ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

ХУДОЙБЕРГАНОВ МИРЗОАЛИ ЎРАЗАЛИЕВИЧ

КВАЗИЧИЗИҚЛИ ГИПЕРБОЛИК СИСТЕМАЛАР УЧУН АЙИРМАЛИ СХЕМАЛАР ТУРҒУНЛИГИНИ ТАДҚИҚ ҚИЛИШ

01.01.03 – Ҳисоблаш математикаси ва дискрет математика
(физика-математика фанлари)

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ (DSc) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2021

УДК: 519.633

Докторлик (DSc) диссертацияси автореферати мундарижаси
Оглавление автореферата докторской (DSc) диссертации
Content of the abstract of the doctoral (DSc) dissertation

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

ХУДОЙБЕРГАНОВ МИРЗОАЛИ ЎРАЗАЛИЕВИЧ

КВАЗИЧИЗИҚЛИ ГИПЕРБОЛИК СИСТЕМАЛАР УЧУН АЙИРМАЛИ СХЕМАЛАР ТУРҒУНЛИГИНИ ТАДҚИҚ ҚИЛИШ

01.01.03 – Ҳисоблаш математикаси ва дискрет математика
(физика-математика фанлари)

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ (DSc) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2021

Фан доктори (Doctor of Science) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2018.1.DSc/FM111 рақам билан рўйхатга олинган.

Докторлик диссертацияси Мирзо Улугбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://ik-fizmat.nuu.uz/) ва «ZIYONET» таълим ахборот тармоғида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий маслаҳатчи:	**Алоев Рахматилло Джураевич** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Темирбеков Нурлан Муханович** физика-математика фанлари доктори, профессор, Қозоғистон Республикаси МФА мухбир аъзоси
	Ҳаётов Абдулло Раҳмонович физика-математика фанлари доктори, профессор
	Нормурадов Чори Бегалиевич физика-математика фанлари доктори, профессор
Етакчи ташкилот:	***Жаҳон иқтисодиёти ва дипломатия университети***

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 рақамли Илмий кенгашнинг «2» декабрь 2021 йил соат 16:00 даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Докторлик диссертацияси билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (103 рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Диссертация автореферати 2021 йил «18» ноябрь куни тарқатилди.
(2021йил «03» 11.2021 даги 9 рақамли реестр баённомаси).

А.Р. Марахимов
Илмий даражалар берувчи илмий
кенгаш раиси, т.ф.д., профессор

З.Р. Рахмонов
Илмий даражалар берувчи илмий
кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.д.

Х.М.Шадиметов
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш ҳузуридаги Илмий семинар
раиси, ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (докторлик диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида гиперболик системаларга қўйилган аралаш масалаларни сонли ечиш учун айирмали схемаларни қуриш ва тадқиқ этишга бағишланган изланишлар долзарб ва муҳим бўлиб, сейсмология, геологик қидирув, гидрология ва акустика каби соҳаларда кенг қўлланилади. Шу нуқтаи назардан, ностационар ва сиқилувчи газнинг товуш тезлигидан юқори тезликдаги стационар оқими тенгламалари учун қўйилган аралаш масалаларни сонли ечиш усулларини ишлаб чиқиш, уларнинг турғунлигини ва яқинлашишини исботлаш ҳисоблаш математикасининг муҳим вазифаларидан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда дунёда ишлаб чиқариш, нефть-газ, шаҳарсозлик, тиббиёт каби соҳаларга замонавий технологияларни жорий этиш, хусусан, илмий-техник имкониятлар суръатини ошириш, фан ва ишлаб чиқариш интеграциясини кенгайтириш, квазичизиқли гиперболик системаларга қўйилган аралаш масалалар учун адекват ҳисоблаш моделларини қуришда айирмали схемалар назариясини такомиллаштириш бўйича кўплаб илмий тадқиқотлар олиб борилмоқда. Бунда аралаш масалалар учун айирмали схема қуриш ва уларнинг экспоненциал турғунлигини исботлаш муҳим рол ўйнайди. Шу сабабли квазичизиқли гиперболик системани сонли ечиш учун айирмали схемалар қуриш, айирмали схема яқинлашишини исботлаш ва уларни амалий масалаларга қўллаш мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий тадбиқига эга бўлган муҳандислик, биотиббиёт, геофизика ва акустика масалаларининг сонли-аналитик ечиш усулларини ишлаб чиқиш каби долзарб йўналишларга катта эътибор қаратилмоқда. Хусусан, симметрик гиперболик тенгламалар учун аралаш масалаларнинг сонли ечиш методларини яратиш ва турғунлигини исботлаш бўйича муҳим натижаларга эришилди. «Функционал анализ, алгебра, дифференциал тенгламалар, математик физика, математик моделлаштириш, ҳисоблаш математикаси ва дискрет математика, эҳтимоллар назарияси ва математик статистика» устувор йўналишлар бўйича халқаро стандартлар даражасидаги илмий изланишлар олиб бориш ЎзР ФА В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятининг асосий вазифаларидан бири ҳисобланади[1]. Қарор ижросини таъминлашда ўзгармас коэффициентли чизиқли икки ўлчовли аралаш масала учун айирмали схема қуриш ва унинг экспоненциал турғунлигини тадқиқ этиш муҳим аҳамиятга эга.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПҚ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги, 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги, 2017 йил 20 апрелдаги ПҚ-2909-сон «Олий таълим тизимини

---

[1] Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2020 йил 7 майдаги "Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий - тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида"ги ПҚ-4708-сон қарори.

янада ривожлантириш чора чора-тадбирлари тўғрисида»ги, 2018 йил 27 апрелдаги ПҚ-3682-сон «Инновацион ғоялар, технологиялар ва лойиҳаларни амалиётга жорий қилиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги, 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожлантиришнинг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи[2].

Айирмали схемаларни қуриш ва такомиллаштириш, турғунликни исботлаш ва айирмали масала ечимнинг дастлабки дифференциал масала ечимига яқинлашиш бўйича илмий изланишлар дунёнинг етакчи илмий марказлари ва олий ўқув юртлари, жумладан, Arizona University, University of Maryland, University of California at San-Diego, University of Texas at Austin, University of Michigan, University of North Caroline (АҚШ), University of Malaga (Испания), Delft University (Нидерландия), Institute of mathematics of Jena University, Institute of mathematics of University Mannheim, Technische Universität Braunschweig (Германия), Universita degli Studi di Roma La Sapienza, Universita della Basilicata (Италия), University of Oslo (Норвегия), Katholieke Universiteit, Leuven (Белгия), Universidad de Zaragoza, Universite de Nantes, Laboratoire de Mathematiques, Jean Leray, Universite de Toulouse, Université Joseph Fourier (Франция), Mathematical institute of Serbian Academy of Sciences and Arts (Сербия), Babeş-Bolyai University (Румыния), Kingston University London, Cambridge University (Англия), Санкт-Петербург ахборот технологиялари, механика ва оптика Миллий тадқиқот университетида, Россия фанлар академиясининг математика институтининг Сибирь бўлими, Москова физика-техника институти, Россия фанлар академияси математика институти, Москва, Санкт-Петербург, Новосибирск давлат университетларида, Россия фанлар академиясининг ҳисоблаш математикаси институти, Россия фанлар академиясининг гидродинамика институтида (Россия) олиб борилмоқда.

Квазичизиқли тенгламалар системасининг узлукли ечимлари учун айирмали схемалар қуриш, уларнинг турғунлигини ва яқинлашишини исботлашга оид жаҳонда олиб борилган тадқиқотлар натижасида бир қатор ноанъанавий илмий натижалар олинган: айирмали схемалар учун “коэффициентларни музлатиш” усули асосланган, турғунликни тадқиқ

---

[2] Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий тадқиқотлар шарҳи: Journal of Approximation Theory, Applied Mathematics and Computation, Journal of Computational and Applied Mathematics http://www.journals.elsevier.com/mathematics; Calcolo, Numerical Algorithms, BIT Numerical Mathematics, Сибирский журнал вычислительной математики, Журнал вычислительной математики и математической физики, http://www.springer.com/mathematics манбалар асосида ишлаб чиқилган.

этишнинг энергетик методи такомиллаштирилган (Россия Фанлар академиясининг ҳисоблаш математикаси институти); монотонликнинг характеристик мезонлари асосида гиперболик тенглама ва системалар учун ноаниқ коэффициентлар усулига асосланган юқори тартибли чизиқсиз, монотон схемаларни қуриш алгоритми ишлаб чиқилган (РФА лойиҳалашни автоматлаштириш институти); ҳаракатланувчи соҳада ўзгармас коэффициентли гиперболик системалар учун энергетик усулни қўллаб аралаш масала ечими учун априор баҳо олинган. Ўзгарувчиларни муайян алмаштиришлардан сўнг ўзгарувчан коэффициентли гиперболик тенгламалар системаси белгиланган. Координата ўқлари бўйича бўлаклар жамлаш (Summation-by-Parts) оператори ёрдамида турғун айирмали схемалар қурилган (Швеция, Linköping University); ўзгармас ва ўзгарувчан коэффициентли бир жинсли чегаравий масалалар учун назария яратилган, муайян чегаравий масалалар учун қатъий турғунлик назарияси ишлаб чиқилган (Adelphy College, Garden City, Brookhaven National laboratories, Upton, Нью-Йорк, АҚШ; University of Uppsala); бир ўлчовли чизиқсиз гиперболик типдаги тенгламалар учун тўғри ва тескари масалаларнинг корректлиги тадқиқ этилган (Logo Alpen Adria Universität); диссипатив чегаравий шартли икки ўлчовли чизиқли гиперболик системаларнинг (ўзгарувчан коэффициентли, кичик ҳадлар бўлган ҳолда) турғун ечимларини сонли ҳисоблаш учун Ляпунов функцияси қурилган ва априор баҳо олинган (University Pierre et Marie Curie, Париж, Universitè catholique Louvain, Louvain-La-Neuve); параболик ва гиперболик тенглама ва тенгламалар системаси учун консерватив айирмали схемалар қурилган (Fudan University, Shanghai); махсус кўринишдаги ифодаланадиган чизиқсиз гиперболик системалар учун турғунлиги ҳақидаги теоремани исботлаш дискрет шаклдаги энергиянинг сақланиш қонунини қуришга асосланган адекват ҳисоблаш модели қурилган (Россия фанлар академияси математика институти, Новосибирск давлат университети, Ўзбекистон Миллий университети).

Дунёда гиперболик системалар учун адекват ҳисоблаш моделлари қуриш бўйича қатор устувор йўналишларда илмий тадқиқот ишлари олиб борилмоқда, жумладан, чизиқли икки ва ундан ортиқ ўлчовли, ўзгарувчан коэффициентли гиперболик системаларга қўйилган аралаш масаланинг турғун ечимларини тақрибий ҳисоблаш методларини яратиш, квазичизиқли гиперболик тенгламалар системасига қўйилган аралаш масаланинг сонли ечимини топиш учун қурилган методларнинг турғунлигини тадқиқ этиш.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Турғунлик айирмали схемаларнинг асосий хоссаларидан бири бўлиб, мустақил тадқиқот соҳаси ҳисобланади. Ҳозирги кунда математик физиканинг чизиқли масалалари учун айирмали схемалар назарияси етарлича тўлиқ ишлаб чиқилган. Ушбу назария асосларига бағишланган ишлар қаторида А.А.Самарский ва А.В.Гулин, С.К.Годунов, Р.Рихтмайер, К.Мортон, Ю.И.Шокин, З.И.Федотов, шунингдек В.С.Рябенький, А.Ф.Филиппов, Е.Г.Дьяконов, В.Б.Андреев, Ю.П.Попов, Г.И.Марчук, А.М.Блохин ва Р.Д.Алаев каби олимларнинг ишларини таъкидлаб ўтиш мумкин. А.А.Самарский ва А.В.Гулин ишларида айирмали схемаларнинг турғунлик назарияси операторли айирмали схемалар асосида қурилган. Монотон айирмали схемалар гиперболик типдаги тенгламалар системасини сонли ечишда муҳим роль ўйнайди. Гиперболик системаларнинг монотонлик каби хоссалари таҳлилига Я.А.Холодов, П.С.Уткин, А.С.Холодов, И.В.Цыбулин ишлари бағишланган.

Чизиқсиз гиперболик системалар учун қўйилган масалаларнинг тадқиқи В.Л.Рождественский, Н.Н.Яненко, F.T.Eleuterio, А.Г.Куликовский, Н.В.Погорелов, А.Ю.Семенов, John A.Trangenstein, K.W.Morton, D.F.Mayers, R.J.LeVeque, N.Samira, J.Nordström каби олимларнинг илмий ишларида келтирилган. Н.Н.Яненко илмий мактаби билан боғлиқ дифференциал яқинлашиш усули айирмали схеманинг қатор хоссаларини тадқиқ этишда фойдаланилади. Навбатдаги турғунлик назарияси аралаш масалалар учун Крайс (H.O.Kreiss) томонидан яратилган. О.А.Ковыркина ва В.В.Остапенколарнинг ишларида TVD схемаларда ечим силлиқ бўлса ҳам ечимнинг экстремумларида уларнинг аниқлиги биринчи тартибгача тушиши исботланган.

Аппроксимация тартиби юқори бўлган ENO ва WENO схемаларни қуриш, турғунлигини тадқиқ қилиш C.B.Macdonald, M.Mohammad, S.J.Ruuth, M.Lahooti, A.Pishevar, П.В.Булат, К.Н.Волков ва Е.В.Ворожцов ишларида ўрганилган ва ривожлантирилган. Бундай схемалардан фойдаланиш кучсиз ва кучли узилишлар бўлган аниқ ва монотон ечимларни олиш имконини берган. G.Bastin, J.-M.Coron, A.Diagne ишларида гиперболик дифференциал тенгламалар системасига қўйилган аралаш масала ечимлари учун Ляпунов функциясини қуриш асосида ечимнинг турғунлиги тадқиқ этилган. Республикамизда гиперболик тенгламаларга қўйилган аралаш масалаларни Монте Карло усулларини қўллаб сонли ечиш усуллари билан А.С.Расулов, М.Б.Бакоев ва уларнинг шогирдлари шуғулланишган. Д.Утебаев ностационар тенгламалар учун юқори тартибли аниқликдаги айирмали схемалар қурган ва уларнинг аниқлигини баҳолаган. Р.Д.Алоев симметрик гиперболик системалар учун адекват ҳисоблаш моделларини яратиб, айирмали схемаларнинг турғунлигига чегаравий шартларнинг таъсирини ўрганган.

Диссертация мавзусининг диссертация бажарилаётган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Ўзбекистон Миллий университети илмий-тадқиқот режасининг ОТ-Ф4-28 «Гиперболик системалар учун адекват ҳисоблаш моделларини қуриш» мавзусидаги илмий тадқиқот лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади квазичизиқли гиперболик системалар учун адекват ҳисоблаш моделларини қуришдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

ўзгармас коэффициентли чизиқли аралаш масала учун айирмали схема қуриш;

ўзгармас коэффициентли аралаш масала учун айирмали схеманинг экспоненциал турғунлигини исботлаш;

ўзгармас коэффициентли чизиқли аралаш масала учун айирмали схема ечими яқинлашишини исботлаш;

ўзгарувчан коэффициентли аралаш масала учун айирмали схема қуриш;

ўзгарувчан коэффициентли аралаш масала учун айирмали схеманинг экспоненциал турғунлигини исботлаш;

ўзгарувчан коэффициентли аралаш масала учун айирмали схеманинг яқинлашишини исботлаш;

квазичизиқли гиперболик системани сонли ечиш учун айирмали схема қуриш;

квазичизиқли гиперболик системани сонли ечиш учун айирмали схема турғунлигини исботлаш.

Тадқиқотнинг объекти чизиқли ва квазичизиқли гиперболик системаларга қўйилган аралаш масалалар, уларни сонли ечиш учун айирмали схемалардан иборат.

Тадқиқотнинг предмети энергия интегралининг дискрет аналоги, Лакс теоремаси ва квадратик формалардан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида айирмали схемалар назарияси, ҳисоблаш математикаси, функционал анализ, дискрет аргументли функциялар, дифференциал тенгламалар назариясидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

ўзгармас коэффициентли гиперболик системаларга қўйилган аралаш масаланинг турғун ечимлари учун айирмали схема қурилган;

ўзгармас коэффициентли гиперболик системаларга қўйилган аралаш масала учун қурилган айирмали схеманинг экспоненциал турғунлиги исботланган;

ўзгармас коэффициентли гиперболик системаларга қўйилган аралаш масала учун айирмали схема ечимининг дастлабки дифференциал масала ечимига яқинлашиши асосланган;

ўзгарувчан коэффициентли гиперболик системаларга қўйилган аралаш масала турғун ечимлари учун айирмали схема қурилган;

ўзгарувчан коэффициентли гиперболик системаларга қўйилган аралаш масала учун айирмали схеманинг экспоненциал турғунлиги исботланган;

ўзгарувчан коэффициентли гиперболик системаларга қўйилган аралаш масала учун айирмали схеманинг ечими дифференциал масала ечимига яқинлашиши асосланган;

квазичизиқли гиперболик системага қўйилган аралаш масалани сонли ечиш учун айирмали схема қурилган;

квазичизиқли гиперболик системага қўйилган аралаш масалани сонли ечиш учун қурилган айирмали схемаларнинг турғунлиги исботланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари қуйидагилардан иборат:

гиперболик тенгламалар системасига қўйилган аралаш масалаларни сонли ечиш учун айирмали схемалар қурилган;

гиперболик тенгламалар системасига қўйилган аралаш масалаларни тақрибий ечиш дастурий таъминоти яратилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги ҳисоблаш математикаси, функционал анализ ва айирмали схемалар назарияси усулларидан фойдаланилганлиги ҳамда математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги билан асосланган. Барча хулосалар компьютер ёрдамида ҳисоблаш эксперименти натижалари билан тасдиқланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти квазичизиқли гиперболик системалар учун айирмали схемалар қурилганлиги ва уларнинг турғунлигининг исботланганлиги билан изоҳланади.

Диссертациянинг амалий аҳамияти қурилган айирмали схемалар квазичизиқли гиперболик системалар билан тавсифланувчи амалий масалаларни сонли ечишга хизмат қилиши билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Гиперболик системаларга қўйилган аралаш масалани сонли ечиш учун қурилган айирмали схемаларнинг турғунлиги ва яқинлашиши бўйича олинган илмий натижалар асосида:

чизиқли гиперболик системалар учун қўйилган аралаш масаланинг турғун ечимларини топиш учун қурилган ўзгарувчиларни ажратишга асосланган айирмали схемалардан AP051321026 – “Ишқаланиш коэффициентининг (хотира билан) частотали боғлиқлигини эътиборга олган ҳолда эластик-деформацияланувчи ғовак муҳит динамикасини математик моделлаштириш” грант лойиҳасида биржинсли бўлмаган ғовак муҳитларда сейсмик тўлқинларнинг тарқалиш муаммосини сонли-аналитик моделлаштириш ва тадқиқ этишда қўлланилган (Қозоғистон Республикаси таълим ва фан вазирлигининг фан комитети Ахборот ва ҳисоблаш технологиялари институтининг 2021 йил 13 апрелдаги №01-07/198-сонли маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши сонли ечимнинг модел масаланинг аниқ ечимига яқинлашишини тасдиқлаш имконини берган;

гиперболик системалар бир синфи учун қурилган айирмали схемалар ва квазичизиқли гиперболик системалар учун қурилган адекват ҳисоблаш моделларидан 01-01-17-1921FR грант лойиҳасида дифференциал масалаларни ечишда қўлланилган (Путра университети (Малайзия)нинг 2020 йил 10 январдаги маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши дифференциал масалаларнинг сонли ечимини топиш имконини берган;

квазичизиқли гиперболик системалар учун қурилган айирмали схемалардан PPP/USG-0216/FST/30/15316 “Ночизиқли интеграл тенгламаларни ечишнинг Ньютон-Канторов методи” грант лойиҳасида интеграл тенгламаларни сонли ечишда қўлланилган (Ислом Фан университети (Малайзия)нинг 2019 йил 29 апрелдаги маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши интеграл тенгламаларнинг сонли ечимини топиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур диссертация тадқиқот натижалари 17 та илмий-амалий анжуманларда, шу жумладан, 6 та халқаро ва 11 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилиниши. Диссертация мавзуси бўйича жами 43 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг диссертациялар асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 14 та мақола, жумладан, 5 таси хорижий ва 9 таси республика журналларида нашр этилган. 1 та ЭҲМ учун яратилган дастурий воситаларни қайдлаш гувоҳномаси олинган.

Диссертациянинг ҳажми ва тузилиши. Диссертация кириш қисми, тўртта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 184 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устивор йўналишларига мослиги кўрсатилган, диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий тадқиқотларнинг натижалари шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси, ишнинг мақсад ва вазифалари, тадқиқот объекти ва предмети, илмий янгилиги ва тадқиқотнинг тадбиқий натижалари, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши ҳақидаги маълумотлар берилган.

Диссертациянинг **“Бурчакли соҳада тўлқин тарқалиш тенгламаларга қўйилган аралаш масала учун ҳисоблаш моделлари”** деб номланган биринчи боби бурчакли соҳада тўлқин тарқалиш тенгламаларига қўйилган аралаш масала сонли ечимини топиш учун адекват ҳисоблаш моделларини қуришга бағишланган. Дастлабки икки параграфда айирмали схемалар назариясининг бошланғич тушунчалари ва қаралаётган дифференциал масала учун олинган натижалар ҳақида маълумот берилган.

$R_+^3 = \{\ (t,x,y)|\ t,x,y>0\}$ соҳада

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0 \qquad (1)$$

тенгламани $\mathrm{x}=0,\ (t,y)\in R_+^2$ чегарада:

$$u_t - a_1 u_x - b_1 u_y = 0 \qquad (2)$$

$y=0,\ (t,x)\in R_+^2$ чегарада:

$$u_t - a_2 u_x - b_2 u_y = 0 \qquad (3)$$

чегаравий шартлар ва $t=0,\ \ (x,y)\in R_+^2$ да

$$u(0,x,y)=\varphi(x,y),\ \ u_t(0,x,y)=\psi(x,y) \qquad (4)$$

бошланғич шартлар билан берилган аралаш масалани қараймиз. Бу ерда $a_1,b_1,a_2,b_2\in R$ ва $r\to 0$ бўлганда $u_t = o(r^{-1/2}),\ u_x = o(r^{-1/2}), u_y = o(r^{-1/2}), r=\sqrt{x^2+y^2}$.

Қуйидаги шартлар бажарилганда

1) $x=0$ бўлганда $a_1>0, |b_1|<1;$

2) $y=0$ бўлганда $a_2>0, |b_2|<1;$

яъни (2) ва (3) чегаравий шартлар учун Лопатинский текис шарти бажарилганда ξ,θ координаталарга ўтиб $\left(x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ \xi=\ln r\right)$ (1)-(4)

аралаш масала ечими учун қуйидаги априор баҳони олиш имконини берувчи баҳо олинган:

$$\|u(t)\|^2_{W_2^1(R_+^2)} \le M_1 e^{M_2 t} \|u(0)\|^2_{W_2^1(R_+^2)}, \tag{5}$$

бу ерда $M_1, M_2 > 0$ ва $\|u(t)\|^2_{W_2^1(R_+^2)} = \iint\limits_{R_+^2} \left\{u^2 + u_t^2 + u_x^2 + u_y^2\right\} dxdy$.

Энди (1)-(4) аралаш масалани сонли ечиш учун (5) энергия интеграли дискрет аналогини олиш имконини берувчи айирмали схемани қурамиз ва ушбу айният асосида қурилган айирмали схема турғунлигини исбот қиламиз. Биринчи бобнинг учинчи параграфида сонли ечиш учун қурилган айирмали схема турғунлиги ҳақидаги теорема исбот қилинган ва сонли ечимни ҳисоблаш алгоритми келтирилган.

(1)-(4) аралаш масалани аппроксимация қилувчи айирмали схемани қуриш учун энергия интегралини қуйидаги икки шаклда ёзиб оламиз:

$$e^{\xi} A_0 \frac{\partial Y}{\partial t} - \frac{\partial [B_0 Y]}{\partial \theta} - C_0 \frac{\partial Y}{\partial \xi} + \left[Q_0 - \mu C_0 + \frac{d}{d\theta} B_0\right] Y = 0, \tag{6}$$

$$e^{\xi} A_0 \frac{\partial Y}{\partial t} - B_0 \frac{\partial Y}{\partial \theta} - C_0 \frac{\partial Y}{\partial \xi} + [Q_0 - \mu C_0] Y = 0. \tag{7}$$

(6) ва (7) тенгликларни ўнг томондан $D = diag(y_1, y_2, y_3)$ матрицага кўпайтириб, олинган тенгликларни қўшамиз

$$e^{\xi} D A_0 \frac{\partial Y}{\partial t} + e^{\xi} D A_0 \frac{\partial Y}{\partial t} - D \frac{\partial [B_0 Y]}{\partial \theta} - D B_0 \frac{\partial Y}{\partial \theta} - D C_0 \frac{\partial Y}{\partial \xi} -$$

$$- D C_0 \frac{\partial Y}{\partial \xi} + D[Q_0 - \mu C_0 + \frac{d}{d\theta} B] Y + D[Q_0 - \mu C_0] Y = 0. \tag{8}$$

$t > 0, (\theta, \xi) \in \Pi$ соҳада t, θ, ξ ўқлар бўйича мос равишда $\Delta t = \Delta_t$, $\Delta\theta = \Delta_\theta$, $\Delta\xi = \Delta_\xi$ қадамлар билан тўр қурамиз. Қуйидаги белгилашларни ва нормани киритамиз: $Y_{ij}^n = Y(n\Delta_t, i\Delta_\theta, j\Delta_\xi)$, $i = \overline{0, I}$, $n, |j| = 0, 1, \ldots$; $\|Y^n\|^2_{A_0} = \Delta_\theta \Delta_\xi \sum\limits_{i=0}^{I-1} \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} e^{\xi j} (A_0 Y_{ij}^n, Y_{ij}^n)$, $L = (1, 1, 1)^T$, $\mu = 0.5$.

Ушбу белгилашлардан фойдаланиб, (8) тенгликни аппроксимация қилувчи айирмали схемани қурамиз:

$$e^{\xi j} D_{ij}^n (\mathrm{A}_0)_i \frac{Y_{ij}^{n+1} - Y_{ij}^n}{\Delta_t} + e^{\xi j} D_{ij}^{n+1} (\mathrm{A}_0)_i \frac{Y_{ij}^{n+1} - Y_{ij}^n}{\Delta_t} - D_{ij}^n \frac{(\mathrm{B}_0 Y)_{i+1j}^n - (\mathrm{B}_0 Y)_{ij}^n}{\Delta_\theta} -$$

$$- D_{i+1j}^n (\mathrm{B}_0)_{i+1} \frac{Y_{i+1j}^n - Y_{ij}^n}{\Delta_\theta} - D_{ij}^n (\mathrm{C}_0)_i \frac{Y_{ij+1}^n - Y_{ij}^n}{\Delta_\xi} - D_{ij+1}^n (\mathrm{C}_0)_i \frac{Y_{ij+1}^n - Y_{ij}^n}{\Delta_\xi} +$$

$$+ D_{ij}^n \left[2\mathrm{Q}_0 - 2\mu \mathrm{C}_0 + \frac{d}{d\theta} \mathrm{B}_0\right]_i Y_{ij}^n = 0, \quad \mathrm{i} = \overline{0, \mathrm{I\text{-}1}}, |j| = 0, 1, 2, .., n = \overline{0, \mathrm{N\text{-}1}}, \tag{9}$$

$i = 0$, $|j| = 0, 1, 2, \ldots$ бўлганда $(y_1)_{0j}^n - a_2 (y_2)_{0j}^n - b_2 (y_3)_{0j}^n = 0$, (10)

$i = I$, $|j| = 0, 1, 2, \ldots$ бўлганда $(y_1)_{Ij}^n + a_1 (y_2)_{Ij}^n - b_1 (y_3)_{Ij}^n = 0$, (11) ва $n = 0$, $i = 0,1,...,I$, $\left|j\right| = 0,1,2,\dots$ бўлганда

$$Y_{ij}^{0} = \left(e^{\frac{1}{2}\xi_j}\tilde{\psi}(\xi_j,\theta_i),\ e^{\frac{1}{2}\xi_j}\tilde{\varphi}'_{\theta}(\xi_j,\theta_i),\ e^{\frac{1}{2}\xi_j}\tilde{\varphi}'_{\xi}(\xi_j,\theta_i) \right)'. \qquad (12)$$

Айирмали схема чизиқсиз тенгламалар системасидан иборат бўлади.

1-теорема. Фараз қиламиз (10)–(11) чегаравий шартлар учун Лопатинский текис шарти, яъни $a_1 > 0, \left|b_1\right| < 1$ ва $a_2 > 0, \left|b_2\right| < 1$ шартлар бажарилсин.У ҳолда (9)–(12) айирмали схема $\sqrt{J^n}$ энергетик нормада турғун бўлади, бунда $J^n = \Delta_\theta \Delta_\xi \sum\limits_{i=0}^{I-1} \sum\limits_{j=-\infty}^{+\infty} (A_0 V,V)_{ij}^n$.

