 0 \\ 0 & J_{n-p} \end{pmatrix}, \ n \geq 2p.$$

Юқоридаги 14-таърифга ўхшаб агар e_1 элементга чандан кўпайтириш оператори I кўринишга эга бўлса, у ҳолда A *биринчи типдаги* Зинбиел алгебраси, акс ҳолда *иккинчи типдаги* Зинбиел алгебраси дейилади.

Қуйидаги теоремаларда ихтиёрий ўлчамли биринчи ва иккинчи типдаги Зинбиел алгебраларнинг p параметрнинг қийматларига боғлиқ таснифлари келтирилган.

25-теорема. Характеристик кетма-кетлиги (n–p, p) га тенг бўлган I типдаги n ўлчамли ($n \geq 2p+2$) Зинбиел алгебраси қуйидаги ўзаро изоморф бўлмаган алгебралардан бирига изоморф:

$$A_1 : \begin{cases} e_i \circ e_j = C^j_{i+j-1} e_{i+j}, & 2 \leq i+j \leq n-p, \\ e_i \circ f_j = \sum\limits_{k=0}^{i-1} C^{j-1}_{i+j-2-k} \beta_k f_{i+j}, \ f_i \circ e_j = \sum\limits_{k=0}^{j} C^{i-2}_{i+j-2-k} \beta_k f_{i+j}, & 2 \leq i+j \leq p, \end{cases}$$

бу ерда $1 \leq i \leq p-2$ учун $\beta_{i+1} = \prod\limits_{k=0}^{i} \frac{k+\beta_1}{k+1}$ ва $\beta_1 \in \mathbb{C}$;

$$A_2 : \begin{cases} e_i \circ e_j = C^j_{i+j-1} e_{i+j}, & 2 \leq i+j \leq n-p, & f_1 \circ f_{p-1} = f_p, \\ e_i \circ f_j = \sum\limits_{k=0}^{i-1} C^{j-1}_{i+j-2-k} \beta_k f_{i+j}, & f_i \circ e_j = \sum\limits_{k=0}^{j} C^{i-2}_{i+j-2-k} \beta_k f_{i+j}, & 2 \leq i+j \leq p, \end{cases}$$

бу ерда $1 \leq i \leq p-2$ учун $\beta_i = (-1)^i C^i_{p-2}$;

$$A_3 : \begin{cases} e_i \circ e_j = C^j_{i+j-1} e_{i+j}, & 2 \leq i+j \leq n-p, \\ e_i \circ f_j = f_i \circ e_j = f_i \circ f_j = C^j_{i+j-1} f_{i+j}, & 2 \leq i+j \leq p. \end{cases}$$

Қуйидаги теоремаларда мос равишда n=2p+1 ва n=2p бўлган ҳолларда Зинбиел алгебраларининг таснифи келтирилади.

26-теорема. Характеристик кетма-кетлиги (p+1, p) га тенг бўлган I типдаги Зинбиел алгебраси қуйидаги ўзаро изоморф бўлмаган алгебралардан бирига изоморф:

$$A_4 : \begin{cases} e_i \circ e_j = C^j_{i+j-1} e_{i+j}, & 2 \leq i+j \leq p+1, & f_1 \circ f_p = e_{p+1}, \\ e_i \circ f_j = \sum\limits_{k=0}^{i-1} C^{j-1}_{i+j-2-k} \beta_k f_{i+j}, & f_i \circ e_j = \sum\limits_{k=0}^{j} C^{i-2}_{i+j-2-k} \beta_k f_{i+j}, & 2 \leq i+j \leq p, \end{cases}$$

бу ерда $\beta_0 = 1$ ва $1 \leq i \leq p-1$ учун $\beta_i = (-1)^i C^i_{p-1}$;

$$A_5:\begin{cases} e_i\circ e_j = C^j_{i+j-1}e_{i+j}, & 2\le i+j\le p+1,\\ e_i\circ f_j = \sum\limits_{k=0}^{i-1}C^{j-1}_{i+j-2-k}\beta_k f_{i+j}, f_i\circ e_j = \sum\limits_{k=0}^{j}C^{i-2}_{i+j-2-k}\beta_k f_{i+j}, & 2\le i+j\le p,\end{cases}$$

бу ерда $\beta_0 = 1$, $1 \le i \le p-2$ учун $\beta_i = \prod\limits_{k=0}^{i}\frac{k+\beta_1}{k+1}$ ва $\beta_1\in \mathbb{C}$;

$$A_6:\begin{cases} e_i\circ e_j = C^j_{i+j-1}e_{i+j}, & 2\le i+j\le p+1, & f_1\circ f_{p-1} = f_p,\\ e_i\circ f_j = \sum\limits_{k=0}^{i-1}C^{j-1}_{i+j-2-k}\beta_k f_{i+j}, & f_i\circ e_j = \sum\limits_{k=0}^{j}C^{i-2}_{i+j-2-k}\beta_k f_{i+j}, & 2\le i+j\le p,\end{cases}$$

бу ерда $\beta_0 = 1$, $1 \le i \le p-2$ учун $\beta_i = (-1)^i C^i_{p-2}$ ва $\beta_{p-1} = 0$;

$$A_7:\begin{cases} e_i\circ e_j = C^j_{i+j-1}e_{i+j}, & 2\le i+j\le p+1,\\ e_i\circ f_j = f_i\circ e_j = C^j_{i+j-1}f_{i+j}, & 2\le i+j\le p,\\ f_i\circ f_j = \gamma_1 C^j_{i+j-1}e_{i+j} + \delta_1 C^j_{i+j-1}f_{i+j}, & 2\le i+j\le p,\\ f_i\circ f_j = \gamma_1 C^j_{i+j-1}e_{p+1}, & i+j = p+1,\end{cases}$$

бу ерда γ_1, $\delta_1\in\mathbb{C}$.

27-теорема. Характеристик кетма-кетлиги (p, p) га тенг бўлган Зинбиел алгебраси қуйидаги ўзаро изоморф бўлмаган алгебралардан бирига изоморф:

$$A_8:\begin{cases} e_i\circ e_j = C^j_{i+j-1}e_{i+j}, & 2\le i+j\le p,\\ e_i\circ f_j = \sum\limits_{k=0}^{i-1}C^{j-1}_{i+j-2-k}\beta_k f_{i+j}, f_i\circ e_j = \sum\limits_{k=0}^{j}C^{i-2}_{i+j-2-k}\beta_k f_{i+j}, & 2\le i+j\le p,\end{cases}$$

бу ерда $\beta_0 = 1$, $1 \le i \le p-2$ учун $\beta_i = \prod\limits_{k=0}^{i}\frac{k+\beta_1}{k+1}$ ва $\beta_1\in\mathbb{C}$;

$$A_9:\begin{cases} e_i\circ e_j = C^j_{i+j-1}e_{i+j}, & 2\le i+j\le p, & f_1\circ f_{p-1} = f_p,\\ e_i\circ f_j = \sum\limits_{k=0}^{i-1}C^{j-1}_{i+j-2-k}\beta_k f_{i+j}, & f_i\circ e_j = \sum\limits_{k=0}^{j}C^{i-2}_{i+j-2-k}\beta_k f_{i+j}, & 2\le i+j\le p,\end{cases}$$

бу ерда $\beta_0 = 1$, $1 \le i \le p-2$ учун $\beta_i = (-1)^i C^i_{p-2}$ ва $\beta_{p-1} = 0$;

$$A_{10}:\begin{cases} e_i\circ e_j = C^j_{i+j-1}e_{i+j}, & 2\le i+j\le p, & f_1\circ f_{p-1} = e_p + \delta_{p-1}f_p,\\ e_i\circ f_j = \sum\limits_{k=0}^{i-1}C^{j-1}_{i+j-2-k}\beta_k f_{i+j}, & f_i\circ e_j = \sum\limits_{k=0}^{j}C^{i-2}_{i+j-2-k}\beta_k f_{i+j}, & 2\le i+j\le p,\end{cases}$$

бу ерда $\beta_0 = 1$, $1 \le i \le p-2$ учун $\beta_i = (-1)^i C^i_{p-2}$, $\beta_{p-1} = 0$ ва $\delta_{p-1}\in\mathbb{C}$;

A_{11}: $e_i\circ e_j = C^j_{i+j-1}e_{i+j}$, $e_i\circ f_j = f_i\circ e_j = C^j_{i+j-1}f_{i+j}$, $2 \le i + j \le p$.

$$A_{12}:\begin{cases} e_i\circ e_j = C^j_{i+j-1}e_{i+j}, & 2\le i+j\le p,\\ e_i\circ f_j = f_i\circ e_j = f_i\circ f_j = C^j_{i+j-1}f_{i+j}, & 2\le i+j\le p.\end{cases}$$

Энди II типдаги ихтиёрий Зинбиел алгебраларини таснифларини келтирамиз. Қуйидаги теоремада II типдаги ихтиёрий Зинбиел алгебрасининг ўлчами 3p+2 дан кичик эканлиги исботланган.

28-теорема. Характеристик кетма-кетлиги (n–p, p) га тенг бўлган II типдаги ихтиёрий Зинбиел алгебрасининг ўлчами 3p+2 дан кичик.

29-теорема. Характеристик кетма-кетлиги (p+1, p) га тенг бўлган II типдаги ихтиёрий Зинбиел алгебраси қуйидаги ўзаро изоморф бўлмаган алгебралардан бирига изоморф:

$$\overline{A}_1:\begin{cases} e_i\circ e_j = C^{j}_{i+j-1}e_{i+j}, & 2\le i+j\le p,\\ e_i\circ f_j = \sum\limits_{k=0}^{i-1}C^{j-1}_{i+j-2-k}\beta_k f_{i+j},\ f_i\circ e_j = \sum\limits_{k=0}^{j}C^{i-2}_{i+j-2-k}\beta_k f_{i+j}, & 2\le i+j\le p+1,\end{cases}$$

бу ерда $\beta_0 = 1$ ва $1 \le i \le p-1$ учун $\beta_{i+1} = \prod\limits_{k=0}^{i}\dfrac{k+\beta_1}{k+1}$, $\beta_1\in\{-p, -(p-1), \dots, -2, -1\}$;

$$\overline{A}_2:\begin{cases} e_i\circ e_j = C^{j}_{i+j-1}e_{i+j}, & 2\le i+j\le p, & f_1\circ f_{p-1} = e_p,\\ e_i\circ f_j = \sum\limits_{k=0}^{i-1}C^{j-1}_{i+j-2-k}\beta_k f_{i+j}, & f_i\circ e_j = \sum\limits_{k=0}^{j}C^{i-2}_{i+j-2-k}\beta_k f_{i+j}, & 2\le i+j\le p+1,\end{cases}$$

бу ерда $0 \le i \le p-2$ учун $\beta_i = (-1)^i C^{i}_{p-2}$ ва $\beta_{p-1} = \beta_p = 0$;

$$\overline{A}_3:\begin{cases} e_i\circ e_j = C^{j}_{i+j-1}e_{i+j}, & 2\le i+j\le p, & f_1\circ f_p = f_{p+1},\\ e_i\circ f_j = \sum\limits_{k=0}^{i-1}C^{j-1}_{i+j-2-k}\beta_k f_{i+j}, & f_i\circ e_j = \sum\limits_{k=0}^{j}C^{i-2}_{i+j-2-k}\beta_k f_{i+j}, & 2\le i+j\le p+1,\end{cases}$$

бу ерда $0 \le i \le p-1$ учун $\beta_i = (-1)^i C^{i}_{p-1}$ ва $\beta_p = 0$;

$$\overline{A}_4:\begin{cases} e_i\circ e_j = C^{j}_{i+j-1}e_{i+j}, & 2\le i+j\le p,\\ e_i\circ f_j = f_i\circ e_j = C^{j}_{i+j-1}f_{i+j}, & 2\le i+j\le p+1.\end{cases}$$

$$\overline{A}_5:\begin{cases} e_i\circ e_j = C^{j}_{i+j-1}e_{i+j}, & 2\le i+j\le p,\\ e_i\circ f_j = f_i\circ e_j = C^{j}_{i+j-1}f_{i+j},\ f_i\circ f_j = C^{j}_{i+j-1}f_{i+j}, & 2\le i+j\le p+1.\end{cases}$$

30-теорема. Характеристик кетма-кетлиги (p+2, p) га тенг бўлган II типдаги ихтиёрий Зинбиел алгебраси қуйидаги ўзаро изоморф бўлмаган алгебралардан бирига изоморф:

$$\overline{A}_6:\begin{cases} e_i\circ e_j = C^{j}_{i+j-1}e_{i+j}, & 2\le i+j\le p,\\ e_i\circ f_j = \sum\limits_{k=0}^{i-1}C^{j-1}_{i+j-2-k}\beta_k f_{i+j}, & 1\le i\le p,\ 2\le i+j\le p+2,\\ f_i\circ e_j = \sum\limits_{k=0}^{j}C^{i-2}_{i+j-2-k}\beta_k f_{i+j}, & 1\le j\le p,\ 2\le i+j\le p+2,\end{cases}$$

бу ерда $\beta_0 = 1$ ва $1 \le i \le p-1$ учун $\beta_{i+1} = \prod\limits_{k=0}^{i}\dfrac{k+\beta_1}{k+1}$, $\beta_1\in\{-p, -(p-1), \dots, -2, -1\}$;

$$\overline{A}_7:\begin{cases} e_i\circ e_j = C^{j}_{i+j-1}e_{i+j}, & 2\le i+j\le p,\ f_1\circ f_{p-1} = e_p,\\ e_i\circ f_j = \sum\limits_{k=0}^{i-1}C^{j-1}_{i+j-2-k}\beta_k f_{i+j}, & 1\le i\le p,\ 2\le i+j\le p+2,\\ f_i\circ e_j = \sum\limits_{k=0}^{j}C^{i-2}_{i+j-2-k}\beta_k f_{i+j}, & 1\le j\le p,\ 2\le i+j\le p+2,\end{cases}$$

бу ерда $0 \le i \le p-2$ учун $\beta_i = (-1)^i C^{i}_{p-2}$ ва $\beta_{p-1}=\beta_p=0$;

$$\overline{A}_8 : \begin{cases} e_i \circ e_j = C^{j}_{i+j-1} e_{i+j}, & 2 \leq i+j \leq p,\ f_1 \circ f_{p+1} = f_{p+2}, \\ e_i \circ f_j = \sum\limits_{k=0}^{i-1} C^{j-1}_{i+j-2-k} \beta_k f_{i+j}, & 1 \leq i \leq p,\ 2 \leq i+j \leq p+2, \\ f_i \circ e_j = \sum\limits_{k=0}^{j} C^{i-2}_{i+j-2-k} \beta_k f_{i+j}, & 1 \leq j \leq p,\ 2 \leq i+j \leq p+2, \end{cases}$$

бу ерда $0 \leq i \leq p$ учун $\beta_i = (-1)^i C^i_p$.

