УРГАНЧ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖА БЕРУВЧИ PhD.03/30.12.2019.FM.55.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

НУКУС ДАВЛАТ ПЕДАГОГИКА ИНСТИТУТИ

ХАЛКНАЗАРОВ АСКАР МАХСЕТБАЕВИЧ

МАТРИЦАВИЙ СОҲАЛАРДА А-ГАРМОНИК ФУНКЦИЯЛАР ВА УЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Урганч – 2021

УДК: 517.55

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

УРГАНЧ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖА БЕРУВЧИ PhD.03/30.12.2019.FM.55.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

НУКУС ДАВЛАТ ПЕДАГОГИКА ИНСТИТУТИ

ХАЛКНАЗАРОВ АСКАР МАХСЕТБАЕВИЧ

МАТРИЦАВИЙ СОҲАЛАРДА A- ГАРМОНИК ФУНКЦИЯЛАР ВА УЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Урганч – 2021

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси хузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2020.2.PhD/FM457 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Нукус давлат педагогика институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (www.ik-mat.urdu.uz) ва «ZiyoNet» Ахборот таълим тармоғида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Худайберганов Гулмирза** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Джумабаев Давлатбай Халиллаевич** физика-математика фанлари доктори
	Ибрагимов Зафар Шавкатович физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD), доцент
Етакчи ташкилот:	**Тошкент шахридаги Турин политехника университети**

Диссертация химояси Урганч давлат университети хузуридаги илмий даража берувчи PhD.03/30.12.2019.FM.55.01 ракамли Илмий кенгашнинг 2021 йил 2 ноябрь соат 14:00 даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 220100, Урганч ш., Ҳ.Олимжон кўчаси, 14-уй. Тел.: (+99862) 224-66-11, факс: (+99862) 224-67-00, e-mail: ik_mat.urdu@umail.uz).

Диссертация билан Урганч давлат университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (D-270 рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 220100, Урганч ш., Ҳ.Олимжон кўчаси, 14-уй. Тел.: (+99862) 224-66-11, факс: (+99862) 224-67-00).

Диссертация автореферати 2021 йил 18 октябрь куни таркатилди.

(2021 йил 18 октябрдаги 1 ракамли реестр баённомаси).

Б.И.Абдуллаев
Илмий даража берувчи Илмий
кенгаш раиси, ф.-м.ф.д.

А.А.Атамуратов
Илмий даража берувчи
Илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.н.

С.А.Имомкулов
Илмий даража берувчи Илмий
кенгаш хузуридаги илмий семинар раиси,
ф.-м.ф.д.

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳонда комплекс анализ бўйича олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда классик соҳаларда матрица аргументли голоморф ва гармоник функцияларнинг хоссаларинин тадқиқ қилишга келтирилади. Дунё миқёсида кўп комплекс ўзгарувчили функциялар назариясида голоморф функциялар учун базис ҳисобланган ортонормал системалар кучли конструктив аппарат ҳисобланади ва муҳим тадбиқларга эга. Шу жиҳатдан матрицавий шарларнинг автоморфизмларини топиш, қаралаётган соҳалар учун Бергман, Коши-Сеге ва Пуассон ядроларини ҳисоблаш ва бу ядроларни ортонормал системалар ёрдамида тадқиқ этиш ва олинган илмий янгиликлардан функциялар назариясида фойдаланиш муҳим аҳамиятга эга ва замонавий математиканинг долзарб йўналишларидан бири ҳисобланади.

Жаҳонда голоморф ҳамда гармоник функцияларнинг хоссаларини ўрганиш ва уларнинг тадбиқлари кўп комплекс ўзгарувчили функциялар назариясининг муҳим ва долзарб масалаларидан бири ҳисобланади. Охирги йилларда комплекс анализнинг матрицавий соҳалардаги натижаларининг электр занжирлар назарияси, математик физика, майдонлар назарияси ва бошқа йўналишларга тадбиқ қилиниши натижасида комплекс анализнинг мазкур йўналишига бўлган эътибор янада кучайди ва бу соҳада дунёдаги бир нечта илмий математик мактаблар илмий-тадқиқот ишларини олиб бормоқда.. Бунинг исботи сифатида жаҳондаги таниқли олимларнинг кўплаб изланишларини ва илмий ишларини мисол келтириш мумкин. Бу борада Э. Картан томонидан киритилган биринчи тип классик соҳаси билан боғланган биринчи тип матрицавий шарнинг автоморфизмларини топиш, ортонормал системаларни аниқлаш, матрицавий шар учун Дирихле масаласини ечиш, Бергман, Коши-Сеге ва Пуассон ядроларини шу ортонормал система ёрдамида қаторларга ёйиш мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади ва бунга алоҳида эътибор берилмоқда.

Республикамизда илмий ва амалий тадбиқларга эга бўлган фундаментал фанларнинг бир бўлими сифатида комплекс ўзгарувчили функциялар назариясининг долзарб йўналишларига ҳам катта эътибор берилмоқда ва кенг қамровли чора-тадбирлар амалга оширилиб, муайян натижаларга эришилмоқда. Жумладан, кўп комплекс ўзгарувчили функциялар назариясида голоморф ва гармоник функцияларнинг хоссаларини ўрганиш, кўп ўлчовли соҳаларда умумлашган интеграл формулаларни топиш ва классик теоремаларнинг баъзи соҳалардаги умумлашмаларини исботлаш алоҳида йўналиш сифатида ўрганилмоқда. Бу ўрганишлар натижасида олинган илмий янгиликлардан фойдаланган ҳолда, матрицавий соҳаларда голоморф функцияларни текис яқинлашувчи қаторга ёйиш ҳамда классик теоремаларнинг қаралган соҳалардаги умумлашмаларини олиш каби тадқиқотлар олиб борилди ва ҳалқаро стандартлар даражасидаги ушбу кўринишдаги илмий тадқиқотлар ва изланишлар натижасида функционал анализ, математик анализ ва кўп ўлчамли комплекс анализ фанларининг устувор йўналишларининг асосий вазифалари ва фаолият йўналишлари белгиланди[1]. Ушбу вазифаларини амалга оширишда, жумладан, матрицавий соҳаларда голоморф ва гармоник функциялар учун асосий базис сифатида хизмат қиладиган ортонормал системаларни тадқиқ қилиш ва олинган натижаларни амалиётда қўллаш муҳим аҳамият касб этмоқда.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги ПФ-4947-сонли Фармони, 2017 йил 17 февралдаги «Фанлар академияси фаолияти, илмий тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-2789-Қарори ва 2019 йил 9 июлдаги «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-4387-сонли Қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа меъёрий-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация иши муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига боғлиқлиги. Диссертациядаги изланиш ва тадқиқотлар республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устивор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Голоморф ва гармоник функцияларнинг хоссаларини классик соҳаларда тадқиқ қилиш ўтган асрнинг ўттизинчи йилларида ривожлана бошлади. Бунга сабаб сифатида кўп комплекс ўзгарувчили функциялар назариясида интеграл формулалардан фойдаланила бошланганини келтириш мумкин.

1935 йилда француз математиги Э.Картан бир жинсли, келтирилмайдиган, симметрик ва чегараланган фақат олтита соҳа мавжудлигини исботлади:

$$\Re_I = \left\{ Z \in \mathbb{C}[m \times k] : I^{(m)} - Z\overline{Z}' > 0 \right\},$$

$$\Re_{II} = \left\{ Z \in \mathbb{C}[m \times m] : I^{(m)} - Z\overline{Z} > 0, \ \ \forall Z' = Z \right\},$$

$$\Re_{III} = \left\{ Z \in \mathbb{C}[m \times m] : I^{(m)} + Z\overline{Z} > 0, \ \ \forall Z' = -Z \right\},$$

$$\Re_{IV} = \left\{ z \in \mathbb{C}^n : \left| zz' \right|^2 + 1 - 2\overline{z}z' > 0, \ \ \left| zz' \right| < 1 \right\}.$$

Бу соҳаларнинг ўлчовлари мос равишда

$$mk, \ m(m+1)/2, \ m(m-1)/2, \ n$$

кўринишида аниқланади.

---

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги “Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий-тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида”ги 292-сон қарори

Э. Картаннинг $\mathbb{C}^{16}$ ва $\mathbb{C}^{27}$ фазолардаги $\Re_5$ ва $\Re_6$ соҳалари эса ўрганилмаган соҳалар ҳисобланади ва улар бўйича баъзи саволларга ечим ҳали топилгани йўқ.

Бир жинсли ва чегараланган комплекс соҳалар ҳозирги вақтда катта қизиқиш билан ўрганилмоқда. Бунга сабаб сифатида $\mathbb{C}^n$ фазодаги синфларнинг ўлчовлари катта эканлиги ва кўп ўлчовли функциялар учун бир қатор янгиликларнинг олинганлигини келтириш мумкин.

Матрицавий соҳалар биринчи бўлиб Э.Картан ва К.Зигель каби олимлар томонидан чуқур ўрганилди. Жумладан, улар тўртта классик соҳалар автоморфизмларининг умумий кўринишларини тасвирлашган. Хуа Ло-Кен эса классик соҳалар учун кўп комплекс ўзгарувчили функциялар назариясида гармоник анализни қурган (1944-1957 йилларда) ва улар бўйича натижалар Хуа Ло-Кеннинг 1958 йилда хитой тилида чоп этилган монографиясида келтирилган.

Классик соҳалардаги баъзи саволларга бағишланган И. И. Пятецкий-Шапиронинг «Классик соҳалар геометрияси ва автоморф функциялар назарияси» ва К. Зигельнинг «Кўп комплекс ўзгарувчили автоморф функциялар» китобларини келтириш мумкин. Шунингдек, Россиялик олимлар В. С. Владимиров, А. Г. Сергеев ва С. Г. Гиндикинларнинг ишлари ҳам мисол бўла олади. А.М.Кытманов, Г. Худайберганов, С. Косбергенов, Б. А. Шаимкулов, Б. Отемуратов, С. Г. Мысливец, Т. Н. Никитина, Б. Курбанов, Додак, Х. Зоя, У. Рахмонов ва бошқалар ўзларининг ишларида классик соҳаларда голоморф функцияларнинг ва интеграл формулаларнинг хоссаларини ўрганишни давом эттирдилар ҳамда кўплаб илмий натижаларга эришдилар.

Ҳозирга вақтда кўп ўлчовли комплекс функцияларга бағишланган интеграл формулалар назарияси ва уларнинг баъзи татбиқлари бўйича олимлар Н.Тарханов, А.М.Кытманов, Ш.Даутов, А.Аронов, М.Аграновский, Г.Хенкин, А.Б.Шлапунов, Б.Шаимкулов, Б.Пренов, Б.Курбанов, Б.Отемуратов ва бошқа олимлар тадқиқотлар олиб боришмоқда.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий - тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги.

