ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 РАҚАМЛИ
ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

БЕРДАҚ НОМИДАГИ ҚОРАҚАЛПОҚ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ
АЖИНИЁЗ НОМИДАГИ НУКУС ДАВЛАТ ПЕДАГОГИКА
ИНСТИТУТИ

ПРЕНОВ БАРЛИҚБАЙ БАРАҚБАЕВИЧ

КЎП ЎЛЧОВЛИ КОМПЛЕКС АНАЛИЗДА ИНТЕГРАЛ УСУЛЛАРНИНГ ТАДБИҚЛАРИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ДОКТОРЛИК (DSc) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент-2021

УДК.: 517.983

Физика-математика фанлари бўйича докторлик (DSc) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата докторской диссертации (DSc) по физико-математическим наукам

Content of Doctoral (DSc) Dissertation Abstract on Physical-mathematical sciences

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

БЕРДАҚ НОМИДАГИ ҚОРАҚАЛПОҚ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ АЖИНИЁЗ НОМИДАГИ НУКУС ДАВЛАТ ПЕДАГОГИКА ИНСТИТУТИ

ПРЕНОВ БАРЛИҚБАЙ БАРАҚБАЕВИЧ

КЎП ЎЛЧОВЛИ КОМПЛЕКС АНАЛИЗДА ИНТЕГРАЛ УСУЛЛАРНИНГ ТАДБИҚЛАРИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ДОКТОРЛИК (DSc) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент-2021

Физика-математика фанлари бўйича (Doctor of Science) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2021.4.DSc/FM183 рақам билан рўйхатга олинган.

Докторлик диссертацияси Қорақалпоқ давлат университети ҳамда Нукус давлат педагогика институтида бажарилган

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб саҳифаси (http://ik-fizmat.nuu.uz/) ва «ZiyoNet» Ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий маслаҳатчи:	**Худойберганов Гулмирза** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Ганиходжаев Расул Набиевич** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Шоимкулов Баходир Аллабердиевич физика-математика фанлари доктори, профессор
	Мысливец Симона Глебовна физика-математика фанлари доктори, профессор (СФУ, Россия)
Етакчи ташкилот:	**Урганч давлат университети**

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон миллий университети ҳузуридаги илмий даражалар берувчи DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2021 йил «09» 12 соат 12:00 даги мажлисида бўлиб ўтади. Манзил: 100174, Тошкент шаҳри, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+998 71) 227 12 24, факс: (+998 71) 246 53 21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Диссертация билан Ўзбекистон миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (107 рақами билан рўйхатга олинган). Манзил: 100174, Тошкент шаҳри, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+998 71) 227 12 24, факс: (+998 71) 246 53 21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Диссертация автореферати 2021 йил «24» 11 куни тарқатилди.
(2021 йил «24» 11 даги № 2 рақамли реестр баённомаси).

А.Садуллаев
Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., академик

Н.К.Мамадалиев
Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.ф.д. (PhD)

Р.Н.Ганиходжаев
Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш қошидаги илмий семинар раиси, ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (докторлик диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида кўп ўлчовли комплекс $\mathbb{C}^n$ фазодаги функцияларни аналитик давом эттириш ва сингуляр интеграл формулаларни тадқиқлари энг долзарб масалалардан ҳисобланади. Механика ва математиканинг турли соҳаларида ўзининг кўп сонли амалий ёндашувларига эга бўлган бир комплекс ўзгарувчили функциялар назариясидаги Коши интеграл формуласи каби кўп ўлчовли комплекс анализда Бохнер-Мартинелли интеграл формуласи конструктив ва самарали восита бўлиб хизмат қилади. Бохнер-Мартинелли интеграл формуласи оддий муносабатни, $D \in \mathbb{C}^n$ соҳада голоморф бўлган функцияни унинг ∂D чегарадаги қийматлари орқали ифодалайди. Чегараси силлиқ соҳа $\partial D \subset C^1$ ва шу чегарада узлуксиз функциялар $C(\partial D)$ учун Бохнер-Мартинелли интеграл формуласи тадқиқоти бўйича кўп ишлар қилинган, жумладан: интегралнинг Коши маьносидаги бош қиймати, Бохнер-Мартинелли интегралининг чегаравий ҳолати ҳамда «сакраш» ҳақидаги теорема, комплекс тўгрилар билан кесимдаги интегралнинг ҳолати ҳамда Мореранинг чегаравий теоремаси ва бошқа шу кабилар. Сўнгги вақтларда Бохнер-Мартинелли типидаги сингуляр интегралларига қизиқишнинг янада ортиб кетиши туфайли бу интеграл формулани янада кенгроқ соҳаларда чуқурроқ тадқиқот қилиш, ҳозирги куннинг муҳим долзарб муаммоларидан бири ҳисобланади.