31-теорема. Характеристик кетма-кетлиги (p+t, p) га тенг бўлган (бу ерда $3 \leq t \leq p+1$) II типдаги ихтиёрий Зинбиел алгебраси қуйидаги изоморф бўлмаган алгебралардан бирига изоморф:

$$\overline{A}_9 : \begin{cases} e_i \circ e_j = C^{j}_{i+j-1} e_{i+j}, & 2 \leq i+j \leq p, \\ e_i \circ f_j = \sum\limits_{k=0}^{i-1} C^{j-1}_{i+j-2-k} \beta_k f_{i+j}, & 1 \leq i \leq p,\ 2 \leq i+j \leq p+t, \\ f_i \circ e_j = \sum\limits_{k=0}^{j} C^{i-2}_{i+j-2-k} \beta_k f_{i+j}, & 1 \leq j \leq p,\ 2 \leq i+j \leq p+t, \end{cases}$$

бу ерда $\beta_0 = 1$ ва $1 \leq i \leq p-1$ учун $\beta_{i+1} = \prod\limits_{k=0}^{i} \frac{k+\beta_1}{k+1}$, $\beta_1 \in \{-p, -(p-1), \ldots, -(t-1)\}$;

$$\overline{A}_{10} : \begin{cases} e_i \circ e_j = C^{j}_{i+j-1} e_{i+j}, & 2 \leq i+j \leq p, f_1 \circ f_{p-1} = e_p, \\ e_i \circ f_j = \sum\limits_{k=0}^{i-1} C^{j-1}_{i+j-2-k} \beta_k f_{i+j}, & 1 \leq i \leq p,\ 2 \leq i+j \leq p+t, \\ f_i \circ e_j = \sum\limits_{k=0}^{j} C^{i-2}_{i+j-2-k} \beta_k f_{i+j}, & 1 \leq j \leq p,\ 2 \leq i+j \leq p+t, \end{cases}$$

бу ерда $0 \leq i \leq p-2$ учун $\beta_i = (-1)^i C^i_{p-2}$ ва $\beta_{p-1} = \beta_p = 0$.

ХУЛОСА

Диссертация иши нилпотент Лейбниц алгебраларининг ечимли ва марказий кенгайтмаларини ва Лейбниц алгебраларига Кошул маъносида қўшма алгебраларнинг берилган характеристик кетма-кетликли синфларини таснифлашга бағишланган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Табиий усулда ҳосил қилинган градуировкадан фарқли l-градуировка тушунчаси киритилган ва l-градуирланган филиформ Лейбниц алгебралари таснифланган.
2. Нилрадикали n ўлчамли Абел алгебраси ва коўлчами s га тенг бўлган ечимли Лейбниц алгебраларининг нилрадикал ва коўлчамлари орасидаги муносабатлар топилган. Нилрадикали n ўлчамли Абел алгебраси бўлган 2n ўлчамли ва нилрадикалининг ўлчами n га тенг бўлган (2n–1) ўлчамли ечимли Лейбниц алгебралари таснифланган. Бундан ташқари ҳосил бўлган барча ечимли Лейбниц алгебраларининг қаттиқлиги исботланган.
3. Нилрадикаллари табиий усулда градуирланган 2-филиформ Лейбниц алгебраларидан иборат бўлган барча ечимли Лейбниц алгебраларининг таснифлари олинган. Шунингдек, нилрадикали табиий усулда градуирланган p-филиформ Лейбниц алгебралари ва коўлчамлари минимал ва максимал бўлган ечимли Лейбниц алгебралари таснифланган. Бундай ечимли Лейбниц алгебраларнинг ичида когомологик қаттиқ алгебралар мавжуд эканлиги кўрсатилган.
4. Ихтиёрий Вирасоро алгебрасининг Лейбниц марказий кенгайтмаси Вирасоро алгебраси ва Абел алгебрасининг тўғри йиғиндисидан иборатлиги исботланган. Нол-филиформ ва табиий усулда градуирланган Ли бўлмаган филиформ Лейбниц алгебраларининг марказий кенгайтмалари таснифланган.
5. Евклид Ли алгебраси билан боғлиқ бўлган Лейбниц алгебралари таснифланган ва уч ўлчамли содда Ли алгебраси орқали ҳосил қилинган содда Лейбниц алгебраси учун Уайтхеднинг иккинчи леммасининг аналоги исботланган.
6. Табиий усулда градуирланган чекли ўлчамли Зинбиел алгебраларининг характеристик кетма-кетликларига оид натижалар келтирилган. Шунингдек, характеристик кетма-кетлиги (n–3,2,1) ва (n–p,p) га тенг бўлган табиий усулда градуирланган чекли ўлчамли Зинбиел алгебралари таснифланган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

АДАШЕВ ЖОБИР КОДИРОВИЧ

ОПИСАНИЕ РАЗРЕШИМЫХ И ЦЕНТРАЛЬНЫХ РАСШИРЕНИЙ НИЛЬПОТЕНТНЫХ АЛГЕБР ЛЕЙБНИЦА И ИХ КОШУЛЕВО ДУАЛЬНЫХ АЛГЕБР С ЗАДАННОЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ

01.01.06 – Алгебра

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА (DSc)
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ТАШКЕНТ–2021

Тема докторской (DSc) диссертации зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2021.2.DSc/FM73.

Диссертация выполнена в Институте Математики имени В.И.Романовского.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице по адресу http://kengash.mathinst.uz и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу www.ziyonet.uz.

Научный консультант:	**Омиров Бахром Абдазович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Аллаков Исмаил** доктор физико-математических наук, доцент
	Кудайбергенов Каримберген Кадирбергенович доктор физико-математических наук, профессор
	Эшматов Фарход Хасанович доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник
Ведущая организация:	**Самаркандский государственный университет**

Защита диссертации состоится « 28 » октября 2021 г. в 17:00 часов на заседании научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И.Романовского (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9. Тел.: (+99871)-207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И.Романовского (зарегистрирована за № 122). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9. Тел.: (+99871)-207-91-40).

Автореферат диссертации разослан « 15 » октября 2021 г.
(протокол рассылки № 2 от « 15 » октября 2021 г.).

У.А.Розиков
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

У.У.Жамилов
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., старший научный сотрудник

А.Р.Хаётов
Председатель Научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., старший научный сотрудник

ВВЕДЕНИЕ (аннотация докторской диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. Одним из наиболее важных типов неассоциативных алгебр является алгебра Ли, которая возникла в конце XIX века в результате изучения групп Ли, и имеет особое значение при изучении теории неассоциативных алгебр. Надо отметить, что ранее для алгебр Ли использовался термин «инфинитезимальная группа», и только после работ Г. Вейля данные алгебры стали называться алгебрами Ли. Поскольку теории групп Ли и алгебр Ли тесно связаны, они долгое время развивались параллельно. Например, такие свойства как простота, нильпотентность и разрешимость группы Ли фактически влекут те же самые свойства для соответствующей алгебры Ли. При решении задач, связанных со многими исследованиями в различных областях физики, квантовой механики и других областях математики, алгебры Ли стали одним из важных направлений современной алгебры, не зависящим от групп Ли.

При изучении алгебраических объектов важно определить многообразия алгебр фиксированной размерности над некоторым заданным полем или, в терминологии А.Г. Куроша, примитивным классом алгебр. В качестве примеров многообразий алгебр можно выделить многообразия коммутативных алгебр, ассоциативных алгебр, алгебр Ли, йордановых алгебр, а в последнее время также и алгебр Лейбница. Отметим, что многие классические результаты теории конечномерных алгебр Ли справедливы также и для алгебр Лейбница. В отличии от алгебраического описания геометрическое описание многообразия алгебр Лейбница в заданной размерности состоит в характеризации их неприводимых компонент под естественным действием линейной алгебраической группы. Напомним, что любую алгебру Лейбница над заданным полем и фиксированной размерности можно рассмотреть как точку аффинного алгебраического многообразия, размерность которого равна кубу размерности алгебры. Нахождение орбиты алгебры при данном действии групы, соответствующей изоморфным классам алгебр Лейбница, и классификация всех орбит считаются одними из важными научными исследованиями, посвященные геометрическому описанию многоообразия алгебр Лейбница.

В нашей стране особое внимание уделяется изучению структурной теории конечномерных алгебр Ли и Лейбница. Эта теория является одним из актуальных направлений научного и практического применения фундаментальных наук. Из структурной теории конечномерных алгебр Ли над полем нулевой характеристики хорошо известно, что существуют три основных класса алгебр Ли: полупростые, разрешимые и те, которые не являются ни полупростыми, ни разрешимыми. По теореме Леви-Мальцева, алгебры из третьего класса представляются в виде полупрямой суммы полупростых и разрешимых алгебр. Напомним, что классификация полупростых алгебр Ли была полностью получена Картаном: любая конечномерная полупростая алгебра Ли над полем нулевой характеристики разлагается в прямую сумму простых идеалов. Таким образом, проблема классификации разрешимых алгебр, которые являются вторым из трех основных классов алгебр Ли, стала очень актуальной. Благодаря методу Г.М. Мубаракзянова конечномерные разрешимые алгебры Ли могут быть восстанновлены с помощью их максимальных нильпотентных идеалов и внешних дифференцирований этих идеалов. Метод Мубаракзянова также распространяется на разрешимые алгебры Лейбница. Ключевую роль в этом описании играет тот факт, что оператор правого умножения на элемент дополняемого подпространства к нильрадикалу разрешимой алгебры Лейбница является внешним дифференцированием нильрадикала. В последние годы были получены значительные результаты в классификации разрешимых алгебр Лейбница и описании их групп когомологии малых порядков. Проведение исследований на уровне мировых стандартов по приоритетным направлениям дисциплин «Алгебра, теория чисел и функциональный анализ» обозначены как основные цели и направления деятельности исследователей[1]. В целях использования научных результатов в смежных областях науки важными считаются построение структурной теории конечномерных алгебр Лейбница и выявление алгебр с открытыми орбитами в многообразиях алгебрах.

Исследования данной диссертации в определенной степени служат решению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан №УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», в постановлениях №ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института Математики имени В.И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан» и №ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» и в других нормативно-правовых актах, касающихся фундаментальной науки.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологии республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации.

Исследования, посвященные структурной теории неассоциативных алгебр и изучению их когомологических свойств велись многими научными центрами и специалистами университетов зарубежных стран, среди них: университет Севильи, университет Кадиса, университет Сантьяго де Компостелы, Мадридский университет Комплутенсе, университет Эстремадуры (Испания), университет Вены (Австрия), университет Лоранда Этвоса (Венгрия); университет Сан-Диего, университет Толедо, университет

---

[1] Постановление Кабинета Минстров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан»

штата Северной Каролины (США); Восточно-Китайский педагогический университет (Китай); Новосибирский Государственный университет, Сибирский федеральный университет (Россия); университет Путра Малайзия (Малайзия); институт математики и математического моделирования, Казахстанско-Британский технический университет (Казахстан); Федеральный университет Санта-Катарина, Университет Сан-Паулу (Бразилия), университет Порту (Португалия) и другие.

В последние годы в результате научно-исследовательских работ, посвященных описанию центральных расширений алгебр Лейбница, нахождению открытых орбит алгебр и классификации разрешимых алгебр Лейбница с заданными нильрадикалами, в мировом масштабе был решен целый ряд актуальных задач. В том числе получены следующие научные результаты: получено геометрическое описание трехмерных и четырехмерных алгебр Ли (Дюссельдорфский университет имени Генриха Гейне и Боннский университет, Германия); классифицированы разрешимые алгебры Ли с нуль-филиформным и естественным образом градуированным филиформным нильрадикалами и вычислены группы когомологий полученных алгебр (Университет Сантьяго-де-Компостела и Университет Комплутенсе де Мадрид, Испания); изучены когомологические свойства алгебр Лейбница и доказано, что из тривиальности второй группы когомологий следует жесткость алгебр Лейбница (Математический институт Жюссе-Парижа Рив Гош, Франция); получена классификация разрешимых алгебр Лейбница, нильрадикалами которых являются алгебра Гейзенберга и квази-филиформные алгебры Лейбница второго типа (Государственный университет в Бекли, Западная Вирджиния, Университет Толедо, США); доказано, что группа когомологий простых и полупростых алгебр Лейбница равна нулю (Университет Южной Алабамы, США, и Университет Нанта, Франция); доказано, что произвольная конечномерная комплексная алгебра Лейбница над полем нулевой характеристики представима в виде полупрямой суммы полупростой алгебры Ли и разрешимого радикала (Университет Сиднея, Австралия).

Во многих странах мира в последние годы в качестве приоритетных направлений исследований реализуются научно-практические проекты по построению и применению структурной теории конечномерных разрешимых алгебр Лейбница, в частности, описание разрешимых алгебр Лейбница с заданными нильрадикалами; нахождение замыканий орбит и неприводимых компонент алгебр Лейбница малых размерностей; нахождение жестких алгебр в многообразии конечномерных алгебр Лейбница; изучение деформаций алгебр Лейбница и описание дифференцирований и инфинитезимальных деформаций таких алгебр; вычисление группы когомологий разрешимых алгебр Лейбница и т.д.

Степень изученности проблемы. Алгебры Лейбница изначально введены А.М. Блохом в 1965 году под названием D–алгебры. Позднее алгебры, удовлетворяющие тому же тождеству, были рассмотрены французским математикам Ж.Л. Лоде как неантисимметричный аналог алгебр Ли, который назвал их алгебрами Лейбница в честь Готфрида Вильгельма Лейбница. На данный момент для алгебр Лейбница доказаны многие аналоги классических теорем из теории алгебр Ли. В частности, Д. Барнс доказал аналог теоремы Леви для алгебр Лейбница, который гласит, что любая конечномерная комплексная алгебра Лейбница разлагается в полупрямую сумму разрешимого радикала и полупростой подалгебры Ли. Поэтому основной проблемой при изучении структуры конечномерных комплексных алгебр Лейбница является описание разрешимой части. Описанием не нильпотентных разрешимых алгебр Лейбница занимались такие ученые, как, Ш.А. Аюпов, Х.М. Анкоче-Бермудес, М. Ладра, Ж.М. Касас, Л.М. Камачо, К. Мисра, Б.А. Омиров, И.С. Рахимов, А.Х. Худойбердиев, А. Шабанская, и были получены описания некоторых классов разрешимых алгебр Лейбница с заданными нильрадикалами, такими, например, как с абелевым, гейзенберговым, нуль-филиформным, филиформным, квази-филиформным, треугольным и др.