Диссертация тадқиқоти Ўзбекистон Миллий университети илмий-тадқиқот ишлар режасидаги ОТ-Ф1-116 “Аналитик давом эттириш масалалари ва функциялар назариясининг геометрик муаммолари” (2007-2011 йиллар), Ф-4-31 “Плюрипотенциаллар назарияси ва кўп ўлчовли анализда интеграл формулалар” (2012-2016 йиллар) фундаментал лойиҳалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади матрицавий соҳаларда Лапласнинг инвариант операторини аниқлаш, A-гармоник функцияларни тадқиқ қилиш, Дирихле масаласини ечиш, матрицавий шар ва унинг остовида ортонормал системани қуриш ва бу система ёрдамида Бергман, Коши-Сеге ва Пуассон ядроларни текис яқинлашувчи қаторларга ёйиш ҳамда уларнинг коэффициентларини текшириш масалалардан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

матрицавий шарда Лапласнинг инвариант опраторини аниқлаш;

матрицавий шарда Дирихле масаласини ечиш;

матрицавий шар ва унинг остовининг ҳажмларини ҳисоблаш;

биринчи тип классик соҳада Лаплас ва Хуа Ло-Кен операторлари орасидаги боғлиқликни аниқлаш;

матрицавий шар ва унинг остовида ортонормал системани қуриш;

ортонормал система ёрдамида Бергман, Коши-Сеге ва Пуассон ядроларни қаторларга ёйиш ва Пуассон ядроси ёйилмаси коэффициентларини А-гармоник функциялар учун система бўлишини исботлаш.

Тадқиқот объекти биринчи тип классик соҳа, биринчи тип матрицавий шар, Бергман, Коши-Сеге ва Пуассон ядролари ҳамда комплекс ҳадли қаторлар.

Тадқиқот предмети Лаплас оператори, А-гармоник функциялар, ортонормал система ва Дирихле масаласидан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертация ишида кўп комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси ва классик соҳада Хуа Ло-Кен ҳамда кўп ўлчовли комплекс анализда У. Рудин усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

$\mathbb{C}^n[m\times m]$ фазодаги матрицавий шар учун Лапласнинг инвариант оператори аниқланган ва унинг биринчи тип матрицавий доирада Хуа Ло-Кен оператори билан устма-уст тушиши исботланган;

матрицавий шарда Пуассон ядросининг А-гармоник функция бўлиши кўрсатилган ва А-гармоник функциялар учун максимумлар принципи бажарилиши исбот қилинган;

матрицавий шарда аниқланган А-гармоник функциялар синфида остовдан А-гармоник давом эттириш ҳақидаги Дирихле масаласи ечилган;

матрицавий соҳаларда баъзи муҳим интеграллар ҳисобланган ва улар ёрдамида матрицавий шар ва унинг остовининг ҳажмлари аниқланган;

$\mathbb{C}[m\times n]$ фазодаги биринчи тип классик соҳада инвариант Лапласиан ва Хуа Ло-Кен операторлари орасидаги боғлиқлик аниқланган;

матрицавий шар ва унинг остовида аналитик давом қилдириш масалаларига мос келувчи ортонормал система қурилган;

ортонормал система ёрдамида Бергман, Коши-Сеге ва Пуассон ядролари текис яқинлашувчи қаторларга ёйилган ва Пуассон ядроси ёйилмаси коэффициентлари системаси А-гармоник функциялар учун базис бўлиши исботланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари қуйидагилардан иборат:

матрицавий шарда ортонормал система ёрдамида Бергман, Коши-Сеге ва Пуассон ядролари қаторларга ёйилди;

А-гармоник функцияларнинг матрицавий шардаги Пуассон ядроси ёйилмаси коэффициентлари орқали бир қийматли ифодаланиши кўрсатилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги функциялар назарияси усуллари, голоморф ва гармоник функциялар хоссалари, n- ўлчовли фазодаги интеграл формулалардан фойдаланилганлиги ҳамда барча исботлардаги математик текширишларнинг қатъийлиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти.

Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти функциялар назарияси ва комплекс анализнинг келгусида ривожланиши учун фойдаланиш мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқотда олинган натижаларнинг амалий аҳамияти уларнинг электр занжирлар назарияси, математик физика, майдонлар назарияси ва бошқа йўналишларга тадбиқ қилиниши ва ушбу йўналишларда амалий масалаларни математик моделлаштиришда асос бўлиб хизмат қилиши билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Матрицавий соҳаларда A-гармоник функцияларнинг хоссаларини ва қўлланилишини тадқиқ қилишда олинган натижалар асосида:

матрицавий шар учун топилган Лапласнинг инвариант оператори 11-01-00852-а рақамли “Комплекс анализда кўп ўлчамли чегирмалар, уларнинг статистик физика, айирмали ва дифференциал тенгламалар назариясида тадбиқлари” номли хорижий лойиҳада турли аналитик функциялар синфлари учун Дирихле масалаларини ечишда фойдаланилган (Сибир федераль университетининг 2021 йил 16 февралдаги №975-сонли маълумотномаси). Инвариант операторга боғланган ортонормал системаларнинг қўлланилиши Дирихле масаласи ечимининг мавжудлиги ва ягоналигини исботлаш имконини берган;

матрицавий шар ва унинг остови учун қурилган ортонормаль система 18-51-41011 рақамли “Кўп ўлчамли комплекс анализ” номли хорижий лойиҳада голоморф давом қилдириш масалаларида фойдаланилган (Сибир федераль университетининг 2021 йил 16 февралдаги №975-сонли маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши голоморф функцияларни қаторларга ёйиш ва остовдан матрицавий шарга ягона голоморф ва гармоник давомнинг мавжудлигини исботлаш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 13 та илмий-амалий анжуманларда, жумладан 4 та халқаро ва 9 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация тадқиқоти мавзуси бўйича жами 18 та илмий иш чоп этилган, шулардан Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 5 та, жумладан 2 таси хорижий ва 3 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг ҳажми ва тузилиши. Диссертация кириш, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат. Диссертациянинг ҳажми 75 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устивор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар рўйхати ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг «Матрицавий фазоларда гармоник функциялар ҳақида» деб номланувчи биринчи бобида $\mathbb{C}^n$ ва $\mathbb{C}[m\times n]$ фазолардаги Лапласнинг инвариант оператори ва гармоник функциялар ҳақида умумий маълумотлар, диссертациянинг натижаларини баён қилишда зарур бўладиган асосий таърифлар ва теоремалар келтирилган.

Ушбу бобнинг биринчи параграфида диссертациянинг келгуси бобларида қўлланиладиган асосий белгилашлар, зарур маълумотлар, олимларнинг бу фазоларда олиб борган илмий изланишлари ва тадбиқлари келтирилган ҳамда масаланинг қўйилиши асосланган.

Диссертациянинг асосий объекти матрицавий кўп ўлчовли комплекс фазода аниқланган биринчи тип классик соҳа ва матрицавий шар ҳисобланади.

Ушбу

$$\Re_I=\left\{Z\in\mathbb{C}\left[m\times n\right]:\ I^{(m)}-ZZ^*>0\right\},$$

соҳа, (Картан таснифи бўйича) биринчи тип классик соҳа деб номланади. Бу ерда, $I^{(m)}-$ бирлик $[m\times m]$- тартибли матрица, Z^*- матрица эса транспонирланган Z' матриcанинг комплекс қўшмаси, $I^{(m)}-ZZ^*>0$ тенгсизлик $I^{(m)}-ZZ^*$ - ифоданинг Эрмит матрицасининг мусбат аниқланганлигини (барча хос сонларининг мусбат эканлигини) англатади

Биринчи тип классик $\Re_I$ соҳа mn- комплекс ўлчовли, тўла доиравий, чегараланган ва қаварик соҳа ҳисобланади.

$\Re_I$ соҳанинг остови (Шилов чегараси) G_I тўплам $UU^*=I^{(m)}$ шартни қаноатлантирувчи $U-[m\times n]$- тартибли матрицалардан иборат. Хусусий ҳолда, $m=n$ бўлса G_I остов $[m\times m]$- тартибли унитар матрицалар тўплами билан устма-уст тушади. G_I остов $m(2n-m)$ ҳақиқий ўлчовга эга ва бир жинсли соҳа ҳисобланади, яъни G_I тўпламнинг ҳар бир нуқтасини, $\Re_I$ соҳадаги бошланғич нуқтани ўзгартирмайдиган акслантиришлар ёрдамида, G_I тўпламга тегишли бошқа нуқталарга ўтказиш мумкин.

Агар $m=n$ бўлса, $\Re_I$ - соҳа $\mathbb{C}[m\times m]$ фазодаги матрицавий доира дейилади.

Баъзи ҳолларда $\mathbb{C}[m\times m]$ фазо билан биргаликда n та $\mathbb{C}[m\times m]$ фазонинг декарт кўпайтмаларидан ташкил топган $\mathbb{C}^n[m\times m]$ фазо ҳам келтирилади:

$$\mathbb{C}^n[m\times m]=\underbrace{\mathbb{C}[m\times m]\times\ldots\times\mathbb{C}[m\times m]}_{n-раз}\ .$$

Ушбу

$$B_{m,n}=\{Z=(Z_1,\ldots,Z_n)\in\mathbb{C}^n[m\times m]:\ I^{(m)}-\langle Z,Z\rangle>0\}$$

тўплам ***матрицавий шар*** дейилади, бунда, $\langle Z,Z\rangle=Z_1Z_1^*+Z_2Z_2^*+\ldots+Z_nZ_n^*$ – «матрицавий скаляр» кўпайтма, $I^{(m)}$– бирлик $[m\times m]$-матрица, $Z_\nu^*=\overline{Z}_\nu'$– матрица эса, Z_ν, $\nu=1,2,\ldots,n$ га нисбатан қўшма ва транспонирланган матрица. $I-\langle Z,Z\rangle>0$ тенгсизлик эса $I-\langle Z,Z\rangle$ - эрмит матрицанинг мусбат аниқланганлигини, яъни барча хос сонлари мусбатлигини билдиради.

$B_{m,n}$ матрицавий шарнинг остови

$$X=\{Z\in\mathbb{C}^n[m\times m]:\langle Z,Z\rangle=I\}$$

кўринишдаги тўпламдан иборат. Остовнинг ҳақиқий ўлчови $m^2(2n-1)$ га тенг ва $m>1$ бўлганда матрицавий шарнинг чегараси билан устма-уст тушмайди.

Лемма 1. *Матрицавий шар $B_{m,n}$ қуйидаги хоссаларга эга:*

1) $B_{m,n}$ – чегараланган соҳа;

2) $B_{m,n}$ – тўла доиравий соҳа;

3) $B_{m,n}$ ва унинг остови унитар акслантиришларга нисбатан инвариант;

4) $B_{m,n}$– қавариқ соҳа.

Масаланинг қўйилиши. Гармоник функциялар - Лаплас тенгламаси деб аталувчи, иккинчи тартибли хусусий хосилалардан иборат

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}=0$$

кўринишдаги дифференциал тенгламаларнинг ечимлари бўлган ҳақиқий функциялардир. Оддий дифференциал тенгламаларни ечишда, хусусий ечимни топиш учун бошланғич шартлар берилади. Худди шундай Лаплас тенгламасининг ечимларини аниқлаш учун ҳам, бизга қўшимча шартлар керак бўлади. Лаплас тенгламаси учун бу шартлар чегаравий шартлар деб номланувчи, яъни берилган нисбатнинг соҳа чегарасида ҳам ечимни қаноатлантириши кўринишида берилади. Бу шартлар оддий ҳолда соҳадаги гармоник функцияларнинг соҳа чегарасидаги қийматлари билан аниқлаш масаласини беради. Шунинг учун, биз қуйидаги чегаравий масала ёки Дирихле масаласи деб номланувчи масалани келтирамиз:

D соҳа чегарасида аниқланган ва узлуксиз $u(\zeta)$ функция берилган бўлсин. D соҳада гармоник ва $\overline{D}$ да узлуксиз бўлган шундай $u(\mathrm{z})$ функция

топилсинки, бу функция D соҳанинг барча чегаравий нуқталарида берилган $u(\zeta)$ қийматларни қабул қилсин.