Ҳозирги кунда классик соҳаларда голоморф функцияларни чуқур ўрганиш зарурати туфайли, Бохнер-Мартинелли сингуляр интегралини бўлакли силлиқ чегарали соҳаларда ва конуссимон махсус нуқталарига эга бўлган чегаравий гиперсиртларда тадқиқ этиш зарурати тугилди. Бу тадқиқот Бохнер-Мартинелли сингуляр интегралининг амалий аҳамиятга эга эканлиги, хусусан, кўп ўлчовли комплекс анализда функцияларни аналитик давом эттириш масалалари, чегирмалар назарияси, сонлар назарияси каби ва бошқа соҳалардаги тадбиқлари билан боглиқ. Шу боис Бохнер-Мартинелли типидаги сингуляр интеграл формуласини бир жинсли бўлмаган конуссимон қиррали гиперсиртларга эга соҳаларда Коши маьносида бош қийматини аниқлаш, Сохоцкий-Племель, «айланиш» ва композиция (Пуанкаре-Бертран-ўрин алмаштириш) формулаларини топиш ва голоморф акслантиришлар учун логарифмик чегирма – Южаков – Рус формуласини ҳамда Л.А.Айзенбергнинг соҳадаги бутун нуқталар сони ва соҳа ҳажми ўртасидаги айирма учун формуласини умумий ҳолларда тадқиқ қилиш, бугунги кундаги долзарб муаммолардан бўлиб қолмоқда.

Мустақиллик йилларда мамлакатимизда фундаментал фанларда амалий татбиқларга эга бўлган долзарб илмий йўналишларга эътибор кучайтирилди. Жумладан, кўп ўлчовли комплекс анализда ва турдош соҳаларда долзарб масалаларни ҳал қилишда интеграл усулларнинг татбиқига алоҳида эътибор қаратиляпди. Мазкур йўналишнинг – интеграл усулларнинг ривожланиши ва уларнинг татбиқлари натижасида математик физика, комбинаторика, статистик физика, алгебраик ва алгебраик бўлмаган тенгламалар системасини ечишда, кимёвий кинетикада ва сонлар назарияси каби соҳаларда салмоқли илмий натижаларга эришилди. Мамлакатимизда, “Математик анализ ва функционал анализ, амалий математика ва математик моделлаштириш, дифференциал тенгламалар ва математик физика, эҳтимоллар назарияси ва динамик системалар назарияси” фанларининг устувор йўналишлари бўйича, халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш, математика фанининг асосий вазифалари ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди. Бу қарор ижросини таъминлаш мақсади да кўп ўлчовли комплекс анализда янги интеграл усулларни ўрганиш ва уларни ривожлантириш, олинган натижаларни фаннинг турли соҳаларида қўллаш муҳим аҳамият касб этади.

Ушбу диссертация тадқиқоти Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида”ги ПФ-4947-сонли Фармони, 2018 йил 27 апрелдаги “Инновацион гоялар, технологиялар ва лойихаларни амалий жорий қилиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-3682-сонли Қарори, 2019 йил 17 июндаги “2019-2023 йилларда Мирзо Улугбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетида талаб юқори бўлган малакали кадрлар тайёрлаш тизимини тубдан такомиллаштириш ва илмий салоҳиятни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-4358-сонли Қарори, 2020 йил 7 майдаги “Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-4708-сонли Қарори ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий хужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда муайян даражада ҳизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур диссертация Ўзбекистон Республикаси фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий тадқиқотларни кўриб чиқиш. Кўп ўлчовли комплекс анализга оид илмий тадқиқотлар ва илмий изланишлар етакчи хорижий давлатларнинг илмий марказлари ҳамда олий таълим муассасаларида, жумладан, АҚШ (The University of North Carolina, Stony Brook University, Princeton university, University of Massachusetts, Ohio State University), Германия (Потсдам университети, uni.potsdam.de), Италия (Рим университети, unirome1.it), Россия(МДУ, НДУ, СФУ ва бошқалар), Исроил (Bar-Ilan university), Франция, Хитой ва кўплаб дунёнинг бошқа ривожланган давлатларида илмий изланишлар олиб борилмоқда[1].