Следует отметить, что разрешимые алгебры Лейбница представляют живой интерес не только с точки зрения их роли в структурной теории алгебр Лейбница, но также и с точки зрения когомологической теории. Отметим также, что в изучении структурной теории алгебр Ли и Лейбница и их когомологий очень важную роль играют жесткие алгебры. Известно, что в работах Д. Балавуана, А. Мандала, А. Нейенхейса, Р. Ричардсона, Д.В. Миллионщикова и А. Фиаловски изучены многообразия алгебр Ли и Лейбница и их деформации, а также когомологии алгебр. Доказано, что из тривиальности второй группы когомологий следует жесткость алгебр Лейбница. Кроме того, найдены некоторые неприводимые компоненты в многообразии конечномерных комплексных алгебр Лейбница.

Настоящая диссертационная работа посвящена также описанию алгебр, которые являются кошулево дуальными к алгебрам Лейбница, упомянутыми в работах В. Гинзбурга, М. Капранова и Ж.Л. Лоде. В работах Ж.Л. Лоде найдено тождество Кошулево дуальных алгебр Лейбница, а позже алгебры, удовлетворяющие этому тождеству, были названы алгебрами «Зинбиеля». Отметим, что «Zinbiel» – это слово «Leibniz», записанное в обратном порядке букв. Некоторые авторы используют термин Цинбиель, основываясь на русской транскрипции имени Лейбница. В работах А.С. Джумадильдаева, В. Гинзбурга, М. Капранова, Ж.Л. Лоде и К.М. Туленбаева были получены важные свойства алгебр Зинбиеля. В частности, в работах А.С. Джумадильдаева и К.М. Туленбаева доказана нильпотентность произвольной конечномерной комплексной алгебры Зинбиеля, а также показаны оценки для индексов нильпотентности, нильности и разрешимости конечномерных алгебр Зинбиеля над произвольным полем. Изучению структурной теории алгебр Зинбиеля с некоторыми условиями на индекс нильпотентности и характеристические последовательности посвящены работы Л.М. Камачо, Э.М. Канете, С. Гомеса-Видала, И.А. Каримжанова, Н. Исмаилова, Б.А. Омирова, А.Х. Худойбердиева и др.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего образовательного учреждения, где выполнена диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановыми темами научно-исследовательских работ Ф4-ФА-Ф013 «Неассоциативные и операторные алгебры, динамические системы и их приложения в статистической физике и популяционной биологии» (2012-2016 гг.), ЁФА-Фтех-2018-77 «Группы когомологий полупростых и нильпотентных алгебр» (2018-2019 гг.) и ОТ-Ф4-82+ОТ-Ф4-87 «Локальные дифференцирования и автоморфизмы операторных и неассоциативных алгебр, фазовые переходы и хаос в нелинейных динамических системах»+«Теория глобальных инвариантов кривых и поверхностей в Евклидовом и псевдо-Евклидовом пространствах и ее приложения в механике» (2017-2019 гг.) института Математики им. В.И. Романовского АН Республики Узбекистан.

Целью исследования является описание разрешимых и центральных расширений нильпотентных алгебр Лейбница и их кошулево дуальных алгебр с заданной характеристической последовательностью.

Задачи исследования, решаемые в данной работе:

описание *l*-градуированных филиформных алгебр Лейбница;

описание максимальных лейбницевых разрешимых расширений абелевой алгебры;

классификация (2n–1)-мерных разрешимых алгебр Лейбница с n-мерным нильрадикалом;

классификация разрешимых алгебр Лейбница с естественным образом градуированными нелиевыми p-филиформными нильрадикалами;

доказательство тривиальности лейбницевых центральных расширений алгебры Вирасоро;

исследование центральных расширений нуль-филиформных и естественным образом градуированных филиформных нелиевых алгебр Лейбница;

классификация алгебр Лейбница, ассоциированных с евклидовой алгеброй Ли;

описание свойств второй группы когомологий простых алгебр Лейбница;

классификация конечномерных естественным образом градуированных алгебр Зинбиеля нильиндекса n–2 с характеристической последовательностью (n–3, 2, 1);

классификация конечномерных естественным образом градуированных алгебр Зинбиеля с характеристической последовательностью (n–p, p).

Объект исследования. Нильпотентные, разрешимые, полупростые алгебры Лейбница, центральные расширения и алгебры Зинбиеля.

Предмет исследования. Теория нильпотентных, разрешимых и полупростых алгебр Лейбница, структурная теория алгебр Лейбница, когомологические группы простых алгебр Лейбница.

Методы исследования. В диссертации использованы методы линейной алгебры, методы теории инвариантов, методы структурной теории алгебр Лейбница, а также методы когомологических алгебр.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

получено описание разрешимых алгебр Лейбница с абелевым нильрадикалом, и классифицированы (2n–1)-мерные разрешимые алгебры Лейбница с n-мерным нильрадикалом;

описаны центральные расширения нуль-филиформных и естественным образом градуированных филиформных нелиевых алгебр Лейбница, а также доказана тривиальность лейбницевых центральных расширений алгебры Вирасоро;

построены алгебры Лейбница, ассоциированные с евклидовой алгеброй Ли, и доказана тривиальность второй группы когомологий для простой алгебры Лейбница, ассоциированной с трехмерной простой алгеброй Ли;

классифицированы конечномерные естественным образом градуированные алгебры Зинбиеля с заданной характеристической последовательностью.

Практические результаты исследования состоят в следующем:

В результате исследований разрешимых алгебр Лейбница были разработаны новые методы использования внешних дифферецирований нильпотентных алгебр, которые будут использоваться при изучении разрешимых расширений нильпотентных алгебр Ли и алгебр Лейбница.

Результаты диссертации, касающиеся вторых групп когомологий простых алгебр Лейбница, ассоциированных с простой трехмерной алгеброй Ли, позволили установить гипотезу о тривиальности второй группы когомологий полупростых алгебр Лейбница.

Достоверность результатов исследования обоснована строгостью математических рассуждений, использованием известных методов исследования других классов алгебр, применением фундаментальных результатов теории представлений и структурной теории алгебр Ли. Результаты классификационных результатов в случае малых размерностей были проверены с помощью специально созданных программ на языке математического программирования Mathematica 12.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научное значение результатов исследования заключается в том, что полученные в работе научные результаты будут использованы для дальнейших исследований других многообразий алгебр, а также методы, разработанные в данной диссертации будут использованы для доказательства аналога второй леммы Уайтхеда о тривиальности группы когомологий для полупростых алгебр Ли на случай полупростых алгебр Лейбница.

Практическая значимость диссертации состоит в том, что результаты, касающиеся классификации разрешимых алгебр Лейбница с заданными нильрадикалами, позволят установить ряд гипотез относительно разрешимых алгебр Лейбница с другими нильрадикалами. В частности, они будут использованы в доказательстве гипотезы Снобля о единственности максимальных расширений комплексных нильпотентных алгебр Ли.

Внедрение результатов исследования. Результаты, связанные с описанием разрешимых и центральных расширений нильпотентных алгебр Лейбница и Зинбиеля алгебр с заданной характеристической последовательностью, были использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

полное описание разрешимых алгебр Лейбница с абелевым нильрадикалом было использовано в зарубежном проекте № MTM2016-79661-P «Гомологии, гомотопические и категорные инварианты в группах и неассоциативных алгебрах» при нахождении описаний разрешимых алгебр Лейбница с естественным образом градуированным нелиевым p-филиформным нильрадикалом одномерной коразмерности (Справка Университета Сантьяго де Компостела от 20 июля 2021 г., Испания). Использование научного результата позволило описать разрешимые алгебры Лейбница, у которых нильрадикалами являются естественным образом градуированные p-филиформные нелиевые алгебры Лейбница максимальных коразмерностей, а также доказать жесткость и полноту полученных алгебр;

результаты касающиеся описания алгебр Лейбница, ассоциированных с евклидовой алгеброй Ли, были использованы в проекте № ЁФА-Фтех-2018-79 «Представления алгебр Лейбница» при описании алгебр Лейбница, ассоциированных с алгебрами Витта (справка Академии наук Республики Узбекистан от 24 сентября 2021 г, № 2/1255-2620). Применение этих научных результатов позволило описать бесконечномерные алгебры Лейбница, ассоциированные с алгеброй Витта, а также доказать тривиальность лейбницевых групп когомологий алгебры Витта малых порядков с коэффициентами в себе;

описания центральных расширений нуль-филиформных и естественным образом градуированных филиформных нелиевых алгебр Лейбница были использованы в статьях, опубликованных в зарубежных научных журналах (Communications in Algebra, 2019, 47(1), 173-181; Algebras and Representation Theory, 2021, 24(1), 135-148; Communications in Algebra, 2020, 48(8), 3608-3623), при описании центральных расширений нильпотентных ассосимметричных и антикоммутативных алгебр. Применение этих научных результатов дало возможность классифицировать ассосимметричные и антикоммутативные алгебры малых размерностей;

классификация конечномерных естественным образом градуированных алгебр Зинбиеля с заданной характеристической последовательностью была использована в статьях, опубликованных в зарубежных научных журналах (Linear and Multilinear Algebra, 2018, 66(4), 704-716; Communications in Algebra, 2020, 48(1), 204-209; Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, 2019, 12(2), 173-184). Применение этих научных результатов дало возможность алгебраически и геометрически классифицировать 5-мерные комплексные нильпотентные алгебры Торткары.

Апробация результатов исследования. Результаты диссертационного исследования обсуждались на 4 международных и 21 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертационного исследования опубликована 41 научная работа, из них 16 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций доктора наук, в том числе, из них 8 опубликованы в зарубежных журналах и 8 – в республиканских научных изданиях.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 194 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий Республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объекты и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыты теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В работах французского математика Ж.Л. Лоде и его учеников была предложена следующая категорная диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
 & & \chi \arrow[dr] & & \\
 & \mathrm{Dend} \arrow[ur, thick] \arrow[dr] & & \mathrm{Dias} \arrow[dr] & \\
\mathrm{Zinb} \arrow[ur, thick] \arrow[dr] & & \mathrm{As} \arrow[ur, thick] \arrow[dr] & & \mathrm{Leib} \\
 & \mathrm{Com} \arrow[ur, thick] \arrow[dr] & & \mathrm{Lie} \arrow[ur, thick] & \\
 & & \mathrm{Vect} \arrow[ur, thick] & &
\end{tikzcd}$$

где Zinb, Dend, χ, Com, As, Dias, Vect, Lie, Leib – это соответственно категории зинбиелевых, дендриформных, χ-алгебр, ассоциативно-коммутативных, ассоциативных, диассоциативных, абелевых алгебр Ли (т.е. алгебр с нулевыми умножениями), лиевых и лейбницевых алгебр. В данной диаграмме символом $A \longrightarrow B$ обозначено вложение категории A в категорию B, а символ $A \rightarrow B$ означает, что произвольная алгебра категории A с введенным новым умножением принадлежит категории B, а именно ассоциативные алгебры переходят в алгебры Ли по правилу:

$(As, \cdot\,) \to (Lie, [-, -])$: $\quad [x, y] = x\cdot y - y\cdot x$;

алгебры Зинбиеля переходят в коммутативные по правилу:

$(Zinb, \circ) \to (Com, \bullet\,)$: $\quad x\bullet y = x\circ y + y\circ x$;

дендриформные алгебры переходят в ассоциативные по правилу:

$(Dend, <, >) \to (Ass, \cdot\,)$: $\quad x\cdot y = x < y + y > x$;

диассоциативные алгебры переходят в алгебры Лейбница по правилу:

$(Dias, \dashv, \vdash) \to (Leib, [-, -])$: $\quad [x, y] = x \dashv y - y \vdash x$;

коммутативные алгебры переходят в абелевые алгебры Ли по правилу:

$(Com, \bullet\,) \to (Vect, [-, -])$: $\quad [x, y] = x\bullet y - y\bullet x$;

χ-алгебры переходят в диассоциативные алгебры по правилу:

$(\chi, \nwarrow, \swarrow, \nearrow, \searrow) \to (Dias, \dashv, \vdash)$: $\quad x \dashv y = x \nwarrow y + x \swarrow y$,

$\quad x \vdash y: = x \nearrow y + x \searrow y$.

Отметим, что алгебры и диалгебры в данной диаграмме, расположенные симметрично относительно вертикальной оси, проходящей через категорию ассоциативных алгебр, являются Кошулево дуальными. При этом, χ-алгебры и Vect-абелевые алгебры Ли являются самодуальными (т.е. дуальные им категории совпадают с исходными категориями).

При изучении конечномерных алгебр Лейбница важными и актуальными задачами являются классификации разрешимых и центральных расширений нильпотентных алгебр Лейбница, поскольку эти классификации основываются на соответствующих свойствах алгебр Ли и служат для описания других структурных свойств конечномерных алгебр Лейбница.

В первой главе диссертации, названной **«Описание градуированных алгебр Лейбница и Зинбиеля»**, приведены предварительные сведения и получена классификация *l*-градуированных филиформных алгебр Лейбница.

Первый параграф этой главы носит вспомогательный характер – здесь приводятся некоторые известные факты из теории алгебр Ли и Лейбница.

Определение 1. Алгебра G над полем F называется алгеброй Ли, если для любых элементов $x, y, z \in G$ выполняются тождества:

$[x, x] = 0$ – тождество антикоммутативности,

$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ – тождество Якоби,

где $[-, -]$ – умножение в G.

Определение 2. Алгебра L над полем F называется алгеброй Лейбница, если для любых элементов $x, y, z\in L$ выполняется тождество Лейбница:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y],$$

где $[-, -]$ – умножение в L.

Нетрудно проверить, что при выполнении в алгебре Лейбница условия $[x,y] = -[y,x]$ для произвольных элементов x и y алгебры, тождество Лейбница преобразуется в тождество Якоби. Поэтому алгебры Лейбница являются обобщением алгебр Ли.

Определим производный и нижний центральный ряды для произвольной алгебры Лейбница L следующим образом:

а) $L^{[1]} = L,\ L^{[n+1]} = [L^{[n]}, L^{[n]}]$; $\qquad$ б) $L^{1} = L,\ L^{n+1} = [L^{n}, L^{1}]$.

Определение 3. Алгебра Лейбница L называется разрешимой, если существует $m\in N$ такое, что $L^{[m]} = \{0\}$. Натуральное число m называется индексом разрешимости алгебры L, если $L^{[m-1]}\neq \{0\}$ и $L^{[m]} = \{0\}$.

Алгебра Лейбница L называется *нильпотентной*, если существует $s\in N$ такой, что $L^s = \{0\}$. Минимальное число s, обладающее таким свойством, называется *индексом нильпотентности* (*нильиндексом*) алгебры L, т.е. если s – нильиндекс, то $L^{s-1}\neq \{0\}$ и $L^s = \{0\}$.

Напомним, что максимальный нильпотентный (разрешимый) идеал алгебры Лейбница L называется *нильрадикалом* (*радикалом*).

Пусть G – аддитивная группа. Алгебра L называется G-*градуированной*, если L допускает разложение $L= L_{g_1}\oplus L_{g_2}\oplus\cdots\oplus L_{g_k}$ такое, что $[L_{g_i}, L_{g_j}]\subseteq L_{g_i\circ g_j}$.