Бу диссертацияда Дирихле масаласининг матрицавий шардаги аналоги келтирилади. Бунинг учун аввал, Лаплас операторининг голоморф автоморфизмларга нисбатан инвариантлиги аниқланади ва матрицавий шарда инвариант Пуассон ядроси Дирихле масаласи учун ягона ечим бўлиши исботланади. Кўп ўлчовли $\mathbb{R}^{2n}$ фазода гармоник функциялар билан биргаликда плюригармоник функциялар деб номланувчи функциялар ҳам ўрганилади. Бу $u(x,y)\in C^2(D)$ функциялар $D\subset\mathbb{R}^{2n}$ соҳада

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 \overline{z}_\mu \partial^2 z_\nu}=0,\ \ \mu,\nu=1,2,\dots,n,$$

ёки

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_\mu \partial^2 x_\nu}+\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y_\mu \partial^2 y_\nu}=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_\mu \partial^2 y_\nu}-\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_\nu \partial^2 y_\mu}=0$$

тенгламани қаноатлатиради.

Бир ўзгарувчили голоморф функциялар билан $\mathbb{R}^2$ фазодаги гармоник функциялар орасида қандай боғланиш бўлса, кўп ўзгарувчили голоморф функциялар билан плюригармоник функциялар орасида ҳам худди шундай боғланиш бўлади. $\mathbb{R}^{2n}$ фазода эса, плюригармоник функцияларнинг гармоник функция ҳам бўлишини кўриш мумкин. Плюригармоник функцияларга нисбатан, Пуассон интеграли Дирихле масаласининг биз кутган натижасини бермайди. Шунинг учун, матрицавий шарда Дирихле масаласини қуриш учун Пуассон интегралидан фойдаланиш имкониятини берадиган гармоник функциялар синфини аниқлаб олиш керак бўлади. Ушбу диссертацияда эса, шундай гармоник функцияларга нисбатан янги *A- гармоник* функциялар синфи келтирилди.

Голоморф автоморфизмларга нисбатан инвариант бўлган Пуассон ядроси бизни бошқа тарафдан ҳам қизиқтиради. Яъни, ядрони баъзи ортонормал система ёрдамида ёйилган, яқинлашувчи қатор кўринишида ҳам келтириш мумкин экан.

Диссертациянинг 1.2 параграфида, биринчи тип классик соҳадаги голоморф ва гармоник функцияларнинг асосий хоссалари келтирилган бўлиб, дифференциал операторлар ўрганилган ҳамда Лаплас ва Хуа Ло-Кен операторлари орасидаги боғланиш топилган.

Бизга $\mathbb{C}^{mn}$ фазоси берилган бўлсин. $z\in\mathbb{C}^{mn}$ нуқтани

$$z=(z_{11},z_{12},\dots,z_{1n};\dots;z_{m1},z_{m2},\dots,z_{mn}),$$

кўринишда ёзиб оламиз, бунда $z_{\mu\nu}=x_{\mu\nu}+iy_{\mu\nu},\ \mu=1,2,\dots,m,\ \nu=1,2,\dots,n$.

Баъзи ҳолларда, $\mathbb{C}^{mn}$ фазонинг нуқталарини $[m\times n]$ матрицанинг элементлари кўринишида ёзиш анча қулай бўлади:

$$\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12}\ldots z_{1n} \\ . \quad . & \ldots \; . \\ z_{m1} & z_{m2}\ldots z_{mn} \end{pmatrix} = Z .$$

У ҳолда $\mathbb{C}^{mn} \simeq \mathbb{C}[m\times n]$ изоморфизмдир, бунда $\mathbb{C}[m\times n]$- $[m\times n]$-тартибли матрицалар тўплами.

Ушбу

$$\partial_Z = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z_{11}} & \frac{\partial}{\partial z_{12}}\ldots\frac{\partial}{\partial z_{1n}} \\ . & . \quad \ldots \quad . \\ \frac{\partial}{\partial z_{m1}} & \frac{\partial}{\partial z_{m2}}\ldots\frac{\partial}{\partial z_{mn}} \end{pmatrix}, \ \overline{\partial}_Z = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_{11}} & \frac{\partial}{\partial \overline{z}_{12}}\ldots\frac{\partial}{\partial \overline{z}_{1n}} \\ . & . \quad \ldots \quad . \\ \frac{\partial}{\partial \overline{z}_{m1}} & \frac{\partial}{\partial \overline{z}_{m2}}\ldots\frac{\partial}{\partial \overline{z}_{mn}} \end{pmatrix}$$

дифференциал операторларни келтирамиз.

Биринчи тип классик соҳадаги голоморф автоморфизмлар группаси

$$W = (AZ+B)(CZ+D)^{-1} = (ZB^* + A^*)^{-1}(ZD^* + C^*),$$

акслантиришлардан ташкил топади, бу ерда, A – $[m\times m]$-матрица, B – $[m\times n]$-матрица, C – $[n\times m]$-матрица, D – $[n\times n]$-матрица.

Бу матрицалар

$$AA^* - BB^* = I^{(m)},\ AC^* = BD^*,\ CC^* - DD^* = -I^{(n)},$$

ёки

$$A^*A - C^*C = I^{(m)},\ A^*B = C^*D,\ B^*B - D^*D = -I^{(n)}.$$

шартларни бажаради.

Хуа Ло-Кен оператори $Sp\Delta_Z$ қуйидаги кўринишга эга:

$$Sp\Delta_Z = \sum_{\mu,\nu=1}^{m}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\left(\delta_{\mu\nu} - \sum_{\gamma=1}^{n} z_{\mu\gamma}\overline{z}_{\nu\gamma}\right)\left(\delta_{\alpha\beta} - \sum_{\delta=1}^{n}\overline{z}_{\delta\alpha} z_{\delta\beta}\right)\frac{\partial^2}{\partial z_{\mu\beta}\partial\overline{z}_{\nu\alpha}}.$$

Хуа Ло-Кен оператори $\Re_1$ соҳада автоморфизмлар группасига нисбатан инвариант ҳисобланади. Агар $m=1$ бўлса, $\Re_1$ соҳа $\mathbb{C}^n$ фазодаги B-бирлик шар билан устма-уст тушади, у ҳолда, Хуа Ло-Кен оператори B-бирлик шар учун келтирилган Лапласнинг инвариант операторини беради.

1.2 параграфнинг асосий натижалари қуйидаги теоремалар ҳисобланади:

Теорема 1. *Хуа Ло-Кен оператори* $Sp\Delta_Z$ *ни*

$$Sp\Delta f(P) = \Delta(f\circ\varphi_P)(0)$$

кўринишда ёзиш мумкин, бунда Δ *– Лапласнинг классик оператори.*

Теорема 2. *Агар* $\Re_I$ *соҳадаги* E *– очиқ тўплам учун* $f\in C^2(E)$ *ва* $\psi(Z)$ $-\Re_I$ *соҳанинг автоморфизми бўлса, у ҳолда*

$$Sp\Delta(f\circ\psi)(Z) = Sp\Delta f\circ\psi(Z)$$

бўлади.

Диссертациянинг иккинчи боби «**Матрицавий шарда** A**-гармоник функциялар**» деб номланади. Бу бобда $\mathbb{C}^n[m\times m]$ фазодаги матрицавий шар ва унинг остовининг ҳажмлари ҳисобланган, матрицавий шар учун Лапласнинг инвариант оператори ёзилган ва Дирихле масаласи ечилган.

2.1 параграфда $\mathbb{C}^n[m\times m]$ фазодаги матрицавий шар ва унинг остовининг ҳажмлари ҳисобланган.

Теорема 3. *Агар* Z_ν – $[m\times m]$*-матрица ва* $\lambda > -1$ *бўлса, у ҳолда*

$$J(\lambda) = \int\limits_{I-\langle Z,Z\rangle>0} [\det(I-\langle Z,Z\rangle)]^{\lambda}\dot{Z},\ \ \dot{Z} = \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{mn} dx_{ij}dy_{ij},\ x_{ij}+iy_{ij} = z_{ij},$$

интегралнинг ечими

$$J(\lambda) = \pi^{nm^2}\prod_{k=1}^{mn}\frac{\Gamma(k+\lambda)}{\Gamma(k+\lambda+m)}.$$

кўринишда аниқланади.

Хусусий ҳолда, $\lambda = 0$ *бўлса,*

$$V(B_{m,n}) = \pi^{nm^2}\frac{1!2!...(mn-1)!}{m!(m+1)!...(m+mn-1)!}$$

матрицавий шарнинг ҳажми ҳосил бўлади.

Тасдиқ 1. *Матрицавий шарнинг остови ҳажми*

$$V(X) = \frac{(2\pi)^{nm^2-\frac{m(m-1)}{2}}}{(mn-m)!...(mn-1)!}$$

формула ёрдамида ҳисобланади.

Ушбу бобнинг иккинчи параграфида $\mathbb{C}^n[m\times m]$ фазодаги матрицавий шар учун Лапласнинг инвариант оператори ёзилган, ҳамда A- гармоник функцияларга таъриф берилган ва Дирихле масаласи ечилган.

$Sp\Delta$ оператори $B_{m,n}$– матрицавий шар учун ***Лапласнинг инвариант операти*** дейилади. Оператор $Sp\Delta$ қуйидаги кўринишга эга:

$$Sp\Delta = \sum_{i,j=1}^{m}\sum_{\beta,\gamma=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\delta_{ij}-\sum_{\alpha=1}^{m} z_{i\alpha}^{(\nu)}\overline{z}_{j\alpha}^{(\nu)}\right)\left(\delta_{\beta\gamma}-\sum_{k=1}^{m}\overline{z}_{k\beta}^{(\nu)}z_{k\gamma}^{(\nu)}\right)\cdot\frac{\partial^2}{\partial\overline{z}_{i\gamma}^{(\nu)}\partial z_{j\beta}^{(\nu)}}.$$

Агар $n=1$ бўлса, $Sp\Delta$ оператор $\mathbb{C}[m\times m]$ фазодаги матрицавий доиранинг Лаплас оператори билан, агар $m=1$ бўлса, $\mathbb{C}^n$ фазодаги бирлик шарнинг инвариант Лаплас оператори билан устма-уст тушади.

Таъриф 1. А*гар матрицавий шарнинг ҳар бир нуқтасида*

$$(Sp\Delta)U(Z) = 0$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда ҳақиқий $U(Z)\in C^2(B_{m,n})$ *функция* $B_{m,n}$– *матрицавий шарда* $\mathcal{A}$***-гармоник функция*** *дейилади,*

$B_{m,n}$–матрицавий шарда голоморф ва остовда узлуксиз ихтиёрий f функция учун қуйидаги интеграл формула ўринли:

$$f(Z) = \int\limits_X f(U)P(Z,U)d\sigma(U)\ ,\ Z\in B_{m,n},$$

бу ерда $P(Z,U)$ –Пуассон ядроси ва

$$P(Z,U)=\left(\frac{\det\left(I^{(m)}-\langle Z,Z\rangle\right)}{\left|\det\left(I^{(m)}-\langle Z,U\rangle\right)\right|^2}\right)^{mn}$$

кўринишга эга.

Тасдиқ 2. *Агар* $V,U\in X$ *ва* $V=\varphi_P(U)$ *бўлса, у ҳолда*

$$P(W,V)=P(Z,U)\cdot\frac{\left|\det\left(I^{(m)}-\langle P,U\rangle\right)\right|^{2mn}}{[\det\left(I^{(m)}-\langle P,P\rangle\right)]^{mn}}$$

тенглик ўринли.

Тасдиқ 3. $P(Z,U)$ *– Пуассон ядроси матрицавий шарда А-гармоник функция бўлади.*

Матрицавий шарда A –гармоник ва остовда узлуксиз функциялар синфини Ah билан белгилаймиз.