Голоморф акслантириш назариясида асосий конструктив усул сифатида Бохнер (Bochner,USA) – Мартинелли (Martinelli,Italy) интеграл формуласи ҳисобланади. Бу соҳада кейинги тадқиқотларни олиб борган таниқли

[1] Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации получен по источникам: www.sferu.ru, www.bsu.by, www.mi-ras.ru, www.susu.ru, www.math.kz, www.ayu.edu.kz, www.rmi.tsu.ge, www.rwth-aachen.de, www.ull.es, www.nust.edu.pk, www.ime.unicmp.br, www.unishivaji.ac.in, www.ualg.pt, www.apply.shu.edu.cn и др.

математиклардан: C. Look, Z. Tongde, T. Chun, L.Liangin, Ma Daowei, S. Jigang (China), Г. Хенкин (Россия-Франция), F. Harvey, H. Lowson (USA), Л. Айзенберг (Россия-Исроил), M. Sato, T. Kawai, T. Kashiwara (Japan), E. Чирка, В. Какичев, Ш. Даутов, А. Кытманов, А. Цих, В. Кондратьев, С. Мысливец (Россия), В. Кондратьев, Н. Тарханов (Россия-Германия), M. Passare (Sweden) ва бошқалар.

Диссертация ишида ушбу муаллифларнинг бевосита диссертация билан боглиқ илмий ишларига тегишли ҳаволалар келтирилди.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Интеграл белгиси остида қатнашган функциянинг сиртқи аргументи соҳа чегарасида ётмаганда, Бохнер-Мартинеллининг классик формуласи ўринли бўлади. Агарда бу аргумент соҳанинг чегарасида бўлса, умуман олганда, бу интеграл умумий ҳолда хос интеграл сифатида мавжуд эмас, яьни интеграл сингуляр булади. У ҳолда Бохнер-Мартинелли типидаги сингуляр интегралнинг Коши маъносидаги бош қийматини кўриб чиқамиз. Сингуляр интегралнинг бош қиймати, Сохоцкий-Племельнинг чегаравий ҳолатдаги формуласи, «сакраш» формуласи, «айланиш» формуласи, такрорий интегралларнинг композицияси(Пуакаре-Бертран формуласи) масалалари билан чамбарчас богланган. Бу муаммолар ва бу муаммоларга туташ бўлган муаммолар билан ҳар хил чегаравий шартларда ҳамда ҳар хил синф функциялари учун, кўплаб олимлар шугулланишган. Булардан: C. Look, Z.Tongde, T. Chung, M. Daowei, L. Liangin, S. Jigang, F. Harvey, H. Lowson, L.Boas, R. Boas, Г. Хенкин, Е. Чирка, Л. Айзенберг, В. Какичев, Н. Тарханов, А. Аронов, А. Кытманов, Ш. Даутов, Ш. Ярмухаммедов, А. Романов, А. Сербин, N. Vasilevskiy, M. Shapiro, А. Газиев, Б. Шаимкулов, Д. Джумабаев ва бошқаларни кўрсатиш мумкин.

Голоморф функциялар учун кўп ўлчовли чегирмалар, кўп ўлчовли интеграл формулалар билан, хусусан, Бохнер-Мартинелли интеграл формуласи билан чамбарчас боглиқдир. Кўп ўлчовли чегирмалар ўзининг кўп сонли амалий аҳамиятини фейнман интегралларида, математик физиканинг тенгламалари назариясида, алгебрада, комбинаторик анализда, алгебраик ва алгебраик эмас тенгламалар системалари илдизларини излашда, кимёвий кинетикада юзага келадиган масалаларида ҳамда амалий тадқиқотларнинг бошқа соҳаларида топган бўлса-да, уларнинг назарияси тўлиқ тугалланган эмас. Шунинг учун, кўп ўлчовли чегирмаларни ва сингуляр интеграл формулаларни тадқиқ этиш, кўп ўлчовли комплекс анализнинг ўта долзарб вазифаларидан биридир.