Пусть L – конечномерная нильпотентная алгебра Лейбница. Положим $gr(L)_i:=L^i/L^{i+1}$, $1\leq i\leq s-1$, где s – нильиндекс алгебры L, и обозначим $grL=gr(L)_1\oplus gr(L)_2\oplus\cdots\oplus gr(L)_{s-1}$. Тогда $[gr(L)_i, gr(L)_j]\subseteq gr(L)_{i+j}$ и мы получим градуированную алгебру grL.

Определение 4. Градуировку, построенную таким образом, назовем естественной градуировкой. Если алгебра Лейбница L изоморфна алгебре grL, то L называется естественным образом градуированной алгеброй Лейбница.

Определение 5. Алгебра Лейбница L размерности n называется филиформной, если $\dim L^i = n-i$, $2\leq i\leq n$.

Известно, что в работах Ш.А. Аюпова и Б.А.Омирова доказано, что в произвольной n-мерной филиформной алгебре Лейбница существует базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ такой, что в этом базисе таблица умножения алгебры может приведена к одному из следующих трех видов:

$F_1(\alpha_4, \alpha_5, ..., \alpha_n, \theta)$: $[e_1, e_1] = e_3$, $[e_i, e_1] = e_{i+1}$, $2\leq i\leq n-1$,
$[e_1, e_2] = \alpha_4 e_4+\alpha_5 e_5+ \ldots +\alpha_{n-1}e_{n-1}+\theta e_n$,
$[e_j, e_2] = \alpha_4 e_{j+2}+\alpha_5 e_{j+3}+ \ldots +\alpha_{n+2-j}e_n$, $2\leq j\leq n-2$,

$F_2(\beta_4, \beta_5, \ldots, \beta_n, \gamma)$: $[e_1, e_1] = e_3$, $[e_i, e_1] = e_{i+1}$, $3\leq i\leq n-1$,
$[e_1, e_2] = \beta_4 e_4+\beta_5 e_5+ \ldots +\beta_n e_n$, $[e_2, e_2] = \gamma e_n$,
$[e_j, e_2] = \beta_4 e_{j+2}+\beta_5 e_{j+3}+ \ldots +\beta_{n+2-j}e_n$, $3\leq j\leq n-2$,

$F_3(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$: $[e_i, e_1] = e_{i+1}$, $2\leq i\leq n-1$,
$[e_1, e_i] = -e_{i+1}$, $3\leq i\leq n-1$,
$[e_1, e_1] = \theta_1 e_n$, $[e_1, e_2] = -e_3+\theta_2 e_n$, $[e_2,e_2] = \theta_3 e_n$,
$[e_2, e_j] = -[e_j, e_2]\in\{e_{j+2}, e_{j+3}, \ldots, e_n\}$, $3\leq j\leq n-2$,
$[e_i, e_j] =-[e_j, e_i]\in\{e_{i+j}, e_{i+j+1}, \ldots, e_n\}$, $3\leq i\leq[\frac{n}{2}]$, $i\leq j\leq n-i$,

где α_i, θ, β_i, $\gamma\in\mathbb{C}$ и отсутствующие произведения равны нулю. При этом произведения в семействе алгебр $F_3(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ должны удовлетворять тождеству Лейбница.

В третьем параграфе первой главы приведена градуировка, отличная от естественной градуировки, так называемая *l*-градуировка. Напомним, что впервые понятие l-градуировки для алгебры Ли было введены в работах Ф. Эчарте, М. Маркеса и Х. Нунеса.

Определение 6. Градуировка $\{g_i\}_{i\geq 1}$ n-мерной алгебры Лейбница L называется l-градуировкой, если

$$L=g_1 \oplus\{0\}\oplus\cdots\oplus\{0\} \oplus g_l \oplus g_{l+1} \oplus\cdots\oplus g_{n+l-2},$$

где $\dim g_i \neq \{0\}$ для любых i и $l > 2$, или $L = g_1 \oplus g_2 \oplus\cdots\oplus g_n$, если $l = 2$.

Определение 7. Филиформная алгебра Лейбница L называется l-градуированной, если в ней можно задать l-градуировку.

В следующих теоремах приведены классифиции l-градуированных филиформных алгебр Лейбница.

Теорема 1. Любая комплексная n-мерная l-градуированная ($3 \leq l \leq n-2$) филиформная алгебра Лейбница L из класса $F_1(\alpha_4, \alpha_5, ..., \alpha_n, \theta)$ изоморфна одной из двух следующих неизоморфных алгебр:

$$\begin{aligned} L_1: \quad & [x_i, x_1] = x_{i+1}, \quad && 2 \leq i \leq n-1; \\ L_2(l): \quad & [x_i, x_1] = x_{i+1}, \quad && 2 \leq i \leq n-1, \\ & [x_i, x_2] = x_{i+l}, \quad && 2 \leq i \leq n-l, \end{aligned}$$

где отсутствующие произведения равны нулю, и $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – базис алгебры.

Теорема 2. Пусть L – n-мерная комплексная филиформная алгебра Лейбница из класса $F_2(\beta_4, \beta_5, \dots, \beta_n, \gamma)$. Тогда L не допускает l-градуировку.

Теорема 3. Не существует l-градуированной филиформной нелиевой алгебры Лейбница из класса $F_3(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ при $2 \leq l \leq n-3$.

Вторая глава диссертации, названная **«Разрешимые расширения нильпотентных алгебр Лейбница»**, посвящена классификации разрешимых алгебр Лейбница с абелевым нильрадикалом, а также с нильрадикалом квадрат которых одномерный; естественным образом градуированных нелиевых р-филиформных алгебр Лейбница с минимальной и максимальной коразмерностями.

Пусть L – разрешимая алгебра Лейбница с нильрадикалом N. Тогда ее можно записать в виде $L = N \oplus Q$, где Q – дополняющее подпространство к нильрадикалу. Обозначим через R(N, s) семейство разрешимых алгебр Лейбница с условием $\dim Q = s$.

В первом параграфе второй главы описаны 2n-мерные разрешимые алгебры Лейбница с n-мерным абелевым нильрадикалом a_n и доказана жесткость таких алгебр Лейбница.

Из тождества Лейбница легко вытекает, что для элемента x из алгебры оператор правого умножения R_x является дифференцированием. Такие дифференцирования алгебр Лейбница называются *внутренними дифференцированиями*. Если центр алгербы Лейбница является тривиальным, и все дифференцирования являются внутренними, то такие алгебры называются *полными алгебрами*.

Теперь приведем классификацию 2n-мерных разрешимых алгебр Лейбница с a_n абелевым нильрадикалом. Известно, что существуют две двумерные разрешимые алгебры Лейбница:

l_2: [e, x] = e ва r_2: [e, x] = e, [x, e] = –e.

Теорема 4. Произвольная алгебра из семейства $R(a_n, n)$ разлагается в прямую сумму n штук двумерных нетривиальных разрешимых алгебр Лейбница. Другими словами, произвольная алгебра из семейства $R(a_n, n)$ изоморфна алгебре

$$L_t = \underbrace{l_2 \oplus l_2 \oplus \cdots \oplus l_2}_{t\ \text{раз}} \oplus \underbrace{r_2 \oplus r_2 \oplus \cdots \oplus r_2}_{(n-t)\ \text{раз}}$$

где t ($0 \le t \le n$) – количество вхождений алгебры l_2 в алгебру L_t.

Замечание. Число неизоморфных алгебр в семействе $R(a_k, k)$ равно k+1.

Для алгебры Лейбница L и ее представления M введем обозначения:

$$C^n(L,M):=Hom(L^{\otimes n},M) \text{ при } n \ge 0\ (C^n(L,M) = 0 \text{ при } n < 0).$$

Пусть $C^{\bullet}(L,M):=\bigoplus\limits_{n\in Z} C^n(L,M)$. Элементы множества $C^{\bullet}(L,M)$ будем называть коцепями L со значением в M, а элементы $C^n(L,M)$ – коцепями степени n.

Пусть d^n: $C^n(L,M) \to C^{n+1}(L,M)$ – гомоморфизм, определенный следующим образом:

$$(d^n f)(x_1,\ldots,x_{n+1}):=[x_1,f(x_2,\ldots,x_{n+1})]+\sum_{i=2}^{n+1} (-1)^i[f(x_1,\ldots, \widehat{x}_i,\ldots,x_{n+1}),x_i]+$$
$$+\sum_{1\le i<j\le n+1} (-1)^{j+1}(f(x_1,\ldots,x_{i-1},[x_i,x_j],x_{i+1}, \widehat{x}_i,\ldots,\ldots,x_{n+1}),$$

где $f \in C^n(L,M)$, $x_i \in L$ и символ $\widehat{x}_i$ означает отсутствие элемента x.

Элементы ядра d^n (обозначим $Kerd^n:=ZL^n(L,M)$) назовём n-коциклами, а элементы образа d^{n+1} (обозначим $Imd^{n+1}:=BL^n(L,M)$) – n-кограницами. Очевидно, что $BL^n(L,M) \subseteq ZL^n(L,M)$. Фактор пространства $HL^n(L,M):=ZL^n(L,M)/BL^n(L,M)$ назовём пространством когомологий алгебры L степени n со значениями в M.

Определение 8. Алгебра Лейбница L называется когомологически жесткой, если $HL^2(L,L)= \{0\}$.

Теорема 5. Алгебра L_t является жесткой в многообразии 2n-мерных алгебр Лейбница для всех t ($0 \le t \le n$).

Во втором параграфе второй главы доказываются результаты, посвященные разрешимым алгебрам Лейбница с n-мерным абелевым нильрадикалом a_n коразмерности s. Кроме того, классифицированы (2n–1)-мерные разрешимые алгебры Лейбница с n-мерным нильрадикалом и среди этих алгебр найдены жесткие алгебры.

Для удобства в качестве базиса a_n берем $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, а для Q – берем $\{x_1, x_2, ..., x_s\}$.

Теорема 6. Пусть R – разрешимая алгебра Лейбница из класса $R(a_n, s)$. Тогда в R существует такой базис, что все операторы $R_{x_i|_{a_n}}$, $1 \le i \le s$ могут быть одновременно приведены к нормальным жордановым формам.

Из Теоремы 6 заключаем, что разрешимая алгебра R из класса $R(a_n, s)$ имеет следующую таблицу умножений:

$$\begin{cases} [e_t, x_i] = \lambda^i_{t,t} e_t + \lambda^i_{t,t+1} e_{t+1}, 1 \le t \le n-1, 1 \le i \le s, \\ [e_n, x_i] = \lambda^i_{n,n} e_n, \qquad\qquad 1 \le i \le s, \end{cases}$$

где $\lambda^i_{t,t}$ – собственные значения оператора $R_{x_i|_{\mathbf{a}_n}}$ и $\lambda^i_{t,t+1} \in \{0,1\}$.

Теорема 7. Пусть R – разрешимая алгебра Лейбница из класса R(a_n, s). Тогда имеет место следующее соотношение:

$$n - s \ge m,$$

где m – число таких t, что $\lambda^i_{t,t+1} = 1$ для некоторого i.

Теперь приведем классификацию (2n–1)-мерных разрешимых алгебр Лейбница с n-мерным нильрадикалом. Известно, что нильрадикалом таких разрешимых алгебр Лейбница является либо n-мерная абелевая алгебра, либо нильпотентная алгебра Лейбница с одномерным квадратом. Случай, когда нильрадикал – n-мерная абелевая алгебра, полностью классифицирован в работе А.Х. Худойбердиева, Р.К. Гайбуллаева и К. Полла. Поэтому в этой диссертации изучен случай, когда нильрадикалом является n-мерная нильпотентная алгебра Лейбница, у которой размерность квадрата равна единице.

Отметим, что при n = 2 мы имеем трехмерные алгебры, классифицированные в работах Х. Касаса, М. Инсуа и М. Ладра, а в случае n = 3 классификация пятимерных разрешимых алгебр Лейбница приведена в работах А.Х. Худойбердиева, И.С. Рахимова и Ш.К. Саид-Хусаина. Далее, мы классифицируем алгебры для любого n.

Теорема 8. Пусть R – разрешимая алгебра Лейбница из семейства R(N, n–1) и пусть $\dim N^2 = 1$. Тогда R изоморфна одной из следующих неизоморфных алгебр:

$$L_1(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_{n-1}): \begin{cases} [e_2, e_1] = e_n, & [e_1, e_2] = \beta_2 e_n, & [e_i, x_i] = e_i, & 1 \le i \le n-1, \\ [e_n, x_1] = e_n, & [e_n, x_2] = e_n, & [x_1, e_1] = -e_1, & \\ [x_i, e_i] = \beta_i e_i, & [x_2, e_n] = \beta_2 e_n, & [x_1, e_n] = \beta_2 e_n, & 2 \le i \le n-1, \end{cases}$$

$$L_2(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_{n-1}): \begin{cases} [e_1, e_1] = e_n, & [e_i, x_i] = e_i, & [e_n, x_1] = 2e_n, & 1 \le i \le n-1, \\ [x_1, e_1] = -e_1, & [x_i, e_i] = \beta_i e_i, & & 2 \le i \le n-1, \end{cases}$$

где $\beta_i \in \{-1, 0\}$, и $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$ – базис алгебры R(N, n–1).

Предложение 1. Произвольная разрешимая алгебра семейств $L_1(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_{n-1})$ и $L_2(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_{n-1})$ является полной.

Теорема 9. Алгебры семейств $L_1(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_{n-1})$ и $L_2(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_{n-1})$ – когомолически жесткие при любых значениях β_i.

Третий, четвертый и пятый параграфы второй главы посвящены классификации разрешимых алгебр Лейбница с естественным образом градуированными p-филиформными нильрадикалами.

Пусть x – элемент множества $L \backslash L^2$. Для оператора правого умножения R_x определим убывающую последовательность $C(x)=(n_1, n_2, ..., n_k)$, состоящую из размеров жордановых клеток оператора R_x, и пусть такие последовательности будем сравнивать при помощи лексикографического порядка.

Определение 9. Последовательность $C(L) = \max\limits_{x\in L\setminus L^2} C(x)$ назовём характеристической последовательностью алгебры L.

Определение 10. Алгебра Лейбница L называется p-филиформной, если $C(L) = (n-p, \underbrace{1, 1, ..., 1}_{p \text{ раз}})$, где $p \geq 0$.