2.2 параграфнинг асосий натижаси қуйидаги теорема ҳисобланади.

Теорема 4. *Остовда ихтиёрий узлуксиз* $f(U)$ *функция учун Пуассон интеграли*

$$f(Z)=\int_X f(U)P(Z,U)d\sigma(U),\ Z\in B_{m,n},$$

Ah *синфга тегишли* A*- гармоник функция бўлади.*

Натижа. *Остовда ихтиёрий узлуксиз* f *функция учун Дирихле масаласи Пуассон интеграли ёрдамида ечилади.*

Ушбу параграфда матрицавий шарда А-гармоник функциялар учун максимум принципи исботланган.

Теорема 5. *Агар ҳақиқий* $\rho(Z)$ *ва* $\vartheta(Z)$ *функциялар учун*

$$\left(Sp\Delta\right)\vartheta(Z)=\rho(Z)$$

тенглик ўринли бўлиб, $\rho(Z)>0$ *бўлса, у ҳолда* $\vartheta(Z)$ *функция матрицавий шарда максимумга,* $\rho(Z)<0$ *бўлса,* $\vartheta(Z)$ *функция минимумга эга бўлмайди.*

Теорема 6. Ah *синфга тегишли А-гармоник функциялар максимум ва минимум қийматларига матрицавий шарнинг остовида эришади.*

Диссертациянинг «A**-гармоник функцияларнинг баъзи хоссалари ва уларнинг қўлланишлари**» деб номланган учинчи бобида матрицавий шар ва унинг остовида ортонормал система қурилади. Шунингдек, бу система ёрдамида Бергман, Коши-Сеге ва Пуассон ядролари текис яқинлашувчи қаторларга ёйилади ҳамда Пуассон ядроси ёйилмасининг коэффициентлари А-гармоник функция эканлиги текширилади.

Ушбу бобнинг биринчи параграфида матрицавий шарда ортонормал система қурилади ва бу система ёрдамида Бергман ядроси текис яқинлашувчи қаторга ёйилади.

Матрицавий шарда $Z=(Z_1,...,Z_n)\in B_{mn}$ нуқталарни $\mathbb{C}^{nm^2}$ фазодаги нуқталар кўринишида ёзиб оламиз:

$$z=\left\{z_{11}^{(1)},...,z_{1m}^{(1)},...,z_{m1}^{(1)},...,z_{mm}^{(1)};...;z_{11}^{(n)},...,z_{1m}^{(n)},...,z_{m1}^{(n)},...,z_{mm}^{(n)}\right\}\in\mathbb{C}^{nm^2}.$$

Элементлари
$$\sqrt{\frac{|\alpha|!}{\alpha_1!\alpha_2!...\alpha_{nm^2}!}}\left(z_{11}^{(1)}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(z_{1m}^{(1)}\right)^{\alpha_m}\cdots\left(z_{mm}^{(n)}\right)^{\alpha_{nm^2}},|\alpha|=\sum_{i=1}^{nm^2}\alpha_i,|\alpha|\geq 0$$
иборат векторни $z^{[\alpha]}$ билан, бу векторнинг ҳар бир элементини эса $\varphi^{(i)}_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m}(Z),\ i=1,2,...,q(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)$ билан белгилаймиз.

Теорема 7. *Матрицавий шарда*
$$(\rho_\alpha)^{-\frac{1}{2}}\varphi^{(i)}_{\alpha}(Z),\ i=1,2,...,q(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m),\ |\alpha|=0,1,2,...$$
функциялар системаси ортонормал система бўлади, бу ерда
$$\rho_\alpha=\int\limits_{B_{m,n}}\left|\varphi^{(i)}_{\alpha}(Z)\right|^2\dot{Z}.$$

Тасдиқ 4. ρ_α *коэффициент учун қуйидаги формула ўринли:*
$$\rho_\alpha=\frac{\pi^{nm^2}}{N(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,0,...,0)}\cdot\frac{1!2!...(mn-m-1)!}{m!(m+1)!...(mn-1)!}\prod_{j=1}^{m}\frac{(l_j+mn-m)!}{(l_j+mn)!},$$
бу ерда $l_j=\alpha_j+m-j$.

Энди биз матрицавий шарда
$$(\rho_\alpha)^{-\frac{1}{2}}\varphi^{(i)}_{\alpha}(Z),\ i=1,2,...,q(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m),\ \alpha=0,1,2,....$$
кўринишдаги ортонормаль системага эгамиз ва бу система ёрдамида
$$K(Z,W)=\frac{1}{V(B_{m,n})}\det{}^{-mn-m}(I^{(m)}-\langle Z,W\rangle)$$

Бергман ядросининг қаторга ёйилишини қараймиз, бу ерда $V(B_{m,n})$ матрицавий шарнинг ҳажми.

Теорема 8. *Матрицавий шарнинг* $K(Z,W)-$ *Бергман ядроси, ортонормал система ёрдамида*
$$\sum_{\alpha}\sum_{i=1}^{q(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)}\frac{\varphi^{(i)}_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m}(Z)\overline{\varphi^{(i)}_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m}(W)}}{\rho_\alpha}. \qquad (1)$$
кўринишдаги қаторга ёйилади ва бу қатор
$$rI-\langle Z,Z\rangle>0,\ 0<r<1$$
соҳанинг ёпиғида ихтиёрий Z *ва* W *нуқталарга нисбатан текис яқинлашувчи бўлади.*

Натижа. *Хусусий ҳолда, (1) тенгликда* $m=1$ *бўлса, у ҳолда* $\mathbb{C}^n$ *фазодаги бирлик шар учун Бергман ядросининг ёйилмаси келиб чиқади.*

Учинчи бобнинг иккинчи параграфида матрицавий шарнинг остовида ортонормал система қурилган ва бу система ёрдамида ёйилган Пуассон ядросининг коэффициентлари A-гармоник функциялар бўлиши исботланган.

Ушбу
$$\varphi^{(i)}_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m}(U),\ i=1,2,...,q(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m),\ U\in X$$
компоненталарга эга $u^{[\alpha]}$ векторни қараймиз.

Лемма 2. *Матрицавий шарнинг остови учун*

$$(\delta_\alpha)^{-\frac{1}{2}}\varphi_\alpha^{(i)}(U), i=1,2,...,q(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m), |\alpha|=0,1,2,...$$

функциялар системаси ортонормал система бўлади, бу ерда

$$\delta_\alpha=\int_X\left|\varphi_\alpha^{(i)}(U)\right|^2\dot{U}=\frac{V(X)}{N(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,0...0)}$$

ва $V(X)$ *– матрицавий шар остовининг ҳажми.*

Энди остовда қурилган ортонормал система функциялари ёрдамида Коши-Сеге ва Пуассон ядроларини қаторларга ёйиш масаласини қараймиз ва Пуассон ядроси коэффициентларини Ah синфдаги A-гармоник функцияларга текширамиз.

Матрицавий шарда Коши-Сеге ядроси

$$C(Z,U)=\frac{1}{V(X)}\det{}^{-mn}(I^{(m)}-\langle Z,U\rangle),\ Z\in B_{m,n},\ U\in X$$

кўринишга эга.

Теорема 9. *Матрицавий шарда Коши-Сеге ядроси ортонормаль системага нисбатан,*

$$rI-\langle Z,Z\rangle>0,\ 0<r<1$$

соҳа ёпиғида текис яқинлашувчи

$$C(Z,U)=\frac{1}{V(X)}\det{}^{-mn}(I^{(m)}-\langle Z,U\rangle)=\sum_{\alpha\geq 0}\sum_{i,j=1}^{N(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)}\varphi_{i,j}^\alpha(Z)\overline{\varphi_{i,j}^\alpha(U)} \qquad (2)$$

кўринишдаги қаторга ёйилади.

Агар $f(U)$ – функция остовда интегралланувчи бўлса, у ҳолда (2) қаторнинг иккала тарафини $f(U)$ га кўпайтириб ва $\dot{U}$ бўйича интегралини олсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\int_{\langle U,U\rangle=I}[\det(I-\langle Z,U\rangle)]^{-n}f(U)\dot{U}=\sum_{\alpha\geq 0}\sum_{i=1}^{q(\alpha)}a_\alpha^i\frac{\varphi_\alpha^i(Z)}{\sqrt{\delta_\alpha}},$$

бу ерда

$$a_\alpha^i=\frac{V(X)}{\sqrt{\delta_\alpha}}\cdot\int_{\langle U,U\rangle=I}f(U)\overline{\varphi_\alpha^i(U)}\cdot\dot{U}.$$

У ҳолда

$$\int_{\langle U,U\rangle=I}[\det(I-\langle Z,U\rangle)]^{-n}f(U)\dot{U}$$

интеграл матрицавий шарда

$$\sum_{\alpha\geq 0}\sum_{i=1}^{q(\alpha)}a_\alpha^i\frac{\varphi_\alpha^i(Z)}{\sqrt{\delta_\alpha}}$$

кўринишдаги қаторга ёйиладиган голоморф функцияни аниқлайди.

Энди матрицавий шарда

$$P(Z,U)=\frac{C(Z,U)C(U,Z)}{C(Z,Z)}=\frac{1}{V(X)}\left(\frac{\det(I^m-\langle Z,Z\rangle)}{\left|\det(I^m-\langle Z,U\rangle)\right|^2}\right)^{mn},\ Z\in B_{m,n},\ U\in X$$

Пуассон ядросинг ёйилмасини қараймиз.

(2) тенгликдан ва лемма 2 дан қуйидагига

$$\frac{1}{V(X)}\left(\frac{\det(I^m-\langle Z,Z\rangle)}{\left|\det(I^m-\langle Z,U\rangle)\right|^2}\right)^{mn}=\sum_h\sum_{i,j}^{N(h)}\Phi_{i,j}^h(Z)\overline{\varphi_{i,j}^h(U)}, \qquad (3)$$

эга бўламиз. Бу қатор

$$rI-\langle Z,Z\rangle>0,\ 0<r<1$$

соҳанинг ёпиғида Z нуқтага нисбатан текис яқинлашувчи бўлади.

3.2 параграфнинг асосий натижаси қуйидаги теорема ҳисобланади:

Теорема 10. *Ушбу*

$$\left\{\Phi_{i,j}^h(Z)\right\}$$

функциялар системаси $Ah-$ *синфдаги А-гармоник функциялар учун базис бўлади.*

ХУЛОСА

Ушбу диссертацияда матрицавий фазолардаги A-гармоник функциялар ва уларнинг хоссалари тадқиқ қилинди. Ишдаги асосий натижалар қуйидагилардан иборат:

1. $\mathbb{C}^n[m\times m]$ фазодаги матрицавий шар учун Лапласнинг инвариант оператори аниқланган ва унинг биринчи тип матрицавий доирада Хуа Ло-Кен оператори билан устма-уст тушиши исботланган.

2. Матрицавий шарда Пуассон ядросининг А-гармоник функция бўлиши кўрсатилган ва А-гармоник функциялар учун максимумлар принципи бажарилиши исбот қилинган.

3. Матрицавий шарда аниқланган А-гармоник функциялар синфида остовдан А-гармоник давом эттириш ҳақидаги Дирихле масаласи ечилган.

4. Матрицавий соҳаларда баъзи муҳим интеграллар ҳисобланган ва улар ёрдамида матрицавий шар ва унинг остовининг ҳажмлари аниқланган.

5. $\mathbb{C}[m\times n]$ фазодаги биринчи тип классик соҳада инвариант Лапласиан ва Хуа Ло-Кен операторлари орасидаги боғлиқлик аниқланган.