Қаралаётган $J^n = \Delta_\theta \Delta_\xi \sum\limits_{i=0}^{I-1} \sum\limits_{j=-\infty}^{+\infty} (A_0 V,V)_{ij}^n$ нормада (1)-(4) аралаш масала ечими иштирок этмайди. Шунинг учун айирмали схема ечимини топиш учун $U_t - U_t \equiv 0$ айниятдан ҳосил қилинадиган қуйидаги айирмали схемадан фойдаланилади:

$$\frac{U_{ij}^{n+1} - U_{ij}^{n}}{\Delta_t} - \left(U_t\right)_{ij}^{n} = 0. \qquad (13)$$

Энди (13) айирмали схемани $2U_{ij}^{n+1}$ векторга кўпайтирамиз:

$$2\left(U_{ij}^{n+1}, U_{ij}^{n+1}\right) - 2\left(U_{ij}^{n}, U_{ij}^{n+1}\right) - 2\Delta_t\left(\left(U_t\right)_{ij}^{n}, U_{ij}^{n+1}\right) = 0$$

ва натижада

$$\left(U_{ij}^{n+1}, U_{ij}^{n+1}\right) - \left(U_{ij}^{n}, U_{ij}^{n}\right) - \Delta_t\left(\left(U_t\right)_{ij}^{n}, \left(U_t\right)_{ij}^{n}\right) - \Delta_t\left(U_{ij}^{n+1}, U_{ij}^{n+1}\right) \le 0$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бунда $2(U,V) \le (U,U) + (V,V)$ Коши-Буняковский тенгсизлигидан фойдаландик. Юқоридаги тенгсизликни $\Delta_\theta \Delta_\xi$ га кўпайтирамиз ва i бўйича 0 дан $I-1$ гача, j бўйича $-\infty$ дан $+\infty$ гача қўшиб чиқамиз:

$$\Delta_\theta \Delta_\xi \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(U_{ij}^{n+1}, U_{ij}^{n+1}\right) \le \Delta_\theta \Delta_\xi \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(U_{ij}^{n}, U_{ij}^{n}\right) +$$
$$+ \Delta_t \Delta_\theta \Delta_\xi \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\{ \left(\left(U_t\right)_{ij}^{n}, \left(U_t\right)_{ij}^{n}\right) + \left(U_{ij}^{n+1}, U_{ij}^{n+1}\right) \right\}.$$

Киритилган норма таърифига кўра, уни

$$\left\|U^{n+1}\right\|_{A_0} \le \left\|U^{n}\right\|_{A_0} + \Delta_t \left\|\left(U_t\right)^{n+1}\right\|_{A_0} + \Delta_t \left\|U^{n+1}\right\|_{A_0} \qquad (14)$$

кўринишда ёзамиз ва $J^n = \Delta_\theta \Delta_\xi \sum\limits_{i=0}^{I-1} \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} (A_0 V,V)_{ij}^n \le \Delta_\theta \Delta_\xi \sum\limits_{i=0}^{I-1} \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} (A_0 V,V)_{ij}^0 = J^0$ тенгликни эса

$$C_1 \left\{ \Delta_\theta \Delta_\xi \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left(U_t, U_t\right)_{ij}^{n+1} + \left(U_x, U_x\right)_{ij}^{n+1} + \left(U_y, U_y\right)_{ij}^{n+1} \right\} \le J^n \le$$
$$\le C_2 \left\{ \Delta_\theta \Delta_\xi \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left(U_t, U_t\right)_{ij}^{n} + \left(U_x, U_x\right)_{ij}^{n} + \left(U_y, U_y\right)_{ij}^{n} \right\}$$

каби ёзиб оламиз. Ҳосил қилинган тенгсизликни (14) тенгсизлик билан (5) баҳонинг дискрет аналогини оламиз:

$$\left\| U^{n+1} \right\|_{A_1}^2 \le const \left\| U^n \right\|_{A_1}^2 ,$$

бунда $\left\| U^n \right\|_{A_1}^2 = \Delta_\theta \Delta_\xi \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left\{ (U,U)_{ij}^n + (U_t,U_t)_{ij}^n + (U_x,U_x)_{ij}^n + (U_y,U_y)_{ij}^n \right\}$ бўлади.

Олинган баҳо таклиф қилинаётган айирмали схеманинг турғунлигини исбот қилади ва бу баҳо бурчакли соҳада тўлқин тарқалиш тенгламаларига бурчакли соҳада қўйилган аралаш ечими учун олинган (5) баҳонинг дискрет аналогидир.

Тўртинчи параграф яқинлашишни тадқиқ этиш ва модел масалаларда ҳисоблаш экспериментини ўтказишга бағишланган.

(9) - (12) – ошкор айирмали схема бўлганлиги сабабли, ечимни $n=k$ қатламда маълум деб, $n=k+1$ қатламда ҳисоблаб топамиз. Энди чизиқсиз тенгламалар системасини ечиш алгоритмини тушунтирамиз. $n=k+1$ қатламда Y_{ij}^{k+1} ечимни аниқлаш учун ҳар сафар чизиқсиз тенгламалар системасини ечиш талаб этилади. Коэффициентлар бўйича итерацияни амалга ошириб айирмали схема ечимини топамиз.

Ҳисоблаш экспериментларининг натижалари қурилган айирмали схемалардан фойдаланиш мумкинлигини ва олинган баҳонинг тўғрилигини кўрсатади.

Биринчи бобнинг бешинчи параграфида бурчакли соҳада тўлқин тарқалиш тенгламалар системасига қўйилган аралаш масалани аппроксимация қилувчи айирмали схема қурилган:

$$\begin{gathered} e^{\xi_j} \bar{D}_{ij}^n \left(\mathrm{A}_0\right)_i \frac{Y_{ij}^{n+1} - Y_{ij}^n}{\Delta_t} + e^{\xi_j} D_{ij}^{n+1} \left(\bar{\mathrm{A}}_0\right)_i \frac{\bar{Y}_{ij}^{n+1} - \bar{Y}_{ij}^n}{\Delta_t} - \bar{D}_{ij}^n \frac{\left(\mathrm{B}_0 Y\right)_{i+1j}^n - \left(\mathrm{B}_0 Y\right)_{ij}^n}{\Delta_\theta} - \\ -D_{i+1j}^n \left(\bar{\mathrm{B}}_0\right)_i \frac{\bar{Y}_{i+1j}^n - \bar{Y}_{ij}^n}{\Delta_\theta} - \bar{D}_{ij}^n \left(\mathrm{C}_0\right)_i \frac{Y_{ij+1}^n - Y_{ij}^n}{\Delta_\xi} - D_{ij+1}^n \left(\bar{\mathrm{C}}_0\right)_i \frac{\bar{Y}_{ij+1}^n - \bar{Y}_{ij}^n}{\Delta_\xi} + \\ +\bar{D}_{ij}^n \left[\mathrm{Q}_0 - \mu \mathrm{C}_0 + \frac{d}{d\theta} \mathrm{B}_0\right]_i Y_{ij}^n + D_{ij}^n \left[\bar{\mathrm{Q}}_0 - \bar{\mu} \bar{\mathrm{C}}_0\right]_i \bar{Y}_{ij}^n = 0,\ n = \overline{0, N-1},\ |j| = 0,1,... \end{gathered} \qquad (15)$$

$i=0,\quad n=\overline{0,N},\quad |j|=0,1,\ldots$ бўлганда $J_2(Y_1)_{0j}^n - A_2(Y_2)_{0j}^n - B_2(Y_3)_{0j}^n = 0,$ (16)

ва
$$\begin{pmatrix} Y_1 - Y_3 \\ -Y_2 \end{pmatrix}_{0j}^n = R \begin{pmatrix} -Y_2 \\ Y_1 + Y_3 \end{pmatrix}_{0j}^n , \qquad (17)$$

$i=I, n=\overline{0,N},\ |j|=0,1,\ldots$ бўлганда $J_1(Y_1)_{Ij}^n + A_1(Y_2)_{Ij}^n - B_1(Y_3)_{Ij}^n = 0$ (18)

ёки
$$\begin{pmatrix} Y_1 - Y_3 \\ -Y_2 \end{pmatrix}_{Ij}^n = S \begin{pmatrix} -Y_2 \\ Y_1 + Y_3 \end{pmatrix}_{Ij}^n , \qquad (19)$$

$n=0,\ i=\overline{0,I},\ |j|=0,1,\ldots$ бўлганда $Y_{ij}^0 = \left(e^{\frac{1}{2}\xi_j} \tilde{\Psi}(\xi_j,\theta_i), e^{\frac{1}{2}\xi_j} \tilde{\Phi}'_\theta(\xi_j,\theta_i), e^{\frac{1}{2}\xi_j} \tilde{\Phi}'_\xi(\xi_j,\theta_i) \right)'$. (20)

Бу ерда $A_0(\theta)$, $B_0(\theta)$, $C_0(\theta)$, $Q_0(\theta)$- $3m$ ўлчовли матрицалар, $S = \begin{pmatrix} S_1 & -S_2 \\ I_m & O \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} -R_1 & -R_2 \\ I_m & O \end{pmatrix}$, $S_1 = 2(J_1 + B_1)^{-1} A_1$, $S_2 = (J_1 + B_1)^{-1}(J_1 - B_1)$,

$R_1 = 2(J_2 + B_2)^{-1} A_2$, $R_2 = (J_2 + B_2)^{-1}(J_2 - B_2)$, I_m – m ўлчовли квадрат матрица, O $-m$ ўлчовли ноль матрица. Ушбу схема дифференциал тенгламага қўйилган аралаш масалани ечимларида $O(\tau + \Delta_\theta + \Delta_\xi)$ тартиб билан аппроксимация қилади.

2-теорема. Агар (16), (18) чегаравий шартлар учун Лопатинский текис шарти бажарилса, яъни x=0 чегарада

а) J_1+B_1 – хосмас матрица,

б) S матрицанинг барча хос қийматлари қатъий ўнг ярим текисликда ётади, яъни $\mathrm{Re}\,\lambda_i(S) > 0,\ \ i = \overline{1{,}2m}$;

y=0 чегарада

а) J_2+B_2 – хосмас матрица,

б) R матрицанинг барча хос қийматлари қатъий чап ярим текисликда ётади, яъни $\mathrm{Re}\,\lambda_i(R) < 0,\ \ i = \overline{1{,}2m}$.

У ҳолда (15)-(20) аралаш масала $\sqrt{J^n}$ нормада турғун бўлади, бунда $J^n = \Delta_\theta \Delta_\xi \sum\limits_{i=0}^{I-1} \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} (A_0 V, \overline{V})_{ij}^n$.

Диссертациянинг **“Чизиқли симметрик t-гиперболик системалар учун айирмали схемаларнинг турғунлиги”** деб аталувчи иккинчи боби чизиқли симметрик t-гиперболик системаларнинг экспоненциал турғун ечимларини топиш учун айирмали схемалар қуришга бағишланади.

Иккинчи бобнинг биринчи параграфида икки ўлчовли ўзгармас коэффициентли, кичик ҳадлари бўлган диссипатив чегаравий шартли чизиқли гиперболик система учун айирмали схемалар қурилган. Ишнинг асосий ғояси турли функционал фазоларда априор баҳо олиш ёрдамида гиперболик система ечимининг турғунлигини тадқиқ этишдан иборат.

Бунда ўзгарувчиларни ажратиш (расщепления) айирмали схемани қуриш ва турғун ечимларни ҳисоблаш муаммоларини тадқиқ этамиз.

$G = \{(t, x, y):\ 0 < t \le T,\ 0 < x < l,\ -\infty < y < +\infty\}$ соҳада махсус каноник шаклда ёзилган

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{K}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \mathbf{C}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \mathbf{M}\mathbf{v} = 0 \qquad (21)$$

симметрик гиперболик системани $x = 0$ бўлганда:

$$\mathbf{v}^{\mathrm{I}} = \mathbf{s}\mathbf{v}^{\mathrm{II}}, \qquad (22)$$

$x = l$ бўлганда:

$$\mathbf{v}^{\mathrm{II}} = \mathbf{r}\mathbf{v}^{\mathrm{I}} \qquad (23)$$

ва $t = 0$ бўлганда

$$v_i(0, x, y) = \varphi_i(x, y),\ \ i = 1, \cdots, n,\ \ 0 \le x \le l,\ \ -\infty \le y \le +\infty, \qquad (24)$$

бошланғич шартлар билан қараймиз, бунда $\mathbf{v}^{\mathrm{I}} = (v_1, v_2, \cdots, v_m)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{v}^{\mathrm{II}} = (v_{m+1}, v_{m+2}, \cdots, v_n)^{\mathrm{T}}$; $\mathbf{K}$ – диагонал шаклдаги матрица, $\mathbf{C}$ – мусбат аниқланган матрица, $\mathbf{M}$ – n ўлчовли ҳақиқий элементли квадрат, $k_i > 0,\ \ i = 1, \cdots, n$, $\mathbf{s}$– $(n-m)\times m$ ўлчовли тўғри тўртбурчак матрица, $\mathbf{r}$ – $m\times(n-m)$

ўлчовли тўғри тўртбурчак матрица. Бошланғич функциялар $|y|>\frac{1}{2}Y$ бўлганда нолга тенг. Бошланғич шартлар билан чегаравий шартларнинг мослашганлик шарти бажарилади деб фараз қиламиз, яъни

$$x=0,\, t=0 \text{ бўлганда } \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{I}}=\mathbf{s}\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{II}} \text{ ва } x=l,\, t=0 \text{ бўлганда } \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{II}}=\mathbf{r}\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{I}}. \qquad (25)$$

Бунда $\boldsymbol{\varphi}=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)^T\in W_2^1((0,l),(-\infty,+\infty),\mathrm{R}^n)$ бўлиб, $W_2^1((0,l),-\infty,+\infty),\mathrm{R}^n)$ Соболев фазоси.

1-таъриф. (21) система (22)-(23) чегаравий шартлар билан L^2 нормада экспоненциал турғун дейилади, агар $\nu>0$ ва $c>0$ сонлар мавжуд бўлиб, ҳар қандай $\boldsymbol{\varphi}\in\mathrm{L}^2((0,l),(-\infty,+\infty),\mathrm{R}^n)$ бошланғич шартлар учун L^2- даги (21)–(23) аралаш масала ечими

$$\left\|\mathbf{v}(t,\cdot)\right\|_{\mathrm{L}^2((0,l),(-\infty,+\infty),\mathrm{R}^n)}\le ce^{-\nu t}\left\|\boldsymbol{\varphi}\right\|_{\mathrm{L}^2((0,l),(-\infty,+\infty),\mathrm{R}^n)},\ t\ge 0. \qquad (26)$$

тенгсизликни қаноатлантирса. Қуйидаги функцияни қараймиз:

$$L(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^l\left(\boldsymbol{\mu}(x)\mathbf{v},\mathbf{v}\right)dxdy=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^l\left\{\sum_{i=1}^{m}\mu_i e^{-\nu x}\left[v_i(t,x,y)\right]^2+\sum_{i=m+1}^{n}\mu_i e^{\nu x}\left[v_i(t,x,y)\right]^2\right\}dxdy, \qquad (27)$$

бунда $\mu_i>0,\ i=1,\ldots,n$, $\boldsymbol{\mu}^+=(\mu_1,\ldots,\mu_m)^T$, $\boldsymbol{\mu}^-=(\mu_{m+1},\ldots,\mu_n)^T$, $\boldsymbol{\mu}(x)=diag(e^{-\nu x}\boldsymbol{\mu}^+,e^{\nu x}\boldsymbol{\mu}^-)$.

3-теорема. (21) система (22)–(23) чегаравий шартлар билан L^2 нормада турғун бўлади, агар шундай $\nu>0$ ва $\mu_i>0,\ i=1,\ldots,n$ сонлар мавжуд бўлиб,

$$\begin{pmatrix}\mathbf{K}^+ & 0\\ 0 & \mathbf{K}^-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-\nu l}\boldsymbol{\mu}^+ & 0\\ 0 & \boldsymbol{\mu}^-\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & \mathbf{r}\\ \mathbf{s} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{K}^+ & 0\\ 0 & \mathbf{K}^-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu}^+ & 0\\ 0 & e^{\nu l}\boldsymbol{\mu}^-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \mathbf{s}\\ \mathbf{r} & 0\end{pmatrix} \qquad (28)$$

ва

$$\nu\left|\mathbf{K}\right|\boldsymbol{\mu}(x)+\mathbf{M}^T\boldsymbol{\mu}(x)+\boldsymbol{\mu}(x)\mathbf{M},\ x\in(0,l) \qquad (29)$$

матрицалар мусбат аниқланган бўлса.

(21)-(24) аралаш масала сонли ечимини топиш учун G соҳада текис $G_h=\{(t^\kappa,x_j,y_q):\ 0\le t^\kappa\le T,\ 0\le x_j\le l,\ -\infty<y_q<+\infty\}$ тўр қурилган, бунда $t^\kappa=\kappa\Delta t,\ \kappa=0,\ldots,N;\quad N\Delta t=T,\quad x_j=(j+\tfrac{1}{2})\Delta x;\ J\Delta x=l;\ j=0,\ldots,J-1;$ $y_q=(q+\tfrac{1}{2})\Delta y;\ q=-\infty,\ldots,+\infty$ бўлиб, ўзгарувчиларни ажратиш (расщепления) айирмали схема қуйидагича олинган:

$$\begin{bmatrix}\left(\mathbf{w}^{\mathrm{I}}\right)_{jq}^{\kappa}\\ \left(\mathbf{w}^{\mathrm{II}}\right)_{jq}^{\kappa}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}}\right)_{jq}^{\kappa}\\ \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_{jq}^{\kappa}\end{bmatrix}-\frac{\Delta t}{\Delta x}\begin{bmatrix}\mathbf{K}^+ & 0\\ 0 & \mathbf{K}^-\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}}\right)_{jq}^{\kappa}-\left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}}\right)_{j-1,q}^{\kappa}\\ \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_{jq}^{\kappa}-\left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_{j+1,q}^{\kappa}\end{bmatrix}, \qquad (30)$$

$$j=0,\ldots,J-1;\ \kappa=0,\ldots,N-1;\ q=-\infty,\ldots,+\infty\ ,$$

$$\mathbf{u}_{jq}^{\kappa}=\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}-\frac{\Delta t}{\Delta y}\mathbf{C}\left[\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}-\mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}\right],\ j=\overline{0,J-1};\ \kappa=\overline{0,N-1};\ q=-\infty,\ldots,+\infty; \qquad (31)$$

$$\mathbf{v}_{jq}^{\kappa+1} = \mathbf{u}_{jq}^{\kappa} - \Delta t \mathbf{M} \mathbf{u}_{jq}^{\kappa}, \; j = 0, \ldots, J-1; \; \kappa = 0, \ldots, N-1; \tag{32}$$

(24) бошланғич шарт

$$\mathbf{v}_j^0 = \frac{1}{\Delta x} \frac{1}{\Delta y} \int_{y_{q-\frac{1}{2}}}^{y_{q+\frac{1}{2}}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \boldsymbol{\varphi}(x, y) dx dy, \; j = 0, \ldots, J-1; \; q = -\infty, \ldots + \infty. \tag{33}$$

каби аппроксимация қилинади. Чегаравий шартлар эса

$$\left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}}\right)_{-1q}^{\kappa+1} = \mathbf{s}\left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_{0q}^{\kappa+1}, \quad \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_{Jq}^{\kappa+1} = \mathbf{r}\left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}}\right)_{0q}^{\kappa+1}, \kappa = \overline{0, N-1}; q = -\infty, \ldots + \infty \tag{34}$$

кўринишда аппроксимация қилинади. Фараз қиламиз, Курант-Фридрис-Леви(КФЛ) шарти бажарилсин, яъни

$$\left(\Delta t / \Delta x\right) \max\left|k_i\right| \leq 1, \left(\Delta t / \Delta y\right) \max\left|\lambda_i(\mathbf{C})\right| \leq 1.$$

Бунда $\lambda_i(\mathbf{C})$ – $\mathbf{C}$ матрицанинг хос қийматлари.

Энди (30)–(34) айирмали схема ечимининг турғунлиги ҳақидаги саволни тадқиқ этамиз.

2-таъриф. (30)-(34) айирмали схема (34) айирмали чегаравий шартлар билан экспоненциал турғун деб аталади, агар шундай $c > 0$ сони мавжуд бўлиб, (30)-(34) айирмали чегаравий масала ечими ҳар қандай $\mathbf{v}_{jq}^0 \in \mathrm{L}^2((x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}), (y_{q-\frac{1}{2}}, y_{q+\frac{1}{2}}), \mathrm{R}^n)$ бошланғич шартлар учун

$$\Delta x \Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left(\mathbf{v}_{jq}^{\kappa}, \mathbf{v}_{jq}^{\kappa}\right) \leq c e^{-\eta t_\kappa} \Delta x \Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left(\mathbf{v}_{jq}^0, \mathbf{v}_{jq}^0\right), \; \kappa = 1, \ldots, N \text{ тенгсизликни}$$

қаноатлантирса.

Қуйидаги функцияни қараймиз:

$$L(\mathbf{v}^{\kappa}) = L^{\kappa} = \Delta x \Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left(\mathbf{v}_{jq}^{\kappa}, \boldsymbol{\mu}_j \mathbf{v}_{jq}^{\kappa}\right), \; \boldsymbol{\mu}_j = \boldsymbol{\mu}(x_j), \; j = 1, \ldots, J-1, \tag{35}$$

бунда $\boldsymbol{\mu}_j = diag(e^{-\nu x_j} \boldsymbol{\mu}^+, e^{\nu x_j} \boldsymbol{\mu}^-)$.

4-теорема. Фараз қиламиз $T > 0$ бўлиб, квадратик функция (35) формула билан аниқланган бўлсин. Агар КФЛ шарти $(\Delta t / \Delta x) \max\left|k_i\right| \leq 1$, $(\Delta t / \Delta y) \max\left|\lambda_i(\mathbf{C})\right| \leq 1$ бажарилса, $\nu > 0$ ва $\mu_i > 0, \; i = 1, \ldots, n$ шундай ҳақиқий сонлар мавжуд бўлиб, $0 < \alpha(1 - e^{-\nu \Delta x}) < 1$, бу ерда $\alpha = \min_i \left|k_i\right|$ $\mathbf{M}^T \boldsymbol{\mu}_j + \boldsymbol{\mu}_j \mathbf{M} - \Delta t \mathbf{M}^T \boldsymbol{\mu}_j \mathbf{M}, \quad j = 0, \ldots, J-1$номанфий аниқланган ва

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}^+ e^{-\nu x_J} \mathbf{K}^+ & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\mu}^- e^{\nu x_{-1}} \mathbf{K}^- \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{r} \\ \mathbf{s} & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}^+ e^{-\nu x_0} \mathbf{K}^+ & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\mu}^- e^{\nu x_{J-1}} \mathbf{K}^- \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{s} \\ \mathbf{r} & 0 \end{pmatrix}$$

– мусбат аниқланган матрицалар бўлса, у ҳолда (30)-(34) айирмали чегаравий масала сонли $\mathbf{v}_{jq}^{\kappa}$ ечими L^2 нормада стационар $\mathbf{v}_{jq}^{*} = 0$ ечимга яқинлашади.

Иккинчи бобнинг иккинчи параграфида ўзгарувчан коэффициентли аралаш масала G соҳада қаралади.

$$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t} + \mathbf{K}(\mathrm{x}) \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x} + \mathbf{C}(\mathrm{x}) \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y} + \mathbf{M}(\mathrm{x}) \mathrm{v} = 0 \tag{36}$$

тенгламалар системасини (22)-(23) бошланғич ҳамда чегаравий шартлар билан қаралади, бу ерда **K**(x) – диагонал кўринишдаги матрица, **C**(x) – мусбат аниқланган матрица, **M**(x) – ҳақиқий n ўлчовли квадрат матрица.

Чизиқли симметрик t-гиперболик системага диссипатив чегаравий шартлар билан қўйилган аралаш масала ечими учун қуйидаги теорема исбот қилинган:

5-теорема. (36) система (22)-(23) чегаравий шартлар билан L^2 нормада экспоненциал турғун дейилади, агар шундай $\nu>0$ ва $\mu_i>0,\ i=1,\dots,n$ сонлар мавжуд бўлиб,

$$\begin{pmatrix}\mathbf{K}^+(l) & 0\\ 0 & \mathbf{K}^-(0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-\nu l}\boldsymbol{\mu}^+ & 0\\ 0 & \boldsymbol{\mu}^-\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & \mathbf{r}\\ \mathbf{s} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{K}^+(0) & 0\\ 0 & \mathbf{K}^-(l)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu}^+ & 0\\ 0 & e^{\nu l}\boldsymbol{\mu}^-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \mathbf{s}\\ \mathbf{r} & 0\end{pmatrix}$$

ва $\nu|\mathbf{K}|\boldsymbol{\mu}(x)-\mathbf{K}'(x)\boldsymbol{\mu}(x)+\mathbf{M}^T\boldsymbol{\mu}(x)+\boldsymbol{\mu}(x)\mathbf{M},\ x\in(0,l)$ матрицалар мусбат аниқланган бўлса.

Юқоридаги сингари

$$\begin{bmatrix}\left(\mathbf{w}^{\mathrm{I}}\right)_{jq}^{\kappa}\\ \left(\mathbf{w}^{\mathrm{II}}\right)_{jq}^{\kappa}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}}\right)_{jq}^{\kappa}\\ \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_{jq}^{\kappa}\end{bmatrix}-\frac{\Delta t}{\Delta x}\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{j-1}^{+} & 0\\ 0 & \mathbf{K}_{j+1}^{-}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}}\right)_{jq}^{\kappa}-\left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}}\right)_{j-1,q}^{\kappa}\\ \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_{jq}^{\kappa}-\left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_{j+1,q}^{\kappa}\end{bmatrix},$$

$$j=0,\dots,J-1;\ \kappa=0,\dots,N-1;\ \ q=-\infty,\dots,+\infty \tag{37}$$

$$\mathbf{u}_{jq}^{\kappa}=\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}-\frac{\Delta t}{\Delta y}\mathbf{C}_j\left[\mathbf{w}_{jq}^{\kappa}-\mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa}\right],\ \ j=0,\dots,J-1;\ \kappa=0,\dots,N-1;\ \ q=-\infty,\dots,+\infty; \tag{38}$$

$$\mathbf{v}_{jq}^{\kappa+1}=\mathbf{u}_{jq}^{\kappa}-\Delta t\mathbf{M}_j\mathbf{u}_{jq}^{\kappa},\ \ j=0,\dots,J-1;\ \kappa=0,\dots,N-1, \tag{39}$$

(33)-(34) бошланғич ва чегаравий шартлар билан ўзгарувчиларни ажратиш (расщепления) айирмали схемаси қурилган ва сонли ечимнинг экспоненциал турғунлигини тасдиқловчи қуйидаги теорема исбот қилинган.

6-теорема. Фараз қиламиз $T>0$ ва $L(\mathbf{v}^{\kappa})=L^{\kappa}=\Delta x\Delta y\sum\limits_{q=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{j=0}^{J-1}\left(\mathbf{v}_{jq}^{\kappa},\boldsymbol{\mu}_j\mathbf{v}_{jq}^{\kappa}\right)$ бўлсин. Агар КФЛ шарти $\dfrac{\Delta t}{\Delta x}\max\limits_{\substack{1\le i\le n\\ 0\le j\le J-1}}\left|k_{i,j}\right|\le 1,\quad \dfrac{\Delta t}{\Delta y}\max\limits_{\substack{1\le i\le n\\ 0\le j\le J-1}}\left|\lambda_i(\mathbf{C}_j)\right|\le 1$ ўринли, шундай ҳақиқий $\nu>0$ ва $\mu_i>0,\ i=1,\dots,n$ сонлар мавжуд бўлиб, $0<\eta\equiv\nu\alpha e^{-\nu\Delta x}-\beta<1$ бунда $\alpha=\min\limits_{\substack{1\le i\le n\\ 0\le j\le J-1}}\left|k_{i,j}\right|,\quad \beta=\max\limits_{\substack{1\le i\le n\\ 0\le j\le J-1}}\left|k'_{i,j}\right|$ $\quad\mathbf{M}_j^T\boldsymbol{\mu}_j+\boldsymbol{\mu}_j\mathbf{M}_j-\Delta t\mathbf{M}_j^T\boldsymbol{\mu}_j\mathbf{M}_j,\ j=0,\dots,J-1$ – номанфий аниқланган матрицалар ва

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mu}^+e^{-\nu x_J}\mathbf{K}_{J-1}^{+} & 0\\ 0 & \boldsymbol{\mu}^-e^{\nu x_{-1}}\mathbf{K}_{0}^{-}\end{bmatrix}-\begin{pmatrix}0 & \mathbf{r}\\ \mathbf{s} & 0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mu}^+e^{-\nu x_0}\mathbf{K}_{-1}^{+} & 0\\ 0 & \boldsymbol{\mu}^-e^{\nu x_{J-1}}\mathbf{K}_{J}^{-}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0 & \mathbf{s}\\ \mathbf{r} & 0\end{pmatrix}-$$

мусбат аниқланган матрица бўлса, у ҳолда (37)-(39), (33)-(34) аралаш масаланинг $\mathbf{v}_{jq}^{\kappa}$ ечими L^2 нормада стационар ечим $\mathbf{v}_{jq}^{*}=0$ га яқинлашади.

Учинчи параграфда $G=\{(t,\mathbf{x}):\ 0<t\le T,\ 0<x_i<X_i,\ i=\overline{1,n}\}$ соҳада қуйидаги симметрик гиперболик система

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\mathbf{B}_i\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_i}+\mathbf{Q}\mathbf{v}=0, \tag{40}$$

$x_1 = 0$ да

$$\mathbf{v}^{\mathbf{I}}(t,\mathbf{x}) = \mathbf{s}\mathbf{v}^{\mathbf{II}}(t,\mathbf{x}),\ 0 < t \le T,\ 0 \le x_i \le X_i,\ i = 2,\cdots,n, \qquad (41)$$

$x_1 = X_1$ да

$$\mathbf{v}^{\mathbf{II}}(t,\mathbf{x}) = \mathbf{r}\mathbf{v}^{\mathbf{I}}(t,\mathbf{x}),\ 0 < t \le T,\ 0 \le x_i \le X_i,\ i = 2,\cdots,n, \qquad (42)$$

ва $x_i = 0, X_i;\ \ i = 2,\cdots,n$ да

$$\mathbf{v}(t,\mathbf{x})\big|_{x_i=0} = \mathbf{v}(t,\mathbf{x})\big|_{x_i=X_i},\ i = \overline{2,n};\ I = \overline{1,n};\ (I \ne i), \qquad (43)$$

даврий чегаравий шартлар ва $t = 0$ да

$$\mathbf{v}(0,\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}),\ \ \mathbf{x} = (x_1,\cdots x_n),\ \ 0 \le x_i \le X_i,\ i = 1,\cdots,n; \qquad (44)$$

бошланғич шартларни қанини топиш масаласи қаралади, бунда $\mathbf{B}_1(x_1)$ диагонал матрица, $\mathbf{B}_i(x_1) = \mathbf{B}_i^*(x_1),\ i = \overline{2,n}$ симметрик матрица ва $\mathbf{Q}(x_1)$ $q \times q$ ўлчовли матрица, шунингдек, $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \left(\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), \cdots, \varphi_q(\mathbf{x})\right)^T -$ вектор функция. Векторлар ва матрицалар қуйидаги кўринишда ифодаланган $\mathbf{v} = [\mathbf{v}^{\mathrm{I}}, \mathbf{v}^{\mathrm{II}}]^T$, $\mathbf{B}_1(x_1) = diag(\mathbf{B}_1^+(x_1), -\mathbf{B}_1^-(x_1)),\ \mathbf{B}_1^+(x_1) = diag(b_1(x_1), \ldots b_m(x_1)),$
$\mathbf{B}_1^-(x_1) = diag(b_{m+1}(x_1), \ldots, b_q(x_1)),$ бўлиб
$b_1(x_1) \ge \ldots \ge b_m(x_1) > 0 \ge -b_{m+1}(x_1) \ge \ldots \ge -b_q(x_1)$ ва $\mathbf{s}$ матрица $(q-m)\times m$, ўлчамли тўғритўртбурчак, $\mathbf{r}$ матрица $m\times(q-m)$ ўлчамли матрицалар.