Любые n-мерные неразложимые естественным образом градуированные p-филиформные ($n-p\geq 4$) нелиевы алгебры Лейбница классифицированы в работах Л.М. Камачо, Х.Р. Гомеса, А.Х. Гонсалеса и Б.А. Омирова, и такие алгебры изоморфны одной из следующих попарно неизоморфных алгебр:

при $p = 2k$:

μ_1: $[e_i, e_1] = e_{i+1}$, $1 \leq i \leq n-2k-1$, $[e_1, f_j] = f_{k+j}$, $1 \leq j \leq k$,

μ_2: $[e_i, e_1] = e_{i+1}$, $1 \leq i \leq n-2k-1$, $[e_1, f_1] = e_2 + f_{k+1}$,
$[e_i, f_1] = e_{i+1}$, $2 \leq i \leq n-2k-1$, $[e_1, f_j] = f_{k+j}$, $2 \leq j \leq k$,

при $p=2k+1$:

μ_3: $[e_1, e_1] = e_3$, $[e_i, e_1] = e_{i+1}$, $2 \leq i \leq n-2k-1$,
$[e_1, f_j] = f_{k+j}$, $[e_2, f_j] = f_{k+j}$, $1 \leq j \leq k$,

где $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-p}, f_1, f_2, \ldots, f_p\}$ – базис алгебры.

Теперь приведем описание разрешимых алгебр Лейбница с нильрадикалами μ_1, μ_2, μ_3 с минимальными и максимальными коразмерностями. В следующей теореме приведены оценки для коразмерностей μ_i, $i = 1, 2, 3$.

Теорема 10. Пусть R – разрешимая алгебра Лейбница, нильрадикал которой μ_i, $i = 1, 2, 3$. Тогда коразмерность нильрадикала удовлетворяет следующему неравенству:

$$\operatorname{codim}(\mu_i) \leq k+2\left[\frac{i}{3}\right].$$

Из этой теоремы следует, что наибольшие значения коразмерности разрешимых алгебр Лейбница с нильрадикалами μ_1, μ_2 и μ_3 равны k, k и k + 2, соответственно.

Теорема 11. Произвольная алгебра семейства $R(\mu_1, k)$ допускает такой базис, что ее таблица умножения имеет следующий вид:

$$R(\mu_1,k)(a_{i,j},\varphi_{i,j},\delta_{i,j}):\begin{cases}[e_i,x_j] = \sum\limits_{t=i+1}^{n-2k} a_{t-i+1,j}e_t, & 1\leq i\leq n-2k, \quad 1\leq j\leq k,\\ [f_i,x_i] = -[x_i,f_i] = f_i, & [f_{k+i},x_i] = f_{k+i}, \quad 1\leq i\leq k,\\ [x_i,f_j] = \varphi_{i,j}f_{k+j}, & 1\leq i\neq j\leq k,\\ [x_i,x_j] = \delta_{i,j}e_{n-2k}, & 1\leq i,j\leq k.\end{cases}$$

Теорема 12. Произвольная алгебра семейства $R(\mu_2, k)$ допускает такой базис, что таблица умножений имеет следующий вид:

$$R(\mu_2,k)(b_i,\beta_i,\varphi_{i,j},\theta_{i,j}):\begin{cases}
[e_1,x_1]=f_1+b_1f_{k+1}, & [e_2,x_1]=e_2+f_{k+1}, & \\
[e_j,x_1]=(j-1)e_j, & 3\le j\le n-2k, & \\
[x_1,e_1]=-f_1+\beta_1f_{k+1}, & [e_1,x_i]=b_if_{k+1}, & 2\le i\le k, \\
[f_i,x_i]=f_i, & [x_i,f_i]=-f_i, & 1\le i\le k, \\
[f_{k+i},x_i]=f_{k+i}, & [x_i,e_1]=\beta_if_{k+1}, & 2\le i\le k, \\
[x_i,f_j]=\varphi_{i,j}f_{k+j}, & 1\le i\le k,\ 2\le j\le k, & i\ne j, \\
[x_i,x_j]=\theta_{i,j}f_{k+1}, & 1\le i,j\le k. &
\end{cases}$$

Теорема 13. Произвольная алгебра семейства R(μ3, k + 2) допускает такой базис, что таблица умножений алгебры имеет следющий вид:

$$R(\mu_3,k+2):\begin{cases}
[e_1,y_1]=e_1, & [e_j,y_1]=(j-2)e_j, & 2\le j\le n-2k, \\
[y_1,e_1]=-e_1, & [e_j,y_2]=e_j, & 2\le j\le n-2k, \\
[f_{k+i},y_2]=f_{k+i}, & [f_i,x_i]=f_i, & 1\le i\le k, \\
[f_{k+i},x_i]=f_{k+i}, & [x_i,f_i]=-f_i, & 1\le i\le k.
\end{cases}$$

Замечание. Алгебра из Теоремы 13 при k = 0 является разрешимой алгеброй Лейбница, у которой нильрадикал является неразложимой естественным образом градуированной филиформной алгеброй Лейбница, описание которой также было приведено в работах Х.М. Касаса, М. Ладра, Б.А. Омирова и И.А. Каримжанова.

В следующей теореме приведены описание когомологических групп алгебры R(μ3, k + 2) малого порядка.

Теорема 14. Разрешимая алгебра Лейбница R(μ3, k + 2) – полная и когомологически жесткая алгебра для всех значений k.

В третьей главе диссертации, названной «**Описание центральных расширений Лейбница и алгебр Лейбница, ассоциированных с евклидовой алгеброй Ли**», описаны центральные расширения алгебр Вирасоро, нуль-филиформных и естественным образом градуированных нелиевых алгебр Лейбница, а также классифицированы алгебры Лейбница соответствующая фактор-алгебра Ли которых является евклидовой алгеброй Ли, и доказана тривиальность второй группы когомологий алгебр Лейбница, ассоциированых с простой трехмерной алгеброй Ли.

Напомним, что понятие центрального расширения алгебры Лейбница аналогично понятию центрального расширения алгебр Ли, которое, в свою очередь, является аналогом понятия центрального расширения групп. Когомологический подход к классификации нильпотентных алгебр Лейбница состоит в том, что произвольная нильпотентная алгебра Лейбница может быть построена с помощью второй группы когомологий нильпотентных алгебр Лейбница малых размерностей. В частности, хорошо известная алгебра Гейзенберга, которая имеет многочисленные приложения в физике, является центральным расширением абелевой алгебры, в то время как центральным расширением алгебры Гейзенберга является Диамантова алгебра Ли.

Пусть L – алгебра Лейбница над полем F.

Центральным расширением алгебры Лейбница L называется короткая *точная последовательность* алгебр Лейбница

$$0 \to V \xrightarrow{\varepsilon} \widehat{L} \xrightarrow{\lambda} L \to 0,$$

где $\operatorname{Im}\varepsilon = \operatorname{Ker}\lambda$ – центр в $\widehat{L}$.

Два центральных расширения

$$0 \to V \xrightarrow{\varepsilon} \widehat{L} \xrightarrow{\lambda} L \to 0, \quad 0 \to V \xrightarrow{\varepsilon'} \widehat{L}' \xrightarrow{\lambda'} L \to 0$$

называются *эквивалентными*, если существует изоморфизм $\varphi : \widehat{L} \to \widehat{L}'$ такой, что $\varphi \circ \varepsilon = \varepsilon',\ \lambda' \circ \varphi = \lambda$.

Для $\theta \in C^2(L,V)$ построим центральное расширение L_θ. По определению, это векторное пространство $L_\theta = L \oplus V$ со следующим умножением:

$$[x+u, y+v] = [x,y]_L + \theta(x,y), \quad x, y \in L,\ u, v \in V.$$

Алгебра L_θ является алгеброй Лейбница тогда и только тогда, когда $\theta \in ZL^2(L,V)$. Алгебра L_θ называется *центральным расширением алгебры* L *по центру* V.

В первом параграфе третьей главы предложено описание лейбницевых центральных расширений алгебры Вирасоро. Первый пример неклассической бесконечномерной алгебры был построен Э. Виттом и назван в его честь алгеброй Витта таблица умножения которой имеет вид:

$$W: [e_i, e_j] = (j - i)\, e_{i+j}, \quad i, j \in \mathbb{Z}.$$

Алгебра Вирасоро – единственное неразложимое центральное расширение алгебры Витта , которое определяется таблицей умножения:

$$\mathrm{Vir} : [e_i, e_j] = (j - i)e_{i+j} + \frac{1}{12}\delta_{i,-j}(i^3 - i)c, \ i, j \in \mathbb{Z},$$

где $\delta_{i,-j}$ – символ Кронекера. Отметим, что лиевое центральное расширение алгебры Вирасоро есть не что иное, как прямая сумма алгебры Вирасоро и абелевой алгебры. В следующей теореме показана тривиальность второй группы лейбницевых когомологий алгебры Вирасоро.

Теорема 15. Для алгебры Вирасоро справедливо равенство:

$$HL^2(\mathrm{Vir}, V) = \{0\}.$$

Учитывая умножение, заданное на пространстве $\mathrm{Vir}_\theta = \mathrm{Vir} \oplus V$, и результат Теоремы 15, мы заключаем, что всякое лейбницево центральное расширение алгебры Вирасоро является прямой суммой алгебры Вирасоро и абелевой алгебры.

Во втором параграфе третьей главы классифицированы центральные расширения нуль-филиформных и естественным образом градуированных нелиевых филиформных алгебр Лейбница.

Известно, что в каждой размерности с точностью до изоморфизма существует единственная нуль-филиформная алгебра Лейбница, и в некотором базисе $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ умножение нуль-филиформной алгебры имеет вид:

$$NF_n: [e_i, e_1] = e_{i+1},\ 1 \le i \le n-1,$$

где отсутствующие произведения равны нулю.

Теорема 16. Центральное расширение комплексной n-мерной нуль-филиформной алгебры Лейбница изоморфно одной из следующих двух неизоморфных алгебр:

$$NF_n \oplus a_k, \quad NF_{n+1} \oplus a_{k-1}.$$

Приведем теперь теоремы о классификации центральных расширений естественным образом градуированных нелиевых филиформных алгебр Лейбница. Произвольные n-мерные комплексные естественным образом градуированные алгебры Лейбница описаны Ш.А. Аюповым, Б.А. Омировым, и такие алгебры имеют следующий вид:

$$F_n^1: \quad [e_1, e_1] = e_3, [e_i, e_1] = e_{i+1}, 2 \le i \le n-1,$$

$$F_n^2: \quad [e_1, e_1] = e_3, [e_i, e_1] = e_{i+1}, 3 \le i \le n-1.$$

По определению центрального расширения алгебр Лейбница, из классификации второй группы когомологий естественным образом градуированных нелиевых филиформных алгебр Лейбница следует, что такие алгебры имеют не более чем четырехмерные центральные расширения. В следующих теоремах приведена классификация четырехмерных неразложимых центральных расширений алгебр F_n^1 и F_n^2.

Теорема 17. Произвольное четырехмерное неразложимое центральное расширение алгебры F_n^1 изоморфно следующей алгебре:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-2, \quad [e_{n-1}, e_1] = e_{n+2}, \\ [e_n, e_1] = e_2 + e_{n+1}, & [e_1, e_n] = e_{n+3}, \quad [e_n, e_n] = e_{n+4}. \end{cases}$$

Теорема 18. Четырехмерное неразложимое центральное расширение алгебры F_n^2 изоморфно следующей алгебре:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-2, \quad [e_{n-1}, e_1] = e_{n+2}, \\ [e_n, e_1] = e_{n+1}, & [e_1, e_n] = e_{n+3}, \quad [e_n, e_n] = e_{n+4}. \end{cases}$$

В третьем параграфе третьей главы получено описание алгебр Лейбница, ассоциированных с евклидовой алгеброй Ли.

В произвольной нелиевой алгебре Лейбница существует идеал, порожденный квадратами $I = \langle [x,x], x \in L \rangle$, и фактор-алгебра $\overline{L} = L/I$ является алгеброй Ли (в некоторых работах это называется лиезацией L).

Отображение $I \times \overline{L} \to I \quad (i, \overline{x}) \mapsto [i, x]$ наделяет I структурой правого $\overline{L}$-модуля (это определение корректно благодаря тому, что I содержится в правом аннуляторе).

Известно, что для заданной алгебры Ли G и правого G-модуля M можно определить структуру алгебры Лейбница в G⊕M следующим образом:

$$(g_1, g_2) := [g_1, g_2], (g, m): = 0, (m, g): = m_* g, (m_1, m_2): = 0,$$

где $g, g_1, g_2 \in G$, $m, m_1, m_2 \in M$.

Обозначим $Q(L) = \overline{L} \oplus I$ и рассмотрим умножение (–,–) на пространстве Q(L):

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{[x, y]},\ \ (\overline{x}, i) = 0,\ \ (i, \overline{x}) = [i, x],\ \ (i, j) = 0,\ \ x, y \in L, i, j \in I.$$

Одним из подходов в структурной теории алгебр Лейбница является описание алгебр Лейбница, для которых фактор-алгебра $\overline{L}$ = L/I изомофна заданной алгебре Ли и $\overline{L}$-модуль I является заданным G-модулем M.

Теперь рассмотрим алгебры Лейбница, ассоциированные с евклидовой алгеброй Ли e(n) с ее заданными модулями, которые возникают из матричной интерпретации заданной алгебры. Евклидова алгебра Ли e(n) допускает такой базис $\{E_{i,j}, H_k \mid i < j, 1 \leq i, j, k \leq n\}$, что таблица умножения алгебры имеет следующий вид:

$$[E_{i,j}, E_{j,k}] = E_{i,k},\ \ [E_{i,j}, H_j] = H_i,\ \ [E_{i,j}, H_i] = -H_j,$$

где $E_{i,j} = - E_{j,i}$.

Пусть V – (n+1)-мерное векторное пространство с базисом $\{X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}\}$ и gl(V) – алгебра Ли множества эндоморфизмов пространства V. Рассмотрим представление φ: e(n) $\to$ gl(V), которое определяется как

$$\varphi(E_{i,j}) = e_{i,j} - e_{j,i},\ 1 \leq i \neq j \leq n,\ \varphi(H_k) = e_{k,n+1},\ 1 \leq k \leq n.$$

Так как каждое представление определяет единственный модуль, то получаем e(n)-модуль V со следующим действием:

$$(X_i, E_{i,j}) = X_j,\ \ 1 \leq i, j \leq n,\ (X_i, H_i) = X_{n+1},\ 1 \leq i \leq n. \qquad (1)$$

Теорема 19. Пусть L – алгебра Лейбница такая, что L/I $\cong$ e(n) ($n \geq 3$) и идеал I является правым e(n)-модулем, определенным в (1). Тогда в L существует такой базис $\{E_{i,j}, H_k, X_t \mid 1 \leq i < j \leq n, 1 \leq k \leq n, 1 \leq t \leq n+1\}$, что умножение в этом базисе имеет следующий вид:

$$[E_{i,j}, E_{j,k}] = E_{i,k},\qquad [E_{i,j}, H_j] = H_i,\qquad [E_{i,j}, H_i] = -H_j,$$
$$[X_i, E_{i,j}] = X_j,\qquad [X_i, H_i] = X_{n+1}.$$

Четвертый параграф третьей главы посвящен изучению второй группы когомологий для простых алгебр Лейбница, ассоциированных с трехмерной простой алгеброй Ли.