6. Матрицавий шар ва унинг остовида аналитик давом қилдириш масалаларига мос келувчи ортонормал система қурилган.

7. Ортонормал система ёрдамида Бергман, Коши-Сеге ва Пуассон ядролари текис яқинлашувчи қаторларга ёйилган ва Пуассон ядроси ёйилмаси коэффициентлари системаси А-гармоник функциялар учун базис бўлиши исботланган.

Олинган натижалар кўп комплекс ўзгарувчили функциялар назариясида гармоник функцияларни тадқиқ қилиш масалаларига қўлланилади.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ PhD.03/30.12.2019.FM.55.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ ПРИ УРГЕНЧСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

НУКУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ХАЛКНАЗАРОВ АСКАР МАХСЕТБАЕВИЧ

А-ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ В МАТРИЧНЫХ ОБЛАСТЯХ И ИХ СВОЙСТВА

01.01.01 – Математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Ургенч – 2021

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2020.2.PhD/FM457

Диссертация выполнена в Нукусском государственном педагогическом институте.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.ik-mat.urdu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Худайберганов Гулмирза** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Джумабаев Давлатбай Халиллаевич** доктор физико-математических наук
	Ибрагимов Зафар Шавкатович доктор философии (PhD) по физико-математическим наукам, доцент
Ведущая организация:	**Туринский политехнический университет в городе Ташкенте**

Защита диссертации состоится 2 ноября 2021 года в 14:00 на заседании Научного совета PhD.03/30.12.2019.FM.55.01 при Ургенчском государственном университете. (Адрес: 220100, г. Ургенч, ул. Х. Алимджана, дом 14. Тел.: (+99862) 224-66-11, факс: (+99862) 224-67-00, e-mail: ik_mat.urdu@umail.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Ургенчского государственного университета (зарегистрирована за № D-270). (Адрес: 220100, г. Ургенч, ул. Х. Алимджана, дом 14. Тел.: (+99862) 224-66-11, факс: (+99862) 224-67-00).

Автореферат диссертации разослан 18 октября 2021 года.
(протокол рассылки № 1 от 18 октября 2021 года).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI

Б.И.Абдуллаев
Председатель Научного совета по присуждению ученой степени, д.ф.-м.н.

А.А.Атамуратов
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученой степени, к.ф.-м.н.

С.А.Имомкулов
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению ученой степени, д.ф.-м.н.

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Одними из актуальных вопросов многомерного комплексного анализа являются задачи голоморфного и гармонического продолжения с границы. С этими задачами на мировом уровне занимались многие ученые и проводили многие научные и практические исследования. На комплексной плоскости результаты, связанные с функциями с одномерным свойством голоморфного и гармонического продолжения с границы являются тривиальными. Поэтому, проблемы, рассматриваемые в диссертации, являются существенно многомерными, т.е. задачи рассматриваются в пространстве матриц. В данное время матричное исчисление широко применяется в различных областях математики, электроники, теоретической физики, механики, телемеханики и т.д. В n-мерном пространстве матрицы являются основным аналитическим аппаратом для изучения линейных операций.

В данное время, одной из актуальных задач теории функций многих комплексных переменных считается изучение голоморфных и гармонических функций и их применение. В последние годы, еще больше возрос интерес к этому направлению комплексного анализа, в связи с применением комплексного анализа для матричных областей в теории электрических цепей, в математической физике (в теории полей) и других. Многочисленные научные работы, полученные ведущими учеными мира в этих областях можно привести в качестве доказательства. При этом нахождение ортонормальных систем для матричного шара и его остова, разложение ядра Бергмана, Коши-Сеге и Пуассона в равномерно сходящиеся ряды считаются целевыми научными исследованиями.

В нашей стране, теории функций комплексных переменных уделяется особое внимание как одной из фундаментальных наук, имеющих научное и практическое применение. В том числе, особое внимание уделено задачам исследования голоморфных и гармонических функций в классических областях, решение задачи Дирихле, исследование некоторых областей в пространстве матриц. Основной задачей и направлением деятельности[2] установлено проведение научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям предметов «Функциональный анализ, математический анализ и комплексный анализ многих переменных». Для реализации указанного постановления, важную роль в комплексном анализе играют задачи голоморфного и гармонического продолжения с границ.

Исследования данной диссертации в определенной степени служат решению задач, указанных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О Стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», УП-2789 от 17 февраля

---

2 Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений академии Наук Республики Узбекистан»

2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» и ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан», а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Изучение свойств голоморфных и гармонических функций в классических областях имели большое развитие в середине прошлого века. Это связано с тем, что в теории функций многих комплексных переменных начинают использовать методы теории интегралов.

В 1935 году Э. Картан доказал, что существуют только шесть возможных типов неприводимых транзитивных ограниченных симметрических областей:

$$\Re_I = \left\{ Z \in \mathbb{C}\left[m \times k\right] : I^{(m)} - Z\overline{Z}' > 0 \right\},$$

$$\Re_{II} = \left\{ Z \in \mathbb{C}\left[m \times m\right] : I^{(m)} - Z\overline{Z} > 0, \ \ \forall Z' = Z \right\},$$

$$\Re_{III} = \left\{ Z \in \mathbb{C}\left[m \times m\right] : I^{(m)} + Z\overline{Z} > 0, \ \ \forall Z' = -Z \right\},$$

$$\Re_{IV} = \left\{ z \in \mathbb{C}^n : \left|zz'\right|^2 + 1 - 2\overline{z}z' > 0, \ \ \left|zz'\right| < 1 \right\}.$$

Размерность этих областей равна соответственно

$$mk,\ m(m+1)/2,\ m(m-1)/2,\ n.$$

Области Картана $\Re_5$, $\Re_6$ – в $\mathbb{C}^{16}$, $\mathbb{C}^{27}$, соответственно, являются весьма частными. Вопрос об эффективном описании этих двух областей все еще остается открытым.

С разных точек зрения, комплексно однородные, симметрические ограниченные, выпуклые области представляют большой интерес. Это связано с тем, что они являются сравнительно широким классом областей в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}[m \times n]$, для которых удалось получить большое количество содержательных существенно многомерных результатов (см. книги Хуа Ло-Кена, У.Рудина и т.д).

Матричные области впервые изучены в работах Э.Картана, К.Зигеля. В частности, ими были описаны автоморфизмы классических областей.

В классических областях Хуа Ло-Кеном построен гармонический анализ функций многих комплексных переменных (1944-1957 гг.), результаты приведены в книге Хуа Ло-Кена (1958 по-китайски, перевод-1959).

Вопросам, связанными с классическими областями посвящены монографии К.Зигеля «Автоморфные функции нескольких комплексных переменных» (1948 г.-англ., перевод-1954 г.) и И.И. Пятецкий-Шапиро «Геометрия классических областей и теория автоморфных функций» (1961 г.).

Следует также отметить работы Л.А. Айзенберга, В.С. Владимирова, А.Г. Сергеева, С.Г. Гиндикина. В работах А.М. Кытманова, Г. Худайберганова, С. Косбергенова, Б.А. Шаимкулова, С.Г. Мысливец, Т.Н. Никитиной, Б. Курбанова, Б.Отемуратова и других были продолжены изучение свойств голоморфных функций в матричных областях.

Теория интегральных формул в многомерном комплексном пространстве и их приложения исследуются в работах А.М.Кытманова, Н.Тарханова, А.Аронова, Ш.Даутова, Г.Хенкина, М.Аграновского, А.Шлапунова, Б.Шаимкулова, Б.Пренова, А.Кацуновой и многих других ученых.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами учреждением высшего образования, где выполнялась диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с планом научных исследований по грантам ОТ-Ф1-116 «Задача аналитического продолжения и вопросы геометрической теории функций» (2007-2011 гг.) и Ф-4-31 «Теория плюрипотенциала и интегральные представления в многомерном анализе» (2012-2016 гг.) Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека.

Целью исследования являются: получение в пространстве матриц инвариантного оператора Лапласа, исследование A-гармонических функций, решение задачи Дирихле, нахождение ортонормальной системы в матричном шаре и его остове, и с помощью этих систем разложить ядро Бергмана и Пуассона.

Задачи исследования в данной работе, следующие:

получить инвариантный оператор Лапласа для матричного шара;

решить задачу Дирихле в матричном шаре;

вычислить объем матричного шара и его остова;

найти связь оператора Лапласа и Хуа Ло-Кена в классических областях первого типа;

построить ортонормальную систему в матричном шаре и его остове;

доказать, что коэффициенты разложения ядра Пуассона образуют систему A-гармонических функций.

Объектом исследования являются: классическая область первого типа, матричный шар в пространстве прямоугольных матриц, ядра Бергмана и Пуассона, ряды.

Предмет исследования. Оператор Лапласа, А-гармонические функции, ортонормальная система, задача Дирихле.

Методика исследования. В диссертационной работе используются методы теории функции многих комплексных переменных, методы Хуа Ло

Кена в классических областях и У. Рудина в многомерном комплексном анализе.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

получен инвариантный оператор Лапласа для матричного шара из пространства $\mathbb{C}^n[m \times m]$ и доказано что, он, в матричном круге первого типа, совпадает с оператором Хуа Ло-Кеном;

показано, что ядро Пуассона является A-гармонической функцией и доказано, что в матричном шаре, для А-гармонических функций выполняется принцип максимума;

в классе A-гармонических функций, определенных в матричном шаре, решена задача Дирихле о продолжении А-гармоничности с остова;

в матричных областях вычислены некоторые важные интегралы и с их помощью определены объемы матричного шара и его остова;

установлена связь между операторами Лапласа и Хуа Ло-Кена для классических областей первого типа из пространства $\mathbb{C}[m \times n]$;

построена ортонормальная система, совпадающая с задачами аналитических продолжений в матричном шаре и его остове;

с помощью ортонормальной системы ядра Бергмана, Коши-Сеге и Пуассона разложены в равномерно сходящиеся ряды, и доказано, что коэффициенты разложения ядра Пуассона образуют базис для A-гармонических функций.

Практические результаты исследования. В матричном шаре ядра Бергмана и Пуассона разложены в ряды с помощью ортонормальных систем и доказано, что коэффициенты разложения ядра Пуассона образуют систему A-гармонических функций.

Достоверность результатов исследования основаны на методах теории функций, свойств голоморфных и гармонических функций, также все доказательства основаны на строгих математических рассуждениях.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научная значимость результатов исследования объясняется тем, что они могут быть использованы для дальнейшего развития теории функций и комплексного анализа.

Практическая значимость, полученных в исследовании результатов, объясняется их применением в теории электрических цепей, математической физике, теории поля и других областях и служат основой для математического моделирования практических задач в этих областях.

Внедрение результатов исследования. На основе результатов, полученных при изучении А- гармонических функций в пространстве матриц и их свойства:

Инвариантный оператор Лапласа, полученный для матричного шара использован в зарубежном проекте 11-01-00852-а «Многомерные вычеты в комплексном анализе их применения в статической физике и теориях разностных и дифференциальных уравнений» для решения задачи Дирихле в разных классах аналитических функций (Справка №975 Сибирского

Федерального университета от 16 февраля 2021 года). Применение ортонормальных систем, связанные с инвариантными операторами, дали возможность доказать, что решение задачи Дирихле существует и единственно.

Ортонормальные системы, полученные для матричного шара и его остова, были использованы для задачи голоморфного продолжения в зарубежном проекте 18-51-41011 «Многомерный комплексный анализ» (Справка №975 Сибирского Федерального университета от 16 февраля 2021 года). Применение этих результатов дало возможность разложить голоморфные функции в равномерно сходящиеся ряды и доказать существование единственности голоморфного и гармонического продолжения остова в матричный шар.