Маълумки, комплекс текисликда аргумент принципи (аслида бу бир ўлчовли логарифмик чегирма формуласидир) муҳим рол ўйнайди. Кўп комплекс ўзгарувчили функциялар назариясида умумлашган логарифмик чегирма формуласи сифатида D чегараланган соҳада $f_1, f_2, \dots, f_n$ голоморф функциялар системаси бўйича ёзилган Южаков-Руснинг кўп ўлчовли логарифмик чегирма формуласи ҳисобланади. Кўп ўлчовли логарифмик чегирма формуласида интеграл соҳанинг чегараси бўйича олинади. Агар $f_1, f_2, \dots, f_n$ акслантиришнинг умумий ноллари соҳанинг чегарасида ётса, формула сингуляр бўлади. Акслантириш $f_1, f_2, ..., f_n$ соҳанинг чегарасида оддий нолларга эга бўлган ҳолатда, умумлашган кўп ўлчовли логарифмик чегирма формуласини ўрганиш ва уни қўллашни тадқиқ қилиш долзарб масаладир.

Бу йўналишларда А. Южаков, G. Roos, Л. Айзенберг, А. Кытманов, А. Цих, M. Passare, N. Tarkhanov, Б.Шаимкулов, F. Hervey, H. Lowson, G. Lupaccioli, Я. Ройтберг, M. Sato, T.Kawai, M. Kashiwara ва бошқа олимларнинг ишларини қайд этиш мумкин.

Диссертация ишида, голоморф акслантириш соҳа чегараси – гиперсиртда нолларига эга бўлган ҳолат учун Южаков – Рус формуласининг умумлашмаси ва ҳосил бўлган формуланинг кўп ўлчовли комплекс анализда тадбиқи (А. Айзенбергнинг соҳадаги бутун нуқталар сони ва соҳа ҳажми ўртасидаги айирмаси учун формуласи умумлашмаси), сонлар назариясида (Оппенгейм айниятларини олиш) ва математик анализда ($\mathbb{R}^n$ фазода Пуассоннинг йигинди формуласи) тадбиқлари ўрганилган.

Ушбу йўналишда Л. Айзенберг, А. Южаков, G. Roos, А. Цих, M. Passare, А. Кытманов, Г. Вороной, В. Иванов, Е. Мышкина, М. Маринов, Я. Ройтберг, Н. Тарханов, А. Куприков, L. Boas, R. Boas, C. Muller ва бошқалар илмий ишлар олиб боришган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Бердақ номидаги Қорақалпоқ давлат университети математик анализ ва алгебра, геометрия ва функционал анализ кафедраси ОТ-4-27 «Йордан учликлари фазолари, сигимлар фазолари тавсифлари ва функцияларни голоморф давом эттириш» ҳамда Ажиниёз номидаги Нукус давлат педагогика институти «Математика ва уни ўқитиш муаммолари» мавзусидаги илмий тадқиқот лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади соҳа чегараси бир жинсли бўлмаган сингуляр конуссимон қиррага эга бўлган гиперсиртда Бохнер-Мартинелли сингуляр интегралининг бош қийматини ҳисоблаш, мазкур соҳалар учун Привалов ва Сохоцкий-Племель формулаларини ҳосил қилиш, Бохнер-Мартинеллининг сингуляр интеграли учун «айланиш» ва Пуанкаре-Бертран формулаларини исботлаш ҳамда олинган натижаларни кўп ўлчовли комплекс анализда, сонлар назариясида ва бошқа турдош соҳаларда қўллашдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари қуйидагилардан иборат:

бир жинсли бўлмаган конуссимон қиррали соҳаларда Бохнер-Мартинелли сингуляр интеграли учун Привалов ва Сохоцкий-Племель теоремалари аналогини олиш;

ўрин алмаштириш (Пуанкаре-Бертран) формуласининг исботи ва Бохнер-Мартинелли сингуляр интеграли учун «айланиш» формуласини олиш;

чегарада оддий нолларга эга бўлган голоморф акслантиришлар учун Южаков-Рус формуласи-логарифмик чегирма формуласини умумлаштириш;

соҳа чегарасида бутун нуқталар бўлган ҳолатда Л.А.Айзенберг формуласи аналогини исботлаш;

бўлакли икки каррали силлиқ чегарали соҳалар учун Оппенгейм айниятлари аналогини олиш;

D соҳада гармоник ва $\partial D\backslash\{y_0\}$ да нольга тенг бўлган функциялар учун каноник ёйилма олиш ва бутун функциялар учун Декартнинг ишоралар қоидаси ҳамда Бюдан-Фурьенинг теоремаларини исбот қилиш.

Тадқиқотнинг объекти $\mathbb{C}^n$ фазода бир жинсли бўлмаган конуссимон қиррали гиперсиртлар ва шу гиперсиртлардаги сингуляр интеграллар, чегарада оддий ноллларга эга бўлган голоморф акслантиришлар, D соҳада гармоник ҳамда $\partial D\backslash\{y_0\}$ да нольга тенг бўлган гармоник функциялар ҳисобланади.