Ушбу

$$L(t) \equiv \int_0^{\mathbf{X}} \left(\boldsymbol{\mu}(x_1)\mathbf{v}, \mathbf{v}\right) \mathbf{dx} = \int_0^{X_n} \cdots \int_0^{X_1} \left(\boldsymbol{\mu}(x_1)\mathbf{v}, \mathbf{v}\right) dx_1 \cdots dx_n \qquad (45)$$

квадратик функция қаралади, бу ерда $\mu_i > 0,\ i = 1,\ldots,q,\ \boldsymbol{\mu}^+ = diag(\mu_1,\ldots,\mu_m),\ \boldsymbol{\mu}^- = diag(\mu_{m+1},\ldots,\mu_q),$ ва
$\boldsymbol{\mu}(x_1) = diag(e^{-\nu x_1}\boldsymbol{\mu}^+, e^{\nu x_1}\boldsymbol{\mu}^-).$

7-теорема. (40) система (41)-(42) чегаравий шартлар билан L^2 нормада экспоненциал турғун бўлади, агар шундай $\nu > 0,\ \mu_i > 0,\ i = \overline{1,q}$ сонлар мавжуд бўлиб,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B}_1^+(X_1) & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_1^-(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\nu X_1}\boldsymbol{\mu}^+ & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\mu}^- \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{r} \\ \mathbf{s} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1^+(0) & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_1^-(X_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}^+ & 0 \\ 0 & e^{\nu X_1}\boldsymbol{\mu}^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{s} \\ \mathbf{r} & 0 \end{pmatrix} \qquad (46)$$

ва

$$\nu\left|\mathbf{B}_1(x_1)\right|\boldsymbol{\mu}(x_1) - \mathbf{B}_1{}'(x_1)\boldsymbol{\mu}(x_1),\ x_1 \in (0, X_1) \qquad (47)$$

матрицалар мусбат аниқланган ва $\left(\boldsymbol{\mu}(x_1)\mathbf{Q}\mathbf{v}, \mathbf{v}\right) > 0$ бўлса.

(41)-(43) аралаш масаланинг сонли ечимини топиш учун қуйидаги айирмали схема таклиф қилинади

$$\begin{bmatrix} \left(\mathbf{v}_1^{\mathrm{I}}\right)_{\mathbf{j}}^{\kappa} \\ \left(\mathbf{v}_1^{\mathrm{II}}\right)_{\mathbf{j}}^{\kappa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}}\right)_{\mathbf{j}}^{\kappa} \\ \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_{\mathbf{j}}^{\kappa} \end{bmatrix} - \frac{\Delta t}{\Delta x_1} \begin{bmatrix} \left(\mathbf{B}_1^+\right)_{j_1-1} & 0 \\ 0 & \left(\mathbf{B}_1^-\right)_{j_1+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}}\right)_{\mathbf{j}}^{\kappa} - \left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}}\right)_{j_1-1}^{\kappa} \\ \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_{\mathbf{j}}^{\kappa} - \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_{j_1+1}^{\kappa} \end{bmatrix}, \qquad (48)$$

$$\left(\mathbf{v}_{i+1}\right)_{\mathbf{j}}^{\kappa}=\left(\mathbf{v}_{i}\right)_{\mathbf{j}}^{\kappa}-\frac{\Delta t}{\Delta x_{i+1}}\begin{bmatrix}\left(\mathbf{B}_{i+1}^{+}\right)_{j_1} & 0\\ 0 & \left(\mathbf{B}_{i+1}^{-}\right)_{j_1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\left(\mathbf{v}_{i}^{\mathrm{I}}\right)_{\mathbf{j}}^{\kappa}-\left(\left(\mathbf{v}_{i}^{\mathrm{I}}\right)\right)_{j_i-1}^{\kappa}\\ \left(\mathbf{v}_{i}^{\mathrm{II}}\right)_{\mathbf{j}}^{\kappa}-\left(\mathbf{v}_{i}^{\mathrm{II}}\right)_{j_i+1}^{\kappa}\end{bmatrix},\quad i=1,\cdots,n-1; \quad (49)$$

бу ерда

$$\mathbf{v}_{\mathbf{j}}^{\kappa+1}=\left(\mathbf{v}_{n}\right)_{\mathbf{j}}^{\kappa}-\Delta t\mathbf{Q}\left(\mathbf{v}_{n}\right)_{\mathbf{j}}^{\kappa},\left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}}\right)_{j_1\pm1}^{\kappa}=\left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}}\right)_{j_1\pm1,j_2,\cdots,j_n}^{\kappa},\ \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_{j_1\pm1}^{\kappa}=\left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_{j_1\pm1,j_2,\cdots,j_n}^{\kappa},\quad (50)$$

$$\left(\mathbf{B}_{1}^{\pm}\right)_{j_1\mp1}=\left(\mathbf{B}_{1}^{\pm}\right)_{j_1\mp1,j_2,\cdots,j_n},\left(\mathbf{v}_{i}\right)_{j_i\pm1}^{\kappa}=\mathbf{v}_{j_1\cdots j_{i-1}j_i\pm1,j_{i+1}\cdots j_n}^{\kappa},\ \mathbf{B}_{i}=diag(\mathbf{B}_{i}^{+},-\mathbf{B}_{i}^{-}),$$

$$\mathbf{B}_{i}^{\pm}\geq0,\ j_i=\overline{0,J_i-1},\ \kappa=\overline{0,N-1}.$$

(44) бошланғич шарт қуйидаги тарзда аппроксимация қилинади:

$$\mathbf{v}_{\mathbf{j}}^{0}=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\Delta x_i}\int_{x_n^{j_n-\frac{1}{2}}}^{x_n^{j_n+\frac{1}{2}}}\cdots\int_{x_1^{j_1-\frac{1}{2}}}^{x_1^{j_1+\frac{1}{2}}}\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})d\mathbf{x},\ j_i=0,\ldots,J_i-1;\ i=1,\ldots,n. \quad (51)$$

Чегаравий шартлар қуйидаги тарзда аппроксимация қилинади:

$$\left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}}\right)_{-1\breve{\mathbf{j}}}^{\kappa+1}=\mathbf{s}\left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_{0\breve{\mathbf{j}}}^{\kappa+1},\quad \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_{J_1\breve{\mathbf{j}}}^{\kappa+1}=\mathbf{r}\left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}}\right)_{J_1-1,\breve{\mathbf{j}}}^{\kappa+1} \quad (52)$$

$$\kappa=\overline{0,N-1};\ \ \breve{\mathbf{j}}=j_2\cdots j_n;\left(\mathbf{v}_{i}^{\mathrm{I}}\right)_{0}^{\kappa}=\left(\mathbf{v}_{i}^{\mathrm{I}}\right)_{J_i-1}^{\kappa},\ \left(\mathbf{v}_{i}^{\mathrm{II}}\right)_{1}^{\kappa}=\left(\mathbf{v}_{i}^{\mathrm{II}}\right)_{J_i}^{\kappa};\ i=1,\cdots,n.$$

Фараз қиламиз КФЛ шарти бажарилсин.

3-таъриф. (48)-(51) айирмали схема (52) чегаравий шарт билан экспоненциал турғун дейилади, агар шундай $\eta>0$ ва $c>0$ ўзгармас сонлар мавжуд бўлиб, ҳар қандай $\mathbf{v}_{\mathbf{j}}^{0}\in\mathrm{L}^{2}\left(\left\{x_i^{j_i}\right\},\ i=1,\cdots,n;\ j_i=0,\cdots J_i\text{ - }1;\mathrm{R}^{q}\right)$ бошланғич шарт учун (48)-(52) чегаравий масала ечими $\kappa=1,\ldots,N$ учун $\prod_{i=1}^{n}\Delta x_n\cdot\prod_{i=1}^{n}\sum_{j_i=1}^{J_i-1}\left(\mathbf{v}_{\mathbf{j}}^{\kappa},\mathbf{v}_{\mathbf{j}}^{\kappa}\right)\leq ce^{-\eta t_\kappa}\prod_{i=1}^{n}\Delta x_n\cdot\prod_{i=1}^{n}\sum_{j_i=1}^{J_i-1}\left(\mathbf{v}_{\mathbf{j}}^{0},\mathbf{v}_{\mathbf{j}}^{0}\right)$ тенгсизликни қаноатлантирса.

(48)-(52) чегаравий масала учун дискрет квадратик функция учун қуйидаги функция тақдим этилади:

$$L(\mathbf{v}^{\kappa})=L^{\kappa}=\prod_{i=1}^{n}\Delta x_i\cdot\prod_{i=1}^{n}\sum_{j_i=1}^{J_i-1}\left(\mathbf{v}_{\mathbf{j}}^{\kappa},\boldsymbol{\mu}_{j_1}\mathbf{v}_{\mathbf{j}}^{\kappa}\right),\ \boldsymbol{\mu}_{j_1}=\boldsymbol{\mu}(x_{j_1}),\ j_1=1,\cdots,J_1-1. \quad (53)$$

бу ерда $\prod_{i=1}^{n}\Delta x_i=\Delta x_1\cdots\Delta x_n,\ \prod_{i=1}^{n}\sum_{j_i=1}^{J_i-1}\bullet=\sum_{j_1=1}^{J_1-1}\cdots\sum_{j_n=1}^{J_n-1}\bullet,\ \boldsymbol{\mu}_{j_1}=diag(e^{-\nu x_1^{j_1}}\boldsymbol{\mu}^{+},e^{\nu x_1^{j_1}}\boldsymbol{\mu}^{-}).$

8-теорема. $T>0$ бўлсин ва дискретная функция (53) формуладаги каби аниқлансин. Агар КФЛ шарти бажарилиб, шундай $\nu>0$ ва $\mu_i>0,\ i=1,\ldots,n$ сонлар мавжуд бўлиб, $0<\eta\equiv\nu\alpha e^{-\nu\Delta x_1}-\beta<1$ бўлсин, бу ерда

$$\alpha=\max_{\substack{1\leq k\leq q\\ 0\leq j_1\leq J_1-1}}\left|\left(b_k\right)_{j_1}\right|,\ \beta=\max_{\substack{1\leq k\leq q\\ 0\leq j_1\leq J_1-1}}\left|\left(b_k'\right)_{j_1}\right|.$$

$$2(\mathbf{Q}_{j_1}\mathbf{u}_{\mathbf{j}}^{\kappa},\boldsymbol{\mu}_{j_1}\mathbf{u}_{\mathbf{j}}^{\kappa})-\Delta t(\mathbf{Q}_{j_1}\mathbf{u}_{\mathbf{j}}^{\kappa},\boldsymbol{\mu}_{j}\mathbf{Q}_{j_1}\mathbf{u}_{\mathbf{j}}^{\kappa}),\ j_1=0,\ldots,J_1-1$$

манфий аниқланмаган матрица ва

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}^{+}e^{-\nu x_1^{J_1}}\left(\mathbf{B}_1\right)_{J_1-1}^{+} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\mu}^{-}e^{\nu x_1^{-1}}\left(\mathbf{B}_1\right)_{0}^{-} \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{r} \\ \mathbf{s} & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}^{+}e^{-\nu x_1^{0}}\left(\mathbf{B}_1\right)_{-1}^{+} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\mu}^{-}e^{\nu x_1^{J_1-1}}\left(\mathbf{B}_1\right)_{J_1}^{-} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{s} \\ \mathbf{r} & 0 \end{pmatrix}$$

мусбат аниқланган матрица бўлса, у ҳолда (48)-(52) чегаравий масаланинг $\mathbf{v}_{\mathbf{j}}^{\kappa}$ ечими L^2 нормада ечимга яқинлашади.

“Квазичизиқли гиперболик системалар учун айирмали схемалар” деб аталувчи учинчи бобда квазичизиқли гиперболик системалар учун аралаш масалаларни сонли ечиш методлари тадқиқ этилган. Биринчи параграфда махсус шаклда ёзилган дифференциал тенглама учун Коши масаласи ечими учун априор баҳо олинган. Шундан сўнг келтирилган шаклдаги дифференциал масалани аппроксимация қилувчи айирмали схема қурилган.

Симметрик t-гиперболик системани (Фридрихс бўйича) қуйидаги кўринишида ёзиш мумкин:

$$A\frac{\partial U}{\partial t}+B\frac{\partial U}{\partial x}+C\frac{\partial U}{\partial y}+D\frac{\partial U}{\partial z}=0\,. \tag{54}$$

Бу ерда $A(U), B(U), C(U), D(U)$ – m тартибли симметрик матрицалар бўлиб, $A(U)>0$. $U=U(t,x,y,z)=(u_1(t,x,y,z),u_2(t,x,y,z),...,u_m(t,x,y,z))^T$ – эркли ўзгарувчили вектор.

Эркли вектор ясовчиларини махсус танлаш ҳисобига (54) системанинг силлиқ $U(t,x,y,z)$ ечимларида унга тенг кучли бўлган

$$\frac{\partial}{\partial t}(AU)+\frac{\partial}{\partial x}(BU)+\frac{\partial}{\partial y}(CU)+\frac{\partial}{\partial z}(DU)=0\,. \tag{55}$$

кўринишда ёзиб олиш мумкин. Симметрик t-гиперболик тенгламалар системасини ўзаро тенг кучли бўлган икки шакли улар учун локал априор баҳони олиш имконини беради. Ҳақиқатдан ҳам, фараз қиламиз (54) системанинг $(t,x,y,z)\in R_{+}^{4}=\{(t,x,y,z);\, t>0,\, (t,x,y,z)\in R^{3}\}$ соҳада

$$t\geq 0, |x|\to\infty, |y|\to\infty, |z|\to\infty \text{ бўлганда } (U,U)\to 0 \tag{56}$$

ва $t=0$ бўлганда:

$$U(0,x,y,z)=\varphi(x,y,z) \tag{57}$$

шартларни қаноатлантирувчи силлиқ $U(t,x,y,z)$ ечими бўлсин.

Дифференциал масала ечими учун қуйидаги баҳо:

$$I(t)=I(0),\;\; 0<t<T<\infty, \tag{58}$$

ўринли, бунда $I(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(AU,U)dxdydz$.

(58) баҳони олишда берилган силлиқ $U(t,x,y,z), (t,x,y,z)\in R_{+}^{4}$ ечимда $A(U(t,x,y,z))$ матрицанинг нормаси чегараланган деб фараз қиламиз. (55)-(57) математик модел учун қуйида ҳисоблаш модели баён қилинади. R_{+}^{4} соҳада $\Delta=\Delta t,\;\; h_x=\Delta x,\;\; h_y=\Delta y, h_z=\Delta z$ қадамлар билан тўр қурамиз ва

$U_{ijk}^{n} = U(t_n, x_i, y_j, z_k)$ белгилашни киритамиз. Маълумки, симметрик B, C, D матрицаларни учун қуйидаги кўринишда ифодалаш мумкин: $B = B_+ - B_-, C = C_+ - C_-, D = D_+ - D_-,$ бу ерда $B_+, B_-, C_+, C_-, D_+, D_-$ – симметрик матрицалар.

(54)-(57) дифференциал масаланинг сонли ечимини топиш учун

$$\begin{aligned}
&A\left(U_{ijk}^{n+1}\right)\left(U_{ijk}^{n+1} - U_{ijk}^{n}\right) + \left(W_{ijk}^{n+1}\right)^{-1} W_{ijk}^{n}\left(A\left(U_{ijk}^{n+1}\right) - A\left(U_{ijk}^{n}\right)\right) + \\
&+ r_x \Big\{\left(B_+\left(U^{(n)}\right)\left(U_{ijk}^{n+1} - U_{i-1jk}^{n+1}\right)\right) + \left(W_{ijk}^{n+1}\right)^{-1} W_{i-1jk}^{n+1}\left(B_+\left(U^{(n)}\right)U_{ijk}^{n+1} - B_+\left(U^{(n)}\right)U_{i-1jk}^{n+1}\right) - \\
&- B_-\left(V^{(n)}\right)\left(U_{i+1jk}^{n+1} - U_{ijk}^{n+1}\right) - \left(W_{ijk}^{n+1}\right)^{-1} W_{i+1jk}^{n+1}\left(B_-\left(V^{(n)}\right)U_{i+1jk}^{n+1} - B_-\left(V^{(n)}\right)U_{ijk}^{n+1}\right)\Big\} + \\
&+ r_y \Big\{W_{ijk}^{n+1}\left(C_+\left(U^{(n)}\right)\left(U_{ijk}^{n+1} - U_{ij-1k}^{n+1}\right)\right) + W_{ij-1k}^{n+1}\left(C_+\left(U^{(n)}\right)U_{ijk}^{n+1} - C_+\left(U^{(n)}\right)U_{ij-1k}^{n+1}\right) - \\
&- C_-\left(V^{(n)}\right)\left(U_{ij+1k}^{n+1} - U_{ijk}^{n+1}\right) - \left(W_{ijk}^{n+1}\right)^{-1} W_{ij+1k}^{n+1}\left(C_-\left(V^{(n)}\right)V_{ij+1k}^{n+1} - C_-\left(V^{(n)}\right)U_{ijk}^{n+1}\right)\Big\} + \\
&+ r_z \Big\{\left(D_+\left(U^{(n)}\right)\left(U_{ijk}^{n+1} - U_{ijk-1}^{n+1}\right)\right) + \left(W_{ijk}^{n+1}\right)^{-1} W_{ijk-1}^{n+1}\left(D_+\left(U^{(n)}\right)U_{ijk}^{n+1} - D_+\left(U^{(n)}\right)U_{ijk-1}^{n+1}\right) - \\
&- D_-\left(V^{(n)}\right)\left(U_{ijk+1}^{n+1} - U_{ijk}^{n+1}\right) - \left(W_{ijk}^{n+1}\right)^{-1} W_{ijk+1}^{n+1}\left(D_-\left(V^{(n)}\right)V_{ijk+1}^{n+1} - D_-\left(V^{(n)}\right)U_{ijk}^{n+1}\right)\Big\} = 0 \quad (59)
\end{aligned}$$

айирмали схемани

$$U_{ijk}^{0} = U_0(x_i, y_j, z_k),\ i, j, k = 0,1,2,.... \qquad (60)$$

бошланғич шартлар билан таклиф этамиз, бунда

$r_x = \Delta / h_x,\ r_y = \Delta / h_y,\ r_z = \Delta / h_z$, $W_{ijk}^{n} = diag\left((w_1)_{ijk}^{n}, (w_2)_{ijk}^{n}, ..., (w_m)_{ijk}^{n}\right),$

$\left(W_{ijk}^{n}\right)^{-1} = diag\left(\left((w_1)_{ijk}^{n}\right)^{-1}, \left((w_2)_{ijk}^{n}\right)^{-1}, ..., \left((w_m)_{ijk}^{n}\right)^{-1}\right),$ $U^{(n)}, V^{(n)}$ –эса $U(t_n, x_i, y_j, z_k)$ векторнинг “оралиқ” қиймати.

Фараз қиламиз, (59)-(60) чекли айирмали модел

$$i^2 + j^2 + k^2 \to \infty, n = 0,1,...\ \text{бўлганда}\ \left(U_{ijk}^{n}, U_{ijk}^{n}\right) \to 0 \qquad (61)$$

шартни қаноатлантиради. Бунда $B(U^{(n)}), B(V^{(n)})$, $C(U^{(n)}), C(V^{(n)})$, $D(U^{(n)}), D(V^{(n)})$ матрицаларнинг нормаси чегараланган деб фараз қиламиз.

Таклиф қилинаётган айирмали схема ошкормас бўлганлиги сабабли, уни ечишда итерация усулидан фойдаланамиз.

Бунда “оралиқ” вектор танланишини аниқлаштирилмаган. Уларни турли усулларда танлаш имкониятининг мавжудлиги амалий масалаларнинг сонли ечимини топишда фойдали бўлади.

Схеманинг турғунлиги ҳақидаги қуйидаги теорема ўринли.

9-теорема. Фараз қиламиз (59), (60) чекли айирмали схема ечимларида (61) шарт ўринли бўлиб,

$$A(U_{ijk}^{n}) > 0,\ n, |i|, |j|, |k| = 0,1,....$$

шарт бажарилсин. У ҳолда (59), (60) айирмали модел $\sqrt{J_n}$ энергетик нормада турғун бўлади, бу ерда $J_n = h_x h_y h_z \left\{ \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(A(U_{ijk}^n) U_{ijk}^n, U_{ijk}^n \right) \right\}$.

Диссертациянинг учинчи бобининг иккинчи параграфида маълум бир шартлар асосида гиперболик тенгламаларни

$$A\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\left(A^T U\right) + B\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(B^T U\right) + C\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(C^T U\right) = 0 \qquad (62)$$

шаклда ёзиш мумкинлигидан фойдаланиб, ушбу система учун Курант-Изаксон-Рис схемаси қурилган.

(52) система учун ушбу белгилашлардан фойдаланиб, $t = 0$ бўлган $U(0,x,y) = U_0(x,y), \quad -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш учун модификацияланган Курант, Изаксон ва Рис схемасини қурамиз:

$$V_{i,j}^{m+1} A_{i,j}^{m+1} \left(U_{i,j}^{m+1} - U_{i,j}^m \right) + V_{i,j}^m \left(A\left(U_{i,j}^{m+1}\right) - A\left(U_{i,j}^m\right) \right) + r_x V_{i-1/2,j}^m B_{i-1/2,j}^m \left(U_{i+1/2,j}^m - U_{i-1/2,j}^m \right) +$$

$$r_x V_{i+1/2,j}^m \left\lfloor \left(B^T U\right)_{i+1/2,j}^m - \left(B^T U\right)_{i-1/2,j}^m \right\rfloor + r_y V_{i,j-1/2}^m C_{i,j-1/2}^m \left(U_{i,j+1/2}^m - U_{2,j-1/2}^m \right) +$$

$$+ r_y V_{i,j+1/2}^m \left\lfloor \left(C^T U\right)_{i,j+1/2}^m - \left(C^T U\right)_{i,j-1/2}^m \right\rfloor = 0 \,, \; m = \overline{0, M-1}, \, i, \, j = 0, \pm 1, \pm 2, ... \qquad (63)$$

$$U_{i,j}^0 = U_0 \left(ih_x, jh_y \right); \quad |i|, |j| = 0,1,2,3\ldots, \qquad (64)$$

бу ерда $V = diag\left(u_1, u_2, \ldots u_N\right)$,

$$U_{k+1/2,j}^m = \frac{1}{2}\left(U_{k,j}^m + U_{k+1,j}^m \right) + \frac{1}{2} D_{k,j}^m \left(U_{k,j}^m - U_{k+1,j}^m \right), k = i, i-1,$$

$$U_{i,k+1/2}^m = \frac{1}{2}\left(U_{i,k}^m + U_{i,k+1}^m \right) + \frac{1}{2} E_{i,k}^m \left(U_{i,k}^m - U_{i,k+1}^m \right), \quad k = j, \, j-1,$$

$$D = \Omega_R(B) \left\lfloor sign\, \lambda_p(B) \delta_{pl} \right\rfloor \Omega_L(B), \, E = \Omega_R(C) \left\lfloor sign\, \lambda_p(C) \delta_{pl} \right\rfloor \Omega_L(C) \,.$$

10-теорема. Фараз қиламиз (63), (64) чекли айирмали моделнинг $U(t_m, x_i, y_j)$ ечимларида h етарлича нолга яқин қийматларида ва $|i|, |j| \to \infty$ бўлганда $A(U_{ij}^m) > 0, \, m, |i|, |j| = 0,1,....$бўлсин. У ҳолда (63), (64) айирмали модель $\sqrt{J_n}$ энергетик нормада $J_m = h_x h_y \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left(A(U_{ij}^m) U_{ij}^m, U_{ij}^m \right)$ турғун бўлади.

Диссертация учинчи бобининг учинчи параграфида (54) системани

$$A \cdot \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\left(A^T \cdot W\right) + B \cdot \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(B^T \cdot W\right) + C \cdot \frac{\partial W}{\partial y} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left(C^T \cdot W\right) + D \cdot \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\left(D^T \cdot W\right) + Q \cdot W = F \,, \qquad (65)$$

$$0 < t \le T; \, 0 < x < l; \, |y| < \infty; \, |z| < \infty$$

кўринишга келтирадиган $W = W(U,t,x,y,z)$ хосмас алмаштириш мавжуд деган фараз билан қуйидаги $W(t,0,y,z) = W(t,l,y,z)$ чегаравий шартни ва барча t, x учун $\|W\| = \left(W,W\right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow[|y|,|z| \to +\infty]{} 0$ бўлган, $t = 0$ бўлганда

$$W(0,x,y,z) = W(U_0(x,y,z),0,x,y,z) \,, \; 0 \le x \le l, \; |y| < \infty \,, \; |z| < \infty$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи масала қаралади. Бунда $A = A(W,t,x,y,z) > 0$, $B = B(W,t,x,y,z)$, $C = C(W,t,x,y,z)$, $D = D(W,t,x,y,z)$, $Q = Q(W,t,x,y,z)$ – N – ўлчовли квадрат матрицалар; A^T, B^T, C^T, D^T – мос равишда транспонирланган матрицалар.

П соҳада $\Delta t = \Delta, \Delta x = h_x, \Delta y = h_y, \Delta z = h_z$ қадамлар билан тўр қурамиз ва қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$W\left(m\Delta, ih_x, jh_y, kh_z\right) = W_{ijk}^m = W;\ m = \overline{0,M};\ i = \overline{0,n};\ |j|,|k| = 0,1,...;\ M \cdot \Delta = T;\ nh_x = l,$$

шунингдек $\varphi, \psi, \theta, \zeta,\ \psi^{-1}, \theta^{-1}, \zeta^{-1}$, $\varphi W = W_{i,j,k}^m = \hat{W}$, $\psi^{\pm 1} W = W_{i\pm 1,j,k}^m = W_{i\pm 1}$, $\theta^{\pm 1} W = W_{i,j\pm 1,k}^m = W_{j\pm 1}$, $\zeta^{\pm 1} W = W_{i,j,k\pm 1}^m = W_{k\pm 1}$ силжиш оператори ва $\tau = \varphi - 1$, $\xi = \psi - 1$, $\bar{\xi} = 1 - \psi^{-1}$, $\xi^0 = \dfrac{\psi - \psi^{-1}}{2}$, $\eta = \theta - 1$, $\bar{\eta} = 1 - \theta^{-1}$, $\eta^0 = \dfrac{\theta - \theta^{-1}}{2}$, $\gamma = \zeta - 1$, $\bar{\gamma} = 1 - \zeta^{-1}$, $\gamma_0 = \dfrac{\zeta - \zeta^{-1}}{2}$ айирмали операторлар.

Ушбу белгилашлардан сўнг (65) система учун оқимга қарши модификацияланган айирмали схемани даврий чегаравий шартлар ва бошланғич шарт билан қурамиз. Аралаш масала учун айирмали модел қуйидагича ифодаланади:

$$\begin{aligned}
&\left[V + V^{m+1}\right]\tau W + r_x V^+\left(U_{i-\frac{1}{2}}^L\right)B^+\left(U_{i-\frac{1}{2}}^L\right)\bar{\xi} W + r_x W\bar{\xi}\left[B^{T^+}\left(U_{i+\frac{1}{2}}^L\right)\left(U_{i+\frac{1}{2}}^L\right)\right] + \\
&+ r_x V^-\left(U_{i+\frac{1}{2}}^R\right)B^-\left(U_{i+\frac{1}{2}}^R\right)\xi W + r_x W\xi\left[B^{T^-}\left(U_{i-\frac{1}{2}}^R\right)\left(U_{i-\frac{1}{2}}^R\right)\right] + r_y V^+\left(U_{j-\frac{1}{2}}^L\right)C^+\left(U_{i-\frac{1}{2}}^L\right)\bar{\eta} W + \\
&+ r_y W\bar{\eta}\left[C^{T^+}\left(U_{j+\frac{1}{2}}^L\right)\left(U_{j+\frac{1}{2}}^L\right)\right] + r_y V^-\left(U_{j+\frac{1}{2}}^R\right)C^-\left(U_{j+\frac{1}{2}}^R\right)\eta W + r_x W\eta\left[C^{T^-}\left(U_{j-\frac{1}{2}}^R\right)\left(U_{j-\frac{1}{2}}^R\right)\right] + \\
&+ r_z V^+\left(U_{k-\frac{1}{2}}^L\right)D^+\left(U_{k-\frac{1}{2}}^L\right)\bar{\gamma} W + r_z W\bar{\gamma}\left[D^{T^+}\left(U_{k+\frac{1}{2}}^L\right)\left(U_{i+\frac{1}{2}}^L\right)\right] + r_z V^-\left(U_{k+\frac{1}{2}}^R\right)D^-\left(U_{k+\frac{1}{2}}^R\right)\gamma W + \\
&+ r_z W\gamma\left[D^{T^-}\left(U_{k-\frac{1}{2}}^R\right)\left(U_{k-\frac{1}{2}}^R\right)\right] + \Delta V\, QW = \Delta V\, F,
\end{aligned} \tag{66}$$

$$m = \overline{0, M-1},\ i = \overline{0, n-1},\ |j|,|k| = 0,1,...$$

$$W_{0,j,k}^m = W_{n,j,k}^m,\ W_{1,j,k}^m = W_{n-1,j,k}^m,\quad m = \overline{0,M},\ |j|,|k| = 0,1,... \tag{67}$$

$$W_{i,j,k}^0 = W(U_0(i \cdot h_x, j \cdot h_y, k \cdot h_z), 0, i \cdot h_x, j \cdot h_y, k \cdot h_z),\ i = \overline{0,n};\ |j|,|k| = 0,1,..., \tag{68}$$

$V = diag(w_1, w_2, \ldots, w_N)$. Бунда $B(U) = B^+(U) + B^-(U)$, $C(U) = C^+(U) + C^-(U)$, $D(U) = D^+(U) + D^-(U)$, $B^+(U) \geq 0$, $B^-(U) \leq 0$, $C^+(U) \geq 0$, $C^-(U) \leq 0$, $D^+(U) \geq 0$, $D^-(U) \leq 0$, $r_x = \Delta / h_x$, $r_{\mathrm{y}} = \Delta / h_y$, $r_{\mathrm{z}} = \Delta / h_z$, $B = B\left(W_{i,j,k}^m, m \cdot \Delta, i \cdot h_x, j \cdot h_y, k \cdot h_z\right)$ ва ҳ.к.