Определение 11. Алгебра Лейбница L называется простой, если $L^2 \neq I$, и она имеет только следующие идеалы: {0}, I, L.

Определение 12. Алгебра Лейбница L называется полупростой, если её максимальный разрешимый идеал равен I.

В силу второй леммы Уайтхеда известно, что из того, что G – полупростая алгебра Ли над полем нулевой характеристики, следует, что $H^1(G, M) = H^2(G, M) = \{0\}$ для конечномерного G-модуля M. В данном параграфе доказан частный случай аналога второй леммы Уайтхеда для простых алгебр Лейбница, ассоциированных с алгеброй Ли sl_2. В работах И.С. Рахимова, Б.А. Омирова и Р.М. Турдибаева изучена простая алгебра Лейбница $L = sl_2 \dotplus I$, ассоциированная с алгеброй Ли sl_2, и показано, что таблица умножения таких алгебр имеет следующий вид:

$$\begin{array}{lll}
[e, h] = 2e, & [h, f] = 2f, & [e, f] = h, \\
[h, e] = -2e, & [f, h] = 2f, & [f, e] = -h, \\
[x_i, e] = -i(m+1-i)x_{i-1}, & 1 \leq i \leq m, & \\
[x_i, f] = x_{i+1}, & 0 \leq i \leq m-1, &
\end{array}$$

$$[x_i, h] = (m - 2i)x_i, \qquad 0 \le i \le m,$$

здесь $\{e, f, h\}$ – базис алгебры sl_2, а $\{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$ – базис sl_2-модуля I.

Теперь сформулируем однин из основных результатов данной диссертации.

Теорема 20. Пусть $L = sl_2 \dotplus I$ – простая алгебра Лейбница. Тогда $HL^2(L, L) = \{0\}$.

В четвертой главе диссертации, названной «**Описание комплексной алгебры Зинбиеля с заданной характеристической последовательностью**», приведены результаты, посвященные алгебрам Зинбиеля, которые являются дуальными к алгебрам Лейбница в смысле Кошулева. В частности, изучены свойства характеристических последовательностей конечномерных естественным образом градуированных алгебр Зинбиеля и классификацированы естественным образом градуированные конечномерные алгебры Зинбиеля с характеристическими последовательностями (n–3,2,1) и (n–p, p).

Определение 13. Алгебра A над полем F называется алгеброй Зинбиеля, если для любых $x, y, z \in A$ выполняется тождество:

$$(x\circ y)\circ z = x\circ(y\circ z) + x\circ (z\circ y),$$

где $\circ$ – умножение в A.

В работе Ж.Л. Лоде предложена конструкция построения алгебр Ли при помощи алгебр Лейбница и алгебр Зинбиеля, и это показывает, насколько тесно взаимосвязаны указанные алгебры.

Пусть L – алгебра Лейбница и A – алгебра Зинбиеля. Тогда тензорное произведение $L\otimes A$ со следующим умножением:

$$[x \otimes a, y \otimes b]=[x, y] \otimes (a\circ b) - [y, x] \otimes (b\circ a),$$

где $x, y \in L$ и $a, b \in A$, является алгеброй Ли.

Понятия нильпотентности, естественной градуировки и характерической последовательности для алгебр Зинбиеля определяются аналогично, как и в случае алгебр Лейбница. Для алгебры Зинбиеля нижний центральный ряд определяется следующим образом:

$$A^1 = A,\ A^{k+1} = A \circ A^k,\ k \ge 1.$$

В первом параграфе четвертой главы приведены некоторые свойства характеристической последовательности естественным образом градуированных алгебр Зинбиеля.

Пусть A – алгебра Зинбиеля, и пусть она имеет характеристическую последовательность, равную $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$. Тогда существует такой базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, что матрица оператора левого умножения на элемент e_1 имеет следующий вид:

$$L_{e_1,\sigma} = \begin{pmatrix} J_{n_{\sigma(1)}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{n_{\sigma(2)}} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{n_{\sigma(s)}} \end{pmatrix},$$

где $\sigma(i)\in\{1, 2, \ldots, s\}$ и для $3 \leq i \leq s$ имеет место $n_{\sigma(2)} \geq n_{\sigma(i)}$.

Теорема 21. Пусть A – естественным образом градуированная алгебра Зинбиеля с характеристической последовательностью $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, и пусть $n_{\sigma(1)} = 1$. Тогда $n_{\sigma(2)} < 4$.

Во втором параграфе четвертой главы классифицированы конечномерные естественным образом градуированные алгебры Зинбиеля с характеристической последовательностью равной (n–3,2,1). Классификация алгебр Лейбница произвольной размерности с аналогичными свойствами приведена в работах Л.М. Камачо, Э.М. Канете, Х.Р. Гомеса и Ш.Б. Реджепова.

Заметим, что в естественным образом градуированной алгебре Зинбиеля A с характеристической последовательностью (n–3, 2, 1) существует базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ такой, что оператор L_{e_1} имеет три возможных вида:

$$\text{I.}\begin{pmatrix} J_{n-3} & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 \end{pmatrix},\quad \text{II.}\begin{pmatrix} J_2 & 0 & 0 \\ 0 & J_{n-3} & 0 \\ 0 & 0 & J_1 \end{pmatrix},\quad \text{III.}\begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_{n-3} & 0 \\ 0 & 0 & J_2 \end{pmatrix}.$$

Определение 14. Алгебра Зинбиеля A называется алгеброй первого типа (типа I), второго типа (типа II) и третьего типа (типа III), если оператор L_{e_1} имеет соответствующий вид I, II и III.

Рассмотрим алгебры Зинбиеля типа I размерности n ($n \geq 8$). Тогда в алгебре Зинбиеля A существует такой базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, что умножение в этом базисе примет один из видов:

$$A(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6):\begin{cases} e_i \circ e_j = C^j_{i+j-1}e_{i+j}, & 2 \leq i+j \leq n-3, & e_1 \circ e_{n-2} = e_{n-1}, \\ e_{n-2} \circ e_1 = a_1 e_{n-1}, & e_{n-2} \circ e_{n-2} = a_2 e_{n-1}, & e_{n-2} \circ e_n = a_3 e_{n-1}, \\ e_n \circ e_1 = a_4 e_{n-1}, & e_n \circ e_{n-2} = a_5 e_{n-1}, & e_n \circ e_n = a_6 e_{n-1}, \end{cases}$$

$$B(\beta_1,\beta_2,\gamma_1,\gamma_2):\begin{cases} e_i \circ e_j = C^j_{i+j-1}e_{i+j}, & 2 \leq i+j \leq n-3, \\ e_{n-2} \circ e_1 = \beta_1 e_{n-1} + \gamma_1 e_n, & e_1 \circ e_{n-2} = e_{n-1}, \\ e_{n-2} \circ e_{n-2} = \beta_2 e_{n-1} + \gamma_2 e_n, & (\gamma_1,\gamma_2) \neq (0,0). \end{cases}$$

$$C:\begin{cases} e_i \circ e_j = C^j_{i+j-1}e_{i+j}, & 2 \leq i+j \leq n-3, \\ e_1 \circ e_{n-2} = e_{n-1}, & e_{n-2} \circ e_1 = -e_{n-1}, \quad e_{n-2} \circ e_{n-1} = e_n. \end{cases}$$

Теорема 22. Произвольная n-мерная ($n \geq 8$) комплексная алгебра Зинбиеля с характеристической последовательностью (n–3, 2, 1) типа I изоморфна одной из следующих неизоморфных алгебр:

$A_1(1, 0, 0, 0, 1, 0)$, $A_2(0, 0, 0, 0, 1, 0)$, $A_3(0, 1, 0, 1, 0, 0)$,
$A_4(0, 0, 0, 1, 0, 0)$, $A_5(0, 1, 0, 0, 0, 0)$, $A_6(1, 1, 0, 0, 0, 0)$,
$A_7(\lambda, 0, 0, 0, 0, 0)$, $\lambda\in\mathbb{C}$, $A_8(0, \lambda, 1, 0, 0, 1)$, $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$,

$A_9(\alpha, -\frac{\alpha}{(\alpha-1)^2}, 1, 0, 0, 1), \alpha\in\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$, $A_{10}(0, 0, 1, 0, 1, 1)$,

$A_{11}(1, 0, 1, 0, 1, 1)$, $A_{12}(0, 0, 1, 1, 0, 0)$, $A_{13}(0, 0, 1, 0, 0, 0)$,

$A_{14}(\lambda, 1, 1, 0, 1, 1), \lambda\in\mathbb{C}$, $A_{15}(0, 1, 1, -1, 1, 1)$, $A_{16}(1, 1, 1, 0, 1, 1)$.

$B_1(\lambda, 0, 0, 1), \lambda \in\mathbb{C}$, $B_2(1, 0, 1, 1)$, $B_3(0, 1, 1, 0)$, $B_4(0, 0, 1, 0)$, C.

Теорема 23. Любая естественным образом градуированная алгебра Зинбиеля типа II имеет размерность меньше 8.

Теорема 24. Любая естественным образом градуированная алгебра Зинбиеля типа III имеет размерность меньше 7.

Третий параграф четвертой главы посвящен изучению классификации естественным образом градуированных конечномерных алгебр Зинбиля с характеристической последовательностью (n–p, p). Известно, что в работах К.К. Масутовой, Б.А. Омирова и А.Х. Худойбердиева приведено описание естественным образом градуированных алгебр Лейбница с характеристической последовательностью (n–p,p) при котором для каждого значения параметра p получены непересекающееся семейства алгебр. Кроме того, для фиксированного значения p предложен алгоритм, позволяющий классификацировать такие алгебры Лейбница.

Пусть A – произвольная алгебра Зинбиеля с характеристической последовательностью (n–p, p). Тогда матрица оператора левого умножения на элемент e_1 имеет один из следующих видов:

$$\text{I.}\begin{pmatrix} J_{n-p} & 0 \\ 0 & J_p \end{pmatrix};\ \text{II.}\begin{pmatrix} J_p & 0 \\ 0 & J_{n-p} \end{pmatrix},\ n\geq 2p.$$

Как и в предыдущем параграфе, алгебру Зинбиеля назовем *алгеброй первого типа* (типа I), если оператор левого умножения на элемент e_1 имеет вид I, в противном случае назовем ее *алгеброй второго типа* (типа II).

В следующих теоремах приведены классификации произвольных n-мерных алгебр Зинбиля первого и второго типов в зависимости от значений параметра p.

Теорема 25. Пусть A – n-мерная ($n \geq 2p+2$) алгебра Зинбиеля с характеристической последовательностью (n–p, p) типа I. Тогда она изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных алгебр:

$$A_1:\begin{cases} e_i\circ e_j = C^j_{i+j-1}e_{i+j}, & 2\leq i+j\leq n-p, \\ e_i\circ f_j = \sum\limits_{k=0}^{i-1}C^{j-1}_{i+j-2-k}\beta_k f_{i+j},\ f_i\circ e_j = \sum\limits_{k=0}^{j}C^{i-2}_{i+j-2-k}\beta_k f_{i+j}, & 2\leq i+j\leq p, \end{cases}$$

где $\beta_{i+1} = \prod\limits_{k=0}^{i}\frac{k+\beta_1}{k+1}$ для $1\leq i\leq p-2$ и $\beta_1 \in\mathbb{C}$;

$$A_2:\begin{cases} e_i\circ e_j = C^j_{i+j-1}e_{i+j}, & 2\leq i+j\leq n-p, & f_1\circ f_{p-1} = f_p, \\ e_i\circ f_j = \sum\limits_{k=0}^{i-1}C^{j-1}_{i+j-2-k}\beta_k f_{i+j}, & f_i\circ e_j = \sum\limits_{k=0}^{j}C^{i-2}_{i+j-2-k}\beta_k f_{i+j}, & 2\leq i+j\leq p, \end{cases}$$

где $\beta_i = (-1)^i C^i_{p-2}$ для $1 \le i \le p-2$;

$$A_3: \begin{cases} e_i \circ e_j = C^j_{i+j-1} e_{i+j}, & 2 \le i+j \le n-p, \\ e_i \circ f_j = f_i \circ e_j = f_i \circ f_j = C^j_{i+j-1} f_{i+j}, & 2 \le i+j \le p. \end{cases}$$

В следующих теоремах представлены классификации при $n = 2p + 1$ и $n=2p$.

Теорема 26. Пусть A – алгебра Зинбиеля с характеристической последовательностью $(p+1, p)$ типа I. Тогда она изоморфна одной из следующих неизоморфных алгебр:

$$A_4: \begin{cases} e_i \circ e_j = C^j_{i+j-1} e_{i+j}, & 2 \le i+j \le p+1, \qquad f_1 \circ f_p = e_{p+1}, \\ e_i \circ f_j = \sum\limits_{k=0}^{i-1} C^{j-1}_{i+j-2-k} \beta_k f_{i+j}, \quad f_i \circ e_j = \sum\limits_{k=0}^{j} C^{i-2}_{i+j-2-k} \beta_k f_{i+j}, & 2 \le i+j \le p, \end{cases}$$

где $\beta_0 = 1$, $\beta_i = (-1)^i C^i_{p-1}$ для $1 \le i \le p-1$;

$$A_5: \begin{cases} e_i \circ e_j = C^j_{i+j-1} e_{i+j}, & 2 \le i+j \le p+1, \\ e_i \circ f_j = \sum\limits_{k=0}^{i-1} C^{j-1}_{i+j-2-k} \beta_k f_{i+j}, f_i \circ e_j = \sum\limits_{k=0}^{j} C^{i-2}_{i+j-2-k} \beta_k f_{i+j}, & 2 \le i+j \le p, \end{cases}$$

где $\beta_0 = 1$, $\beta_i = \prod\limits_{k=0}^{i} \frac{k+\beta_1}{k+1}$ для $1 \le i \le p-2$ и $\beta_1 \in \mathbb{C}$;

$$A_6: \begin{cases} e_i \circ e_j = C^j_{i+j-1} e_{i+j}, & 2 \le i+j \le p+1, \qquad f_1 \circ f_{p-1} = f_p, \\ e_i \circ f_j = \sum\limits_{k=0}^{i-1} C^{j-1}_{i+j-2-k} \beta_k f_{i+j}, \quad f_i \circ e_j = \sum\limits_{k=0}^{j} C^{i-2}_{i+j-2-k} \beta_k f_{i+j}, & 2 \le i+j \le p, \end{cases}$$

где $\beta_0 = 1$, $\beta_i = (-1)^i C^i_{p-2}$ для $1 \le i \le p-2$ и $\beta_{p-1} = 0$;

$$A_7: \begin{cases} e_i \circ e_j = C^j_{i+j-1} e_{i+j}, & 2 \le i+j \le p+1, \\ e_i \circ f_j = f_i \circ e_j = C^j_{i+j-1} f_{i+j}, & 2 \le i+j \le p, \\ f_i \circ f_j = \gamma_1 C^j_{i+j-1} e_{i+j} + \delta_1 C^j_{i+j-1} f_{i+j}, & 2 \le i+j \le p, \\ f_i \circ f_j = \gamma_1 C^j_{i+j-1} e_{p+1}, & i+j = p+1, \end{cases}$$

где $\gamma_1, \delta_1 \in \mathbb{C}$.