Апробация результатов исследования. Основное содержание диссертации обсуждалось на 13 научно-практических конференциях, в том числе на 4 международных и 9 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. Основные результаты диссертации опубликованы в работах, список которых приведен в конце диссертации. Всего опубликовано 18 научных работ из них 5 в научных изданиях, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для публикации основных научных результатов диссертаций доктора философии, в том числе из них 2 опубликованы в зарубежных журналах и 3 в республиканских научных изданиях, а также результаты вошли в монографию.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Общее число страниц диссертационной работы – 75.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования по приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзоры зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объекты и предметы исследования, изложена научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации называется «О гармонических функциях в пространстве матриц». В ней приводятся необходимые предварительные сведения об инвариантном операторе Лапласа и гармонических функций в пространстве $\mathbb{C}^n$ и в пространстве матриц $\mathbb{C}[m\times n]$. Также, в этих пространствах, изучены некоторые известные результаты для гармонических функций, основные обозначения и определения, которые будут использованы при изложении основных результатов диссертации.

В первом параграфе этой главы приводятся основные обозначения и необходимые предварительные сведения, которые будут использованы в дальнейшем. А так же обоснована постановка задач для диссертации.

Одними из основных объектов исследования в диссертации являются *классическая область первого типа* и *матричный шар*, определяемые в многомерном комплексном пространстве матриц.

Область

$$\Re_I = \left\{ Z \in \mathbb{C}\left[m \times n\right] :\ I^{(m)} - ZZ^* > 0 \right\},$$

где $I^{(m)}$– единичная $[m \times m]$-матрица, Z^*– матрица комплексно- сопряженная с транспонированной матрицей Z' ($H > 0$ для эрмитовой матрицы H означает, как обычно, что H положительно определена, т.е. все ее собственные значения положительны), называется классической областью первого типа по классификации Э. Картана.

Область $\Re_I$ является полной ограниченной круговой выпуклой областью комплексной размерности mn.

Остов (граница Шилова) G_I области $\Re_I$ состоит из $U - [m \times n]$-матриц, удовлетворяющих условию $UU^* = I^{(m)}$. В частности, при $m = n$ многообразие G_I совпадает с множеством всех унитарных $[m \times m]$-матриц. Остов G_I имеет вещественную размерность $m(2n - m)$ и является однородным пространствам. Более точно, каждую точку G_I можно перевести в любую другую преобразованием, оставляющим неподвижной заданную точку в $\Re_I$.

При $m = n$ область $\Re_I$ называется *матричным кругом* из $\mathbb{C}[m \times m]$.

Вместе с пространством $\mathbb{C}[m \times m]$ рассматривается и пространство $\mathbb{C}^n[m \times m]$ как декартово произведение n-экземпляров $\mathbb{C}[m \times m]$:

$$\mathbb{C}^n[m \times m] = \underbrace{\mathbb{C}[m \times m] \times \ldots \times \mathbb{C}[m \times m]}_{n-раз}.$$

Множество

$$B_{m,n} = \{ Z = (Z_1, \ldots, Z_n) \in \mathbb{C}^n[m \times m] : I^{(m)} - \left\langle Z, Z \right\rangle > 0 \}$$

называется ***матричным шаром***, где $\left\langle Z, Z \right\rangle = Z_1 Z_1^* + Z_2 Z_2^* + \ldots + Z_n Z_n^*$ – «скалярное» произведение, $I^{(m)}$– единичная $[m \times m]$-матрица, $Z_\nu^* = \overline{Z}_\nu'$– матрица, сопряженная и транспонированная к Z_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Здесь $I - \left\langle Z, Z \right\rangle > 0$ означает, что эрмитова матрица $I - \left\langle Z, Z \right\rangle$ положительно определена, т.е. все собственные значения положительны.

Остовом матричного шара $B_{m,n}$ является множество

$$X = \{ Z \in \mathbb{C}^n[m \times m] : \left\langle Z, Z \right\rangle = I \}.$$

Действительная размерность остова равна $m^2(2n-1)$ и при $m>1$ не совпадает с размерностью границы матричного шара.

Лемма 1. *Для матричного шара $B_{m,n}$ из пространства $\mathbb{C}^n[m\times n]$ справедливы следующие утверждения:*

1) $B_{m,n}$ является ограниченной областью;

2) $B_{m,n}$ является полной круговой областью;

3) $B_{m,n}$ и её остов инвариантны относительно унитарных преобразований;

4) $B_{m,n}$ является выпуклой областью.

Постановка задач. Известно, что все решения уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}=0,$$

которое является одним из простейших дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка, будет совокупность гармонических функций. Подобно тому, как в случае обыкновенных дифференциальных уравнений для отыскания одного определенного решения задаются дополнительные условия, также дополнительные условия требуются и для полного определения решения уравнения Лапласа. Для уравнения Лапласа эти условия называются краевыми условиями, т.е. заданные соотношения, которым, на границе области, должно удовлетворять искомое решение. Простейшее из таких условий сводится к заданию значений искомой гармонической функции в каждой точке границы области. Таким образом, мы приходим к формулировке первой краевой задаче, или *задаче Дирихле*:

найти гармоническую в области D и непрерывную в $\overline{D}$ функцию $u(\mathrm{z})$, которая на границе ∂D принимает заданные непрерывные значения $u(\zeta)$.

В диссертации рассматривается аналог задачи Дирихле в матричном шаре. Для этой цели сначала определим инвариантный относительно голоморфных автоморфизмов лапласиан, затем докажем, что инвариантное ядро Пуассона для матричного шара дает единственное решение задачи Дирихле. Надо отметить, что в многомерном пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ помимо гармонических функций можно рассмотреть и так называемые *плюригармонические* функции:

функция $u(x,y)$ класса C^2 в области $D\subset\mathbb{R}^{2n}$, удовлетворяющая в каждой точке $(x,y)\in D$ уравнениям

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 \overline{z}_\mu \partial^2 z_\nu}=0,\ \ \mu,\nu=1,2,...,n,$$

или уравнениям

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_\mu \partial^2 x_\nu}+\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y_\mu \partial^2 y_\nu}=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_\mu \partial^2 y_\nu}-\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_\nu \partial^2 y_\mu}=0$$

$(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n;$ уравнения второй группы при $\mu = \nu$ тривиальны$)$.

Плюригармонические функции связаны с голоморфными функциями многих переменных так же, как гармонические функции в $\mathbb{R}^2$ с голоморфными функциями одного переменного. Однако, класс плюригармонических функций составляют подкласс класса гармонических функций в $\mathbb{R}^{2n}$. При рассмотрении задачи Дирихле относительно класса плюригармонических функций, интеграл Пуассона не дает ожидаемого решения этой задачи. Поэтому при постановке задачи Дирихле в матричном шаре приходится сначала определить класс гармонических функций, позволяющий воспользоваться интегралом Пуассона. В диссертации в качестве такого класса гармонических функций определен новый класс A-*гармонических функций.*

Инвариантное (относительно голоморфных автоморфизмов) ядро Пуассона нас будет интересовать еще и с другой стороны. Дело в том, что, такое ядро можно получить посредством разложения его в сходящийся ряд по элементам некоторой ортонормальной системы функций.

В параграфе 1.2 изучены дифференциальные операторы для классической области первого типа, найдена связь между операторами Лапласа и Хуа-Ло Кена. В этом параграфе также рассмотрены основные свойства голоморфной и гармонической функции.

Рассмотрим пространство $\mathbb{C}^{mn}$. Точки $z \in \mathbb{C}^{mn}$ запишем в виде

$$z = (z_{11}, z_{12}, \ldots, z_{1n}; \ldots; z_{m1}, z_{m2}, \ldots, z_{mn}),$$

где $z_{\mu\nu} = x_{\mu\nu} + iy_{\mu\nu}$, $\mu = 1, 2, \ldots, m;$ $\nu = 1, 2, \ldots, n$.

В некоторых вопросах точки пространства $\mathbb{C}^{mn}$ удобно представить как элементы матриц $[m \times n]$:

$$\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \ldots z_{1n} \\ . & . \quad \ldots \quad . \\ z_{m1} & z_{m2} \ldots z_{mn} \end{pmatrix} = Z .$$

Тогда имеет место изоморфизм: $\mathbb{C}^{mn} \simeq \mathbb{C}[m \times n]$, где $\mathbb{C}[m \times n]$ множество $[m \times n]$-матриц.

Пусть

$$\partial_Z = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z_{11}} & \frac{\partial}{\partial z_{12}} \cdots \frac{\partial}{\partial z_{1n}} \\ . & . \quad \ldots \quad . \\ \frac{\partial}{\partial z_{m1}} & \frac{\partial}{\partial z_{m2}} \cdots \frac{\partial}{\partial z_{mn}} \end{pmatrix}, \quad \overline{\partial}_Z = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_{11}} & \frac{\partial}{\partial \overline{z}_{12}} \cdots \frac{\partial}{\partial \overline{z}_{1n}} \\ . & . \quad \ldots \quad . \\ \frac{\partial}{\partial \overline{z}_{m1}} & \frac{\partial}{\partial \overline{z}_{m2}} \cdots \frac{\partial}{\partial \overline{z}_{mn}} \end{pmatrix}$$

дифференциальные операторы.

Группа голоморфных автоморфизмов области $\Re_1$ состоит из преобразований вида

$$W = (AZ + B)(CZ + D)^{-1} = (ZB^* + A^*)^{-1}(ZD^* + C^*),$$

где A – $[m\times m]$-матрица, B – $[m\times n]$-матрица, C – $[n\times m]$-матрица, D – $[n\times n]$-матрица.

Эти матрицы удовлетворяют условиям

$$AA^* - BB^* = I^{(m)},\ AC^* = BD^*,\ CC^* - DD^* = -I^{(k)},$$

которые можно также записать в виде

$$A^*A - C^*C = I^{(m)},\ A^*B = C^*D,\ B^*B - D^*D = -I^{(k)}.$$

Оператор Хуа Ло-Кена $Sp\Delta_Z$ имеет вид:

$$Sp\Delta_Z = \sum_{\mu,\nu=1}^{m}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\left(\delta_{\mu\nu} - \sum_{\gamma=1}^{n} z_{\mu\gamma}\overline{z}_{\nu\gamma}\right)\left(\delta_{\alpha\beta} - \sum_{\delta=1}^{n}\overline{z}_{\delta\alpha}z_{\delta\beta}\right)\frac{\partial^2}{\partial z_{\mu\beta}\partial\overline{z}_{\nu\alpha}}.$$

Оператор Хуа Ло-Кена инвариантен относительно группы автоморфизмов области $\mathfrak{R}_I$. Отметим, что если $m=1$, область $\mathfrak{R}_I$ совпадает с единичным шаром B из $\mathbb{C}^n$, то оператор Хуа Ло-кена совпадает с инвариантным оператором Лапласа для B.

Основными результатами параграфа 1.2 являются следующие теоремы:

Теорема 1. *Оператор Хуа Ло-Кена $Sp\Delta_Z$ можно записать в виде*

$$Sp\Delta f(P) = \Delta(f\circ\varphi_P)(0),$$

где Δ – классический оператор Лапласа.

Теорема 2. *Если $f\in C^2(E)$, E – открытое множество из $\mathfrak{R}_I$ и $\psi(Z)$ автоморфизм $\mathfrak{R}_I$, где $\psi(Z)\in E$, то*

$$Sp\Delta(f\circ\psi)(Z) = Sp\Delta f\circ\psi(Z).$$

Вторая глава диссертации называется «A-гармонические функции в матричном шаре». В этой главе вычислены объемы матричного шара и его остова из пространства $\mathbb{C}^n[m\times m]$, выписан инвариантный оператор Лапласа и рассмотрена задача Дирихле для матричного шара.