Қуйидаги реконструкцияни қараймиз:

$$U_{i+1/2}^L = W_i^m + \frac{1}{2}\psi(R_i^m)(W_i^m - W_{i-1}^m),\ U_{i-1/2}^R = W_i^m - \frac{1}{2}\psi(\frac{1}{R_i^m})(W_{i+1}^m - W_i^m),$$

$$U_{j+1/2}^L = W_j^m + \frac{1}{2}\psi(R_j^m)(W_j^m - W_{j-1}^m),\ U_{j-1/2}^R = W_j^m - \frac{1}{2}\psi(\frac{1}{R_j^m})(W_{j+1}^m - W_j^m),$$

$$U_{k+1/2}^L = W_k^m + \frac{1}{2}\psi(R_k^m)(W_k^m - W_{k-1}^m),\ U_{k-1/2}^R = W_k^m - \frac{1}{2}\psi(\frac{1}{R_k^m})(W_{k+1}^m - W_k^m),$$

$$\psi(\frac{1}{R})=diag(\psi(\frac{1}{R_1}),\psi(\frac{1}{R_2}),\ldots,\psi(\frac{1}{R_N})),\ (R_l)_i^m=\frac{(w_l)_{i+1}-(w_l)_i}{(w_l)_i-(w_l)_{i-1}},\ (R_l)_j^m=\frac{(w_l)_{j+1}-(w_l)_j}{(w_l)_j-(w_l)_{j-1}},$$

$$(R_l)_k^m=\frac{(w_l)_{k+1}-(w_l)_k}{(w_l)_k-(w_l)_{k-1}},\ U_{i+1/2}^L=W_i^m+\frac{1}{2}\psi(R_i^m)(W_i^m-W_{i-1}^m),$$

$$U_{i-1/2}^R=W_i^m-\frac{1}{2}\psi\left(\frac{1}{R_i^m}\right)(W_{i+1}^m-W_i^m),\quad U_{j+1/2}^L=W_j^m+\frac{1}{2}\psi(R_j^m)(W_j^m-W_{j-1}^m),$$

$$U_{j-1/2}^R=W_j^m-\frac{1}{2}\psi\left(\frac{1}{R_j^m}\right)(W_{j+1}^m-W_j^m),\ U_{k+1/2}^L=W_k^m+\frac{1}{2}\psi(R_k^m)(W_k^m-W_{k-1}^m),$$

$$U_{k-1/2}^R=W_k^m-\frac{1}{2}\psi\left(\frac{1}{R_k^m}\right)(W_{k+1}^m-W_k^m),\ \psi(R)=diag(\psi(R_1),\psi(R_2),\ldots,\psi(R_N)),$$

$$\psi\left(\frac{1}{R}\right)=diag(\psi\left(\frac{1}{R_1}\right),\psi\left(\frac{1}{R_2}\right),\ldots,\psi\left(\frac{1}{R_N}\right),\ (R_l)_i^m=\frac{(w_l)_{i+1}-(w_l)_i}{(w_l)_i-(w_l)_{i-1}},\ (R_l)_j^m=\frac{(w_l)_{j+1}-(w_l)_j}{(w_l)_j-(w_l)_{j-1}}.$$

Таклиф қилинган схеманинг $J_m=h_xh_yh_z\sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(A(W_{ijk}^m)W_{ijk}^m,W_{ijk}^m\right)$ энергетик нормада турғунлиги исбот қилинган.

Учинчи боб тўртинчи параграфининг асосий мақсади олдинги параграфларда таклиф қилинган айирмали схемаларни ўзаро таққослаш учун ҳисоблаш экспериментини ўтказишдан иборат.

Муайян чизиқсиз гиперболик тенглама мисолида таклиф этилган айирмали схемаларнинг турғунлиги тадқиқ этилган.

“Квазичизиқли гиперболик система қўйилган аралаш масала учун юқори аниқликдаги айирмали схемалар” деб аталувчи тўртинчи боб квазичизиқли гиперболик системаларга қўйилган аралаш масала учун айирмали схемалар қуришга бағишланган.

Бунда $\Pi=\{(t,x,y,z):\ 0\le t\le T;\ 0\le x\le l;\ |y|<\infty;\ |z|<\infty\}:$ соҳада

$$A_1\cdot\frac{\partial U}{\partial t}+B_1\cdot\frac{\partial U}{\partial x}+C_1\cdot\frac{\partial U}{\partial y}+D_1\cdot\frac{\partial U}{\partial z}+Q\cdot U=F, \qquad (69)$$

квазичизиқли система учун x=0 чегарада:

$$U^I=S_1\cdot U^{II},\quad 0<t\le T\ ;\ |y|<\infty\ ;\quad |z|<\infty\ ; \qquad (70)$$

$x=l$ бўлганда

$$U^{II}=R_1\cdot U^I,\quad 0<t\le T\ ;\ |y|<\infty\ ;\ |z|<\infty\ ; \qquad (71)$$

чегаравий шартларни ва t=0 бўлганда

$$U(0,x,y,z)=U_0(x,y,z)\ ,0\le x\le l\ ;\ |y|<\infty\ ;\quad |z|<\infty. \qquad (72)$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи аралаш масала қаралади. $F=F(t,x,y,z)$, $U_0(x,y,z)$ – чексизликда нолга интиладиган вектор-функциялар; $S_1=S_1(t,x,y,z),R_1=R_1(t,x,y,z)$ – мос тарзда $N_0\times N_1$ ва $N_1\times N_0$, ўлчовли тўғри тўртбурчак матрицалар; $U=(U^I,U^{II},U^{III})-$ N ўлчовли номаълум вектор-функция; $U^I=\left(u_1,u_2,\ldots,u_{N_0}\right)^T$, $U^{II}=\left(u_{N_0+1},u_{N_0+2},\ldots,u_{N_0+N_1}\right)^T$, $U^{III}=\left(u_{N_0+N_1+1},u_{N_0+N_1+2},\ldots,u_N\right)^T$,

$N = N_0 + N_1 + N_2 \neq 0$, бу ерда $N_i \geq 0$, $i = 0,1,2$ – бутун сонлар, T, l – мусбат ҳақиқий сонлар.

Фараз қиламиз, (69)-(72) аралаш масалани қуйидаги кўринишга келтирадиган хосмас алмаштириш $T = T(U,t,x,y,z)$ мавжуд бўлсин:

$$A\cdot\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}(A^T\cdot W)+B\cdot\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}(B^T\cdot W)+C\cdot\frac{\partial W}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}(C^T\cdot W)+$$

$$+D\cdot\frac{\partial W}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}(D^T\cdot W)+Q\cdot W=F\quad 0<t\leq T\ ;\ 0<x<l\ ;\ |y|<\infty;\ |z|<\infty; \qquad (69')$$

$x = 0$ чегарада $\quad W^I = S\cdot W^{II},\quad 0<t\leq T\ ;\ |y|<\infty\ ;\ |z|<\infty. \qquad (70')$

$x = l$ чегарада $\quad W^{II} = R\cdot W^{I},\quad 0<t\leq T\ ;\ |y|<\infty\ ;\ |z|<\infty. \qquad (71')$

шартларни ва $t = 0$ да

$$W(0,x,y,z)=W(U_0(x,y,z),0,x,y,z)\ ,\quad 0\leq x\leq l,\ \ |y|<\infty,\ \ |z|<\infty. \qquad (72')$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини талаб этилади.

(69′)-(71′) чегаравий шартларни диссипатив деб фараз қилган ҳолда (69′) система учун диссипатив энергия интегралини қурамиз. Шу мақсадда (69′) системани (ўнгдан) W векторга скаляр кўпайтирамиз:

$$(A\cdot\frac{\partial W}{\partial t},W)+(\frac{\partial}{\partial t}[A^T\cdot W],W)+(B\cdot\frac{\partial W}{\partial x},W)+(\frac{\partial}{\partial x}[B^T\cdot W],W)+(C\cdot\frac{\partial W}{\partial y},W)+$$

$$+(\frac{\partial}{\partial y}[C^T\cdot W],W)+(D\cdot\frac{\partial W}{\partial z},W)+(\frac{\partial}{\partial z}[D^T\cdot W],W)+(QW,W)=(F,W).$$

Бир қанча текшириб кўриш содда бўлган алмаштиришлардан сўнг

$$\frac{\partial}{\partial t}(A^TW,W)+\frac{\partial}{\partial x}(B^TW,W)+\frac{\partial}{\partial y}(C^TW,W)+\frac{\partial}{\partial z}(D^TW,W)=(GW,W)+(F,W) \qquad (73)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бунда $G = G(t,x,y,z) = -\frac{1}{2}[Q + Q^*]$ бўлади. Ҳосил бўлган айниятни $\Gamma_{t_1,t_2} = \{(t,x,y,z):\ t_1 \leq t \leq t_2\ ;\ 0\leq x\leq l\,; |y|<\infty;\ |z|<\infty\}$:

соҳа бўйича интеграллаб

$$I(t_2)-I(t_1)+\int_{t_1}^{t_2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[-(B^TW,W)|_{x=0}+(B^TW,W)|_{x=l}]dtdydz=$$

$$\iiint_{\Pi_{t_1,t_2}}\int[(GW,W)+(F,W)]dtdxdydz$$

тенгликни топамиз, бу ерда $I(t)=\iiint_{t=const}(AW,W)dxdydz$.

Ҳосил бўлган охирги айният чексизликда (C^TW,W) ва (D^TW,W) нолга интиладиган W функциялар синфидан олинган. Чегаравий шартларнинг диссипативлигидан фойдаланиб, яъни x=0 бўлганда $(B^TW,W)|_{x=0}\leq 0$ ва x=l бўлганда $-(B^TW,W)|_{x=l}\leq 0$ шартдан ҳамда интеграл тенгсизлик ҳақидаги леммадан фойдаланиб, қуйидаги тенгсизликни ҳосил қиламиз:

$$\sqrt{I(t)}\leq\sqrt{I(0)}\cdot e^{\frac{M}{2}t}+N\cdot\frac{e^{\frac{M}{2}t}-1}{M} \qquad (74)$$

Бу ерда ўзгармас M сони $\frac{1}{2}(Q+Q^{*})$ матрица нормасини, N – эса F ўнг томонни баҳолайди. (74) баҳо (69′)-(72′) аралаш масала турғунлигини ва ягоналигини исбот қилиши мумкин.

(69′)-(72′) система учун

$$W(t,0,y,z)=W(t,l,y,z). \tag{75}$$

даврийлик чегаравий шарти билан оқимга қарши модификацияланган айирмали схемани қурамиз. Фараз қиламиз, A=E – бирлик матрица ва B x ўзгарувчи бўйича l давр билан даврийлик шартини қаноатлантиради.

(69′)-(72′) масала учун айирмали моделни қараймиз:

$$\begin{gathered}
[V+V^{m+1}]\tau W+r_xV_{i-1}B^{+}_{i-1}\bar{\xi}W+r_xV\bar{\xi}\left[\left(B^{+}\right)^{T}W\right]+r_xV_{i+1}B^{-}_{i+1}\xi W+r_xV\bar{\xi}\left[\left(B^{-}\right)^{T}W\right]+\\
+r_yV_{j-1}C^{+}_{j-1}\bar{\eta}\xi W+r_yV\bar{\eta}\left[\left(C^{+}\right)^{T}W\right]+r_yV_{j+1}C^{-}_{j+1}\bar{\eta}W+r_yV\bar{\eta}\left[\left(C^{-}\right)^{T}W\right]+\\
+r_zV_{k-1}D^{+}_{k-1}\bar{\gamma}W+r_zV\bar{\gamma}\left[\left(D^{+}\right)^{T}W\right]+r_zV_{k+1}D^{-}_{k+1}\bar{\gamma}W+r_zV\bar{\gamma}\left[\left(D^{-}\right)^{T}W\right]+\Delta VQW=\Delta VF;\\
m=\overline{0,M-1};\;\; i=\overline{0,n\text{-}1};\;\; |j|,|k| \;=\; 0,1,...
\end{gathered} \tag{76}$$

$$W^{m}_{0,j,k}=W^{m}_{n,j,k}\;;\;\; W^{m}_{1,j,k}=W^{m}_{n-1,j,k}\;;\;\; m=\overline{0,M}\;;\;\; |j|,|k| \;=\; 0,1,...\;; \tag{77}$$

$$W^{0}_{i,j,k}=W(U_0(i\cdot h_x,j\cdot h_y,k\cdot h_z),0,i\cdot h_x,j\cdot h_y,k\cdot h_z);\; i=\overline{0,n}\;;\; |j|,|k| = 0,1,..., \tag{78}$$

$V=diag(W_1,\ W_2,\ ...,\ W_N)$. Бу ерда $B(u)=B^{+}(u)+B^{-}(u)$, $C(u)=C^{+}(u)+C^{-}(u)$, $D(u)=D^{+}(u)+D^{-}(u)$, $B^{+}(u)\geq 0,\;\; B^{-}(u)\leq 0,\;\; C^{+}(u)\geq 0,\;\; C^{-}(u)\leq 0,\;\; D^{+}(u)\geq 0,\;\; D^{-}(u)\leq 0,\;\; \forall u\in\mathbf{R}$, $r_x=\Delta/h_x,\;\; r_y=\Delta/h_y,\;\; r_z=\Delta/h_z$ ва ҳ.к.

11-теорема. Фараз қиламиз, B матрица x ўзгарувчи бўйича l давр билан даврий бўлсин $B\left(W^{m}_{0,j,k},t_m,0,y_j,z_k\right)=B\left(W^{m}_{n,j,k},t_m,l,y_j,z_k\right)$ ва (77) шарт бажарилсин. У ҳолда (76) айирмали моделнинг бошланғич ва чегаравий шартларни қаноатлантирадиган сонли ечими учун диссипатив энергиянинг дискрет аналоги $J_m\leq e^{\frac{1}{2}T(2\mu+1)}J_0+\dfrac{e^{\frac{1}{2}T(2\mu+1)}-1}{2\mu+1}\Phi$, $m=\overline{1,M}$ ўринли бўлади.

Тўртинчи бобнинг иккинчи параграфида ечимнинг тўла вариацияси ўсмайдиган схемалар ва уларнинг турғунлиги тадқиқ этилган.

Турли чеклагичлардан фойдаланилиши реконструкция қилинаётган функция монотонлигини ва айирмали схеманинг TVD хоссасини, шунингдек, айирмали схема билан сонли ечимни ҳисоблашда турғунликни таъминлайди. Бунда ячейка чегарасида функциянинг қиймати масала ечимидан қўшни нуқтадаги функция қиймати бўйича эмас, балки қуйидаги тенгликдан олинган қиймат орқали ҳисобланади: $U(x)=U_i+\alpha_i\left(x-\frac{1}{2}(x_i+x_{i+1})\right)$. Бўлакли-чизиқли тақсимот шундай танланадики, қаралаётган ячейкада реконструкция қилинаётган функция монотон бўлиши шарт. Бунда чеклагич албатта ягона эмас. Қаралаётган схема учун монотонликни сақловчи қуйидаги бутун бир синф чеклагичларини танлаш мумкин:

$\psi\left(R^{m}_{j}\right)=\min\mathrm{mod}\left(1,\,R^{m}_{j}\right)$ – minmod чеклагичи, бунда

$$\min\operatorname{mod}(x,y)=\frac{1}{2}(sign\,x+sign\,y)\min(|x|,|y|).$$

(69′), (72′), (75) аралаш масала учун TVD схема қуйидагича шакллантирилади:

$$[V+V^{m+1}]\tau W+r_xV^{+}(U^L_{i-1/2})B^{+}(U^L_{i-1/2})\overline{\xi}W+r_xW\overline{\xi}[B^{T+}(U^L_{i+1/2})U^L_{i+1/2}]+r_xV^{-}(U^R_{i+1/2})B^{-}(U^R_{i+1/2})\xi W+$$
$$+r_xW\xi[B^{T-}(U^R_{i-1/2})U^R_{i-1/2}]+r_yV^{+}(U^L_{j-1/2})C^{+}(U^L_{j-1/2})\overline{\eta}W+r_yW\overline{\eta}[C^{T+}(U^L_{j+1/2})U^L_{j+1/2}]+$$
$$+r_yV^{-}(U^R_{j+1/2})C^{-}(U^R_{j+1/2})\eta W+r_yW\eta[C^{T-}(U^R_{j-1/2})U^R_{j-1/2}]+r_zV^{+}(U^L_{j-1/2})D^{+}(U^L_{j-1/2})\overline{\gamma}W+$$
$$+r_zW\overline{\gamma}[D^{T+}(U^L_{k+1/2})U^L_{k+1/2}]+r_zV^{-}(U^R_{k+1/2})D^{-}(U^R_{k+1/2})\gamma W+r_zW\gamma[D^{T-}(U^R_{k-1/2})U^R_{k-1/2}]+$$
$$+\Delta VQW=\Delta VF;\ \ m=\overline{0,M-1}\ ;\ \mathrm{i}=\overline{0,\text{n-1}}\ ;\ |\mathrm{j}|,|k|\ =\ 0,1,... \qquad (79)$$

$$W^m_{0,j,k}=W^m_{n,j,k}\ ;\ \ W^m_{1,j,k}=W^m_{n-1,j,k}\ ;\ \ m=\overline{0,M}\ \ ;\ \ |j|,|k|\ =\ 0,1,...\ ; \qquad (80)$$

$$W^0_{i,j,k}=W(U_0(i\cdot h_x,j\cdot h_y,k\cdot h_z),0,i\cdot h_x,j\cdot h_y,k\cdot h_z);\ i=\overline{0,n}\ ;\ |j|,|k|=0,1,..., \qquad (81)$$

Қуйидаги реконструкцияни қараймиз: $U^L_{i+1/2}=W^m_i+\frac{1}{2}\psi(R^m_i)(W^m_i-W^m_{i-1})$,

$$U^R_{i-1/2}=W^m_i-\frac{1}{2}\psi\left(\frac{1}{R^m_i}\right)(W^m_{i+1}-W^m_i),\ \ U^L_{j+1/2}=W^m_j+\frac{1}{2}\psi(R^m_j)(W^m_j-W^m_{j-1}),$$

$$U^R_{j-1/2}=W^m_j-\frac{1}{2}\psi\left(\frac{1}{R^m_j}\right)(W^m_{j+1}-W^m_j),\ \ U^L_{k+1/2}=W^m_k+\frac{1}{2}\psi(R^m_k)(W^m_k-W^m_{k-1}),$$

$$U^R_{k-1/2}=W^m_k-\frac{1}{2}\psi\left(\frac{1}{R^m_k}\right)(W^m_{k+1}-W^m_k),\ \ \psi(R)=diag(\psi(R_1),\psi(R_2),...,\psi(R_N)),$$

$$\psi\left(\frac{1}{R}\right)=diag\left(\psi\left(\frac{1}{R_1}\right),\psi\left(\frac{1}{R_2}\right),...,\psi\left(\frac{1}{R_N}\right)\right),\ (R_l)^m_i=\frac{(w_l)_{i+1}-(w_l)_i}{(w_l)_i-(w_l)_{i-1}},\ (R_l)^m_j=\frac{(w_l)_{j+1}-(w_l)_j}{(w_l)_j-(w_l)_{j-1}},$$

$$(R_l)^m_k=\frac{(w_l)_{k+1}-(w_l)_k}{(w_l)_k-(w_l)_{k-1}}.$$

Бу ерда $\psi:\mathrm{R}\mapsto\mathrm{R}$ – узлуксиз функция, *лимитёр деб аталади* (*чеклагич*). $\psi=0$ биринчи тартибли аниқликдаги схемага, $\psi=1$ – оқимга қарши бир томонлама иккинчи тартибли схемага мос келади.

Турли кўринишдаги чеклагичларни танлаб, қаралаётган дифференциал масалани аппрокцимация қиладиган бутун бир синф айирмали схемаларини олиш мумкин. Шунга ўхшаш таклиф қилинган айирмали схеманинг турғунлигини ҳам исбот қилиш мумкин.

Бироқ бу схемаларни муайян масалаларга қўллашда ечимга яқинлашиш ва узилишларни аниқ акс эттириш каби хоссаларида кескин фарқ қилади. Биринчи тартибли аппроксимацияга эга айирмали схемалардан фойдаланишда ечим вақт ўтиши билан фазо бўйича силлиқлаштирилади.

12-теорема. Фараз қиламиз, B матрица x бўйича l давр билан даврий бўлсин: $B(W^m_{0,j,k},t_m,0,y_j,z_k)=B(W^m_{n,j,k},t_m,l,y_j,z_k)$ ва (80) шарт ўринли бўлсин. У ҳолда (79) айирмали модел (80) чегаравий шартлар билан тўла вариациянинг ўсмаслигини таъминлаш билан ечимнинг монотонлигини сақловчи диссипатив энергия интегралининг дискрет аналоги бўлган

$J_m \le e^{\frac{1}{2}T(2\mu+1)} J_0 + \dfrac{e^{\frac{1}{2}T(2\mu+1)}-1}{2\mu+1}\Phi$, $m=\overline{1,M}$ тенгликнинг бажарилишини таъминлайди.

Тўртинчи параграфнинг учинчи боби Риман масаласини тақрибий ечишга асосланган айирмали схемалар турғунлигини тадқиқ этишга бағишланган. Бунда учинчи бобнинг иккинчи параграфида (69′)-(72′) квазичизиқли системага қўйилган аралаш масала учун таклиф этилган айирмали схемани система ҳолатида оқимга қарши схемага умумлаштирилган ҳолда қаралади. Бу схема характеристик методга яқин ва Риман масаласини тақрибий ечишга бағишланган.

(69′)-(72′) система учун модификацияланган айирмали схемани қурамиз:

$$V_{i,j.k}^{m+1}A_{i,j,k}^{m+1}\left(W_{i,j,k}^{m+1}-W_{i,j,k}^{m}\right)+V_{i,j,k}^{m}\left(A\left(W_{i,j,k}^{m+1}\right)-A\left(W_{i,j,k}^{m}\right)\right)+$$

$$r_xV_{i-1/2,j,k}^{m}B_{i-1/2,j,k}^{m}\left(W_{i+1/2,j,k}^{m}-W_{i-1/2,j,k}^{m}\right)+r_xV_{i+1/2,j,k}^{m}\left[\left(B^TW\right)_{i+1/2,j,k}^{m}-\left(B^TW\right)_{i-1/2,j,k}^{m}\right]+$$

$$+r_yV_{i,j-1/2,k}^{m}C_{i,j-1/2,k}^{m}\left(W_{i,j+1/2,k}^{m}-W_{2,j-1/2,k}^{m}\right)+r_yV_{i,j+1/2,k}^{m}\left[\left(C^TW\right)_{i,j+1/2,k}^{m}-\left(C^TW\right)_{i,j-1/2,k}^{m}\right]+$$

$$+r_zV_{i,j,k-1/2}^{m}D_{i,j,k-1/2}^{m}\left(W_{i,j,k+1/2}^{m}-W_{i,j,k-1/2}^{m}\right)+r_zV_{i,j,k+1/2}^{m}\left[\left(D^TW\right)_{i,j,k+1/2}^{m}-\left(D^TW\right)_{i,j,k-1/2}^{m}\right]=0 \quad (82)$$

$$m=\overline{0,M-1},\, i=\overline{0,N},\ j,k=0,\pm 1,\pm 2,....$$

$$\left(W^I\right)_{0,j,k}^{m}=S\left(W^{II}\right)_{0,j,k}^{m},\ m=\overline{1,M},\ j,k=0,\pm 1,\pm 2,... \quad (83)$$

$$\left(W^{II}\right)_{N,j,k}^{m}=R\left(W^{I}\right)_{N,j,k}^{m},\ m=\overline{1,M},\ j,k=0,\pm 1,\pm 2,... \quad (84)$$

$$W_{i,j,k}^{0}=W_0\left(ih_x,jh_y,kh_z\right);\quad i=\overline{0,N},|j|,|k|=0,1,2,3\ldots, \quad (85)$$

бу ерда $V=diag\left(w_1,w_2,\ldots,w_N\right)$,

$$W_{p+1/2,j,k}^{m}=\frac{1}{2}\left(W_{p,j,k}^{m}+W_{p+1,j,k}^{m}\right)+\frac{1}{2}\boldsymbol{B}_{p,j,k}^{m}\left(W_{p,j,k}^{m}-W_{p+1,j,k}^{m}\right),\, p=i,i-1,$$

$$W_{i,l+1/2,k}^{m}=\frac{1}{2}\left(W_{i,l,k}^{m}+W_{i,l+1k}^{m}\right)+\frac{1}{2}\boldsymbol{C}_{i,l,k}^{m}\left(W_{i,l,k}^{m}-W_{i,l+1,k}^{m}\right),\quad j=j,\ j-1,$$

$$W_{i,j,q+1/2}^{m}=\frac{1}{2}\left(W_{i,j,q}^{m}+W_{i,j,q+1}^{m}\right)+\frac{1}{2}\boldsymbol{D}_{i,j,q}^{m}\left(W_{i,j,q}^{m}-W_{i,j,q+1}^{m}\right),\quad q=k,\,k-1,$$

$\boldsymbol{B}=\Omega_R(B)\left[sign\,\lambda_p(B)\delta_{pl}\right]\Omega_L(B)$, $\boldsymbol{C}=\Omega_R(C)\left[sign\,\lambda_p(C)\delta_{pl}\right]\Omega_L(C)$, $\boldsymbol{D}=\Omega_R(D)\left[sign\,\lambda_p(D)\delta_{pl}\right]\Omega_L(D)$.

13-теорема. Фараз қиламиз, (82)-(85) айирмали масаланинг $|j|,|k|\to\infty$ бўлганда нолга интилувчи ечимлари $W(t_m,x_i,y_j,z_k)$ учун $A(W_{i,j,k}^{m})>0,\, m=\overline{0,M}, i=\overline{0,N},\, |j|,\,|k|=0,1,....$ тенгсизлик ва чегарвий шартларни қаноатлантирувчи ечимлар учун $\left(BW,W\right)_{1/2,j,k}^{m}\le 0$, $-\left(BW,W\right)_{N-1/2,j,k}^{m}\le 0$ тенгсизликлар ўринли бўлсин. У ҳолда (82)-(85) айирмали модель $\sqrt{J_n}$

энергетик нормада турғун бўлади, бунда $J_m = h_x h_y h_z \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(A(W_{i,j,k}^m) W_{i,j,k}^m , W_{i,j,k}^m \right)$.

ХУЛОСА

Диссертация иши квазичизиқли гиперболик системалар учун адекват ҳисоблаш моделларини қуриш ва тадқиқ этишга бағишланган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат.

1. Икки ўлчовли ўзгармас коэффициентли гиперболик системага қўйилган аралаш масаланинг сонли ечимини топиш учун айирмали схема қурилди.
2. Ўзгармас коэффициентли икки ўлчовли чизиқли система ечимининг экспоненциал турғунлиги исбот қилинган.
3. Икки ўлчовли ўзгарувчан коэффициентли гиперболик системага қўйилган аралаш масаланинг сонли ечимини топиш учун айирмали схема қурилди.
4. Ўзгарувчан коэффициентли икки ўлчовли чизиқли система ечимининг экспоненциал турғунлиги исбот қилинган.
5. Айирмали схема ечимининг дифференциал масала ечимига яқинлашиши модел масалада асосланган.
6. Квазичизиқли гиперболик системасини сонли ечиш учун айирмали схемалар қурилган.
7. Квазичизиқли гиперболик системага қурилган айирмали схемаларнинг турғунлиги исбот қилинган.
8. Квазичизиқли гиперболик системасига қурилган айирмали схема ечимининг яқинлашиши модел масалаларда тадқиқ этилган.
9. Квазичизиқли гиперболик система учун, тўр тенгламаларини ечиш учун итерация методи таклиф этилган.
10. Квазичизиқли гиперболик системаларни сонли ечиш учун таклиф қилинган айирмали схемалар ўзаро таққослаб таҳлил қилинган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.02
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНОЙ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА

ХУДОЙБЕРГАНОВ МИРЗОАЛИ УРАЗАЛИЕВИЧ

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

01.01.03 – Вычислительная и дискретная математика
(физико-математические науки)

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА (DSc) ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

Ташкент – 2021

Тема докторской (DSc) диссертации зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за №B2018.1.DSc/FM111.

Докторская диссертация выполнена в Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский) размещен на веб-странице Научного совета (http://ik-fizmat.nuu.uz/) и информационно-образовательного портала «ZIYONET» по адресу (www.ziyonet.uz)

Научный консультант:	**Алоев Рахматилло Джураевич** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Темирбеков Нурлан Муханович** доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент НАН Республики Казахстана
	Хаётов Абдулло Раҳмонович доктор физико-математических наук, профессор
	Нормурадов Чори Бегалиевич доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация:	**Университет мировой экономики и дипломатии**

Защита диссертации состоится « 2 » декабря 2021 года в 16:00 часов на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 при Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871)227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С докторской диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за № 103. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан « 18 » ноября 2021 года.
(протокол рассылки № 9 от « 3 » ноября 2021 года).

А.Р. Марахимов
Председатель Научного совета по присуждению ученой степени, т.ф.д., профессор

З.Р. Рахмонов
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученой степени, д.ф.-м.н.

Х.М.Шадиметов
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению научных степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация докторской диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. Мировые исследования, посвященные построению и исследованию разностных схем решения смешанных задач для гиперболических систем, являются актуальными и востребованными и имеют широкое применение в областях сейсмологии, геологоразведки, гидрологии и акустики различных знаний. В силу этого представляется особо значимой проблема разработки численных методов, доказать их устойчивость и сходимость решение смешанных задач для нестационарных и сверхзвуковых стационарных течений сжимаемого газа остается одной из важных задач вычислительной математики.