Тадқиқотнинг предмети бир жинсли бўлмаган конуссимон қиррали соҳаларда Бохнер-Мартинеллининг сингуляр интеграли, голоморф акслантиришлар учун Южаков-Рус формуласи-логарифмик чегирма формуласи, соҳа чегарасида бутун нуқталар мавжуд бўлган ҳолда Л.А.Айзенберг формуласи, бўлакли икки каррали силлиқ чегаралар учун Оппенгеймнинг айниятлари ҳисобланади.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида кўп ўлчовли комплекс анализнинг замонавий усуллари, Стокс формуласи, голоморф функциялар учун Пуанкаре формуласи ва голоморф функцияларнинг асосий хусусиятлари ҳақидаги теоремалардан, голоморф функциялар учун Тейлор ва Лоран қаторлари, умумлашган гармоник функциялар учун чегаравий қийматлар ҳақидаги теоремаларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

бир жинсли бўлмаган конуссимон қиррали соҳаларда Бохнер-Мартинеллининг сингуляр интеграли учун Привалов ва Сохоцкий-Племель теоремалари аналоги олинган;

Бохнер-Мартинелли сингуляр интеграли учун ўрин алмаштириш (Пуанкаре-Бертран формуласи) ва «айланиш» формуласи топилган;

чегарада оддий нолларга эга бўлган голоморф акслантиришлар учун Южаков-Рус формуласи-логарифмик чегирма формуласи умумлашмаси келтирилган;

соҳа чегарасида бутун нуқталар мавжуд бўлган ҳолда Л.А.Айзенберг формуласи аналоги исботланган;

бўлакли икки каррали силлиқ чегарали соҳалар учун Оппенгейм айнияти аналоглари олинган;

D соҳада гармоник ва $\partial D\backslash\{y_0\}$ да нольга тенг бўлган функциялар учун каноник ёйилма-Лоран қатори олинди ва бутун функциялар учун Декартнинг ишоралар қоидаси ҳамда Бюдан-Фурьенинг теоремалари исботланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари анализда ва сонлар назариясида янги айниятларни олишга ва уларнинг кенгроқ ривожланишига ёрдам беради. Тадқиқотда олинган натижалар нафақат комплекс анализ ва сонлар назарияси мутахассислари учун, балки алгебра, гармоник анализ фанлари ҳамда бошқа соҳа мутахассислари учун амалий масалаларни ечиш имконини беришдан иборатдир.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги Стокс формуласи, голоморф функциялар учун Пуанкаре формуласи ва голоморф функцияларнинг асосий хусусиятлари ҳақидаги теоремаларидан, голоморф функциялар учун Тейлор ва Лоран қаторлари, умумлашган гармоник функциялар учун чегаравий қийматлар ҳақидаги теоремаларидан фойдаланган ҳолда математик мулоҳазаларнинг ва исботларнинг қатъийлиги, шунингдек юқори халқаро рейтингга эга булган математик журналларда нашр қилиниши билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти шундаки, диссертация ишида олинган натижалардан кўп комплекс ўзгарувчили функциялар назариясида интеграл методларни янада чуқурроқ татқиқ қилишда ва уларни ҳар томонлама тадбиқ қилишда ҳамда янги интеграл формулаларни ҳосил қилишда фойдаланиш имконини бериш мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти шундаки, олинган интеграл формулалардан, жумладан, сонлар назариясида чегараси бўлакли икки каррали силлиқ соҳалар учун Оппенгейм айниятларини олиш ва кимёвий кинетикада учрайдиган алгебраик бўлмаган тенгламалар системасининг нолларини топиш масалаларида ва бошқа шу каби соҳаларда қўлланиланилиши мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Диссертация тадқиқоти жараёнида олинган илмий натижалар қуйидаги йўналишларда амалиётга жорий қилинган:

чегараси бўлакли силлиқ соҳа ва шу чегарада узлуксиз функциялар учун Бохнер-Мартинелли интеграл формуласи бўйича олинган натижалар, интегралнинг Коши маьносидаги бош қиймати, Бохнер-Мартинелли интегралининг чегаравий ҳолати ҳамда «сакраш» ҳақидаги теоремалардан 14-01-00544 рақамли «Кўп ўлчовли интеграл акслантиришлар ва уларнинг комплекс аналитик геометрия, дифференциал ва айирмали тенгламалар назариясида қўлланиши» мавзусидаги хорижий грантда (Сибирь Федераль университетининг 2021 йил 17 сентябрьдаги №157-сонли маълумотномаси) конуссимон қиррали соҳаларда Бохнер-Мартинеллининг сингуляр интегралининг Коши маъносида бош қийматини ҳисоблашда фойдаланилган. Илмий натижаларнинг қўлланилиши чегараси силлиқ бўлмаган ва чегараси бир жинсли эмас конуссимон қиррали соҳаларда Сохоцкий-Племель ва «сакраш», Пуанкаре-Бертран ва «айланиш» формулаларини олиш имконини берган;

кўп ўлчовли логарифмик чегирма формуласида интеграл соҳанинг чегараси бўйича олинади. Агар $f_1, f_2, ..., f_n$ акслантиришнинг умумий ноллари соҳанинг чегарасида ётса, формула сингуляр бўлади. Акслантириш $f_1, f_2, ..., f_n$ соҳанинг чегарасида оддий нолларга эга бўлган ҳолатда, умумлашган кўп ўлчовли логарифмик чегирма формуласидан 18-51-41011 рақамли «Кўп ўлчовли комплекс анализ» номли хорижий грантда (Сибирь Федераль университетининг 2021 йил 17 сентябрьдаги №158-сонли маълумотномаси)

Л.А.Айзенбергнинг соҳада бутун нуқталар сони ва соҳа ҳажми ўртасидаги айирма учун формуласини умумлашмаларини олишда фойдаланилган. Илмий натижаларнинг қўлланилиши сонлар назариясида чегараси бўлакли икки каррали силлиқ соҳалар учун Оппенгейм айниятларини умумий ҳолатда исботлаш ва анализда Пуассоннинг йиғинди формуласини фазода ёзиш имконини берган;

кўп ўлчовли комплекс анализда, чегараланган соҳада голоморф функциялар системаси бўйича ёзилган Южаков-Руснинг кўп ўлчовли логарифмик чегирма формуласининг умумлашмаси бўлган, чегарада акслантиришнинг оддий ноллари ётадиган ҳол учун олинган формула ва чегирма интегралларидан РФФИ 15-01-00277 рақамли «Алгебраик эмас тенгламалар системаси, илдизларнинг даражали йиғиндиси ва компьютер алгебраси» мавзусидаги халқаро лойиҳада (Сибирь Федераль университетининг 2021 йил 17 сентябрдаги №159-сонли маълумотномаси) алгебраик ва алгебраик бўлмаган тенгламалар системасининг илдизларини топишда фойдаланилган. Илмий натижаларнинг қўлланилиши кимёвий кинетикада учрайдиган алгебраик бўлмаган тенгламалар системасининг илдизларини топиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Барча асосий натижалар академик А.Садуллаев раҳбарлик қилган функциялар назарияси бўйича республика семинарида, Сибирь Федераль университети (Россия) математика ва фундаменталь информатика институтининг шаҳар семинарида, Урганч давлат университети математик анализ кафедраси ва Романовский номидаги математика институтининг Хоразм бўлими қўшма семинарида, шунингдек Қорақалпоқ давлат университети математик анализ кафедраси, Романовский номидаги математика институти Қорақалпоқ бўлими ва Нукус давлат педагогика институтининг “Математика ўқитиш методикаси” кафедраси қўшма семинарида муҳокама этилган. Тадқиқот натижалари 29 та илмий-амалий конференцияда, жумладан, 11 та халқаро конференцияда муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 44 та илмий иш чоп этилган бўлиб, шулардан Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижалари чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда ва Scopus халқаро маълумотлар базасига киритилган 15 та мақола нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация таркиби кириш қисми, беш боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат. Диссертациянинг умумий ҳажми 171 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурлиги асосланган, тадқиқотнинг Ўзбекистон Республикасида фан ва техника тараққиётининг устувор йўналишларига мувофиқлиги кўрсатилган, шу мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси, тадқиқотни мақсади ва вазифалари белгиланган. Ўрганиш объекти ва предмети тавсифланган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган илмий ишлар ва диссертациянинг тузилиши ҳақида баён қилинган.

"Дастлабки маълумотлар" деб номланган 1-боб, диссертация ишида қўлланиладиган, асосий қисмига туташ бўлган асосий маълумотлар ва усулларга багишланган. Хусусан, диссертация ишида кўриб чиқиладиган муаммоларни янада чуқурроқ ўрганиш учун зарур маълумотлар берилган: Бохнер-Мартинелли (туридаги) сингуляр интегралининг ва кўп ўлчовли логарифмик чегирманинг асосий хусусиятлари, баъзи бир йигиш формулалари, умумлаштирилган функцияларнинг гармоник давоми, бутун функциялар ноллари ҳақида ва бошқа шу кабилар.