В параграфе 2.1 вычислены объемы матричного шара и его остова из пространства $\mathbb{C}^n[m\times m]$.

Теорема 3. *Пусть Z_v – $[m\times m]$-матрица и $\lambda > -1$. Положим*

$$J(\lambda) = \int_{I-\langle Z,Z\rangle>0}[\det(I-\langle Z,Z\rangle)]^{\lambda}\dot{Z},$$

где $\dot{Z} = \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{mn}dx_{ij}dy_{ij}$, $x_{ij}+iy_{ij} = z_{ij}$. Тогда

$$J(\lambda) = \pi^{nm^2}\prod_{k=1}^{mn}\frac{\Gamma(k+\lambda)}{\Gamma(k+\lambda+m)}.$$

В частности, при $\lambda = 0$ получается объем матричного шара

$$V(B_{m,n}) = \pi^{nm^2}\frac{1!2!...(mn-1)!}{m!(m+1)!...(m+mn-1)!}.$$

Предложение 1. *Объем остова матричного шара вычисляется формулой*

$$V(X)=\frac{(2\pi)^{nm^2-\frac{m(m-1)}{2}}}{(mn-m)!...(mn-1)!}.$$

В втором параграфе этой главы выписан инвариантный оператор Лапласа для матричного шара из пространства $\mathbb{C}^n[m\times m]$, даны определения для A- гармонических функций и рассмотрена задача Дирихле.

Оператор $Sp\Delta$ называется инвариантным ***оператором Лапласа*** для матричного шара $B_{m,n}$. Более подробная запись оператора $Sp\Delta$ выглядит следующим образом:

$$Sp\Delta=\sum_{i,j=1}^{m}\sum_{\beta,\gamma=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\delta_{ij}-\sum_{\alpha=1}^{m}z_{i\alpha}^{(\nu)}\overline{z}_{j\alpha}^{(\nu)}\right)\left(\delta_{\beta\gamma}-\sum_{k=1}^{m}\overline{z}_{k\beta}^{(\nu)}z_{k\gamma}^{(\nu)}\right)\cdot\frac{\partial^2}{\partial\overline{z}_{i\gamma}^{(\nu)}\partial z_{j\beta}^{(\nu)}}.$$

Оператор $Sp\Delta$ при $n=1$ есть оператор Лапласа для матричного круга из $\mathbb{C}[m\times m]$, а при $m=1$ совпадает с инвариантным оператором Лапласа для единичного шара из $\mathbb{C}^n$.

Определение 1. *Вещественную функцию $U(Z)\in C^2(B_{m,n})$ будем называть A-гармонической в $B_{m,n}$, если она удовлетворяет условию*

$$(Sp\Delta)U(Z)=0$$

в каждой точке $B_{m,n}$.

Для любой функции f голоморфной в $B_{m,n}$ и непрерывной на X, имеет место интегральная формула

$$f(Z)=\int_X f(U)P(Z,U)d\sigma(U)\ ,\ Z\in B_{m,n},$$

где $P(Z,U)$ – ядро Пуассона, имеющий вид

$$P(Z,U)=\left(\frac{\det\left(I^{(m)}-\langle Z,Z\rangle\right)}{\left|\det\left(I^{(m)}-\langle Z,U\rangle\right)\right|^2}\right)^{mn}.$$

Предложение 2. *Если $V,U\in X$ и $V=\varphi_P(U)$, то*

$$P(W,V)=P(Z,U)\cdot\frac{\left|\det\left(I^{(m)}-\langle P,U\rangle\right)\right|^{2mn}}{[\det\left(I^{(m)}-\langle P,P\rangle\right)]^{mn}}.$$

Предложение 3. *Ядро Пуассона $P(Z,U)$ является A-гармонической в матричном шаре $B_{m,n}$.*

Совокупность A -гармонических в B_{mn} функций, непрерывных на X обозначим через Ah.

Основным результатом параграфа 2.2 является следующая теорема.

Теорема 4. *Для любой непрерывной на X функции $f(U)$ интеграл Пуассона*

$$f(Z)=\int_X f(U)P(Z,U)d\sigma(U)\ ,\ Z\in B_{m,n}$$

представляет A- гармоническую функцию класса Ah.

Следствие. *Задача Дирихле, для любой функции f, непрерывной на X, единственным образом решается интегралом Пуассона.*

Так же в этом параграфе доказан принцип максимума для A-гармонической функции в матричном шаре.

Теорема 5. *Пусть $\rho(Z)$ – вещественная функция, а $\vartheta(Z)$ – решение уравнения в частных производных*

$$\left(Sp\Delta\right)\vartheta(Z)=\rho(Z).$$

Если $\rho(Z)>0$, то $\vartheta(Z)$ не может достигать в $B_{m,n}$ максимума, а если $\rho(Z)<0$, то минимума.

Теорема 6. *A- гармоническая функция класса Ah достигает максимума и минимума на многообразии X.*

В третьей главе диссертации, названной «Некоторые свойства A-гармонических функций и их применения», построены ортонормальные системы для матричного шара и его остова, с помощью этих систем разложены ядра Бергмана, Коши-Сеге и Пуассона, а также, с помощью этой системы, исследованы коэффициенты разложения ядра Пуассона .

В первом параграфе третьей главы получена ортонормальная система в матричном шаре и с помощью этой системы разложено ядро Бергмана.

Распишем элементы вектора $Z=(Z_1,...,Z_n)\in B_{mn}$ в виде точки пространства $\mathbb{C}^{nm^2}$:

$$z=\left\{z_{11}^{(1)},...,z_{1m}^{(1)},...,z_{m1}^{(1)},...,z_{mm}^{(1)};...;z_{11}^{(n)},...,z_{1m}^{(n)},...,z_{m1}^{(n)},...,z_{mm}^{(n)}\right\}\in\mathbb{C}^{nm^2}.$$

Через $z^{[\alpha]}$ будем обозначать вектор с компонентами

$$\sqrt{\frac{|\alpha|!}{\alpha_1!\alpha_2!...\alpha_{nm^2}!}}\left(z_{11}^{(1)}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(z_{1m}^{(1)}\right)^{\alpha_m}\cdots\left(z_{mm}^{(n)}\right)^{\alpha_{nm^2}},|\alpha|=\sum_{i=1}^{nm^2}\alpha_i,|\alpha|\geq 0.$$

Обозначим через $\varphi_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m}^{(i)}(Z),\ i=1,2,...,q(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)$ компоненты $z^{[\alpha]}$.

Теорема 7. *Для матричного шара $B_{m,n}$ система функций*

$$(\rho_\alpha)^{-\frac{1}{2}}\varphi_\alpha^{(i)}(Z),\ i=1,2,...,q(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m),\ |\alpha|=0,1,2,...$$

является ортонормальной системой, где

$$\rho_\alpha=\int\limits_{B_{m,n}}\left|\varphi_\alpha^{(i)}(Z)\right|^2\dot{Z}.$$

Теперь вычислим важную, для практических вопросов, константу ρ_α.

Утверждение 1. *Коэффициенты ρ_α можно вычислить по формуле*

$$\rho_\alpha=\frac{\pi^{nm^2}}{N(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,0,...,0)}\cdot\frac{1!2!...(mn-m-1)!}{m!(m+1)!...(mn-1)!}\prod_{j=1}^{m}\frac{(l_j+mn-m)!}{(l_j+mn)!},$$

где $l_j=\alpha_j+m-j$.

Теперь мы имеем для матричного шара $B_{m,n}$ ортонормальную систему функций

$$(\rho_\alpha)^{-\frac{1}{2}}\varphi_\alpha^{(i)}(Z),\ i=1,2,...,q(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m),\ \alpha=0,1,2,....$$

С помощью этой системы разложим ядро Бергмана для матричного шара $B_{m,n}$, имеющий вид

$$K(Z,W)=\frac{1}{V(B_{m,n})}\det{}^{-mn-m}(I^{(m)}-\langle Z,W\rangle),$$

где $V(B_{m,n})$ объем матричного шара.

Теорема 8. *Ядро Бергмана матричного шара $K(Z,W)$ относительно ортонормальных систем разлагается в ряд*

$$\sum_{\alpha}\sum_{i=1}^{q(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)}\frac{\varphi_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m}^{(i)}(Z)\overline{\varphi_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m}^{(i)}(W)}}{\rho_\alpha}. \tag{1}$$

Ряд (1) равномерно сходится при любых Z и W, лежащих в замыкании области

$$rI-\langle Z,Z\rangle>0,\ 0<r<1.$$

Следствие. *Из равенства (1), в частности, при $m=1$, получается известное нам разложение ядра Бергмана для единичного шара в $\mathbb{C}^n$.*

Во втором параграфе третьей главы получена ортонормальная система для остова матричного шара и доказано, что коэффициенты разложения ядра Пуассона с помощью этой системы образуют систему А-гармонических функций.

Рассмотрим вектор $u^{[\alpha]}$ с компонентами

$$\varphi_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m}^{(i)}(U),\ i=1,2,...,q(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m),$$

где $U\in X$.

Лемма 2. *Для остова матричного шара, система функций*

$$(\delta_\alpha)^{-\frac{1}{2}}\varphi_\alpha^{(i)}(U), i=1,2,...,q(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m), |\alpha|=0,1,2,...$$

является ортонормальной системой, где

$$\delta_\alpha=\int_X\left|\varphi_\alpha^{(i)}(U)\right|^2\dot{U}=\frac{V(X)}{N(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,0...0)}$$

и $V(X)$ – объем остова матричного шара.

Теперь используя полученную ортонормальную систему функций, заданных на X, разложим ядра Коши-Сеге и Пуассона. Далее докажем, что коэффициенты разложения ядра Пуассона образуют базис для A-гармонических функций класса Ah.

Ядро Коши-Сеге в матричном шаре, имеет вид

$$C(Z,U)=\frac{1}{V(X)}\det{}^{-mn}(I^{(m)}-\langle Z,U\rangle),$$

где $Z\in B_{m,n}$, $U\in X$.

Теорема 9. *Ядро Коши-Сеге матричного шара* $C(Z,U)$ *относительно ортонормальных систем разлагается в ряд в следующем виде:*

$$C(Z,U)=\frac{1}{V(X)}\det{}^{-mn}(I^{(m)}-\langle Z,U\rangle)=\sum_{\alpha\geq 0}\sum_{i,j=1}^{N(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m)}\varphi_{i,j}^{\alpha}(Z)\overline{\varphi_{i,j}^{\alpha}(U)}, \qquad (2)$$

причем ряд равномерно сходится для всех Z*, лежащих в замыкании области*

$$rI-\langle Z,Z\rangle>0,\ 0<r<1.$$

Если $f(U)$ – интегрируемая функция на X, то умножая обе части ряда (2) на $f(U)$ и интегрируя по $\dot{U}$, получаем

$$\int\limits_{\langle U,U\rangle=I}[\det(I-\langle Z,U\rangle)]^{-n}f(U)\dot{U}=\sum_{\alpha\geq 0}\sum_{i=1}^{q(\alpha)}a_{\alpha}^{i}\frac{\varphi_{\alpha}^{i}(Z)}{\sqrt{\delta_{\alpha}}},$$

где

$$a_{\alpha}^{i}=\frac{V(X)}{\sqrt{\delta_{\alpha}}}\cdot\int\limits_{\langle U,U\rangle=I}f(U)\overline{\varphi_{\alpha}^{i}(U)}\cdot\dot{U}.$$

Тогда интеграл

$$\int\limits_{\langle U,U\rangle=I}[\det(I-\langle Z,U\rangle)]^{-n}f(U)\dot{U}$$

представляет в области $B_{m,n}$ голоморфную функцию, разлагающуюся в этой области в ряд

$$\sum_{\alpha\geq 0}\sum_{i=1}^{q(\alpha)}a_{\alpha}^{i}\frac{\varphi_{\alpha}^{i}(Z)}{\sqrt{\delta_{\alpha}}}.$$

Далее рассмотрим разложение ядра Пуассона для матричного шара:

$$P(Z,U)=\frac{C(Z,U)C(U,Z)}{C(Z,Z)}=\frac{1}{V(X)}\left(\frac{\det(I^{m}-\langle Z,Z\rangle)}{\left|\det(I^{m}-\langle Z,U\rangle)\right|^{2}}\right)^{mn},$$

где $Z\in B_{m,n},\ U\in X$.