В настоящее время внедрение современных технологии в сферах производства, нефти и газа, градостроительства, медицины, в частности, для увеличения темпов развития научно-технических возможностей, расширения интеграции науки и производств в мире проводится много научных исследований по совершенствованию теорию разностных схем при разработках адекватных вычислительных моделей для смешанных задач для квазилинейных гиперболических систем. При этом важную роль играет построение разностной схемы для смешанных задач и доказательство их устойчивость. Поэтому построение разностных схем для численного решения квазилинейной гиперболической системы, доказательство устойчивость и сходимость считается целевым научным исследованием.

В стране особое внимание уделяется разработки численно-аналитических методов решений задач инженерии, биомедицины, геофизики и акустики, имеющих научное и практическое применение фундаментальных наук. В частности, важные результаты получены при разработке численных методов решения смешанных задач для симметричных гиперболических уравнений и в доказательстве их устойчивости. «Проведение научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям «Функциональный анализ, алгебра, дифференциальные уравнения, математическая физика, математическое моделирование, вычислительная и дискретная математика, теория вероятностей и математическая статистика» в деятельности Института математики имени В.И.Романовского АН РУз, является одной из основных задач[1]. Для обеспечения выполнения постановления важно построить разностную схему для линейной двумерной смешанной задачи с постоянным коэффициентом и исследовать её экспоненциальную устойчивость.

Данное диссертационное исследование в определенной степени служит осуществлению задач, указанных в Указе Президента Республики Узбекистан №УП – 4947 от 07 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», в постановлениях №ПП – 2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования

---

[1] Постановление Президента Республики Узбекистан № ПП–4708 «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» от 07 мая 2020 года.

научно-исследовательской деятельности», №ПП – 2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования», №ПП – 3682 от 27 апреля 2018 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов», №ПП – 4708 от 07 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», а также в других нормативно–правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Настоящее исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации[2].

Исследования по построению и усовершенствованию разностных схем, по доказательству устойчивости и изучению сходимости решения ведутся в крупных научных центрах и высших учебных заведениях мира, в частности, таких как: Arizona University, University of Maryland, University of California at San-Diego, University of Texas at Austin, University of Michigan, University of North Caroline (США), University of Malaga (Испания), Delft University (Нидерланды), Institute of mathematics of Jena University, Institute of mathematics of University Mannheim, Technische Universität Braunschweig (Германия), Universita degli Studi di Roma La Sapienza, Universita della Basilicata (Италия), University of Oslo (Норвегия), Katholieke Universiteit, Leuven (Бельгия), Universidad de Zaragoza, Universite de Nantes, Laboratoire de Mathematiques, Jean Leray, Universite de Toulouse, Université Joseph Fourier (Франция), Mathematical institute of Serbian Academy of Sciences and Arts (Сербия), Babeş-Bolyai University (Румыния), Kingston University London, Cambridge University (Англия), Санкт-Петербургский Национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, Институт математики Сибирского отделения Российской академии наук, Московский физико-технический институт, Математический институт Российской академии наук, Московский, Санкт-Петербургский, Новосибирский государственные университеты, Институт вычислительной математики Российской академии наук, Институт гидродинамики СО РАН (Россия).

В результате современных проведенных научных исследований в мире для вычисления разрывных решений квазилинейных систем уравнений по построению разностных схем, доказательству их сходимости получен целый ряд нетрадиционных научных результатов: обоснован метод “замороженных коэффициентов” для разностных схем, развит энергетический метод исследования устойчивости (Институт вычислительной математики

---

[2] Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации: Journal of Approximation Theory, Applied Mathematics and Computation, Journal of Computational and Applied Mathematics http://www.journals.elsevier.com/mathematics; Calcolo, Numerical Algorithms, BIT Numerical Mathematics, Сибирский журнал вычислительной математики, Журнал вычислительной математики и математической физики, http://www.springer.com/mathematics, также были использованы и другие источники.

Российской Академии наук); с учетом критерия монотонности разработан алгоритм построения нелинейных, монотонных схем высокого порядка аппроксимации для уравнений и систем гиперболического типа, основанный на использовании метода неопределенных коэффициентов (Институт автоматизации проектирования РАН); для гиперболических систем с постоянными коэффициентами на движущейся области, применяя энергетический метод, получена априорная оценка для решения смешанной задачи; после соответствующей замены переменных получена гиперболическая система уравнений с переменными коэффициентами. С помощи операторов суммирования по частям (Summation-by-Parts) по координатам получена устойчивая разностная схема. (Швеция, Linköping University); создана теория для однородных краевых задач с постоянными и переменными коэффициентами, построена строгая теория устойчивости для определенных краевых задач (Adelphy College, Garden City, Brookhaven National laboratories, Upton, Нью-Йорк, США; University of Uppsala, Швеция); исследованы корректности прямых и обратных задач для одномерных нелинейных уравнений гиперболического типа (Logo Alpen Adria Universität); для построения устойчивых решений смешанной задачи двумерной линейной гиперболической системы (в случае переменных коэффициентов и с младшими членами) создана функция Ляпунова, и получена априорная оценка для неё (University Pierre et Marie Curie, Париж, Universitè catholique Louvain, Louvain-La-Neuve, Бельгия); построены консервативные разностные схемы для параболических и гиперболических уравнений и систем уравнений, для которых выполнен аналог этого закона (Fudan University, Shanghai, Китай); для нелинейных гиперболических систем, представляемых в специальном виде, построена адекватная вычислительная модель, в которой доказательство теоремы об устойчивости разносных схем основывается на построении дискретного интеграла энергии (Институт математики Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирский государственный университет, Россия, Национальный университет Узбекистана).

На сегодня в мире широко осуществляются научно-исследовательские работы в приоритетных направлениях, в том числе: разработка методов приближенного решения смешанных задач на линейных двумерных и более-мерных гиперболических системах с переменными коэффициентами; исследование устойчивость вычислительных методов для численного решения смешанных задач для квазилинейных гиперболических систем.

Степень изученности проблемы. Устойчивость как основное свойство разностных схем, является самостоятельной областью исследования. В настоящее время для линейных задач математической физики достаточно полно разработана теория разностных схем. Среди работ, посвященных основам этой теории, следует отметить работы А.А.Самарского и А.В.Гулина, С.К.Годунова, Р.Рихтмайера и К.Мортона, Ю.И.Шокина, З.И.Федотова, а также В.С.Рябенького, А.Ф.Филиппова, Е.Г.Дьяконова, В.Б. Андреева, Ю.П. Попова, Г.И. Марчука, А.М.Блохина и Р.Д.Алаева. В работах А.А. Самарского и А.В. Гулина теория устойчивость разностных схем построена на основе операторно-разностных схем. Монотонные разностные схемы играют важную роль при численном решении систем уравнений гиперболического типа. Обзору свойств, подобных монотонности разностных схем для гиперболических систем посвящены работы Я.А.Холодова, П.С.Уткина, А.С.Холодова, И.В.Цыбулина.

Исследования задач для нелинейных гиперболических систем уравнения приведены в научных работах В.Л.Рождественского, Н.Н.Яненко, F.T.Eleuterio, А.Г.Куликовского, Н.В.Погорелова, А.Ю.Семенова, John A.Trangenstein, K.W.Morton, D.F.Mayers, R.J.LeVeque, N.Samira, J.Nordström. Метод дифференциального приближения, который связан со школой Н.Н.Яненко, используется для исследования ряда свойств разностной схемы. Следующая теория устойчивости, которые основана на исследование характеристического уравнения разностной схемы была создана Крайссом (H.O. Kreiss) для начально-краевых задач. В работах О.А. Ковыркиной и В.В. Остапенко показано, что даже если в TVD-схемах порядок их точности уменьшается на каждом экстремуме решения до первого.

Построение и исследование устойчивость ENO и WENO схемы, которые имеют высшее прядок аппроксимации изучались и развивались в работах C.B.Macdonald, M.Mohammad, S.J.Ruuth, M.Lahooti, A.Pishevar П.В. Булата, К.Н. Волкова и Е.В. Ворожцова. Использование таких схем позволило получить точное и монотонное решение задачи при наличии слабых и сильных разрывов. В работах G.Bastin, J.-M.Coron, A.Diagne исследована устойчивость решения смешанной задачи для гиперболических систем на основе построения функции Ляпунова. В нашей стране А.С. Расулов, М.Б. Бакоев и их ученики занимались численными методами решения смешанных задач для гиперболических уравнений с использованием методов Монте-Карло. Д.Утебаев построил дифференциальные схемы высокого порядка для нестационарных уравнений и оценил их точность. Р.Д. Алоев создал адекватные вычислительные модели для симметричных гиперболических систем и исследовал влияние граничных условий на устойчивость разностных схем.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, в которой выполняется диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно-исследовательских работ ОТ-Ф4-28 “Построение адекватных вычислительных моделей для гиперболических систем” (2017-2020) в Национальном Университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека.

Целью исследования является построения адекватных вычислительных моделей для квазилинейных гиперболических систем.

Задачи исследования:

построить разностной схемы для решения линейной смешанной задачи с постоянными коэффициентами;

доказать экспоненциальной устойчивость разностной схемы для решения линейной смешанной задачи с постоянными коэффициентами;

доказать сходимость разностной схемы для решения линейной смешанной задачи с постоянными коэффициентами;

построить разностной схемы для решения линейной смешанной задачи с переменными коэффициентами;

доказать экспоненциальной устойчивости разностной схемы для решения линейной смешанной задачи с переменными коэффициентами;

доказать сходимость разностной схемы для решения линейной смешанной задачи с переменными коэффициентами;

построить разностных схем для численного решения квазилинейных гиперболических систем;

доказать устойчивость разностных схем для квазилинейных гиперболических систем.

Объектом исследования является смешанная задача для линейных и квазилинейных гиперболических систем, разностные схемы их численного решения.

Предметом исследования является дискретный аналог интеграла энергии, теорема Лакса и квадратичные формы.

Методы исследования. В диссертации использованы методы теорий разностных схем, вычислительной математики, функционального анализа, функции дискретного аргумента, дифференциальных уравнений.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

построена разностная схема для нахождения устойчивых решения смешанной задачи для гиперболических систем с постоянными коэффициентами;

доказана экспоненциальная устойчивость разностной схемы для смешанной задачи для гиперболических систем с постоянными коэффициентами;

обоснована сходимость решение разностной схемы для смешанной задачи для гиперболических систем с постоянными коэффициентами к решение исходной дифференциальной задачи;

построена разностная схема для нахождения устойчивого решения, смешанной задачи для гиперболических систем с переменными коэффициентами;

доказана экспоненциальная устойчивость разностной схемы для смешанной задачи для гиперболических систем с переменными коэффициентами;

обоснована сходимость решение разностной схемы для смешанной задачи для гиперболических систем с переменными коэффициентами к решение исходной дифференциальной задачи;

построена разностная схема для численного решения смешанных задач для квазилинейных гиперболических систем;

доказана устойчивость разностных схем для решения смешанных задач для квазилинейных гиперболических систем.

Практические результаты исследования заключаются в следующем:

построены разностные схемы для численного решение смешанных задач для гиперболических систем уравнений;

разработан программное обеспечения для приближенного решения смешанных задач для гиперболических систем уравнений.

Достоверность результатов исследования теоремы доказаны с использованием методов вычислительной математики, функционального анализа и теории разностных схем, а также со всей строгостью математических рассуждений. Все теоретические результаты подтверждены вычислительными экспериментами.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов проведенных исследований обосновывается построением разностных схем для квазилинейных гиперболических систем и доказанность их устойчивости.

Практическая значимость диссертации обосновывается построением разностных схем служат для численного решения прикладных задач, которые описываются квазилинейными гиперболическими системами уравнений.

Внедрение результатов исследования. На основе полученных научных результатов по устойчивости и сходимости разностных схем для решения смешанных задач для гиперболических систем:

разностные схемы расщепления, построенные для решения смешанных задач для линейных гиперболических систем, используемые при разработке численных методов для численно-аналитического моделирования и исследования вопросов разрешимости задач распространения сейсмических волн в неоднородных пористых средах с произвольным коэффициентом трения были использованы в проекте AP051321026 - “Математическое моделирование динамики упруго-деформируемых пористых сред с учетом частотной зависимости коэффициента трения(с памятью)” (справка №01-07/198, от 13 апреля 2021 года Института информационных и вычислительных технологий Комитета Науки Министерства образования и науки Республики Казахстан). В результате это дало возможность утверждать сходимость численного решения к точному решению модельных задач;

построенные один класс устойчивых разностных схем для гиперболических систем и адекватные вычислительные модели для квазилинейных гиперболических систем использованы для решения дифференциальных задач в научно-исследовательском проекте 01-01-17-1921- “FR New method of solution of pursuit and evasion differential games with many pursuers on manifolds with Euclidean metric” (справка от 10 янвраря 2020 года, University Putra Malaysia supported by Ministry of Education of Malaysia). В результате это дало возможность нахождению численного решения дифференциальной задачи;

разностные схемы для смешанных задач, построенные для квазилинейных гиперболических систем использованы на проекте PPP/USG-0216/FST/30/15316 “Newton-Kantorovich Method For Solving a Class of Nonlinear Integral Equations” для решение интегральных уравнений (справка от 29 апреля 2019 года, Universiti Sains Islam Malaysia (USIM)). Использование научных результатов позволило получить приближенные решения интегральных уравнений.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования были обсуждены на 17 научно-практических конференциях, в том числе на 6 международных и 11 республиканских.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликованы 43 научных работ, в том числе 14 статья, напечатанных в журналах, входящих в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты докторских диссертаций. Из них 5 опубликованы в зарубежных журналах и 9 статей - в республиканских научных изданиях. Получена одна свидетельства регистрации программных продуктов, созданных для ЭВМ.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка использованных литератур. Объем диссертации составляет 184 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации, названная **“Вычислительные модели для смешанной задачи для волнового уравнения в области с углом”,** посвящена построению адекватных вычислительных моделей, нахождению численного решения смешанной задачи для волнового уравнения в области с углом. Первые два параграфа посвящены изложению начальных сведений об основных понятиях теории разностных схем, а также полученных результатов рассматриваемых дифференциальных задач.

В области $R_+^3 = \{\ (t,x,y)|\ t,x,y>0\}$ рассмотрим смешанную задачу для уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0, \tag{1}$$

с граничными условиями при $x=0,\ (t,y)\in R_+^2$:

$$u_t - a_1 u_x - b_1 u_y = 0, \tag{2}$$

при $y=0,\ (t,x)\in R_+^2$:

$$u_t - a_2 u_x - b_2 u_y = 0 \tag{3}$$

и начальными условиями при $t=0,\ \ (x,y)\in R_+^2$

$$u(0,x,y)=\varphi(x,y),\ \ u_t(0,x,y)=\psi(x,y), \tag{4}$$

где $a_1,b_1,a_2,b_2 \in R$ и $u_t = o(r^{-1/2}),\ u_x = o(r^{-1/2}),\ \ u_y = o(r^{-1/2}), r=\sqrt{x^2+y^2}$ при $r \to 0$.

При выполнении следующих условий

1) $a_1 > 0, |b_1| < 1$ при $x=0$;

2) $a_2 > 0, |b_2| < 1$ при $y=0$;

т.е. равномерных условий Лопатинского для граничных условий (2) и (3), переходя к ξ,θ $\left(x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, \xi=\ln r\right)$, в новых координатах для решения смешанной задачи (1)–(4) получена оценка

$$\|u(t)\|^2_{W_2^1(R_+^2)} \le M_1 e^{M_2 t}\|u(0)\|^2_{W_2^1(R_+^2)}, \tag{5}$$

где $M_1, M_2 > 0$ и $\|u(t)\|^2_{W_2^1(R_+^2)} = \iint\limits_{R_+^2}\left\{u^2+u_t^2+u_x^2+u_y^2\right\}dxdy$.

Далее для решения смешанной задачи (1)–(4) построена разностная схема, которая даст возможность получить дискретный аналог интеграла энергии, на основе этого тождества получим дискретный аналог энергетической оценки (5) и докажем устойчивость построенной разностной схемы. В третьем параграфе первой главы доказаны теоремы об устойчивости предлагаемых разностных схем и алгоритмы их численного решения.

Чтобы построить разностную схему для смешанной задачи (1)–(4) интеграл энергии представлено в следующих двух формах:

$$e^{\xi} A_0 \frac{\partial Y}{\partial t} - \frac{\partial[B_0 Y]}{\partial\theta} - C_0\frac{\partial Y}{\partial\xi} + \left[Q_0 - \mu C_0 + \frac{d}{d\theta}B_0\right]Y = 0, \tag{6}$$

$$e^{\xi} A_0 \frac{\partial Y}{\partial t} - B_0\frac{\partial Y}{\partial\theta} - C_0\frac{\partial Y}{\partial\xi} + \left[Q_0 - \mu C_0\right]Y = 0. \tag{7}$$

Умножим равенства (6) и (7) слева на матрицу $D = diag(y_1, y_2, y_3)$ и сложим полученные равенства

$$e^{\xi} DA_0\frac{\partial Y}{\partial t} + e^{\xi} DA_0\frac{\partial Y}{\partial t} - D\frac{\partial[B_0Y]}{\partial\theta} - DB_0\frac{\partial Y}{\partial\theta} - DC_0\frac{\partial Y}{\partial\xi} -$$

$$-DC_0\frac{\partial Y}{\partial\xi} + D[Q_0 - \mu C_0 + \frac{d}{d\theta}B]Y + D[Q_0 - \mu C_0]Y = 0. \tag{8}$$

В области $t>0,\ (\theta,\xi)\in\Pi$ построим сетку с шагами $\Delta t=\Delta_t,\ \Delta\theta=\Delta_\theta,\ \Delta\xi=\Delta_\xi$, соответственно, по осям t,θ,ξ. Введя следующие обозначения и норму: $Y_{ij}^n = Y(n\Delta_t, i\Delta_\theta, j\Delta_\xi),\ i=\overline{0,I},\ n,|j|=0,1,\ldots$;

$$\left\|Y^n\right\|^2_{A_0} = \Delta_\theta\Delta_\xi\sum_{i=0}^{I-1}\sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{\xi j}\,(A_0Y_{ij}^n, Y_{ij}^n),\ L=(1,1,1)^T,\ \mu=0.5.$$

Воспользуясь этими обозначениями, построим разностную схему, аппроксимирующую равенство (8):

$$e^{\xi j} D_{ij}^n\left(\mathrm{A}_0\right)_i \frac{Y_{ij}^{n+1}-Y_{ij}^n}{\Delta_t} + e^{\xi j} D_{ij}^{n+1}\left(\mathrm{A}_0\right)_i \frac{Y_{ij}^{n+1}-Y_{ij}^n}{\Delta_t} - D_{ij}^n\frac{\left(\mathrm{B}_0Y\right)_{i+1j}^n - \left(\mathrm{B}_0Y\right)_{ij}^n}{\Delta_\theta} -$$

$$-D^n_{i+1j}\left(\mathrm{B}_0\right)_{i+1}\frac{Y^n_{i+1j}-Y^n_{ij}}{\Delta_\theta}-D^n_{ij}\left(\mathrm{C}_0\right)_i\frac{Y^n_{ij+1}-Y^n_{ij}}{\Delta_\xi}-D^n_{ij+1}\left(\mathrm{C}_0\right)_i\frac{Y^n_{ij+1}-Y^n_{ij}}{\Delta_\xi}+$$

$$+D^n_{ij}\left[2\mathrm{Q}_0-2\mu\mathrm{C}_0+\frac{d}{d\theta}\mathrm{B}_0\right]_i Y^n_{ij}=0,\ \ \mathrm{i}=\overline{0,\mathrm{I}\text{-}1},\ |j|=0,1,2,..,\ n=\overline{0,N-1}, \qquad (9)$$

при $i=0$, $|j|=0,1,2,\dots$ $(y_1)^n_{0j}-a_2(y_2)^n_{0j}-b_2(y_3)^n_{0j}=0$, (10)

при $i=I$, $|j|=0,1,2,\dots$ $(y_1)^n_{Ij}+a_1(y_2)^n_{Ij}-b_1(y_3)^n_{Ij}=0$, (11)

и при $n=0$, $i=0,1,...,I$, $|j|=0,1,2,\dots$

$$Y^0_{ij}=\left(e^{\frac{1}{2}\xi_j}\tilde{\psi}(\xi_j,\theta_i),\ e^{\frac{1}{2}\xi_j}\tilde{\varphi}'_\theta(\xi_j,\theta_i),\ e^{\frac{1}{2}\xi_j}\tilde{\varphi}'_\xi(\xi_j,\theta_i)\right)'. \qquad (12)$$

Разностная схема из нелинейных алгебраических систем уравнений.

Теорема 1. *Пусть для граничных условий* (10)–(11) *выполняется равномерное условие Лопатинского, т.е.* $a_1>0, |b_1|<1$ *и* $a_2>0, |b_2|<1$. *Тогда разностная схема* (9)–(12) *устойчива в энергетической норме* $\sqrt{J^n}$ *, где* $J^n=\Delta_\theta\Delta_\xi\sum_{i=0}^{I-1}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}(A_0V,V)^n_{ij}$.

В рассмотренной норме $J^n=\Delta_\theta\Delta_\xi\sum_{i=0}^{I-1}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}(A_0V,V)^n_{ij}$ не участвует решение смешанной задачи (1)–(4). Поэтому для решения смешанной задачи используется следующая разностная схема, которая получена с помощью тождества $U_t-U_t\equiv 0$:

$$\frac{U^{n+1}_{ij}-U^n_{ij}}{\Delta_t}-\left(U_t\right)^n_{ij}=0. \qquad (13)$$

Далее умножим разносную схему (13) на вектор $2U^{n+1}_{ij}$:

$$2\left(U^{n+1}_{ij},U^{n+1}_{ij}\right)-2\left(U^n_{ij},U^{n+1}_{ij}\right)-2\Delta_t\left(\left(U_t\right)^n_{ij},U^{n+1}_{ij}\right)=0,$$

в результате получим неравенство:

$$\left(U^{n+1}_{ij},U^{n+1}_{ij}\right)-\left(U^n_{ij},U^n_{ij}\right)-\Delta_t\left(\left(U_t\right)^n_{ij},\left(U_t\right)^n_{ij}\right)-\Delta_t\left(U^{n+1}_{ij},U^{n+1}_{ij}\right)\le 0\,.$$

Здесь мы воспользовались неравенством Коши–Буняковского $2(U,V)\le(U,U)+(V,V)$. Умножим неравенства на $\Delta_\theta\Delta_\xi$ и просуммируем по i от 0 до $I-1$, по j от $-\infty$ до $+\infty$:

$$\Delta_\theta\Delta_\xi\sum_{i=0}^{I-1}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left(U^{n+1}_{ij},U^{n+1}_{ij}\right)\le\Delta_\theta\Delta_\xi\sum_{i=0}^{I-1}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left(U^n_{ij},U^n_{ij}\right)+\Delta_t\Delta_\theta\Delta_\xi\sum_{i=0}^{I-1}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left\{\left(\left(U_t\right)^n_{ij},\left(U_t\right)^n_{ij}\right)+\left(U^{n+1}_{ij},U^{n+1}_{ij}\right)\right\}.$$

Согласно определению нормы перепишем в виде:

$$\left\|U^{n+1}\right\|_{A_0}\le\left\|U^n\right\|_{A_0}+\Delta_t\left\|\left(U_t\right)^{n+1}\right\|_{A_0}+\Delta_t\left\|U^{n+1}\right\|_{A_0}. \qquad (14)$$

Переписав оценку $J^n=\Delta_\theta\Delta_\xi\sum_{i=0}^{I-1}\sum_{j=-\infty}^{\infty}(A_0V,V)^n_{ij}\le\Delta_\theta\Delta_\xi\sum_{i=0}^{I-1}\sum_{j=-\infty}^{\infty}(A_0V,V)^0_{ij}=J^0$ в виде

$$C_1\left\{\Delta_\theta\Delta_\xi\sum_{i=0}^{I-1}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(U_t,U_t\right)_{ij}^{n+1}+\left(U_x,U_x\right)_{ij}^{n+1}+\left(U_y,U_y\right)_{ij}^{n+1}\right\}\le J^n\le$$

$$\le C_2\left\{\Delta_\theta\Delta_\xi\sum_{i=0}^{I-1}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(U_t,U_t\right)_{ij}^{n}+\left(U_x,U_x\right)_{ij}^{n}+\left(U_y,U_y\right)_{ij}^{n}\right\}$$

и складывая с неравенством (14) получим дискретный аналог оценки (5):

$$\left\|U^{n+1}\right\|_{A_1}^2\le const\left\|U^n\right\|_{A_1}^2,$$

где $\left\|U^n\right\|_{A_1}^2=\Delta_\theta\Delta_\xi\sum\limits_{i=0}^{I-1}\sum\limits_{j=-\infty}^{+\infty}\left\{(U,U)_{ij}^n+(U_t,U_t)_{ij}^n+(U_x,U_x)_{ij}^n+(U_y,U_y)_{ij}^n\right\}.$

Полученная оценка доказывает устойчивость предложенной разностной схемы и это есть дискретный аналог оценки (5), которая получена для смешанной задачи для волнового уравнения в области с углом.

Четвертый параграф посвящен исследованию сходимости и проведению вычислительного эксперимента на модельных задачах.

Так как (9)-(12) – явная разностная схема, мы определим решение на слое $n=k+1$, предполагая, что решение задано на слое $n=k$. Далее поясним алгоритм метода решения систем нелинейных алгебраических уравнений. Для определения решения Y_{ij}^{k+1} на слое $n=k+1$ требуется каждый раз решить систему нелинейных уравнений. Выполняя итерации по коэффициентам получены численные решения разностной схемы.

Результаты вычислительных экспериментов показывают работоспособность построенных разностных схем, а также точность полученной оценки для рассматриваемых задач.

В пятом параграфе первой главы диссертации построена разностная схема, аппроксимирующая смешанную задачу для волновой системы уравнений в области с углом:

$$e^{\xi_j}\bar D_{ij}^n\left(\mathrm{A}_0\right)_i\frac{Y_{ij}^{n+1}-Y_{ij}^n}{\Delta_t}+e^{\xi_j}D_{ij}^{n+1}\left(\bar{\mathrm{A}}_0\right)_i\frac{\bar Y_{ij}^{n+1}-\bar Y_{ij}^n}{\Delta_t}-\bar D_{ij}^n\frac{\left(\mathrm{B}_0Y\right)_{i+1j}^n-\left(\mathrm{B}_0Y\right)_{ij}^n}{\Delta_\theta}-$$

$$-D_{i+1j}^n\left(\bar{\mathrm{B}}_0\right)_i\frac{\bar Y_{i+1j}^n-\bar Y_{ij}^n}{\Delta_\theta}-\bar D_{ij}^n\left(\mathrm{C}_0\right)_i\frac{Y_{ij+1}^n-Y_{ij}^n}{\Delta_\xi}-D_{ij+1}^n\left(\bar{\mathrm{C}}_0\right)_i\frac{\bar Y_{ij+1}^n-\bar Y_{ij}^n}{\Delta_\xi}+$$

$$+\bar D_{ij}^n\left[\mathrm{Q}_0-\mu\mathrm{C}_0+\frac{d}{d\theta}\mathrm{B}_0\right]_iY_{ij}^n+D_{ij}^n\left[\bar{\mathrm{Q}}_0-\bar\mu\bar{\mathrm{C}}_0\right]_i\bar Y_{ij}^n=0,\tag{15}$$

$$n=\overline{0,N-1},\quad i=\overline{0,I-1},\quad |j|=0,1,\ldots,$$

$$J_2(Y_1)_{0j}^n-A_2(Y_2)_{0j}^n-B_2(Y_3)_{0j}^n=0\ \text{при}\ i=0,\quad n=\overline{0,N},\ |j|=0,1,\ldots\tag{16}$$

или

$$\begin{pmatrix}Y_1-Y_3\\-Y_2\end{pmatrix}_{0j}^n=R\begin{pmatrix}-Y_2\\Y_1+Y_3\end{pmatrix}_{0j}^n,\tag{17}$$

$$J_1(Y_1)_{Ij}^n+A_1(Y_2)_{Ij}^n-B_1(Y_3)_{Ij}^n=0\ \text{при}\ i=I,n=\overline{0,N},\ |j|=0,1,\ldots,\tag{18}$$

или

$$\begin{pmatrix}Y_1-Y_3\\-Y_2\end{pmatrix}_{Ij}^n=S\begin{pmatrix}-Y_2\\Y_1+Y_3\end{pmatrix}_{Ij}^n,\tag{19}$$

$$Y_{ij}^{0} = \left(e^{\frac{1}{2}\xi_j}\tilde{\Psi}(\xi_j,\theta_i), e^{\frac{1}{2}\xi_j}\tilde{\Phi}'_{\theta}(\xi_j,\theta_i), e^{\frac{1}{2}\xi_j}\tilde{\Phi}'_{\xi}(\xi_j,\theta_i)\right)' \text{ при } n=0, i=\overline{0,I}, \ |j|=0,1,\ldots \qquad (20)$$

Здесь $A_0(\theta)$, $B_0(\theta)$, $C_0(\theta)$, $Q_0(\theta)$- матрицы размерности $3m$: $S=\begin{pmatrix} S_1 & -S_2 \\ I_m & O \end{pmatrix}$, $R=\begin{pmatrix} -R_1 & -R_2 \\ I_m & O \end{pmatrix}$, $S_1 = 2(J_1+B_1)^{-1}A_1$, $S_2=(J_1+B_1)^{-1}(J_1-B_1)$, $R_1 = 2(J_2+B_2)^{-1}A_2$, $R_2=(J_2+B_2)^{-1}(J_2-B_2)$, I_m – единичная матрица размерности m, O – нулевая матрица размерности m. Эта разностная схема аппроксимирует смешанную дифференциальную задачу на решениях с порядком $O(\tau+\Delta_\theta+\Delta_\xi)$.

Теорема 2. Если для граничных условий (16), (18) выполняется равномерное условие Лопатинского, т.е. для границы x=0

а) J_1+B_1 – несобственная матрица,

б) все собственные значения матрицы S лежат строго в правой полуплоскости, т.е. $\operatorname{Re}\lambda_i(S)>0, \ i=\overline{1,2m}$;

для границы y=0

а) J_2+B_2 – несобственная матрица,

б) все собственные значения матрицы R лежат строго в левой полуплоскости, т.е. $\operatorname{Re}\lambda_i(R)<0, \ i=\overline{1,2m}$.