Теорема 27. Пусть A – алгебра Зинбиеля с характеристической последовательностью (p, p). Тогда она изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных алгебр:

$$A_8: \begin{cases} e_i \circ e_j = C^j_{i+j-1} e_{i+j}, & 2 \le i+j \le p, \\ e_i \circ f_j = \sum\limits_{k=0}^{i-1} C^{j-1}_{i+j-2-k} \beta_k f_{i+j}, f_i \circ e_j = \sum\limits_{k=0}^{j} C^{i-2}_{i+j-2-k} \beta_k f_{i+j}, & 2 \le i+j \le p, \end{cases}$$

где $\beta_0 = 1$, $\beta_i = \prod\limits_{k=0}^{i} \frac{k+\beta_1}{k+1}$ для $1 \le i \le p-2$ и $\beta_1 \in \mathbb{C}$;

$$A_9:\begin{cases} e_i\circ e_j = C^j_{i+j-1}e_{i+j}, & 2\le i+j\le p, \qquad f_1\circ f_{p-1}=f_p,\\ e_i\circ f_j=\sum\limits_{k=0}^{i-1}C^{j-1}_{i+j-2-k}\beta_k f_{i+j}, & f_i\circ e_j=\sum\limits_{k=0}^{j}C^{i-2}_{i+j-2-k}\beta_k f_{i+j}, \quad 2\le i+j\le p,\end{cases}$$

где $\beta_0 = 1$, $\beta_i = (-1)^i C^i_{p-2}$ для $1 \le i \le p-2$ и $\beta_{p-1} = 0$;

$$A_{10}:\begin{cases} e_i\circ e_j = C^j_{i+j-1}e_{i+j}, & 2\le i+j\le p, \qquad f_1\circ f_{p-1}=e_p+\delta_{p-1}f_p,\\ e_i\circ f_j=\sum\limits_{k=0}^{i-1}C^{j-1}_{i+j-2-k}\beta_k f_{i+j}, & f_i\circ e_j=\sum\limits_{k=0}^{j}C^{i-2}_{i+j-2-k}\beta_k f_{i+j}, \quad 2\le i+j\le p,\end{cases}$$

где $\beta_0 = 1$, $\beta_i = (-1)^i C^i_{p-2}$ для $1 \le i \le p-2$ и $\beta_{p-1} = 0$ и $\delta_{p-1}\in\mathbb{C}$;

A_{11}: $e_i\circ e_j = C^j_{i+j-1}e_{i+j}$, $e_i\circ f_j = f_i\circ e_j = C^j_{i+j-1}f_{i+j}$, $2 \le i + j \le p$;

$$A_{12}:\begin{cases} e_i\circ e_j = C^j_{i+j-1}e_{i+j}, & 2\le i+j\le p,\\ e_i\circ f_j = f_i\circ e_j = f_i\circ f_j = C^j_{i+j-1}f_{i+j}, & 2\le i+j\le p.\end{cases}$$

Теперь приведем классификации алгебры Зинбиеля A типа II. В следующей теореме доказано, что алгебра Зинбиеля типа II существует только в размерности меньше 3p+2.

Теорема 28. Произвольная алгебра Зинбиеля с характеристической последовательностью (n–p, p) типа II имеет размерность меньше 3p+2.

Теорема 29. Произвольная алгебра Зинбиеля с характеристической последовательностью (p+1, p) типа II изоморфна одной из следующих неизоморфных алгебр:

$$\overline{A}_1:\begin{cases} e_i\circ e_j = C^j_{i+j-1}e_{i+j}, & 2\le i+j\le p,\\ e_i\circ f_j=\sum\limits_{k=0}^{i-1}C^{j-1}_{i+j-2-k}\beta_k f_{i+j},\ f_i\circ e_j=\sum\limits_{k=0}^{j}C^{i-2}_{i+j-2-k}\beta_k f_{i+j}, & 2\le i+j\le p+1,\end{cases}$$

где $\beta_0 = 1$, $\beta_{i+1} = \prod\limits_{k=0}^{i}\frac{k+\beta_1}{k+1}$ для $1 \le i \le p-1$, $\beta_1\in\{-p, -(p-1), \dots, -2, -1\}$;

$$\overline{A}_2:\begin{cases} e_i\circ e_j = C^j_{i+j-1}e_{i+j}, & 2\le i+j\le p, \qquad f_1\circ f_{p-1}=e_p,\\ e_i\circ f_j=\sum\limits_{k=0}^{i-1}C^{j-1}_{i+j-2-k}\beta_k f_{i+j}, & f_i\circ e_j=\sum\limits_{k=0}^{j}C^{i-2}_{i+j-2-k}\beta_k f_{i+j}, \quad 2\le i+j\le p+1,\end{cases}$$

где $\beta_i = (-1)^i C^i_{p-2}$ для $0 \le i \le p-2$ и $\beta_{p-1} = \beta_p = 0$;

$$\overline{A}_3:\begin{cases} e_i\circ e_j = C^j_{i+j-1}e_{i+j}, & 2\le i+j\le p, \qquad f_1\circ f_p=f_{p+1},\\ e_i\circ f_j=\sum\limits_{k=0}^{i-1}C^{j-1}_{i+j-2-k}\beta_k f_{i+j}, & f_i\circ e_j=\sum\limits_{k=0}^{j}C^{i-2}_{i+j-2-k}\beta_k f_{i+j}, \quad 2\le i+j\le p+1,\end{cases}$$

где $\beta_i = (-1)^i C^i_{p-1}$ для $0 \le i \le p-1$ и $\beta_p = 0$;

$$\overline{A}_4 : \begin{cases} e_i \circ e_j = C^j_{i+j-1} e_{i+j}, & 2 \le i+j \le p, \\ e_i \circ f_j = f_i \circ e_j = C^j_{i+j-1} f_{i+j}, & 2 \le i+j \le p+1. \end{cases}$$

$$\overline{A}_5 : \begin{cases} e_i \circ e_j = C^j_{i+j-1} e_{i+j}, & 2 \le i+j \le p, \\ e_i \circ f_j = f_i \circ e_j = C^j_{i+j-1} f_{i+j},\ f_i \circ f_j = C^j_{i+j-1} f_{i+j}, & 2 \le i+j \le p+1. \end{cases}$$

Теорема 30. Пусть A – алгебра Зинбиеля с характеристической последовательностью (p+2, p) типа II. Тогда она изоморфна одной из следующих неизоморфных алгебр:

$$\overline{A}_6 : \begin{cases} e_i \circ e_j = C^j_{i+j-1} e_{i+j}, & 2 \le i+j \le p, \\ e_i \circ f_j = \sum\limits_{k=0}^{i-1} C^{j-1}_{i+j-2-k} \beta_k f_{i+j}, & 1 \le i \le p,\ 2 \le i+j \le p+2, \\ f_i \circ e_j = \sum\limits_{k=0}^{j} C^{i-2}_{i+j-2-k} \beta_k f_{i+j}, & 1 \le j \le p,\ 2 \le i+j \le p+2, \end{cases}$$

где $\beta_0 = 1$, $\beta_{i+1} = \prod\limits_{k=0}^{i} \dfrac{k+\beta_1}{k+1}$ для $1 \le i \le p-1$, $\beta_1 \in \{-p, -(p-1), \ldots, -2, -1\}$;

$$\overline{A}_7 : \begin{cases} e_i \circ e_j = C^j_{i+j-1} e_{i+j}, & 2 \le i+j \le p,\ f_1 \circ f_{p-1} = e_p, \\ e_i \circ f_j = \sum\limits_{k=0}^{i-1} C^{j-1}_{i+j-2-k} \beta_k f_{i+j}, & 1 \le i \le p,\ 2 \le i+j \le p+2, \\ f_i \circ e_j = \sum\limits_{k=0}^{j} C^{i-2}_{i+j-2-k} \beta_k f_{i+j}, & 1 \le j \le p,\ 2 \le i+j \le p+2, \end{cases}$$

где $\beta_i = (-1)^i C^i_{p-2}$ для $0 \le i \le p-2$ и $\beta_{p-1} = \beta_p = 0$;

$$\overline{A}_8 : \begin{cases} e_i \circ e_j = C^j_{i+j-1} e_{i+j}, & 2 \le i+j \le p,\ f_1 \circ f_{p+1} = f_{p+2}, \\ e_i \circ f_j = \sum\limits_{k=0}^{i-1} C^{j-1}_{i+j-2-k} \beta_k f_{i+j}, & 1 \le i \le p,\ 2 \le i+j \le p+2, \\ f_i \circ e_j = \sum\limits_{k=0}^{j} C^{i-2}_{i+j-2-k} \beta_k f_{i+j}, & 1 \le j \le p,\ 2 \le i+j \le p+2, \end{cases}$$

где $\beta_i = (-1)^i C^i_p$ для $0 \le i \le p$.

Теорема 31. Произвольная алгебра Зинбиеля с характеристической последовательностью (p+t, p) типа II, где $3 \le t \le p+1$ изоморфна одной из следующих неизоморфных алгебр:

$$\overline{A}_9 : \begin{cases} e_i \circ e_j = C^j_{i+j-1} e_{i+j}, & 2 \le i+j \le p, \\ e_i \circ f_j = \sum\limits_{k=0}^{i-1} C^{j-1}_{i+j-2-k} \beta_k f_{i+j}, & 1 \le i \le p,\ 2 \le i+j \le p+t, \\ f_i \circ e_j = \sum\limits_{k=0}^{j} C^{i-2}_{i+j-2-k} \beta_k f_{i+j}, & 1 \le j \le p,\ 2 \le i+j \le p+t, \end{cases}$$

где $\beta_0 = 1$, $\beta_{i+1} = \prod_{k=0}^{i} \frac{k+\beta_1}{k+1}$ для $1 \le i \le p-1$, $\beta_1 = \{-p, -(p-1), \ldots, -(t-1)\}$;

$$\overline{A}_{10}: \begin{cases} e_i \circ e_j = C_{i+j-1}^{j} e_{i+j}, & 2 \le i+j \le p,\ f_1 \circ f_{p-1} = e_p, \\ e_i \circ f_j = \sum\limits_{k=0}^{i-1} C_{i+j-2-k}^{j-1} \beta_k f_{i+j}, & 1 \le i \le p,\ \ 2 \le i+j \le p+t, \\ f_i \circ e_j = \sum\limits_{k=0}^{j} C_{i+j-2-k}^{i-2} \beta_k f_{i+j}, & 1 \le j \le p,\ \ 2 \le i+j \le p+t, \end{cases}$$

где $\beta_i = (-1)^i C_{p-2}^{i}$ для $0 \le i \le p-2$ и $\beta_{p-1} = \beta_p = 0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена описанию разрешимых и центральных расширений нильпотентных алгебр Лейбница и их Кошулево дуальных алгебр с заданной характеристической последовательностью.

В заключение можно сделать следующие выводы по результатам исследований:

1. Понятие *l*-градуировки для алгебр Ли было распространено на случай алгебр Лейбница и классифицированы *l*-градуированные филиформные алгебры Лейбница.
2. Найдена связь между размерностями нильрадикалов и коразмерностями разрешимых алгебр Лейбница с n-мерным абелевым нильрадикалом и коразмерностью, равной s. Получено описание 2n-мерных разрешимых алгебр Лейбница с n-мерным абелевым нильрадикалом, и классифицированы (2n–1)-мерные разрешимые алгебры Лейбница с n-мерным нильрадикалом. Более того, доказана жесткость полученных разрешимых алгебр Лейбница.
3. Получены классификации разрешимых алгебр Лейбница с естественным образом градуированным 2-филиформным нильрадикалом. А также описаны разрешимые алгебры Лейбница с естественным образом градуированными нелиевыми p-филиформными нильрадикалами с минимальными и максимальными коразмерностями. Более того, показано существование когомологически жесткой алгебры Лейбница среди таких разрешимых алгебр Лейбница.
4. Доказано, что всякое лейбницево центральное расширение алгебры Вирасоро является прямой суммой алгебры Вирасоро и абелевой алгебры. Получены описания центральных расширений нуль-филиформных и естественным образом градуированных филиформных нелиевых алгебр Лейбница.
5. Описаны алгебры Лейбница, ассоциированные с евклидовой алгеброй Ли, и доказана тривиальность второй группы когомологий для простой алгебры Лейбница, ассоциированной с трехмерной простой алгеброй Ли.
6. Описаны свойства характеристических последовательностей естественным образом градуированных конечномерных алгебр Зинбиеля. Кроме этого, классифицированы естественным образом градуированные алгебры Зинбиеля с характеристическими последовательностями (n–3, 2, 1) и (n–p, p).

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 AT V.I.ROMANOVSKIY
INSTITUTE OF MATHEMATICS

INSTITUTE OF MATHEMATICS

ADASHEV JOBIR KODIROVICH

DESCRIPTION OF SOLVABLE AND CENTRAL EXTENSIONS OF NILPOTENT LEIBNIZ ALGEBRAS AND THEIR KOSZUL DUAL ALGEBRAS WITH A GIVEN CHARACTERISTIC SEQUENCE

01.01.06 – Algebra

**DISSERTATION ABSTRACT OF DOCTORAL DISSERTATION (DSc)
ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES**

TASHKENT–2021

The theme of dissertation of doctor of science (DSc) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2021.2.DSc/FM73.

Dissertation has been prepared at Institute of Mathematics named after V.I.Romanovskiy.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website http://kengash.mathinst.uz and in the website of "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz.

Scientific consultant:	**Omirov Bakhrom Abdazovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor
Official opponents:	**Allakov Ismoil** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, docent
	Kudaybergenov Karimbergen Kadirbergenovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor
	Eshmatov Farkhod Khasanovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Senior researcher
Leading organization:	**Samarkand State University**

Defense will take place « 28 » October 2021 at 17:00 at the meeting of Scientific council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871)- 207-91-40). E-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Doctoral dissertation is possible to review in Information-resource centre of V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics (is registered № 122) (Address: University str. 9, Almazar district, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871)-207-91-40). E-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Abstract of dissertation sent out on « 15 » October 2021.
(mailing report № 2 on « 15 » October 2021).