Диссертация ишининг иккинчи боби **“Силлиқ бўлмаган чегарали чегараланган соҳаларда Бохнер-Мартинелли сингуляр интеграли"** деб номланган бўлиб, бўлакли силлиқ ва соҳа чегараси бир жинсли бўлмаган конуссимон қиррали соҳаларда Бохнер-Мартинелли сингуляр интеграли бўйича тадқиқот натижалари келтирилган. 2.1-параграфда чегараси бўлакли силлиқ соҳаларда Бохнер-Мартинелли интеграл бош қиймати (Коши маъносида) кўриб ўтилган.

Фараз қилайлик, D соҳа $\mathbb{C}^n$ фазода чегараланган ва чегараси бўлакли-силлиқ соҳа бўлиб, f функция ∂D да интегралланувчи, яъни $f \in \mathcal{L}^1(\partial D)$ бўлсин. Ушбу

$$M[f](z) = F(z) = \int_{\partial D} f(\zeta) U(\zeta, z)$$

ифодага f функциядан олинган Бохнер-Мартинелли интеграли деб белгилаймиз. Бу ерда,

$$U(\zeta, z) = U(\zeta - z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\overline{\zeta}_k - \overline{z}_k}{|\zeta - z|^{2n}} d\overline{\zeta}[k] \wedge d\zeta$$

Бохнер-Мартинелли ядроси.

Агар f функция D соҳада голоморф ва $\overline{D}$ узлуксиз бўлса, у ҳолда $M[f](z) \equiv f(z)$, яъни, бу Бохнер-Мартинеллининг $\mathbb{C}^n$ фазодаги интеграл формуласи бўлади.

Агар $z \in \partial D$ бўлса, у ҳолда Бохнер-Мартинелли интеграли сингуляр (махсус) бўлади. Унинг бош қиймати (Коши маъносида) қуйидагича аниқланади:

$$M_s[f](z) = F_s(z) = \text{v.}p. \int_{\partial D} f(\zeta) U(\zeta - z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial D \setminus B(z,\varepsilon)} f(\zeta) U(\zeta - z),$$

бу ерда, $B(z,\varepsilon) = \{\zeta : |\zeta - z| < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$.

Фараз қилайлик, $S(z,\varepsilon)$–маркази $z \in \partial D$ нуқтада, радиуси $\varepsilon > 0$ бўлган сфера бўлсин, у ҳолда

$$\alpha(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{VolS(z,\varepsilon) \cap D}{VolS(z,\varepsilon)}$$

$\mathbb{C}^n$ фазода бирлик сфера сирт майдонига-$\Sigma_{2n}=\dfrac{2\pi^n}{(n-1)!}$ бўлинган, z нуқтада ∂D сиртга уринма конуснинг жисмий бурчаги бўлади.

1-тасдиқ. *Фараз қилайлик, f функцияси $\overline{D}$ соҳада $\lambda>0$ кўрсаткичи билан Гёльдер шартини қаноатлантирсин, у ҳолда Бохнер-Мартинелли интегралининг Коши маъносидаги бош қиймати мавжуд ва у ушбу*

$$\text{v.}p.\int_{\partial D} f(\zeta)U(\zeta-z)=\int_{\partial D}[f(\zeta)-f(z)]U(\zeta-z)+\alpha(z)f(z)$$

формула билан ифодаланади.

Дини шартини қаноатлантирувчи функциялар учун 1-тасдиқни қуйидагича умумлаштириш мумкин. Ушбу $z^0\in\partial D$ тайинлаб олиб, шу нуқтадаги f функциянинг узлуксизлик модулини

$$\Theta(\delta)=\sup_{|\zeta-z^0|\leqslant\delta}|f(\zeta)-f(z^0)|$$

деб белгилаймиз, $\alpha(z^0)$ - z^0 нуқтадаги ∂D сиртга уринма конуснинг жисмий бурчагидир.