Тогда разностная задача (15)-(20) устойчива по норме $\sqrt{J^n}$, где $J^n = \Delta_\theta\Delta_\xi \sum_{i=0}^{I-1}\sum_{j=-\infty}^{\infty}(A_0 V,\bar{V})_{ij}^{n}$.

Вторая глава диссертации, названная **“Устойчивость разностных схем для линейных симметрических t-гиперболических систем”** посвящена построению разностных схем для нахождения экспоненциальной устойчивого решения линейных симметрических t-гиперболических систем.

В первом параграфе второй главы построена разностная схема для двумерной линейной гиперболической системы с диссипативными граничными условиями в случае постоянных коэффициентов и с младшими членами. Основная идея этой главы заключается в исследовании устойчивости решения гиперболических систем и получения априорных оценок для неё в различных функциональных пространствах.

Здесь мы исследуем проблему построения и исследования разностной схемы расщепления для вычисления устойчивых решения.

В области $G=\{(t,x,y):\ 0<t\le T,\ 0<x<l,\ -\infty<y<+\infty\}$ рассмотрим симметричную гиперболическую систему в некоторой специальной канонической форме

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+\mathbf{K}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}+\mathbf{C}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}+\mathbf{M}\mathbf{v}=0 \qquad (21)$$

с граничными условиями при $x=0$:

$$\mathbf{v}^{\mathbf{I}}=\mathbf{s}\mathbf{v}^{\mathbf{II}}, \qquad (22)$$

при $x=l$:

$$\mathbf{v}^{\mathrm{II}} = \mathbf{r}\mathbf{v}^{\mathrm{I}} \tag{23}$$

и с начальными данными при $t = 0$

$$v_i(0,x,y) = \varphi_i(x,y), \;\; i = 1,\cdots,n, \;\; 0 \le x \le l, \;\; -\infty \le y \le +\infty, \tag{24}$$

где $\mathbf{v}^{\mathrm{I}} = (v_1, v_2, \cdots, v_m)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{v}^{\mathrm{II}} = (v_{m+1}, v_{m+2}, \cdots, v_n)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{K}$ – диагональная матрица, $\mathbf{C}$ – положительно определенная матрица, $\mathbf{M}$ – квадратная вещественная матрица размерности n, $\mathbf{v} = [\mathbf{v}^{\mathrm{I}}, \mathbf{v}^{\mathrm{II}}]^T$, $\mathbf{K} = diag(\mathbf{K}^+, -\mathbf{K}^-)$, $\mathbf{K}^+ = diag(k_1,...,k_m)$, $\mathbf{K}^- = diag(k_{m+1},...,k_n)$, $k_i > 0$, $i = 1,\cdots,n$, $\mathbf{S}$ – прямоугольная матрица размерности $(n-m)\times m$, $\mathbf{r}$ – прямоугольная матрица размерности $m\times(n-m)$. Начальные функции предполагаются равными нулю при $|y| > \frac{1}{2}Y$.

Предположим, что начальные данные $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)^T \in W_2^1((0,l),(-\infty,+\infty), R^n)$ удовлетворяют условию совместимости:

$$\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{I}} = \mathbf{s}\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{II}}, \quad x = 0, t = 0, \text{ и } \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{II}} = \mathbf{r}\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{I}}, \qquad x = l, t = 0. \tag{25}$$

Здесь $W_2^1((0,l),-\infty,+\infty),\mathrm{R}^n)$ – пространство Соболева.

Определение 1. Система (21) с граничными условиями (22)-(23) экспоненциально устойчива в норме L^2, если существуют $\nu > 0$ и $c > 0$ такие, что для любого начального условия $\boldsymbol{\varphi} \in \mathrm{L}^2((0,l),(-\infty,+\infty),\mathrm{R}^n)$, L^2-решение смешанной задачи (21)–(24) удовлетворяет неравенству

$$\left\|\mathbf{v}(t,\cdot)\right\|_{\mathrm{L}^2((0,l),(-\infty,+\infty),\mathrm{R}^n)} \le ce^{-\nu t}\left\|\boldsymbol{\varphi}\right\|_{\mathrm{L}^2((0,l),(-\infty,+\infty),\mathrm{R}^n)}, \;\; t \ge 0. \tag{26}$$

Рассмотрим функцию:

$$L(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^l \left(\boldsymbol{\mu}(x)\mathbf{v},\mathbf{v}\right)dxdy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^l \left\{\sum_{i=1}^m \mu_i e^{-\nu x}\left[v_i(t,x,y)\right]^2 + \sum_{i=m+1}^n \mu_i e^{\nu x}\left[v_i(t,x,y)\right]^2\right\}dxdy, \tag{27}$$

где $\mu_i > 0$, $i = 1,\ldots,n$, $\boldsymbol{\mu}^+ = (\mu_1,\ldots,\mu_m)^T$, $\boldsymbol{\mu}^- = (\mu_{m+1},\ldots,\mu_n)^T$,
$\boldsymbol{\mu}(x) = diag(e^{-\nu x}\boldsymbol{\mu}^+, e^{\nu x}\boldsymbol{\mu}^-)$.

Теорема 3. Система (21) с граничными условиями (22)–(23) экспоненциально устойчива в норме L^2, если существуют $\nu > 0$ и $\mu_i > 0$, $i = 1,\ldots,n$ такие, что матрицы

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}^+ & 0 \\ 0 & \mathbf{K}^- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-\nu l}\boldsymbol{\mu}^+ & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\mu}^- \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{r} \\ \mathbf{s} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{K}^+ & 0 \\ 0 & \mathbf{K}^- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}^+ & 0 \\ 0 & e^{\nu l}\boldsymbol{\mu}^- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{s} \\ \mathbf{r} & 0 \end{pmatrix} \tag{28}$$

и

$$\nu|\mathbf{K}|\boldsymbol{\mu}(x) + \mathbf{M}^T\boldsymbol{\mu}(x) + \boldsymbol{\mu}(x)\mathbf{M}, \;\; x \in (0,l) \tag{29}$$

являются положительно определенными.

Для численного решения смешанной задачи (21)-(24) в области G построим равномерную сетку $G_h = \{(t^\kappa, x_j, y_q) : 0 \le t^\kappa \le T, 0 \le x_j \le l, -\infty < y_q < +\infty\}$ где $t^\kappa = \kappa\Delta t$, $\kappa = 0,\ldots,N$; $\quad N\Delta t = T$, $x_j = (j + \frac{1}{2})\Delta x$; $J\Delta x = l$; $j = 0,\ldots,J-1$;

$y_q = (q+\frac{1}{2})\Delta y;\ q = -\infty,\ldots,+\infty$. Для численного решения смешанной задачи (21)-(24) предложена разностная схема расщепления

$$\begin{bmatrix} \left(\mathbf{w}^{\mathrm{I}}\right)^{\kappa}_{jq} \\ \left(\mathbf{w}^{\mathrm{II}}\right)^{\kappa}_{jq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}}\right)^{\kappa}_{jq} \\ \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)^{\kappa}_{jq} \end{bmatrix} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{+} & 0 \\ 0 & \mathbf{K}^{-} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}}\right)^{\kappa}_{jq} - \left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}}\right)^{\kappa}_{j-1,q} \\ \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)^{\kappa}_{jq} - \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)^{\kappa}_{j+1,q} \end{bmatrix}, \tag{30}$$

$$j = 0,\ldots,J-1;\ \kappa = 0,\ldots,N-1;\ \ q = -\infty,\ldots,+\infty;$$

$$\mathbf{u}^{\kappa}_{jq} = \mathbf{w}^{\kappa}_{jq} - \frac{\Delta t}{\Delta y}\mathbf{C}\left[\mathbf{w}^{\kappa}_{jq} - \mathbf{w}^{\kappa}_{jq-1}\right],\ j = 0,\ldots,J-1;\ \kappa = 0,\ldots,N-1;\ \ q = -\infty,\ldots,+\infty; \tag{31}$$

$$\mathbf{v}^{\kappa+1}_{jq} = \mathbf{u}^{\kappa}_{jq} - \Delta t\mathbf{M}\mathbf{u}^{\kappa}_{jq},\ j = 0,\ldots,J-1;\ \kappa = 0,\ldots,N-1. \tag{32}$$

Начальные условия (24) аппроксимируются так:

$$\mathbf{v}^{0}_{j} = \frac{1}{\Delta x}\frac{1}{\Delta y}\int\limits_{y_{q-\frac{1}{2}}}^{y_{q+\frac{1}{2}}}\int\limits_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}}\boldsymbol{\varphi}(x,y)dxdy,\ \ j = 0,\ldots,J-1;\ q = -\infty,\ldots+\infty. \tag{33}$$

Граничные условия аппроксимируются следующим образом

$$\left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}}\right)^{\kappa+1}_{-1q} = \mathbf{s}\left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)^{\kappa+1}_{0q},\quad \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)^{\kappa+1}_{Jq} = \mathbf{r}\left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}}\right)^{\kappa+1}_{0q}, \kappa = \overline{0,N-1}; q = -\infty,\ldots+\infty \tag{34}$$

Предположим, что выполнено условие КФЛ (Куранта-Фридрихса-Леви):

$$\frac{\Delta t}{\Delta x}\max\left|k_i\right| \le 1,\qquad \frac{\Delta t}{\Delta y}\max\left|\lambda_i(\mathbf{C})\right| \le 1.$$

Здесь $\lambda_i(\mathbf{C})$ – собственные значения матрицы $\mathbf{C}$.

Теперь исследуем вопрос об экспоненциальной устойчивости решения разностной задачи (30) – (34).

Определение 2. Разностная схема (30)-(34) с разностным краевым условием (34) экспоненциально устойчива, если существует постоянное $c > 0$, такое, что для любого начального условия $\mathbf{v}^{0}_{jq} \in \mathrm{L}^2((x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}),(y_{q-\frac{1}{2}}, y_{q+\frac{1}{2}}),\mathrm{R}^n)$ решение разностной краевой задачи (30)-(34) удовлетворяет неравенству

$$\Delta x\Delta y\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\left(\mathbf{v}^{\kappa}_{jq},\mathbf{v}^{\kappa}_{jq}\right) \le ce^{-\eta t_\kappa}\Delta x\Delta y\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\left(\mathbf{v}^{0}_{jq},\mathbf{v}^{0}_{jq}\right),\ \ \kappa = 1,\ldots,N.$$

Рассмотрим следующую функцию

$$L(\mathbf{v}^{\kappa}) = L^{\kappa} = \Delta x\Delta y\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{J-1}\left(\mathbf{v}^{\kappa}_{jq},\boldsymbol{\mu}_j\mathbf{v}^{\kappa}_{jq}\right),\ \ \boldsymbol{\mu}_j = \boldsymbol{\mu}(x_j),\ j = 1,\ldots,J-1. \tag{35}$$

Здесь $\boldsymbol{\mu}_j = diag(e^{-\nu x_j}\boldsymbol{\mu}^{+}, e^{\nu x_j}\boldsymbol{\mu}^{-})$.

Теорема 4. Пусть $T > 0$ и дискретная функция определена формулой (35). Если выполнено условие КФЛ $(\Delta t/\Delta x)\max\left|k_i\right| \le 1,\ \ (\Delta t/\Delta y)\max\left|\lambda_i(\mathbf{C})\right| \le 1$ и существуют вещественные числа $\nu > 0$ и $\mu_i > 0,\ i = 1,\ldots,n$ такие, что $0 < \alpha(1-e^{-\nu\Delta x}) < 1$, где $\alpha = \min\limits_i\left|k_i\right|$ $\mathbf{M}^T\boldsymbol{\mu}_j + \boldsymbol{\mu}_j\mathbf{M} - \Delta t\mathbf{M}^T\boldsymbol{\mu}_j\mathbf{M},\quad j = 0,\ldots,J-1,$ неотрицательно определенные матрицы и

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}^{+} e^{-\nu x_J} \mathbf{K}^{+} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\mu}^{-} e^{\nu x_{-1}} \mathbf{K}^{-} \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{r} \\ \mathbf{s} & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}^{+} e^{-\nu x_0} \mathbf{K}^{+} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\mu}^{-} e^{\nu x_{J-1}} \mathbf{K}^{-} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{s} \\ \mathbf{r} & 0 \end{pmatrix} -$$

положительно определенная матрица. Тогда численное решение $\mathbf{v}_{jq}^{\kappa}$ разностной краевой задачи (30)-(34) сходится к стационарному решению $\mathbf{v}_{jq}^{*} = 0$ в L^2 норме.

Во втором параграфе второй главы рассмотрена двумерная смешанная задача с переменными коэффициентами в области G :

$$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t} + \mathbf{K}(\mathrm{x}) \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x} + \mathbf{C}(\mathrm{x}) \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y} + \mathbf{M}(\mathrm{x})\mathrm{v} = 0 \tag{36}$$

с граничными условиями и начальными условиями (22)-(23), здесь **K(***x***)** – диагональная матрица, **C(***x***)** –положительно определенная матрица, **M(***x***)** – квадратная вещественная матрица размерности *n*.

Для решения смешанной задачи системы линейных симметрических t-гиперболических систем с диссипативными граничными условиями доказано следующая:

Теорема 5. Система (36) с граничными условиями (22)–(23) экспоненциально устойчива в норме L^2, существуют $\nu > 0$ и $\mu_i > 0,\ i = 1,\ldots,n$ такие, что матрицы

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}^{+}(l) & 0 \\ 0 & \mathbf{K}^{-}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\nu l} \boldsymbol{\mu}^{+} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\mu}^{-} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{r} \\ \mathbf{s} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{K}^{+}(0) & 0 \\ 0 & \mathbf{K}^{-}(l) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}^{+} & 0 \\ 0 & e^{\nu l} \boldsymbol{\mu}^{-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{s} \\ \mathbf{r} & 0 \end{pmatrix}$$

и $\nu |\mathbf{K}| \boldsymbol{\mu}(x) - \mathbf{K}'(x)\boldsymbol{\mu}(x) + \mathbf{M}^{T} \boldsymbol{\mu}(x) + \boldsymbol{\mu}(x)\mathbf{M},\ x \in (0,l)$ являются положительно определенными.

Аналогично построена разностная схема расщепления:

$$\begin{bmatrix} \left(\mathbf{w}^{\mathrm{I}}\right)_{jq}^{\kappa} \\ \left(\mathbf{w}^{\mathrm{II}}\right)_{jq}^{\kappa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}}\right)_{jq}^{\kappa} \\ \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_{jq}^{\kappa} \end{bmatrix} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{j-1}^{+} & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{j+1}^{-} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}}\right)_{jq}^{\kappa} - \left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}}\right)_{j-1,q}^{\kappa} \\ \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_{jq}^{\kappa} - \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_{j+1,q}^{\kappa} \end{bmatrix},$$

$$j = 0,\ldots,J-1;\ \kappa = 0,\ldots,N-1;\ q = -\infty,\ldots,+\infty; \tag{37}$$

$$\mathbf{u}_{jq}^{\kappa} = \mathbf{w}_{jq}^{\kappa} - \frac{\Delta t}{\Delta y} \mathbf{C}_{j} \left[\mathbf{w}_{jq}^{\kappa} - \mathbf{w}_{jq-1}^{\kappa} \right],\ j = 0,\ldots,J-1;\ \kappa = 0,\ldots,N-1;\ q = -\infty,\ldots,+\infty; \tag{38}$$

$$\mathbf{v}_{jq}^{\kappa+1} = \mathbf{u}_{jq}^{\kappa} - \Delta t \mathbf{M}_{j} \mathbf{u}_{jq}^{\kappa},\ j = 0,\ldots,J-1;\ \kappa = 0,\ldots,N-1 \tag{39}$$

с начальными и граничными условиями (33)-(34). Далее доказана следующая теорема, утверждающая экспоненциальную устойчивость численного решения.

Теорема 6. Пусть $T > 0$ и $L(\mathbf{v}^{\kappa}) = L^{\kappa} = \Delta x \Delta y \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J-1} \left(\mathbf{v}_{jq}^{\kappa}, \boldsymbol{\mu}_{j} \mathbf{v}_{jq}^{\kappa} \right)$. Если выполнено условие КФЛ $\frac{\Delta t}{\Delta x} \max\limits_{\substack{1 \le i \le n \\ 0 \le j \le J-1}} \left| k_{i,j} \right| \le 1,\ \frac{\Delta t}{\Delta y} \max\limits_{\substack{1 \le i \le n \\ 0 \le j \le J-1}} \left| \lambda_i(\mathbf{C}_j) \right| \le 1$, и существуют вещественные числа $v > 0$ и $\mu_i > 0,\ i = 1,\ldots,n$ такие, что $0 < \eta \equiv \nu \alpha e^{-\nu \Delta x} - \beta < 1,$

где $\alpha = \min\limits_{\substack{1\le i\le n\\ 0\le j\le J-1}} \left|k_{i,j}\right|,\ \beta = \max\limits_{\substack{1\le i\le n\\ 0\le j\le J-1}} \left|k'_{i,j}\right|,\qquad 2(\mathbf{M}(\mathbf{u}_{jq}^{\kappa}),\boldsymbol{\mu}_j\mathbf{u}_{jq}^{\kappa}) - \Delta t(\mathbf{M}(\mathbf{u}_{jq}^{\kappa}),\boldsymbol{\mu}_j\mathbf{M}(\mathbf{u}_{jq}^{\kappa})),$

$j = 0,\dots,J-1$- неотрицательно определенные матрицы и

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}^{+}e^{-\nu x_J}\mathbf{K}_{J-1}^{+} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\mu}^{-}e^{\nu x_{-1}}\mathbf{K}_{0}^{-} \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{r} \\ \mathbf{s} & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}^{+}e^{-\nu x_0}\mathbf{K}_{-1}^{+} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\mu}^{-}e^{\nu x_{J-1}}\mathbf{K}_{J}^{-} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{s} \\ \mathbf{r} & 0 \end{pmatrix}$$

- положительно определенная матрица, тогда численное решение $\mathbf{v}_{jq}^{\kappa}$ разностной краевой задачи (37)-(39), (33)-(34) сходится к стационарному решению $\mathbf{v}_{jq}^{*} = 0$ в L^2 норме.

В третьем параграфе в области $G = \{(t,\mathbf{x}):\ 0 < t \le T,\ 0 < x_i < X_i,\ i = \overline{1,n}\}$, рассматривается симметрическая гиперболическая система:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\mathbf{B}_i\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} + \mathbf{Q}\mathbf{v} = 0, \tag{40}$$

с граничными условиями при $x_1 = 0$:

$$\mathbf{v}^{\mathbf{I}}(t,\mathbf{x}) = \mathbf{s}\mathbf{v}^{\mathbf{II}}(t,\mathbf{x}),\ 0 < t \le T,\ 0 \le x_i \le X_i,\ i = 2,\cdots,n, \tag{41}$$

и при $x_1 = X_1$:

$$\mathbf{v}^{\mathbf{II}}(t,\mathbf{x}) = \mathbf{r}\mathbf{v}^{\mathbf{II}}(t,\mathbf{x}),\ 0 < t \le T,\ 0 \le x_i \le X_i,\ i = 2,\cdots,n, \tag{42}$$

с условием периодичности на $x_i = 0, X_i;\ \ i = 2,\cdots,n$:

$$\mathbf{v}(t,\mathbf{x})\big|_{x_i=0} = \mathbf{v}(t,\mathbf{x})\big|_{x_i=X_i},\ i = \overline{2,n};\ I = \overline{1,n};\ (I \ne i), \tag{43}$$

и с начальными данными при $t = 0$,

$$\mathbf{v}(0,\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}),\ \ \mathbf{x} = (x_1,\cdots x_n),\ \ 0 \le x_i \le X_i,\ i = 1,\cdots,n; \tag{44}$$

где $\mathbf{B}_1(x_1)$ является заданной диагональной матрицей, $\mathbf{B}_i(x_1) = \mathbf{B}_i^{*}(x_1),\ i = \overline{2,n}$ симметричные матрицы и $\mathbf{Q}(x_1)$ квадратная матрица размерности $q \times q$, также, как и $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \left(\varphi_1(\mathbf{x}),\varphi_2(\mathbf{x}),\cdots,\varphi_q(\mathbf{x})\right)^T$ - векторная функция. Векторы и матрицы представлены в виде $\mathbf{v} = [\mathbf{v}^{\mathrm{I}},\mathbf{v}^{\mathrm{II}}]^T$,

$\mathbf{B}_1(x_1) = diag(\mathbf{B}_1^{+}(x_1),-\mathbf{B}_1^{-}(x_1)),\ \mathbf{B}_1^{+}(x_1) = diag(b_1(x_1),\dots b_m(x_1)), \mathbf{B}_1^{-}(x_1) = diag(b_{m+1}(x_1),\dots,b_q(x_1)),$

с $b_1(x_1) \ge \dots \ge b_m(x_1) > 0 \ge -b_{m+1}(x_1) \ge \dots \ge -b_q(x_1)$ и $\mathbf{s}$ прямоугольная матрица размерности $(q-m)\times m$, $\mathbf{r}$ прямоугольная матрица размерности $m\times(q-m)$.

В качестве квадратичной функции рассматривается функция,

$$L(t) \equiv \int\limits_{0}^{\mathbf{X}}\left(\boldsymbol{\mu}(x_1)\mathbf{v},\mathbf{v}\right)\mathbf{dx} = \int_0^{X_n}\cdots\int_0^{X_1}\left(\boldsymbol{\mu}(x_1)\mathbf{v},\mathbf{v}\right)dx_1\cdots dx_n \tag{45}$$

где $\mu_i > 0, i = 1,\dots,q,\ \boldsymbol{\mu}^{+} = diag(\mu_1,\dots,\mu_m),\ \boldsymbol{\mu}^{-} = diag(\mu_{m+1},\dots,\mu_q),$ и

$\boldsymbol{\mu}(x_1) = diag(e^{-\nu x_1}\boldsymbol{\mu}^{+}, e^{\nu x_1}\boldsymbol{\mu}^{-}).$

Теорема 7. Система (40) с граничным условием (41)-(42) экспоненциально устойчива в норме L^2, если существуют $\nu > 0, \mu_i > 0,\ i = \overline{1,q}$ такие что, следующие матрицы

$$\begin{pmatrix}\mathbf{B}_1^+(X_1) & 0\\ 0 & \mathbf{B}_1^-(0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-\nu X_1}\boldsymbol{\mu}^+ & 0\\ 0 & \boldsymbol{\mu}^-\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & \mathbf{r}\\ \mathbf{s} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{B}_1^+(0) & 0\\ 0 & \mathbf{B}_1^-(X_1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu}^+ & 0\\ 0 & e^{\nu X_1}\boldsymbol{\mu}^-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \mathbf{s}\\ \mathbf{r} & 0\end{pmatrix} \quad (46)$$

и

$$\nu\left|\mathbf{B}_1(x_1)\right|\boldsymbol{\mu}(x_1)-\mathbf{B}_1{}'(x_1)\boldsymbol{\mu}(x_1),\ x_1\in(0,X_1) \quad (47)$$

положительно определен, а также форма $\left(\boldsymbol{\mu}(x_1)\mathbf{Q}\mathbf{v},\mathbf{v}\right)>0$.

Для численного решения смешанной задачи (41)-(43) предлагается разностная схема расщепления

$$\begin{bmatrix}\left(\mathbf{v}_1^{\mathrm{I}}\right)_{\mathbf{j}}^{\kappa}\\ \left(\mathbf{v}_1^{\mathrm{II}}\right)_{\mathbf{j}}^{\kappa}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}}\right)_{\mathbf{j}}^{\kappa}\\ \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_{\mathbf{j}}^{\kappa}\end{bmatrix}-\frac{\Delta t}{\Delta x_1}\begin{bmatrix}\left(\mathbf{B}_1^+\right)_{j_1-1} & 0\\ 0 & \left(\mathbf{B}_1^-\right)_{j_1+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}}\right)_{\mathbf{j}}^{\kappa}-\left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}}\right)_{j_1-1}^{\kappa}\\ \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_{\mathbf{j}}^{\kappa}-\left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_{j_1+1}^{\kappa}\end{bmatrix}, \quad (48)$$

$$\left(\mathbf{v}_{i+1}\right)_{\mathbf{j}}^{\kappa}=\left(\mathbf{v}_i\right)_{\mathbf{j}}^{\kappa}-\frac{\Delta t}{\Delta x_{i+1}}\begin{bmatrix}\left(\mathbf{B}_{i+1}^+\right)_{j_1} & 0\\ 0 & \left(\mathbf{B}_{i+1}^-\right)_{j_1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\left(\mathbf{v}_i^{\mathrm{I}}\right)_{\mathbf{j}}^{\kappa}-\left(\left(\mathbf{v}_i^{\mathrm{I}}\right)\right)_{j_i-1}^{\kappa}\\ \left(\mathbf{v}_i^{\mathrm{II}}\right)_{\mathbf{j}}^{\kappa}-\left(\mathbf{v}_i^{\mathrm{II}}\right)_{j_i+1}^{\kappa}\end{bmatrix},\quad i=1,\cdots,n-1; (49)$$

$$\mathbf{v}_{\mathbf{j}}^{\kappa+1}=\left(\mathbf{v}_n\right)_{\mathbf{j}}^{\kappa}-\Delta t\mathbf{Q}\left(\mathbf{v}_n\right)_{\mathbf{j}}^{\kappa},\left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}}\right)_{j_1\pm1}^{\kappa}=\left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}}\right)_{j_1\pm1,j_2,\cdots,j_n}^{\kappa},\ \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_{j_1\pm1}^{\kappa}=\left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_{j_1\pm1,j_2,\cdots,j_n}^{\kappa}, \quad (50)$$

$\left(\mathbf{B}_1^{\pm}\right)_{j_1\mp1}=\left(\mathbf{B}_1^{\pm}\right)_{j_1\mp1,j_2,\cdots,j_n},\left(\mathbf{v}_i\right)_{j_i\pm1}^{\kappa}=\mathbf{v}_{j_1\cdots j_{i-1}j_i\pm1,j_{i+1}\cdots j_n}^{\kappa},\mathbf{B}_i=diag(\mathbf{B}_i^+,-\mathbf{B}_i^-),$

$\mathbf{B}_i^{\pm}\geq0,\ j_i=\overline{0,J_i-1},\ \kappa=\overline{0,N-1}.$

Начальные условия (44) аппроксимируются следующим образом:

$$\mathbf{v}_{\mathbf{j}}^0=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\Delta x_i}\int_{x_n^{j_n-\frac{1}{2}}}^{x_n^{j_n+\frac{1}{2}}}\cdots\int_{x_1^{j_1-\frac{1}{2}}}^{x_1^{j_1+\frac{1}{2}}}\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})d\mathbf{x},\ j_i=0,\ldots,J_i-1;\ i=1,\ldots,n. \quad (51)$$

Граничные условия аппроксимируются следующим образом:

$$\left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}}\right)_{-1\breve{\mathbf{j}}}^{\kappa+1}=\mathbf{s}\left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_{0\breve{\mathbf{j}}}^{\kappa+1},\quad \left(\mathbf{v}^{\mathrm{II}}\right)_{J_1\breve{\mathbf{j}}}^{\kappa+1}=\mathbf{r}\left(\mathbf{v}^{\mathrm{I}}\right)_{J_1-1,\breve{\mathbf{j}}}^{\kappa+1} \quad (52)$$

$$\kappa=\overline{0,N-1};\ \ \breve{\mathbf{j}}=j_2\cdots j_n;\left(\mathbf{v}_i^{\mathrm{I}}\right)_0^{\kappa}=\left(\mathbf{v}_i^{\mathrm{I}}\right)_{J_i-1}^{\kappa},\ \left(\mathbf{v}_i^{\mathrm{II}}\right)_1^{\kappa}=\left(\mathbf{v}_i^{\mathrm{II}}\right)_{J_i}^{\kappa};\ i=1,\cdots,n.$$

Предположим, что выполнено условие КФЛ.

Определение 3. Разностная схема (48)-(51) с разностным краевым условием (52) экспоненциально устойчива, если существуют постоянные $\eta>0$ и $c>0$ такие что, для любого начального условия $\mathbf{v}_{\mathbf{j}}^0\in\mathrm{L}^2\left(\left\{x_i^{j_i}\right\},\ i=1,\cdots,n;\,j_i=0,\cdots J_i\text{ - }1;\mathrm{R}^q\right)$, решение разностной краевой задачи (48)-(52) удовлетворяет неравенству

$$\prod_{i=1}^{n}\Delta x_n\cdot\prod_{i=1}^{n}\sum_{j_i=1}^{J_i-1}\left(\mathbf{v}_{\mathbf{j}}^{\kappa},\mathbf{v}_{\mathbf{j}}^{\kappa}\right)\leq ce^{-\eta t_\kappa}\prod_{i=1}^{n}\Delta x_n\cdot\prod_{i=1}^{n}\sum_{j_i=1}^{J_i-1}\left(\mathbf{v}_{\mathbf{j}}^0,\mathbf{v}_{\mathbf{j}}^0\right),\ \ \kappa=1,\ldots,N.$$

Для доказательства устойчивости разностной краевой задачи (48) - (52) в качестве дискретной квадратичной функции предлагается следующая функция:

$$L(\mathbf{v}^{\kappa}) = L^{\kappa} = \prod_{i=1}^{n} \Delta x_i \cdot \prod_{i=1}^{n} \sum_{j_i=1}^{J_i-1} \left(\mathbf{v}_{\mathbf{j}}^{\kappa}, \boldsymbol{\mu}_{j_1} \mathbf{v}_{\mathbf{j}}^{\kappa} \right),\ \boldsymbol{\mu}_{j_1} = \boldsymbol{\mu}(x_{j_1}),\ j_1 = 1, \cdots, J_1 - 1. \tag{53}$$

здесь $\prod\limits_{i=1}^{n} \Delta x_i = \Delta x_1 \cdots \Delta x_n,\ \prod\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j_i=1}^{J_i-1} \bullet = \sum\limits_{j_1=1}^{J_1-1} \cdots \sum\limits_{j_n=1}^{J_n-1} \bullet,\ \boldsymbol{\mu}_{j_1} = diag(e^{-\nu x_1^{j_1}} \boldsymbol{\mu}^{+}, e^{\nu x_1^{j_1}} \boldsymbol{\mu}^{-}).$

Теорема 8. Пусть $T > 0$ и дискретная функция определена формулой (53). Если выполнено условие КФЛ, и существуют вещественные числа $\nu > 0$ и $\mu_i > 0,\ i = 1, \dots, n$ такие, что $0 < \eta \equiv \nu \alpha e^{-\nu \Delta x_1} - \beta < 1,$ где $\alpha = \max\limits_{\substack{1 \le k \le q \\ 0 \le j_1 \le J_1 - 1}} \left| \left(b_k \right)_{j_1} \right|,$

$\beta = \max\limits_{\substack{1 \le k \le q \\ 0 \le j_1 \le J_1 - 1}} \left| \left(b_k' \right)_{j_1} \right|,\ 2(\mathbf{Q}_{j_1} \mathbf{u}_{\mathbf{j}}^{\kappa}, \boldsymbol{\mu}_{j_1} \mathbf{u}_{\mathbf{j}}^{\kappa}) - \Delta t (\mathbf{Q}_{j_1} \mathbf{u}_{\mathbf{j}}^{\kappa}, \boldsymbol{\mu}_{j} \mathbf{Q}_{j_1} \mathbf{u}_{\mathbf{j}}^{\kappa}),\ j_1 = 0, \dots, J_1 - 1$

неотрицательно определенные матрицы и

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}^{+} e^{-\nu x_1^{J_1}} \left(\mathbf{B}_1 \right)_{J_1-1}^{+} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\mu}^{-} e^{\nu x_1^{-1}} \left(\mathbf{B}_1 \right)_{0}^{-} \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{r} \\ \mathbf{s} & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}^{+} e^{-\nu x_1^{0}} \left(\mathbf{B}_1 \right)_{-1}^{+} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\mu}^{-} e^{\nu x_1^{J_1-1}} \left(\mathbf{B}_1 \right)_{J_1}^{-} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{s} \\ \mathbf{r} & 0 \end{pmatrix}$$

положительно определенная матрица, тогда численное решение $\mathbf{v}_{\mathbf{j}}^{\kappa}$ разностной краевой задачи (48)-(52) сходится к стационарному решению $\mathbf{v}_{\mathbf{j}}^{*} = 0$ для L^2 нормы.