U.A.Rozikov
Chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, D.Sc., Professor

U.U. Jamilov
Scientific secretary of Scientific Council on award of scientific degrees, D.Sc., Senior researcher

A.R.Hayotov
Deputy Chairman of Scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.Sc., Senior researcher

INTRODUCTION (abstract of DSc thesis)

The aim of the research work is description of solvable and central extensions of nilpotent Leibniz algebras and their Koszul dual algebras with a given characteristic sequence.

The object of the research work are nilpotent, solvable, semisimple Leibniz algebras, central extensions and Koszul dual Leibniz algebras.

Scientific novelty of the research work is as follows:

a description of solvable Leibniz algebras with an abelian nilradical and (2n–1)-dimensional solvable Leibniz algebras with an n-dimensional nilradical are classified;

central extensions of zero-filiform and naturally graded filiform non-Lie Leibniz algebras are described, and also the triviality of Leibniz central extensions of the Virasoro algebra is proved;

the Leibniz algebras associated with the Euclidean Lie algebra were constructed, and the triviality of the second order cohomology group of a simple Leibniz algebra associated with a three-dimensional simple Lie algebra was proved;

finite-dimensional naturally graded Zinbiel algebras with a given characteristic sequence are classified.

Implementation of the research results. Results related to description of solvable and central extensions of nilpotent Leibniz algebras and their Koszul dual algebras with a given characteristic sequence were used in the following research projects:

a complete description of solvable Leibniz algebras with an Abelian nilradical was used in the foreign project No. MTM2016-79661-P "Homology, homotopy and categorical invariants of groups and nonassociative algebras" for finding classification of solvable Leibniz algebras with a naturally graded p-filiform nilradical and complementary space to the nilradical has dimension one (Reference of the University of Santiago de Compostela dated July 4, 2021, Spain). The application of the scientific result made it possible to describe solvable Leibniz algebras, in which the nilradicals are naturally graded p-filiform and the complementary space to the nilradicals has maximum dimension, also made it possible to prove the rigidity and completeness of the obtained algebras;

the results of the descriptions of Leibniz algebras associated with the Euclidean Lie algebra were used in the project No. EFA-Ftech-2018-79 "Representation of Leibniz algebras" for describing the Leibniz algebras associated with Witt algebras (reference from the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan dated September 24, 2021, No. 2/1255-2620). The application of these scientific results made it possible to describe the infinite-dimensional Leibniz algebras associated with the Witt algebra and also to prove the triviality of the Leibniz algebras of low orders cohomology groups associated with the Witt algebra;

the descriptions of central extensions of null-filiform and naturally graded filiform non-Lie Leibniz algebras were used in papers of foreign scientific journals

(Communications in Algebra, 2019, 47 (1), 173-181; Algebras and Representation Theory, 2021, 24 (1), 135-148; Communications in Algebra, 2020, 48 (8), 3608-3623), to describe central extensions of nilpotent assosymmetric and anticommutative algebras. The application of these scientific results made it possible to classify assosymmetric and anticommutative algebras of small dimensionals;

the classification of finite-dimensional naturally graded Zinbiel algebras with a given characteristic sequence has been used in paper of foreign scientific journals (Linear and Multilinear Algebra, 2018, 66 (4), 704-716; Communications in Algebra, 2020, 48 (1), 204-209; Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, 2019, 12 (2), 173-184). The application of these scientific results made it possible for the algebraic and geometric classifications of the 5-dimensional complex nilpotent algebras of Tortkara.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, four chapters, conclusion and title of used literatures. The full volume of the thesis is 194 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (I часть; I part)

1. Adashev J.Q., Camacho L.M., Gomez-Vidal S., Karimjanov I.A. Naturally graded Zinbiel algebras with nilindex n-3. // Linear Algebra and its Applications. – 2014. – Vol. 443. –P. 86-104. (3.Scopus. IF=0.951).
2. Adashev J.K., Camacho L.M., Omirov B.A. Central extensions of null-filiform and naturally graded filiform non-Lie Leibniz algebras. // Journal of Algebra. – 2017. – Vol. 479. –P. 461-486. (3.Scopus. IF=1.154).
3. Adashev J.Q. Ladra M., Omirov B.A. Solvable Leibniz algebras with naturally graded non-Lie *p*-filiform nilradicals. // Communications in Algebra. – 2017. – Vol. 45(10). –P. 4329-4347. (3.Scopus. IF=0.680).
4. Adashev J.Q., Ladra M., Omirov B.A. The second cohomology group of simple Leibniz algebras. // Journal of Algebra and Its Applications. – 2018. – Vol. 17(12). 1850222. p. 13. (3.Scopus. IF=0.640).
5. Adashev J.Q., Omirov B.A., Uguz S. Leibniz Algebras Associated with Representations of Euclidean Lie Algebra. // Algebras and Representation Theory. – 2020. – Vol. 23. – P. 285-301. (3.Scopus. IF=0.733).
6. Adashev J.K., Ladra M., Omirov B.A. The classification of naturally graded Zinbiel algebras with characteristic sequence equal to (n-p,p). // Ukrainian Mathematical Journal. – 2019. – Vol. 71(7). – P. 867-883. (3.Scopus. IF=0.325).
7. Adashev J.Q., Camacho L.M., Omirov B.A. Solvable Leibniz algebras with naturally graded non-Lie p-filiform nilradicals whose maximal complemented space of its nilradical. // Linear and Multilinear Algebra. – 2021. – Vol. 69(8). – P. 1500-1520. (3.Scopus. IF=0.688).
8. Adashev J. Q. Classification of (2n-1)-dimensional solvable Leibniz algebras with n-dimensional nilradical. // Communications in Algebra. – 2021. – Vol. 49(4). – P. 1751-1763. (3.Scopus. IF=0.680).
9. Adashev J.Q., Canete E.M. Derivations of the quasi-filiform Leibniz algebras of maximum length. // Узбекский математический журнал. – 2011. № 2. – С. 3-12. (01.00.00, № 6).
10. Adashev J.Q., Redjepov Sh.B. Naturally graded Zinbiel algebras with characteristic sequence (n-3,2,1). // Узбекский математический журнал. – 2014. № 3. – С. 12-16. (01.00.00, № 6).
11. Адашев Ж.К. *l*-градуированные филиформные алгебры Лейбница. // Узбекский математический журнал. – 2013. № 2. – С. 3-12. (01.00.00, № 6).
12. Адашев Ж.К., Каримов У.Ш. Об одном классе бесконечномерных алгебр Лейбница. // Узбекский математический журнал. – 2015. № 4. –С. 3-10. (01.00.00, № 6).

13. Адашев Ж.К. Одномерное центральное расширение градуированных филиформных алгебр Лейбница. // Узбекский математический журнал.– 2016. № 3. – С. 3-11. (01.00.00, № 6).
14. Абдурасулов К.К., Адашев Ж.К., Саттаров А.М. Разрешимые алгебры Лейбница с 2-филиформным нильрадикалом. // Узбекский математический журнал. – 2016. № 4. – С. 16-23. (01.00.00, № 6).
15. Адашев Ж.К., Мамадалиев У.Х. Разрешимые алгебры Лейбница с абелевым нильрадикалом. // Узбекский математический журнал. – 2017. № 2. – С. 3-12. (01.00.00, № 6).
16. Абдурасулов К.К., Адашев Ж.К. Тривиальность центральных расширений алгебры Вирасоро. // Доклады Академии Наук (ДАНРУз). – 2017. № 1. –С. 5-9. (01.00.00, № 7).

II бўлим (II часть; II Part)

17. Адашев Ж.К. l-градуированные филиформные алгебры Лейбница. «Операторные алгебры и смежные проблемы». Республиканская научная конференция с участием зарубежных ученых. Ташкент, 12–14 сентября 2012 г., –С. 80-82.
18. Адашев Ж.К. Вырождения 3-х мерных комплексных алгебр Зинбиеля. «Современные проблемы комплексного и функционального анализа», Материалы Республиканской научной конференции. Нукус, 11-12 мая 2012 г., –С. 18-20.
19. Адашев Ж.К., Реджепов Ш.Б. Описания естественным образом градуированных алгебр Зинбиеля с характеристической последовательностью (n-p, p). «Актуальные проблемы математического анализа, Материалы Республиканской научной конференции». Ургенч, 9-10 ноября 2012 г., –С. 27-29.
20. Адашев Ж.К., Умаров Х.Р. Дифференцирования квази-филиформных алгебр Зинбиеля. "Современные проблемы комплексного и функционального анализа" Материалы Республиканской научной конференции. Нукус, 11-12 мая 2012 г., –С. 21-22.
21. Адашев Ж.К., Эгамов Д.О. Табиий усулда градировкаланган квази - филиформ Зинбиел алгебрасини таснифлашнинг бошкача ендашуви. «Современные проблемы комплексного и функционального анализа» Материалы Республиканской научной конференции. Нукус, 11-12 мая 2012 г., –С. 23-24.
22. Адашев Ж.К., Каримов У.Ш. Тернарная алгебра Лейбница. «Ёш математикларнинг янги теоремалари 2013». Материалы Республиканской научной конференции. Наманган,16-17 апреля 2013 г., –С. 2.
23. Адашев Ж.К. Классификация алгебр Зинбиеля с характеристической последовательностью (n–p,p) типа I. «Ёш математикларнинг янги

теоремалари 2013». Материалы Республиканской научной конференции. Наманган, 16-17 апреля 2013 г., –С. 5.

24. Adashev J.Q., Omirov B.A. Triviality of the second cohomology group of the simple Leibniz algebra sl2+I. «Современные методы математической физики и их приложения» Материалы Республиканской научной конференции. Ташкент, 15-17 апреля 2015 г., –С. 91-92.
25. Адашев Ж.К. Центральное расширение нуль-филиформных алгебр Лейбница. «Предельные теоремы теории вероятностей и их приложения» Материалы Республиканской научной конференции. Наманган, 11-12 мая 2015 г., –С. 167-167.
26. Адашев Ж.К., Омиров Б.А. Одномерное центральное расширение градуированных филиформных алгебр Лейбница. «Актуальные проблемы математики и математического моделирования» Материалы Международной научной конференции. Алматы, 1-5 июня 2015 г., –С. 168-169.
27. Адашев Ж.К. Четырехмерные центральные расширения естественным образом градуированных филиформных алгебр Лейбница. «Алгебра, анализ и квантовая вероятность» Материалы Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых. Ташкент, 10-12 сентября 2015 г., –С. 108-110.
28. Adashev J.Q., Omirov B.A. The classification of some solvable Leibniz algebras with p-filiform nilradical. «Алгебра, анализ, дифференциальные уравнения и их приложения» Материалы Международная научная конференция. Алматы, 8-10 апреля 2016 г., –С. 45-47.
29. Абдурасулов К.К., Адашев Ж.К. Разрешимые алгебры Лейбница с 2-филифорным нильрадикалом. «Проблемы современной топологии и её приложения» Материалы Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых. Ташкент, 5-6 мая 2016 г., –С. 113-115.
30. Абдурасулов К.К., Адашев Ж.К. Тривиальность центральных расширений алгебры Вирасоро. «Современные проблемы прикладной математика и информационных технологий – Аль-Хорезми» Материалы Международная научная конференция. Бухара, 9-10 ноября 2016 г., –С. 45-47.
31. Adashev J. K., Juvonov Q.R. 2-filiform leybniz algebrasining besh o’lchovli markaziy kengaytmasi. «Алгебра, амалий математика ва ахборот технологиялари масалалари», Республика илмий конференцияси материаллари. Наманган, 20-21 декабрь 2016 й., 23-24 Б.
32. Адашев Ж.К., Абдурасулов К.К. Разрешимые алгебры Лейбница с абелевым нильрадикалом и дополняющим пространством максимальной размерности. Of the republican scientific conference with particijiation of foreign scientists. Modern problems of dynamical systems and their applications. Tashkent, May 1-3, 2017 y., –С. 239-240.
33. Adashev J.K., Juvonov Q.R. μ_2-Leybniz algebrasining bir o’lchovli markaziy Kengaytmasi, "Zamonaviy topologiya muammolari va tadbiqlari"

nomli chet el olimlari ishtirokida ilmiy-amaliy konferensiya tezislari to’plami. Toshkent, 11-12 may 2017 y., 22-24 b.

34. Adashev J. Solvable Leibniz algebras with naturally graded non-Lie p-filiform nilradicals “The second USA-Uzbekistan conference on analysis and mathematical physics”. Abstracts. Urgench, 8-12 August 2017. –P 14.
35. Адашев Ж.К. Алгебры Лейбница, ассоциированные с представлениями евклидовой алгебры Ли, Тезисы докладов, научной конференции «Новые теоремы молодых математиков – 2018». Наманган, 18-19 октября 2018 г., –P. 48-49.
36. Адашев Ж.К. Разрешимые алгебры Лейбница с абелевым нильрадикалом, Международная научная конференция “Современные проблемы геометрии и топологии и их приложения”. Ташкент, 21-23 Ноября 2019 г., – С. 92.
37. Adashev J.K. and Murtazaqulov Z. Derivations of the natural graded quasi-filiform Leibniz algebras. Современные проблемы математики. Сборник тезисов научной онлайн конференции. Нукус, 20 мая 2020 г., –С. 12.
38. Адашев Ж.К., Турсинова Ш.Э. Двойная нуль-филиформная алгебра Лейбница. Современные проблемы диффереациальных уравнений и смежных разделов математики. Материалы Международной научной конференции. Фергана, 12-13 марта 2020 г, –С. 21-22.
39. Адашев Ж.К., Турсинова Ш.Э. Двойная естественным образом градуированная филиформная алгебра Лейбница. Математиканинг замонавий масалалари: муаммолар ва ечимлар. Республика миқёсидаги онлайн илмий конференцияси. Термиз, 21-23 октября, 2020 г. - С. 507-508.
40. Адашев Ж., Муртазакулов З. Максимальные разрешимые алгебры Лейбница, нильрадикал которых является квази-филиформной алгеброй Лейбница. Математиканинг замонавий масалалари: муаммолар ва ечимлар. Республика миқёсидаги онлайн илмий конференцияси. Термиз, 21-23 октября 2020 г., –С. 28-31.
41. Адашев Ж., Турсинова Ш. Двойная алгебра Лейбница. Глобаллашув даврида математика ва амалий математиканинг долзарб масалалари. Республика илмий анжумани. Тошкент, 1-2 июн 2021 й., – С. 18-20.

Автореферат «Ўзбекистон математика журнали» таҳририятидан
2021 йил 8 октябрда таҳрирдан ўтказилиб, ўзбек, рус ва инглиз
тилларидаги матнлар ўзаро мувофиқлаштирилди.

Бичими: 84x60 1/16. «Times New Roman» гарнитураси.
Рақамли босма усулда босилди.
Шартли босма табоғи: 3,25. Адади 100. Буюртма № 58/21.

Гувоҳнома № 851684.
«Tipograff» МЧЖ босмахонасида чоп этилган.
Босмахона манзили: 100011, Тошкент ш., Беруний кўчаси, 83-уй.