Из (2) и из леммы 2 получаем

$$\frac{1}{V(X)}\left(\frac{\det(I^{m}-\langle Z,Z\rangle)}{\left|\det(I^{m}-\langle Z,U\rangle)\right|^{2}}\right)^{mn}=\sum_{h}\sum_{i,j}^{N(h)}\Phi_{i,j}^{h}(Z)\overline{\varphi_{i,j}^{h}(U)}, \qquad (3)$$

причем, ряд (3) равномерно сходится для всех Z, лежащих в замыкании области $rI-\langle Z,Z\rangle>0,\ 0<r<1$.

Основным результатом параграфа 3.2 является следующая теорема.

Теорема 10. *Система функций*

$$\left\{\Phi_{i,j}^{h}(Z)\right\}$$

образует базис для A-гармонических функций класса Ah.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе изучены A-гармонические функции и их свойства в пространстве матриц. Основные результаты исследования состоят в следующем:

1. Получен инвариантный оператор Лапласа для матричного шара из пространства $\mathbb{C}^n[m \times m]$ и доказано что, он, в матричном круге первого типа, совпадает с оператором Хуа Ло-Кеном;

2. Показано, что ядро Пуассона является A-гармонической функцией и доказано, что в матричном шаре, для А-гармонических функций выполняется принцип максимума;

3. В классе A-гармонических функций, определенных в матричном шаре, решена задача Дирихле о продолжении А-гармоничности с остова;

4. В матричных областях вычислены некоторые важные интегралы и с их помощью определены объемы матричного шара и его остова;

5. Установлена связь между операторами Лапласа и Хуа Ло-Кена для классических областей первого типа из пространства $\mathbb{C}[m \times n]$;

6. Построена ортонормальная система, совпадающая с задачами аналитических продолжений в матричном шаре и его остове;

7. С помощью ортонормальной системы ядра Бергмана, Коши-Сеге и Пуассона разложены в равномерно сходящиеся ряды, и доказано, что коэффициенты разложения ядра Пуассона образуют базис для A-гармонических функций.

Полученные результаты применяются в многомерном комплексном анализе и в теории интегральных представлений.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREE PhD.03/30.12.2019.FM.55.01 URGENCH STATE UNIVERSITY

NUKUS STATE PEDAGOGICAL INSTITUTE

KHALKNAZAROV ASKAR MAXSETBAEVICH

A-HARMONIC FUNCTIONS IN MATRIX DOMAINS AND THEIR PROPERTIES

01.01.01-Mathematical analysis

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Urgench - 2021

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number № B2020.2.PhD/FM457

Dissertation has been prepared at Nukus state pedagogical institute.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website of Scientific Council (www.ik-mat.urdu.uz) and the "ZiyoNet" Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Khudayberganov Gulmirza** Doctor of physical and mathematical sciences, professor
Official opponents:	**Djumabaev Davlatbay Xalillaevich** Doctor of physical and mathematical sciences
	Ibragimov Zafar Shavkatovich Doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences, docent
Leading organization:	**Turin Polytechnic University in Tashkent**

Defense will take place on 2 novber 2021 at 14:00 at the meeting of Scientific Council PhD.03/30.12.2019.FM.55.01 at Urgench State University. (Address: 14 Kh. Olimjan str., Urgench city, 220100, Uzbekistan, Ph.: (+99862) 224-66-11, fax: (+99862) 224-67-00, e-mail: ik_mat.urdu@umail.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource center at Urgench State University (registered for No. D-270). (Address: 14 Kh. Olimjan str., Urgench city, 220100, Uzbekistan, Ph.: (+99862) 224-66-11, fax: (+99862) 224-67-00, ursubox@gmail.com).

Abstract of dissertation sent out on 18 october 2021 year.
(Mailing report No.1 on 18 october 2021 year).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI

B.I.Abdullaev
Chairman of scientific council
on award of scientific degree,
D.F-M.S.

A.A.Atamuratov
Scientific secretary of scientific council
on award of scientific degree,
C. F-M.S.

S.A.Imomkulov
Chairman of scientific Seminar under Scientific
Council on award of scientific degree,
D.F-M.S.

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research work is obtaining an invariant Laplace operator in the matrix ball, research A-harmonic functions, solving the Dirichlet problem, finding the orthonormal system in the matrix ball and its skeleton, and using these systems to expand the Bergman and Poisson kernels.

The object of the research work is a classical domain of the first type, a matrix ball in the space of rectangular matrices, Bergman and Poisson kernels, series.

Scientific novelty of the research work is as follows:

the invariant Laplace operator is obtained for the matrix ball;

studied properties of A-harmonic functions in the matrix ball;

solved the Dirichlet problem in the matrix ball;

calculated the volume of the matrix ball and its skeleton;

a connection has been established between the Laplace and Hua Luogeng operators for classical domains of the first type;

constructed an orthonormal system in the matrix ball and its skeleton;

proved that the expansion coefficients of the Poisson kernel form a system of A-harmonic functions.

Implementation of the research results. Based on the results obtained in the study of A-harmonic functions in the space of matrices and their properties:

The invariant Laplace operator obtained for the matrix ball was used in the foreign project 11-01-00852-a "Multidimensional deductions in complex analysis, their applications in static physics and theories of difference and differential equations" (Reference No. 975 of February 16, 2021, Siberian Federal University). The application of scientific results made it possible to solve problems in multidimensional complex analysis;

Orthonormal systems obtained for the matrix ball and its skeleton were used in the foreign project 18-51-41011 "Multidimensional complex analysis" (Reference No. 975 of February 16, 2021, Siberian Federal University). The application of these results made it possible to study holomorphic and harmonic functions in the corresponding spaces.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 75 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (часть I; part I)

1. Г. Худайберганов, А. Халкназаров. «Инвариантный оператор Лапласа в матричном шаре». // Журнал Сибирского Федерального университета, 2012, 5 (2). с. 283-288. (№59. Scopus. IF=0.470)

2. А. Халкназаров. «Объем матричного шара в пространстве матриц». //Узбекский математический журнал. 2012 г. №3. с. 135-138. (01.00.00; №6)

3. Г. Худайберганов, А. Халкназаров. «Ортонормальная система в матричном шаре». //Узбекский математический журнал. 2014 г. №4. с. 164-170. (01.00.00; №6)

4. Г. Худайберганов, А. Халкназаров. «Система А-гармонических функций в матричном шаре». //Вестник НУУз. 2018 г. №2/1. с. 100-107. (01.00.00; №8).

5. Г. Худайберганов, А. Халкназаров. Ж. Абдуллаев. «Об операторах Лапласа и Хуа Ло-Кена». //Известия вузов. Математика, 2020. №3. с. 74-79. (№22. Scopus. IF=0.741).

II бўлим (часть II; part II)

6. А. Халкназаров, Ш. Рузметов. Определение гармонической функции в матричном шаре. // Труды научной конференции «Проблемы современной математики». 22-23 апрель, 2011. Карши. С. 241-243.

7. Г. Худайберганов, А. Халкназаров. Ортонормальная система в матричном шаре. // Материалы международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий – Аль-Хорезми 2012» 19-22 декабрь, 2012. Ташкент. С. 140-141.

8. А. Халкназаров. Ортонормальная система и ядро Бергмана в матричном шаре. // Сборник материалов республиканской научно-практической конференции. 11-12 декабрь, 2013. Нукус. С. 66-67.

9. Г. Худайберганов, А. Халкназаров. Гармонические функции в матричном шаре. // «Анализнинг долзарб муаммолари» илмий конференция материаллари. 22-23 апрель, 2016. Карши. Б. 57-58.

10. А. Халкназаров. Объемы шаров в пространстве матриц. // «Фан ва таълим-тарбиянинг долзарб масалалари» мавзусидаги Республика илмий-назарий ва амалий анжуман материаллари Нукус. 2016. 120-122 б.

11. Г. Худайберганов, А. Халкназаров. О задаче Дирихле в матричном шаре. // Republic scientific conference with participation of foreign scientists “Modern problems of dynamical systems and their applications”, May 1-3, 2017, Tashkent. p. 41-42.

12. Г. Худайберганов, А. Халкназаров. Система А-гармонических функций в матричном шаре. // Международная конференция.

«Математический анализ и его применение к математической физике». 17-20 сентябрь. 2018. Самарканд. С. 36-37.

13. А. Халкназаров. Объем остова матричного шара. // «Ҳозирги замон аниқ ва техник фанлар муаммолари ва уларнинг ечимлари» мавзусидаги Республика илмий-назарий анжуман материаллари. 2018. Нукус. 20-21 б.

14. Г. Худайберганов, А. Халкназаров, Ж. Абдуллаев. On Hua Lo-Ken and Laplace operators. // Science – Technology – Education – Mathematics – Medicine. Abstracts of the Joint International Conference. May 13–17. 2019. Tashkent. p. 87-88.

15. А. Халкназаров. О вычислении коэффициентов ортонормальной системы в пространстве матриц. // Республиканская научная конференция «Актуальные проблемы и применения анализа». 4-5 октября 2019 г., Карши. С. 48-49.

16. А. Халкназаров. Ортонормальная система на остове матричного шара. // Frontier in mathematics and computer science. Abstracts of the International Online Conference (October 12-15. 2020. Tashkent). С.158-160.

17. Г. Худайберганов, А. Халкназаров, Ж. Абдуллаев. Об операторах Лапласа и Хуа Ло Кена. // Республиканская научная конференция «Современные методы математической физики и их приложения» (17-18 ноябрь. 2020. Ташкент). С. 63-65.

18. А. Халкназаров. Поведение интеграла Пуассона на границе матричного шара. // Материалы международной научно-практической онлайн- конференции «Теории функций одного и многих комплексных переменных» (26-28 ноября. 2020. Нукус). С. 93-95.

Автореферат Урганч давлат университетиноширлик бўлимида
таҳрирдан ўтказилди (14.10.2021 йил)

УрДУ матбаа бўлими матбаа фаолиятини бошлагани
ҳақида ваколатли давлат органини хабардор қилиш тўғрисидаги
Тасдиқнома (№3802-835f-ad22-c709-fbd1-1129-1986) асосида фаолият
юритади.

Босишга рухсат этилди: 15.10.2021
Офсет қоғози. Қоғоз бичими 60х84 $^{1}/_{16}$.
«Times New Roman» гарнитурада рақамли
босма усулида босилди. Адади 60. Буюртма №.35
Шартли босма табағи 2,5.
УрДУ босмахонасида чоп қилинди.
Манзил: 220110. Урганч шаҳри,
Ҳ. Олимжон кўчаси, 14-уй.
Телефон: (0-362)-224-66-01.