В третьей главе диссертации, названной **“Разностные схемы для квазилинейных гиперболических систем”,** исследованы численные методы решения смешанных задач для квазилинейных гиперболических систем уравнений. В первом параграфе для решения дифференциальной задачи Коши представлена специальная форма, получена априорная оценка. Далее, построена разностная схема, аппроксимирующая представленную форму дифференциальной задачи. Система уравнений симметрической t-гиперболической системы (по Фридрихсу) представляется следующем виде:

$$A \frac{\partial U}{\partial t} + B \frac{\partial U}{\partial x} + C \frac{\partial U}{\partial y} + D \frac{\partial U}{\partial z} = 0\,. \tag{54}$$

Здесь $A(U), B(U), C(U), D(U)$ – симметричные матрицы порядка m, причем $A(U) > 0;\ U = U(t,x,y,z) = (u_1(t,x,y,z), u_2(t,x,y,z), \dots, u_m(t,x,y,z))^{T}$ – вектор зависимых переменных.

За счет специального подбора компонент вектора зависимых переменных $U(t,x,y,z)$ на гладких решениях система (54) может быть переписана и в таком, эквивалентном, виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}(AU) + \frac{\partial}{\partial x}(BU) + \frac{\partial}{\partial y}(CU) + \frac{\partial}{\partial z}(DU) = 0\,. \tag{55}$$

Эти две взаимно эквивалентные формы записи исходной системы уравнений позволяют получить для нее так называемую локальную априорную оценку.

В самом деле, предположим, что система (54) имеет гладкое решение, $(t,x,y,z) \in R_{+}^{4} = \{(t,x,y,z);\ t > 0,\ (t,x,y,z) \in R^{3}\}$ удовлетворяющее условию:

$$(U,U)\to 0 \text{ при } t\geq 0,\ |x|\to\infty,\ |y|\to\infty,\ |z|\to\infty \tag{56}$$

и начальным данным при $t=0$:

$$U(0,x,y,z)=\varphi(x,y,z). \tag{57}$$

Для решения дифференциального задачи верна априорная оценка:

$$I(t)=I(0),\ 0<t<T<\infty, \tag{58}$$

где $I(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(AU,U)dxdydz$.

При получении оценки (58) мы также полагали, что на данном гладком решении $U(t,x,y,z),(t,x,y,z)\in R_+^4$ нормы матрицы $A(U(t,x,y,z))$ ограничены. Теперь для математической модели (55)-(57) сформулирована следующая вычислительная модель.

Построим в области R_+^4 разностную сетку с шагами $\Delta=\Delta t,\ h_x=\Delta x,$ $h_y=\Delta y, h_z=\Delta z$. Введем такие обозначения: $U_{ijk}^n=U(t_n,x_i,y_j,z_k)$. Известно, что для симметрических матриц B,C,D можно осуществить следующее представление: $B=B_+-B_-,C=C_+-C_-,D=D_+-D_-,$ где B_+,B_-,C_+,C_-,D_+,D_- – симметрические матрицы.

Для нахождения численного решения дифференциальной задачи (54)-(57) предлагаем следующую конечно-разностную схему:

$$\begin{gathered}
A\big(U_{ijk}^{n+1}\big)\big(U_{ijk}^{n+1}-U_{ijk}^{n}\big)+\big(W_{ijk}^{n+1}\big)^{-1}W_{ijk}^{n}\Big(A\big(U_{ijk}^{n+1}\big)-A\big(U_{ijk}^{n}\big)\Big)+\\
+r_x\Big\{\Big(B_+\big(U^{(n)}\big)\big(U_{ijk}^{n+1}-U_{i-1jk}^{n+1}\big)\Big)+\big(W_{ijk}^{n+1}\big)^{-1}W_{i-1jk}^{n+1}\Big(B_+\big(U^{(n)}\big)U_{ijk}^{n+1}-B_+\big(U^{(n)}\big)U_{i-1jk}^{n+1}\Big)-\\
-B_-\big(V^{(n)}\big)\big(U_{i+1jk}^{n+1}-U_{ijk}^{n+1}\big)-\big(W_{ijk}^{n+1}\big)^{-1}W_{i+1jk}^{n+1}\Big(B_-\big(V^{(n)}\big)U_{i+1jk}^{n+1}-B_-\big(V^{(n)}\big)U_{ijk}^{n+1}\Big)\Big\}+\\
+r_y\Big\{W_{ijk}^{n+1}\Big(C_+\big(U^{(n)}\big)\big(U_{ijk}^{n+1}-U_{ij-1k}^{n+1}\big)\Big)+W_{ij-1k}^{n+1}\Big(C_+\big(U^{(n)}\big)U_{ijk}^{n+1}-C_+\big(U^{(n)}\big)U_{ij-1k}^{n+1}\Big)-\\
-C_-\big(V^{(n)}\big)\big(U_{ij+1k}^{n+1}-U_{ijk}^{n+1}\big)-\big(W_{ijk}^{n+1}\big)^{-1}W_{ij+1k}^{n+1}\Big(C_-\big(V^{(n)}\big)V_{ij+1k}^{n+1}-C_-\big(V^{(n)}\big)U_{ijk}^{n+1}\Big)\Big\}+\\
+r_z\Big\{\Big(D_+\big(U^{(n)}\big)\big(U_{ijk}^{n+1}-U_{ijk-1}^{n+1}\big)\Big)+\big(W_{ijk}^{n+1}\big)^{-1}W_{ijk-1}^{n+1}\Big(D_+\big(U^{(n)}\big)U_{ijk}^{n+1}-D_+\big(U^{(n)}\big)U_{ijk-1}^{n+1}\Big)-\\
-D_-\big(V^{(n)}\big)\big(U_{ijk+1}^{n+1}-U_{ijk}^{n+1}\big)-\big(W_{ijk}^{n+1}\big)^{-1}W_{ijk+1}^{n+1}\Big(D_-\big(V^{(n)}\big)V_{ijk+1}^{n+1}-D_-\big(V^{(n)}\big)U_{ijk}^{n+1}\Big)\Big\}=0
\end{gathered} \tag{59}$$

с начальными данными

$$U_{ijk}^0=U_0(x_i,y_j,z_k), i,j,k=0,1,2,\dots . \tag{60}$$

Здесь $r_x=\Delta/h_x,\ r_y=\Delta/h_y,\ r_z=\Delta/h_z,\ U^{(n)},V^{(n)}$ – “промежуточные” значения вектора $U(t_n,x_i,y_j,z_k),$ $W_{ijk}^n=diag\big((w_1)_{ijk}^n,(w_2)_{ijk}^n,...,(w_m)_{ijk}^n\big),$ $\big(W_{ijk}^n\big)^{-1}=diag\Big(\big((w_1)_{ijk}^n\big)^{-1}\big((w_2)_{ijk}^n\big)^{-1},...,\big((w_m)_{ijk}^n\big)^{-1}\Big)\cdot$

Мы предполагаем далее, что решения конечно-разностной модели (59), (60) удовлетворяют условию

$$\big(U_{ijk}^n,U_{ijk}^n\big)\to 0 \text{ при } i^2+j^2+k^2\to\infty, n=0,1,... \tag{61}$$

Также мы предполагаем, что нормы матриц $B(U^{(n)}), B(V^{(n)})$, $C(U^{(n)}), C(V^{(n)})$, $D(U^{(n)}), D(V^{(n)})$ ограничены.

Предложенная разностная схема является неявной и должна реализовываться, по-видимому, итерациями по нелинейности.

Мы не конкретизируем выбор векторов, поскольку возможны самые различные варианты такого выбора (такая много вариантность может оказаться весьма полезной для численного расчета прикладных задач).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 9. Пусть на решениях конечно-разностной модели (59), (60) выполнены условия (61) и следующее неравенство:

$$A(U_{ijk}^{n}) > 0,\, n, |i|, |j|, |k| = 0,1,....$$

Тогда разностная модель (59), (60) устойчива в энергетической норме $\sqrt{J_n}$, где $J_n = h_x h_y h_z \left\{ \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(A(U_{ijk}^{n}) U_{ijk}^{n}, U_{ijk}^{n} \right) \right\}$.

Во втором параграфе третьей главы диссертации построена разностная схема Куранта-Изаксона-Риса для квазилинейной системы, которую при определённых условиях система гиперболических уравнений может быть приведена к системе уравнений гиперболического типа следующего вида:

$$A\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\left(A^T U\right) + B\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(B^T U\right) + C\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(C^T U\right) = 0\,. \tag{62}$$

Для системы (62) и с начальным условием $U(0,x,y) = U_0(x,y)$, $-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$- при $t = 0$ построим модифицированную разностную схему Куранта – Изаксона – Риса:

$$V_{i,j}^{m+1} A_{i,j}^{m+1}\left(U_{i,j}^{m+1} - U_{i,j}^{m}\right) + V_{i,j}^{m}\left(A\left(U_{i,j}^{m+1}\right) - A\left(U_{i,j}^{m}\right)\right) + r_x V_{i-1/2,j}^{m} B_{i-1/2,j}^{m}\left(U_{i+1/2,j}^{m} - U_{i-1/2,j}^{m}\right) +$$
$$r_x V_{i+1/2,j}^{m}\left\lfloor \left(B^T U\right)_{i+1/2,j}^{m} - \left(B^T U\right)_{i-1/2,j}^{m} \right\rfloor + r_y V_{i,j-1/2}^{m} C_{i,j-1/2}^{m}\left(U_{i,j+1/2}^{m} - U_{2,j-1/2}^{m}\right) +$$
$$r_y V_{i,j+1/2}^{m}\left\lfloor \left(C^T U\right)_{i,j+1/2}^{m} - \left(C^T U\right)_{i,j-1/2}^{m} \right\rfloor = 0, m = \overline{0, M-1}, i, j = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{63}$$

$$U_{i,j}^{0} = U_0\left(ih_x, jh_y\right); \quad |i|, |j| = 0,1,2,3\ldots, \tag{64}$$

где $V = diag\left(u_1, u_2, \ldots u_N\right)$,

$$U_{k+1/2,j}^{m} = \frac{1}{2}\left(U_{k,j}^{m} + U_{k+1,j}^{m}\right) + \frac{1}{2} D_{k,j}^{m}\left(U_{k,j}^{m} - U_{k+1,j}^{m}\right), k = i, i-1,$$

$$U_{i,k+1/2}^{m} = \frac{1}{2}\left(U_{i,k}^{m} + U_{i,k+1}^{m}\right) + \frac{1}{2} E_{i,k}^{m}\left(U_{i,k}^{m} - U_{i,k+1}^{m}\right), \quad k = j,\ j-1,$$

$$D = \Omega_R(B)\left\lfloor sign\, \lambda_p(B)\delta_{pl} \right\rfloor \Omega_L(B),\ E = \Omega_R(C)\left\lfloor sign\, \lambda_p(C)\delta_{pl} \right\rfloor \Omega_L(C)\,.$$

Теорема 10. Пусть на решениях $U(t_m, x_i, y_j)$ конечно-разностной модели (63), (64) при стремлении h к нулю $|i|, |j| \to \infty$ выполнено следующее неравенство: $A(U_{ij}^{m}) > 0,\, m, |i|, |j| = 0,1,....$

Тогда разностная модель (63), (64) устойчива в энергетической норме $\sqrt{J_n}$ где $J_m = h_x h_y \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left(A(U_{ij}^m) U_{ij}^m, U_{ij}^m \right)$.

В третьем параграфе третьей главы диссертации построен разностная схема, предполагая, что существует такое невырожденное преобразование $W = W(U, t, x, y, z)$, которое приводит систему (54) к следующему виду:

$$A \cdot \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\left(A^T \cdot W\right) + B \cdot \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(B^T \cdot W\right) + C \cdot \frac{\partial W}{\partial y} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left(C^T \cdot W\right) + D \cdot \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\left(D^T \cdot W\right) + Q \cdot W = F \, , \qquad (65)$$

$$0 < t \le T;\; 0 < x < l;\; |y| < \infty;\; |z| < \infty$$

с периодичными граничными условиями: $W(t, 0, y, z) = W(t, l, y, z)$, $\|W\| = (W, W)^{\frac{1}{2}} \underset{|y|,|z| \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ для всех *t*, *x*, и с начальными данными при *t* = 0: $W(0, x, y, z) = W(U_0(x, y, z), 0, x, y, z)$, $0 \le x \le l$, $|y| < \infty$, $|z| < \infty$. Здесь $A = A(W, t, x, y, z) > 0$, $B = B(W, t, x, y, z)$, $C = C(W, t, x, y, z)$, $D = D(W, t, x, y, z)$, $Q = Q(W, t, x, y, z)$ – квадратные матрицы размерности *N*; A^T, B^T, C^T, D^T – соответствующие транспонированные матрицы.

В области П построим разностную сетку с шагами $\Delta t = \Delta, \Delta x = h_{\mathrm{x}}, \Delta y = h_{\mathrm{y}}, \Delta z = h_{\mathrm{z}}$. Введем в рассмотрение следующие обозначения: $W\left(m \cdot \Delta, ih_x, jh_y, kh_z\right) = W_{ijk}^m = W;\; m = \overline{0, M};\; i = \overline{0, n};\; |j|, |k| = 0,1,...;\; M \cdot \Delta = T;\; nh_x = l$, операторы сдвига: $\varphi, \psi, \theta, \zeta,\; \psi^{-1}, \theta^{-1}, \zeta^{-1}$ $\varphi W = W_{i,j,k}^m = \hat{W}$, $\psi^{\pm 1} W = W_{i\pm1,j,k}^m = W_{i\pm1}$, $\theta^{\pm1} W = W_{i,j\pm1,k}^m = W_{j\pm1}$, $\zeta^{\pm1} W = W_{i,j,k\pm1}^m = W_{k\pm1}$ и разностные операторы: $\tau = \varphi - 1$, $\xi = \psi - 1$, $\bar{\xi} = 1 - \psi^{-1}$, $\xi^0 = \frac{\psi - \psi^{-1}}{2}$, $\eta = \theta - 1$, $\bar{\eta} = 1 - \theta^{-1}$, $\eta^0 = \frac{\theta - \theta^{-1}}{2}$, $\gamma = \zeta - 1$, $\bar{\gamma} = 1 - \zeta^{-1}$, $\gamma_0 = \frac{\zeta - \zeta^{-1}}{2}$.

В этих обозначениях сформулируем модифицированную разностную схему с разностями против потока для системы (65) с периодическими граничными условиями и начальными условиями. Разностная модель смешанной задачи формулируется так:

$$\left[V + V^{m+1}\right]\tau W + r_x V^+\left(U_{i-1/2}^L\right)B^+\left(U_{i-1/2}^L\right)\bar{\xi} W + r_x W \bar{\xi}\left[B^{T^+}\left(U_{i+1/2}^L\right)\left(U_{i+1/2}^L\right)\right] +$$

$$+ r_x V^-\left(U_{i+1/2}^R\right)B^-\left(U_{i+1/2}^R\right)\xi W + r_x W \xi\left[B^{T^-}\left(U_{i-1/2}^R\right)\left(U_{i-1/2}^R\right)\right] + r_y V^+\left(U_{j-1/2}^L\right)C^+\left(U_{i-1/2}^L\right)\bar{\eta} W +$$

$$+ r_y W \bar{\eta}\left[C^{T^+}\left(U_{j+1/2}^L\right)\left(U_{j+1/2}^L\right)\right] + r_y V^-\left(U_{j+1/2}^R\right)C^-\left(U_{j+1/2}^R\right)\eta W + r_x W \eta\left[C^{T^-}\left(U_{j-1/2}^R\right)\left(U_{j-1/2}^R\right)\right] +$$

$$+ r_z V^+\left(U_{k-1/2}^L\right)D^+\left(U_{k-1/2}^L\right)\bar{\gamma} W + r_z W \bar{\gamma}\left[D^{T^+}\left(U_{k+1/2}^L\right)\left(U_{i+1/2}^L\right)\right] + r_z V^-\left(U_{k+1/2}^R\right)D^-\left(U_{k+1/2}^R\right)\gamma W +$$

$$+ r_z W \gamma\left[D^{T^-}\left(U_{k-1/2}^R\right)\left(U_{k-1/2}^R\right)\right] + \Delta V\, Q W = \Delta V\, F \, , \qquad (66)$$

$$m = \overline{0, M-1}, i = \overline{0, n-1}, |j|, |k| = 0,1,...$$

$$W^m_{0,j,k} = W^m_{n,j,k}, W^m_{1,j,k} = W^m_{n-1,j,k},\ m = \overline{0,M}, |j|,|k| = 0,1,... \qquad (67)$$

$$W^0_{i,j,k} = W(U_0(i \cdot h_x, j \cdot h_y, k \cdot h_z), 0, i \cdot h_x, j \cdot h_y, k \cdot h_z), i = \overline{0,n}; |j|,|k| = 0,1,..., \qquad (68)$$

$V = diag(w_1, w_2, \ldots, w_N)$. Здесь $B(U) = B^+(U) + B^-(U)$, $C(U) = C^+(U) + C^-(U)$, $D(U) = D^+(U) + D^-(U)$, $B^+(U) \geq 0$, $B^-(U) \leq 0$, $C^+(U) \geq 0$, $C^-(U) \leq 0$, $D^+(U) \geq 0$, $D^-(U) \leq 0$, $\forall U$, $r_x = \Delta/h_x$, $r_y = \Delta/h_y$, $r_z = \Delta/h_z$, $B = B\left(W^m_{i,j,k}, m\Delta, ih_x, jh_y, kh_z\right)$ и т.д.

Рассмотрим следующую реконструкцию:

$$U^L_{i+1/2} = W^m_i + \frac{1}{2}\psi(R^m_i)(W^m_i - W^m_{i-1}),\ U^R_{i-1/2} = W^m_i - \frac{1}{2}\psi(\frac{1}{R^m_i})(W^m_{i+1} - W^m_i),$$

$$U^L_{j+1/2} = W^m_j + \frac{1}{2}\psi(R^m_j)(W^m_j - W^m_{j-1}),\ U^R_{j-1/2} = W^m_j - \frac{1}{2}\psi(\frac{1}{R^m_j})(W^m_{j+1} - W^m_j),$$

$$U^L_{k+1/2} = W^m_k + \frac{1}{2}\psi(R^m_k)(W^m_k - W^m_{k-1}),\ U^R_{k-1/2} = W^m_k - \frac{1}{2}\psi(\frac{1}{R^m_k})(W^m_{k+1} - W^m_k),$$

$$\psi(\frac{1}{R}) = diag(\psi(\frac{1}{R_1}), \psi(\frac{1}{R_2}), ..., \psi(\frac{1}{R_N})),\ (R_l)^m_i = \frac{(w_l)_{i+1} - (w_l)_i}{(w_l)_i - (w_l)_{i-1}},\ (R_l)^m_j = \frac{(w_l)_{j+1} - (w_l)_j}{(w_l)_j - (w_l)_{j-1}},$$

$$(R_l)^m_k = \frac{(w_l)_{k+1} - (w_l)_k}{(w_l)_k - (w_l)_{k-1}},\ U^L_{i+1/2} = W^m_i + \frac{1}{2}\psi(R^m_i)(W^m_i - W^m_{i-1}),$$

$$U^R_{i-1/2} = W^m_i - \frac{1}{2}\psi\left(\frac{1}{R^m_i}\right)(W^m_{i+1} - W^m_i),\quad U^L_{j+1/2} = W^m_j + \frac{1}{2}\psi(R^m_j)(W^m_j - W^m_{j-1}),$$

$$U^R_{j-1/2} = W^m_j - \frac{1}{2}\psi\left(\frac{1}{R^m_j}\right)(W^m_{j+1} - W^m_j),\ U^L_{k+1/2} = W^m_k + \frac{1}{2}\psi(R^m_k)(W^m_k - W^m_{k-1}),$$

$$U^R_{k-1/2} = W^m_k - \frac{1}{2}\psi\left(\frac{1}{R^m_k}\right)(W^m_{k+1} - W^m_k),\ \psi(R) = diag(\psi(R_1), \psi(R_2), ..., \psi(R_N)),$$

$$\psi\left(\frac{1}{R}\right) = diag(\psi\left(\frac{1}{R_1}\right), \psi\left(\frac{1}{R_2}\right), ..., \psi\left(\frac{1}{R_N}\right),\ (R_l)^m_i = \frac{(w_l)_{i+1} - (w_l)_i}{(w_l)_i - (w_l)_{i-1}},\ (R_l)^m_j = \frac{(w_l)_{j+1} - (w_l)_j}{(w_l)_j - (w_l)_{j-1}}.$$

Далее доказана устойчивость предложенной схемы в энергетическую норму $J_m = h_x h_y h_z \left\{\sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(A(W^m_{ijk})W^m_{ijk}, W^m_{ijk}\right)\right\}$.

Основной целью четвертого параграфа третьей главы является проведение вычислительных экспериментов для сравнения разностных схем предложенных в предыдущих параграфах.

Далее, для конкретных нелинейных гиперболических уравнений исследована устойчивость предложенных разностных схем.

Четвертая глава диссертации, названная **“Разностные схемы повышенного порядка точности для смешанных задач для квазилинейных гиперболических систем”,** посвящена построению разностных схем для смешанных задач для квазилинейных гиперболических систем. Далее исследуются смешанная задача для квазилинейных систем уравнений в области $\Pi = \{(t, x, y, z):\ 0 \leq t \leq T;\ 0 \leq x \leq l;\ |y| < \infty;\ |z| < \infty\}$:

$$A_1 \frac{\partial U}{\partial t} + B_1 \frac{\partial U}{\partial x} + C_1 \frac{\partial U}{\partial y} + D_1 \frac{\partial U}{\partial z} + QU = F\,, \qquad (69)$$

с граничными условиями при x=0:

$$U^{I} = S_1 \cdot U^{II}, \quad 0 < t \le T \ ; \ |y| < \infty \, ; \quad |z| < \infty \, ; \qquad (70)$$

при x=l:

$$U^{II} = R_1 \cdot U^{I}, \quad 0 < t \le T \ ; \ |y| < \infty \, ; \ |z| < \infty \, ; \qquad (71)$$

и с начальными данными при t=0:

$$U(0,x\,,y,z) = U_0(x,y,z)\,,\ 0 \le x \le l\,; \ |y| < \infty; \quad |z| < \infty. \qquad (72)$$

$F = F(t,x,y,z)$, $U_0(x,y,z)$ – заданные вектор-функции, стремящиеся к нулю на бесконечности; $S_1 = S_1(t,x,y,z), R_1 = R_1(t,x,y,z)$ – прямоугольные матрицы размерности $N_0 \times N_1$ и $N_1 \times N_0$, $U = (U^{I}, U^{II}, U^{III})$ - неизвестная вектор – функция размерности N; $U^{I} = \left(u_1, u_2, ..., u_{N_0}\right)^T$, $U^{II} = \left(u_{N_0+1}, u_{N_0+2}, ..., u_{N_0+N_1}\right)^T$ $U^{III} = \left(u_{N_0+N_1+1}, u_{N_0+N_1+2}, ..., u_N\right)^T$ $N = N_0 + N_1 + N_2 \ne 0$, где $N_i \ge 0,\ \mathrm{i} = 0,1,2$ - целые числа, T, l - положительные вещественные числа.

Предположим, что существует такое невырожденное преобразование $W = W(U,t,x,y,z)$, которое приводит смешанную задачу (69)–(72) к следующему виду:

$$A \cdot \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}(A^T \cdot W) + B \cdot \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(B^T \cdot W) + C \cdot \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}(C^T \cdot W) +$$

$$+ D \cdot \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}(D^T \cdot W) + Q \cdot W = F \quad 0 < t \le T \ ; \ 0 < x < l \ ; \ |y| < \infty; \ |z| < \infty; \qquad (69')$$

с граничными условиями при x = 0:

$$W^{I} = S \cdot W^{II}, \quad 0 < t \le T \ ; \ |y| < \infty \ ; \ |z| < \infty. \qquad (70')$$

при x = l:

$$W^{II} = R \cdot W^{I}, \quad 0 < t \le T \ ; \ |y| < \infty \ ; |z| < \infty. \qquad (71')$$

и с начальными данными при t = 0:

$$W(0,x,y,z) = W(U_0(x,y,z),0,x,y,z)\ , \quad 0 \le x \le l, \ |y| < \infty, \ |z| < \infty. \qquad (72')$$

В предположении, что граничные условия (69′)–(71′) являются диссипативными для системы (69′), построим для неё диссипативный интеграл энергии. С этой целью систему (69′) умножим скалярно (справа) на вектор W:

$$(A \cdot \frac{\partial W}{\partial t}, W) + (\frac{\partial}{\partial t}[A^T \cdot W], W) + (B \cdot \frac{\partial W}{\partial x}, W) + (\frac{\partial}{\partial x}[B^T \cdot W], W) + (C \cdot \frac{\partial W}{\partial y}, W) +$$

$$+ (\frac{\partial}{\partial y}[C^T \cdot W], W) + (D \cdot \frac{\partial W}{\partial z}, W) + (\frac{\partial}{\partial z}[D^T \cdot W], W) + (QW, W) = (F, W).$$

После некоторых легко проверяемых преобразований получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(A^T W, W) + \frac{\partial}{\partial x}(B^T W, W) + \frac{\partial}{\partial y}(C^T W, W) + \frac{\partial}{\partial z}(D^T W, W) = (GW, W) + (F, W) \qquad (73)$$

Здесь $G = G(t,x,y,z) = -\frac{1}{2}[Q + Q^*]$.

Проинтегрируем тождество в области $\varGamma_{t_1,t_2} = \{(t,x,y,z); t_1 \le t \le t_2;$ $0 \le x \le l; |y| < \infty; |z| < \infty\}$: $I(t_2) - I(t_2) + \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} [-(B^T W, W)\big|_{x=0} + (B^T W, W)\big|_{x=l}]dydzdt =$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\varPi_{t_1,t_2}} \int\int [(GW,W) + (F,W)]dxdydzdt, \text{ где } I(t) = \iiint\limits_{t=const} (AW,W)dxdydz.$$

Последнее тождество получено в классе функций *W*, для которых квадратичные формы $(C^T W, W)$ и $(D^T W, W)$ стремятся к нулю на бесконечности. Используя диссипативность граничных условий, а именно $(B^T W,W)|_{x=0} \le 0$ при $x = 0$, $-(B^T W,W)|_{x=l} \le 0$ при $x = l$, и лемму об интегральном неравенстве, получим следующее неравенство:

$$\sqrt{I(t)} \le \sqrt{I(0)} \cdot e^{\frac{M}{2}t} + N \cdot \frac{e^{\frac{M}{2}t} - 1}{M} \tag{74}$$

Постоянная *M* здесь оценивает норму матрицы $\frac{1}{2}(Q + Q^*)$, а *N* – правые части *F*. Оценка (74) может быть использована для доказательства устойчивости и единственности решения смешанной задачи (69′)-(72′).

Сформулируем модифицированную разностную схему с разностями против потока для системы (69′)-(72′) с периодическими граничными условиями:

$$W(t,0,y,z) = W(t,l,y,z). \tag{75}$$

Предположим, что *A*=*E* – единичная матрица, и матрица *B* удовлетворяет условию периодичности по *x* с периодом *l*. Разностная модель смешанной задачи (69′)-(72′) формулируется следующим образом.

Рассмотрим разностную модель для задачи (69′)-(72′):

$$\begin{gathered}
[V + V^{m+1}]\tau W + r_x V_{i-1} B^+_{i-1} \bar{\xi} W + r_x V \bar{\xi}\left[\left(B^+\right)^T W\right] + r_x V_{i+1} B^-_{i+1} \xi W + r_x V \bar{\xi}\left[\left(B^-\right)^T W\right] + \\
+ r_y V_{j-1} C^+_{j-1} \bar{\eta} \xi W + r_y V \bar{\eta}\left[\left(C^+\right)^T W\right] + r_y V_{j+1} C^-_{j+1} \bar{\eta} W + r_y V \bar{\eta}\left[\left(C^-\right)^T W\right] + \\
+ r_z V_{k-1} D^+_{k-1} \bar{\gamma} W + r_z V \bar{\gamma}\left[\left(D^+\right)^T W\right] + r_z V_{k+1} D^-_{k+1} \bar{\gamma} W + r_z V \bar{\gamma}\left[\left(D^-\right)^T W\right] + \Delta VQW = \Delta VF; \\
m = \overline{0, M-1}; \;\; i = \overline{0, n\text{-}1}; \;\; |j|,|k| \; = \; 0,1,...
\end{gathered} \tag{76}$$

$$W^m_{0,j,k} = W^m_{n,j,k} \; ; \;\; W^m_{1,j,k} = W^m_{n-1,j,k} \; ; \;\; m = \overline{0, M} \;\; ; \;\; |j|,|k| \; = \; 0,1,... \; ; \tag{77}$$

$$W^0_{i,j,k} = W(U_0(i \cdot h_x, j \cdot h_y, k \cdot h_z), 0, i \cdot h_x, j \cdot h_y, k \cdot h_z); \; i = \overline{0, n} \; ; \; |j|,|k| = 0,1,..., \tag{78}$$

$V = diag(W_1, \; W_2, \; ..., \; W_N)$. Здесь $B(u) = B^+(u) + B^-(u)$, $C(u) = C^+(u) + C^-(u)$, $D(u) = D^+(u) + D^-(u)$, $B^+(u) \ge 0,\; B^-(u) \le 0,\; C^+(u) \ge 0,\; C^-(u) \le 0,\; D^+(u) \ge 0,\; D^-(u) \le 0,\; \forall u \in \mathbf{R},$ $r_x = \Delta / h_x,\; r_y = \Delta / h_y,\; r_z = \Delta / h_z$ и.д.

Теорема 11. Пусть матрица *B* периодична по *x* с периодом *l*, $B\left(W^m_{0,j,k}, t_m, 0, y_j, z_k\right) = B\left(W^m_{n,j,k}, t_m, l, y_j, z_k\right)$, и выполняется условие (77). Тогда разностная модель (76) с начальными условиями и граничными условиями допускает наличие разностного аналога диссипативного интеграла энергии

$$J_m \le e^{\frac{1}{2}T(2\mu+1)} J_0 + \frac{e^{\frac{1}{2}T(2\mu+1)} - 1}{2\mu+1}\Phi \ , \ m = \overline{1,M} \, .$$

Во втором параграфе четвертой главы исследованы разностные схемы с уменьшением полной вариации и их устойчивость.

Использование различных ограничителей обеспечивает монотонность реконструируемой функции и TVD свойство разностной схемы, а также устойчивый счет по разностной схеме численного решения. Здесь значения функции на гранях ячейки вычисляются из решения задачи не по значениям функции в соседних точках, а по значениям, полученным из следующего равенства: $U(x) = U_i + \alpha_i\left(x - \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})\right)$. Кусочно-линейное распределение выбирается в таком виде, потому что реконструированная функция должна быть монотонной в рассматриваемой ячейке. Такой ограничитель не единственен. Для рассматриваемой схемы можно выбрать целый класс следующих ограничителей, которые обеспечат сохранение монотонности:

$\psi(R_j^m) = \min \mathrm{mod}(1, R_j^m)$ – ограничитель minmod, где

$\min \mathrm{mod}(x,y) = \frac{1}{2}(sign\,x + sign\,y)\min(|x|,|y|)$.

TVD схема для смешанной задачи (69′), (72′), (75) формулируется так:

$$\begin{aligned}
&[V + V^{m+1}]\tau W + r_x V^+(U^L_{i-1/2})B^+(U^L_{i-1/2})\bar{\xi}W + r_x W\bar{\xi}[B^{T+}(U^L_{i+1/2})U^L_{i+1/2}] + r_x V^-(U^R_{i+1/2})B^-(U^R_{i+1/2})\xi W + \\
&+ r_x W\xi[B^{T-}(U^R_{i-1/2})U^R_{i-1/2}] + r_y V^+(U^L_{j-1/2})C^+(U^L_{j-1/2})\bar{\eta}W + r_y W\bar{\eta}[C^{T+}(U^L_{j+1/2})U^L_{j+1/2}] + \\
&+ r_y V^-(U^R_{j+1/2})C^-(U^R_{j+1/2})\eta W + r_y W\eta[C^{T-}(U^R_{j-1/2})U^R_{j-1/2}] + r_z V^+(U^L_{j-1/2})D^+(U^L_{j-1/2})\bar{\gamma}W + \\
&+ r_z W\bar{\gamma}[D^{T+}(U^L_{k+1/2})U^L_{k+1/2}] + r_z V^-(U^R_{k+1/2})D^-(U^R_{k+1/2})\gamma W + r_z W\gamma[D^{T-}(U^R_{k-1/2})U^R_{k-1/2}] + \\
&+ \Delta VQW = \Delta VF; \ \ m = \overline{0, M-1} \ ; \ \mathrm{i} = \overline{0,\mathrm{n}\text{-}1} \ ; \ |\mathrm{j}|,|k| \ = \ 0,1,... \qquad (79)
\end{aligned}$$

$$W^{\mathrm{m}}_{0,\mathrm{j,k}} = W^m_{n,j,k}; \ W^{\mathrm{m}}_{1,\mathrm{j,k}} = W^m_{n-1,j,k}; \ \ m = \overline{0,M}; \ \ |\mathrm{j}|,|k| = 0,1,... \qquad (80)$$

$$W^0_{\mathrm{i,j,k}} = W(U_0(ih_x, jh_y, kh_z), 0, ih_x, jh_y, kh_z); \ i = \overline{0,n}; \ \ |\mathrm{j}|,|k| = 0,1,..., \qquad (81)$$

Рассмотрим следующую реконструкцию: $U^L_{i+1/2} = W^m_i + \frac{1}{2}\psi(R^m_i)(W^m_i - W^m_{i-1})$,

$U^R_{i-1/2} = W^m_i - \frac{1}{2}\psi(\frac{1}{R^m_i})(W^m_{i+1} - W^m_i)$, $U^L_{j+1/2} = W^m_j + \frac{1}{2}\psi(R^m_j)(W^m_j - W^m_{j-1})$, $U^R_{j-1/2} = W^m_j - \frac{1}{2}\psi(\frac{1}{R^m_j})(W^m_{j+1} - W^m_j)$,

$U^L_{k+1/2} = W^m_k + \frac{1}{2}\psi(R^m_k)(W^m_k - W^m_{k-1})$, $U^R_{k-1/2} = W^m_k - \frac{1}{2}\psi(\frac{1}{R^m_k})(W^m_{k+1} - W^m_k)$, $\psi(R) = diag(\psi(R_1), \psi(R_2), ..., \psi(R_N))$,

$\psi(\frac{1}{R}) = diag(\psi(\frac{1}{R_1}), \psi(\frac{1}{R_2}), ..., \psi(\frac{1}{R_N}))$, $(R_l)^m_i = \frac{(w_l)_{i+1} - (w_l)_i}{(w_l)_i - (w_l)_{i-1}}$, $(R_l)^m_j = \frac{(w_l)_{j+1} - (w_l)_j}{(w_l)_j - (w_l)_{j-1}}$, $(R_l)^m_k = \frac{(w_l)_{k+1} - (w_l)_k}{(w_l)_k - (w_l)_{k-1}}$.

Здесь $\psi : \mathrm{R} \mapsto \mathrm{R}$ – непрерывная функция, называемая *лимитёром* (*ограничителем*). $\psi = 0$ соответствует схеме первого порядка, $\psi = 1$ – односторонней схеме второго порядка с разностями против потока.

Выбирая различные виды ограничителей, можно получить широкий класс разностных схем, аппроксимирующих рассматриваемую дифференциальную задачи. Аналогичным методом можно доказать устойчивость предложенных разностных схем.

Однако, эти схемы при реализации на конкретных задачах существенно отличаются в точности воспроизведения разрыва и сходимости к решению. При использовании разностных схем первого порядка аппроксимации численное решение размазывается со временем по пространству.

Теорема 12. Пусть матрица B периодична по x с периодом l: $B(W_{0,j,k}^{m},t_m,0,y_j,z_k)=B(W_{n,j,k}^{m},t_m,l,y_j,z_k)$, и выполняется условие (80). Тогда разностная модель (79) с начальными условиями (80) и граничными условиями допускает наличие разностного аналога диссипативного интеграла энергии $J_m \le e^{\frac{1}{2}T(2\mu+1)}J_0+\dfrac{e^{\frac{1}{2}T(2\mu+1)}-1}{2\mu+1}\Phi$, $m=\overline{1,M}$.

В третьем параграфе четвертой главы исследована устойчивость разностной модели, основанной на приближенном решении задачи Римана. Рассматривается разностную схему, предложенную во втором параграфе третьей главы для смешанной задачи квазилинейной системы уравнений (69′)-(72′), которая обобщается в противопоточную схему потока на случай системы уравнений. Эта схема близка к характеристическому методу и основана на приближенном решении задачи Римана.

Для численного решение дифференциальной задачи (69′)-(72′) построим модифицированную разностную схему:

$$V_{i,j.k}^{m+1}A_{i,j,k}^{m+1}\left(W_{i,j,k}^{m+1}-W_{i,j,k}^{m}\right)+V_{i,j,k}^{m}\left(A\left(W_{i,j,k}^{m+1}\right)-A\left(W_{i,j,k}^{m}\right)\right)+$$

$$r_xV_{i-1/2,j,k}^{m}B_{i-1/2,j,k}^{m}\left(W_{i+1/2,j,k}^{m}-W_{i-1/2,j,k}^{m}\right)+r_xV_{i+1/2,j,k}^{m}\left[\left(B^TW\right)_{i+1/2,j,k}^{m}-\left(B^TW\right)_{i-1/2,j,k}^{m}\right]+$$

$$+r_yV_{i,j-1/2,k}^{m}C_{i,j-1/2,k}^{m}\left(W_{i,j+1/2,k}^{m}-W_{2,j-1/2,k}^{m}\right)+r_yV_{i,j+1/2,k}^{m}\left[\left(C^TW\right)_{i,j+1/2,k}^{m}-\left(C^TW\right)_{i,j-1/2,k}^{m}\right]+$$

$$+r_zV_{i,j,k-1/2}^{m}D_{i,j,k-1/2}^{m}\left(W_{i,j,k+1/2}^{m}-W_{i,j,k-1/2}^{m}\right)+r_zV_{i,j,k+1/2}^{m}\left[\left(D^TW\right)_{i,j,k+1/2}^{m}-\left(D^TW\right)_{i,j,k-1/2}^{m}\right]=0 \qquad (82)$$

$$m=\overline{0,M-1},\, i=\overline{0,N},\ j,k=0,\pm 1,\pm 2,....$$

$$\left(W^{I}\right)_{0,j,k}^{m}=S\left(W^{II}\right)_{0,j,k}^{m},\ m=\overline{1,M},\ j,k=0,\pm 1,\pm 2,... \qquad (83)$$

$$\left(W^{II}\right)_{N,j,k}^{m}=R\left(W^{I}\right)_{N,j,k}^{m},\ m=\overline{1,M},\ j,k=0,\pm 1,\pm 2,... \qquad (84)$$

$$W_{i,j,k}^{0}=W_0\left(ih_x,jh_y,kh_z\right);\quad i=\overline{0,N},|j|,|k|=0,1,2,3\ldots, \qquad (85)$$

где $V=diag\left(w_1,w_2,\ldots,w_N\right)$,

$$W_{p+1/2,j,k}^{m}=\frac{1}{2}\left(W_{p,j,k}^{m}+W_{p+1,j,k}^{m}\right)+\frac{1}{2}\boldsymbol{B}_{p,j,k}^{m}\left(W_{p,j,k}^{m}-W_{p+1,j,k}^{m}\right), p=i,i-1,$$

$$W_{i,l+1/2,k}^{m}=\frac{1}{2}\left(W_{i,l,k}^{m}+W_{i,l+1k}^{m}\right)+\frac{1}{2}\boldsymbol{C}_{i,l,k}^{m}\left(W_{i,l,k}^{m}-W_{i,l+1,k}^{m}\right),\quad j=j,\ j-1,$$

$$W_{i,j,q+1/2}^{m}=\frac{1}{2}\left(W_{i,j,q}^{m}+W_{i,j,q+1}^{m}\right)+\frac{1}{2}\boldsymbol{D}_{i,j,q}^{m}\left(W_{i,j,q}^{m}-W_{i,j,q+1}^{m}\right),\quad q=k,\ k-1,$$

$$\boldsymbol{B} = \Omega_R(B)\left[sign\,\lambda_p(B)\delta_{pl}\right]\Omega_L(B),\ \boldsymbol{C} = \Omega_R(C)\left[sign\,\lambda_p(C)\delta_{pl}\right]\Omega_L(C),$$

$$\boldsymbol{D} = \Omega_R(D)\left[sign\,\lambda_p(D)\delta_{pl}\right]\Omega_L(D).$$

Теорема 13. Пусть на решениях конечно-разностной модели (82)-(85) $W(t_m, x_i, y_j, z_k)$, стремящихся к нулю при $|j|,|k| \to \infty$, выполнено следующее неравенство:

$$A(W^m_{i,j,k}) > 0,\ m = \overline{0,M}, i = \overline{0,N},\ |j|,|k| = 0,1,....,$$

и для граничных условий –

$$\left(BW, W\right)^m_{1/2,j,k} \le 0,\ -\left(BW, W\right)^m_{N-1/2,j,k} \le 0.$$

Тогда разностная модель (82)-(85) устойчива в энергетической норме $\sqrt{J_n}$, где $J_m = h_x h_y h_z \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(A(W^m_{i,j,k})W^m_{i,j,k}, W^m_{i,j,k}\right)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая диссертационная работа посвящена построению и исследованию адекватных вычислительных моделей для квазилинейных гиперболических систем.

Основные результаты исследования состоят в следующем.

1. Построена разностная схема для решения линейной двумерной смешанной задачи с постоянными коэффициентами.
2. Доказана экспоненциальная устойчивость решения разностной схемы линейной смешанной задачи с постоянными коэффициентами.
3. Построена разностная схема для решения линейной двумерной смешанной задачи с переменными коэффициентами.
4. Доказана экспоненциальная устойчивость решения разностной схемы линейной смешанной задачи с переменными коэффициентами.
5. Обоснована сходимость решения разностной схемы к решению дифференциальной задачи на модельные задачи.
6. Построены разностные схемы для численного решения квазилинейных гиперболических систем.
7. Доказана устойчивость разностных схем для квазилинейных гиперболических систем.
8. Исследована сходимость разностных схем для квазилинейных гиперболических систем на модельных задачах.
9. Предложен итерационный метод для решения сеточных уравнений для квазилинейных гиперболических систем.
10. Проведен сравнительный анализ предлагаемых разностных схем для численного решения квазилинейных гиперболических систем.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES
DSc. 03/30.12.2019.FM.01.02 AT NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

KHUDOYBERGANOV MIRZOALI URAZALIYEVICH

INVESTIGATION OF THE STABILITY OF DIFFERENCE SCHEMES FOR QUASILINEAR HYPERBOLIC SYSTEMS

01.01.03 – Computational and discrete mathematics
(Physical and Mathematical Sciences)

ABSTRACT OF DOCTORAL DISSERTATION

Tashkent-2021

The theme of doctoral (DSc) dissertation of technical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number №B2018.1.DSc/FM111.

Dissertation has been prepared at National University of Uzbekistan.

Abstract of dissertation in posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (http://ik-fizmat.nuu.uz/) and the "ZIYONET" information-educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific adviser:

Aloev Raxmatillo Djuraevich
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

Official opponents:

Temirbekov Nurlan Muxanovich
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, corresponding member of NAS of the Republic of Kazakhstan

Hayotov Abdullo Rakhmonovich
Doctor of Physical and Mathematical Sciences

Normuradov Chori Begaliyevich
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

Leading organization:

University of world economy and diplomacy

Defense will take place "2" desember 2021 at 16:00 on the meeting of Scientific council number DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 at National University of Uzbekistan. (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 227-12-24, fax: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered № 103) (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 246-02-24.)

Abstract of dissertation sent out on "18" november 2021 year

(mailing report №. 9 on "13" november 2021 year).

A.R. Marakhimov
Chairman of Scientific council
on award of scientific degrees,
D.T.S., professor

Z.R. Rakhmonov
Scientific secretary of Scientific Council on award
of scientific degrees, D.F.-M.S.

K.M. Shadimetov
Chairman of Scientific Seminar under Scientific
Council on award of scientific degrees, D.F.-M.S.,
Professor

INTRODUCTION (abstract of doctoral dissertation)

The aim of the study is building adequate computational models for quasilinear hyperbolic systems.

The object of research is difference schemes for the numerical calculation of mixed problems for linear and quasilinear hyperbolic systems.

The scientific novelty of the research work is as follows:

The scientific novelty of the research work is defined by:

the difference scheme is constructed for obtaining stable solutions of the mixed problem with constant coefficients;

exponential stability of difference schemes for solving mixed problems with constant coefficients is proved;

the convergence of the solution of the difference scheme for the mixed problem with constant coefficients to the solution of the initial differential problem is substantiated;

the difference scheme for finding a stable solution, a mixed problem with variable coefficients is constructed;

the exponential stability of the difference scheme for the mixed problem with variable coefficients is proved;

the convergence of the solution of the difference scheme for the mixed problem with variable coefficients to the initial differential problem is substantiated;

a difference scheme for the numerical solution of quasilinear hyperbolic systems is constructed;

the stability of difference schemes for solving problems of quasilinear hyperbolic systems is proved.

Implementation of research results. The results obtained in the dissertation were used in the following research projects:

Difference splitting schemes constructed for solving mixed problems for linear hyperbolic systems, used in the development of numerical methods for numerical-analytical modeling and studying the issues of solvability of problems of propagation of seismic waves in inhomogeneous porous media with an arbitrary coefficient of friction were used in the project AP051321026 on the topic “Mathematical modeling of the dynamics of elastically deformable porous media, taking into account the frequency dependence of the coefficient of friction (with memory” (reference No. 01-07 / 198, dated April 13, 2021, Institute of Information and Computational Technologies of the Committee of Science Of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan). As a result, it gave an opportunity for confirming the convergence of the numerical solution to the exact solution of model problems;

Adequate computational models built for quasilinear hyperbolic systems of equations and one class of difference schemes built for hyperbolic systems were used to solve differential problems in the research project 01-01-17-1921FR at the University of Putra Malaysia (reference from January 10, 2020 years, University Putra Malaysia supported by Ministry of Education of Malaysia) and as a result, a numerical solution of the differential problem was obtained;

difference schemes for mixed problems built for quasilinear hyperbolic systems are used on project PPP/USG-0216 /FST/30/15316 “Newton-Kantorovich Method For Solving a Class of Nonlinear Integral Equations” for solving integral equations (reference dated April 29, 2019, Universiti Sains Islam Malaysia (USIM)). The use of scientific results made it possible to obtain an approximate solution of integral equations.

Structure and volume of the dissertation. The dissertation consists of an introduction, four chapters, conclusion, list of used literature and appendices. The volume of the dissertation is 184 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (часть I; part I)

1. Алоев Р.Д., Худойберганов М.У. Об устойчивости TVD-схем для квазилинейных гиперболических систем. Вестник НУУз. – Ташкент, 2009. – № 1. – С. 3-7 (01.00.00. № 8).
2. Худойберганов М.У. Об построении и устойчивости разностной схемы Куранта, Изаксона и Риса. Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2010. – № 2. – С. 184-190 (01.00.00. № 6).
3. Худойберганов М.У., Имамов Ш. Диссипатив чегаравий шартларга эга бўлган ўзгармас коэффициентли симметрик t-гиперболик системалар учун чекли элементлар усулини асослаш. ЎзР ФА маърузалари. – Тошкент, 2010. – № 2. – Б. 12-15 (01.00.00. № 7).
4. Худойберганов М.У. Сравнительный анализ некоторых схем для гиперболических систем. Вестник НУУз. – Ташкент, 2010. – № 3. – С. 211-213 (01.00.00. № 8).
5. Худойберганов М.У. Об одной разностной схемы для квазилинейных гиперболических систем. Вестник НУУз. – Ташкент, 2013. – № 2. – С. 205-208 (01.00.00. № 8).
6. Худойберганов М.У. Об одной явно-неявной схеме для нелинейного уравнения гиперболического типа. Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2014. – № 2. – С. 184-190 (01.00.00. № 6).
7. Худойберганов М.У. Конечно-разностная схема для квазилинейных одномерных гиперболических систем. Вестник НУУз. – Ташкент, 2016. – № 2/1.– С. 137-141 (01.00.00. № 8).
8. Aloev R.D., Khudoyberganov M.U. Investigation of implicit difference schemes for hyperbolic systems. Проблемы вычислительной и прикладной математики, 2017. – № 4 (10). – С. 84-92 (01.00.00. № 9).
9. Aloev R.D., Khudoyberganov M.U. Using an a priori estimate for constructing difference schemes for quasilinear hyperbolic systems. Вестник НУУз. – Ташкент, 2017. – № 2/2. – С. 9-21 (01.00.00. № 8).
10. Aloev R.D., Khudoyberganov M.U., Blokhin A.M. Construction and research of adequate computational models for quasi-linear hyperbolic systems. AIMS. Numerical Algebra, Control and Optimization (NACO), 2018. Vol. 8. – № 3. – P. 287-299 (3. Scopus. IF=1.03).
11. Aloev R.D., Khudoyberganov M.U., Eshkuvatov Z.K., Nematova D.E. The difference splitting scheme for hyperbolic systems with variable coefficients. Mathematics and Statistics. 7 (3), 2019. – P. 82-89. DOI: 10.13189/ms.2019.070305. (3. Scopus. IF=0.3).

12. Eshkuvatov Z., Kommuji M., Aloev R., Long N.M.A.N. Khudoyberganov M.U. Semi Bounded Solution of Hypersingular Integral Equations of the First Kind on the Rectangle. Mathematics and Statistics. 8 (2), 2020. – P. 106-120. DOI: 10.13189/ms.2020.080206/. (3. Scopus. IF=0.3).

13. Khudoyberganov M. An adequate computational model for a mixed problem for the wave equation in a domain with an angle. AIP Conference Proceedings of International Uzbekistan-Malaysia online conference on “Computational Models and Technologies (CMT 2020)” held in Tashkent. – Uzbekistan, 2020. August 24-25. Conference Proceedings 2365, 020027, 2021, 335-341. https://doi.org/10.1063/5.0057039 (Scopus, IF: =0.4).

14. Khudoyberganov M., Rikhsiboev D., Rashidov J. About one difference scheme for quasi-linear hyperbolic system. AIP Conference Proceedings of International Uzbekistan-Malaysia online conference on “Computational Models and Technologies (CMT 2020)” held in Tashkent. – Uzbekistan, 2020. August 24-25. AIP Conference Proceedings 2365, 020028, 2021, 343-347, https://doi.org/10.1063/5.0057131 (Scopus, IF:=0.4).

II бўлим (Часть II; Part II)

15. Aloev R.D., Hudoyberganov M.U., Blokhin A.M One class of stable difference schemes for hyperbolic system. n Journal of Numerical Analysis. – America, 2014. Volume 2. – № 3. P. 85-89.

16. Aloev R.D., Khudoyberganov M.U. Stability of explicit finite difference schemes for hyperbolic system. Проблемы вычислительной и прикладной математики, 2016. – № 1 (7). – С. 72-87.

17. Aloev R.D., Eshkuvatov Z.K., Khudoyberganov M.U., N.M.A. Nik Long. A discrete analogue of energy integral for a difference scheme for quasilinear hyperbolic systems. Applied Mathematics, 9, 2018. – P. 789-805.

18. Алоев Р.Д., Худойберганов М.У. Дискретный аналог функции Ляпунова для гиперболических систем. Современная математика. Фундаментальные направления, 2018. Том 64. Выпуск 4. – С. 591-602. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2018-64-4-591-602.

19. Алоев Р.Д., Худойберганов М. Модифицированная разностная схема с ограничителем наклона // «Современные проблемы математики, механики и информационных технологий» материалы Республиканской научной конференции. – Ташкент, 2008. 8 май. – С. 26-29.

20. Худойберганов М. Об устойчивости нелинейной разностной схемы для смешанной задачи для волнового уравнения с диссипативными граничными условиями // «Современные проблемы математики, механики и информационных технологий» материалы Республиканской научной конференции. – Ташкент, 2008. 8 май. – С. 316-319.

21. Алоев Р.Д., Худойберганов М. Устойчивость разностной схемы, основанной на приближенного решении задачи Римана // «Вычислительные

технологии и математическое моделирование» материалы республиканской научной конференции. – Ташкент, 2009. – С. 32.

22. Худойберганов М.У. Устойчивость разностной схемы с ограничителем наклона для нелинейного гиперболического уравнения // «Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики» материалы Первой Всероссийской конференции молодых ученых. – Нальчик, 2011. – С. 163-165.

23. Худойберганов М.У. TVD-схема для нелинейных гиперболических систем // «Операторные алгебры смежные проблемы» тезисы докладов республиканской научный конференции с участием зарубежных ученых. – Ташкент, 2012. 12-14 сентябрь. – С. 247-249.

24. Khudoyberganov M.U. One class of stable difference schemes for hyperbolic system // “Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий-аль-Хорезми 2012” материалы международной конференции. Том 1. – Ташкент, 2012. – С. 155-160.

25. Худойберганов М.У. Тўлқин тарқалиш тенгламаларига қўйилган аралаш масала учун айирмали схемаларнинг қиёсий таҳлили // «Амалий математика ва ахборот хавфсизлиги» Республика илмий-техник конференция материаллари. – Тошкент, 2014. – Б. 189-195.

26. Aloev R.D., Khudoyberganov M.U. Construction and research of adequate computational models for hyperbolic systems // Abstracts, International conference on control, optimization and differential equations. CODE2017. – Malaysia, 2017. – P. 12.

27. Алоев Р.Д., Худойберганов М.У., Мингбаева А., Бомуродов Ш. Исследование устойчивость разностных схем для линейных гиперболических систем // Abstracts of the Uzbek-Israel International conference «Contemporary problems in mathematics and physics». – Tashkent, 2017. – P. 136-138.

28. Алоев Р.Д., Худойберганов М.У., Неъматова Д.Э. Схемы конечных объемов для уравнения переноса // «Статистика и её применения» труды республиканской научо-практической конференции. – Ташкент, 2017. – С. 290-297.

29. Алоев Р.Д., Худойберганов М.У., Неъматова Д.Э. Линейные гиперболические системы // «Статистика и её применения» труды республиканской научо-практической конференции. – Ташкент, 2017. – С. 297-302.

30. Худойберганов М.У., Неъматова Д.Э. Гиперболическая система из двух уравнений // «Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения» тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых. – Ташкент, 2017. – С. 275-276.

31. Худойберганов М.У., Неъматова Д.Э., Бомуротов Ш., Мингбаева А. Об устойчивости решений гиперболических систем // «Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения» тезисы докладов

республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых. – Ташкент, 2017. – С. 277-278.

32. Алоев Р.Д., Худойберганов М.У., Неъматова Д.Э. Схема конечных объемов для численного расчета устойчивых решений гиперболических // «Информатика, ахборот технологиялари ва бошқарув тизими: бугун ва келажакда» Республика илмий-амалий конференцияси материаллари тўплами. – Навоий, 2018. – С. 277-278.

33. Алоев Р.Д., Худойберганов М.У. Априорная оценка для устойчивых решений разностной схемы расщепления // «Информатика, ахборот технологиялари ва бошқарув тизими: Бугун ва келажакда» Республика илмий-амалий конференцияси материаллари тўплами. – Навоий, 2018. – С. 178-182.

34. Алоев Р.Д., Худойберганов М.У., Мингбаева А.А. Численное решение системы уравнений телеграфа // «Информатика, ахборот технологиялари ва бошқарув тизими: бугун ва келажакда» Республика илмий-амалий конференцияси материаллари тўплами. – Навоий, 2018. – С. 182-185.

35. Алоев Р.Д., Худойберганов М.У., Неъматова Д.Э Об устойчивости разностной схемы расщепления для гиперболических систем // «Математиканинг янги натижалари ва уларнинг тадбиқлари» Республика илмий-амалий конференцияси материаллари тўплами. – Самарқанд, 2018. – С. 21-24.

36. Aloev R.D., Eshkuvatov Z.K., Khudoyberganov M.U., Nematova D.E. The difference splitting scheme for hyperbolic systems with variable coefficients //Abstract book, International conference on computing, mathematics and statistics, iCMS2019. – Malaysia, 2019. – P. 6.

37. Алоев Р.Д., Худойберганов М.У., Неъматова Д.Э. Об устойчивости решений гиперболических систем // «Неклассические уравнения математической физики и их приложения» тезисы докладов Узбекско-Российской научной конференции. – Ташкент, 2019. – С. 257-259.

38. Aloev R.D., Khudoyberganov M.U., Nematova D.E. Lyapunov’s theorem for multidimensional hyperbolic systems // «Неклассические уравнения математической физики и их приложения» тезисы докладов Узбекско-Российской научной конференции. – Ташкент, 2019. – С. 242-244.

39. Худойберганов М.У. Численное моделирование решение смешанной задачи для симметрической системы с двумя уравнениями // «Актуальные проблемы стохастического анализа» посвященная 80-летию со дня рождения академика Ш.К.Форманова. – Ташкент, 2021. 20-21 февраля.

40. Худойберганов М.У. Об устойчивости разностной схемы для нелинейного гиперболического систем уравнений // Современные проблемы прикладной математики и информационных технологий. Материалы международной научно-практической конференции. – Бухара, 2021. 15 апрель. – С. 179-181.

41. Худойберганов М.У., Каримова И.М., Каримов Д. Разностная схема расщепления для решения распространения сейсмических волн // Современные проблемы прикладной математики и информационных технологий. Материалы международной научно-практической конференции. – Бухара, 2021. 15 апрель. – С. 181-185.

42. M.Khudoyberganov, R. Aloev, R. Idris. On the stable difference scheme for the mixed boundary problem for a quasi-linear hyperbolic, first-order system in two dimensions // “The 1st International Postgraduate Conference on Ocean Engineering Technology and Informatics 2021 (IPCOETI 2021)”. Terengganu. – Malaysia, 2021. – P. 43.

43. Худойберганов М.Ў. Сейсмик тўлқинларнинг бир жинсли бўлмаган ғовакли муҳитда тарқалиши ҳақидаги масалани сонли ечиш учун дастур. № DGU 10128, 29.01.2021, DGU 2021 0016.

Автореферат Ўзбекистон Миллий университетининг «ЎзМУ хабарлари» журнали таҳририятида 2021 йил 15 ноябрда таҳрирдан ўтказилди.

Бичими: 84х60 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman» гарнитураси.
Рақамли босма усулда босилди.
Шартли босма табоғи: 3. Адади 100. Буюртма № 65/21.

Гувоҳнома № 851684.
«Tipograff» МЧЖ босмахонасида чоп этилган.
Босмахона манзили: 100011, Тошкент ш., Беруний кўчаси, 83-уй.