1-теорема. *Агар f функция ∂D да интегралланувчи, $z^0\in\partial D$ нуқтада узлуксиз ва унинг шу нуқтадаги узлуксизлик модули*

$$\int_0^\beta \frac{\Theta(\delta)}{\delta}d\delta<\infty,\ \beta>0$$

Дини шартини қаноатлантирса, у ҳолда $F_s(z^0)$ сингуляр интеграли мавжуд бўлади ва учи z^0 нуқтада бўладиган D соҳада тўлиқ ётувчи, уринма бўлмаган ихтиёрий γ эгри чизиқда

$$\lim_{\gamma\ni z\to z^0}F^+(z)=\left(1-\alpha(z^0)\right)f(z^0)+F_s(z^0)$$

бўлади.

Бохнер-Мартинелли сингуляр интегралининг Коши маъносидаги бош қиймати ўрганилган олдинги барча ишларда, соҳа чегараси силлиқ ва функция, ҳеч бўлмаганда, бутун соҳа чегарасида узлуксиздир.

2.2-параграф чегаралари конуссимон қиррали бўлакка эга, яъни бўлакли-силлиқ бўлмайдиган гиперсирт бўлган чегараланган соҳада Бохнер-Мартинелли сингуляр интегралини ўрганишга бағишланган. Агар соҳа чегарасида ягона конуслик махсус нуқта бўлган ҳол учун А.Кытманов ва С.Мысливец ўзларининг ишларида Бохнер-Мартинелли интегралларини кўриб чиқишган. Чегара конуссимон қирралара эга бўлса, бу интеграл Д.Джумабоев ишида ўрганилган. Аммо бунинг учун қирраларнинг бир жинслилиги талаб қилинган, бу эса тўпламлар синфини сезиларли даражада торайтиради. Бизнинг ҳолда бу талаб йўқ. Аввало, биз ўрганадиган сиртлар синфини киритамиз.

$\mathbb{C}^n$ фазосини $\mathbb{R}^{2n}$ фазоси билан қуйидагича мос қўямиз: $z=(z_1,\ldots,z_n)$ – $\mathbb{C}^n$ фазода n-ўлчовли комплекс вектор, $x=(x_1,\ldots,x_{2n})$ – $\mathbb{R}^{2n}$ фазодаги ҳақиқий $2n$ -ўлчовли вектор ва $z_j=x_j+ix_{n+j}$, $j=1,\ldots,n$. x_j ўзгарувчиларни қуйидагича гуруҳларга ажратамиз: $x' = (x_1, \dots, x_q)$, $x'' = (x_{q+1}, \dots, x_{2n-1})$, $q \geqslant 0$. $d = 2n-2-q$, $d+q = 2n-2$ кўринишда белгилаймиз.

Фараз қилайлик, X - $\mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\}$ фазодаги d ўлчовли компакт ёпиқ силлиқ кўпхиллик бўлсин ва у $\rho \in C^1(\mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\})$ ҳақиқий қийматли функция билан қуйидагича аниқлансин:

$$X = \{x'' \in \mathbb{R}^{d+1} : \rho(x'') = 0\}, \quad d\rho \neq 0.$$

Д. Джумабоев ишидан фарқли ўлароқ, биз ρ функциянинг бир жинслилигини талаб қилмаймиз.

$\varepsilon_0 > 0$ ни тайинлаб оламиз. Ушбу тўпламни оламиз:

$$C_0 = \{(rx'', r) \in \mathbb{R}^{d+2} : x'' \in X, x_{2n} = r \in [0, \varepsilon_0]\}.$$

Бу C_0 сирт ноль нуқтада ягона махсус нуқтага эга бўлган $d+1$ ўлчовли $\mathbb{R}^{d+2}$ фазодаги конуссимон силлиқ сирт бўлади.

Биз яна ўзгарувчилари $w = (w_1, \dots, w_n)$ бўлган $\mathbb{C}^n$ фазони ва ўзгарувчилари $y = (y_1, \dots, y_{2n})$ бўлган $\mathbb{R}^{2n}$ фазони қараймиз, бу ерда, $w_j = y_j + iy_{n+j}$, $j = 1, \dots, n$. У ҳолда w ўзгарувчиларда

$$C_0 = \{(y'', y_{2n}) : y'' = rx'', y_{2n} = r, x'' \in X, r \in [0, \varepsilon_0]\}$$

кўринишда бўлади.

W тўплам $\mathbb{R}^q$ фазода чегараланган соҳа ва $y' \in W$ бўлсин. $S = W \times C_0$ деб, $\mathbb{C}^n$ фазодаги гиперсиртни белгилаймиз, яъни

$$S = \{y = (y', y'', y_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} : \chi(y) = \chi(y'', y_{2n}) = 0, y' \in W\}.$$

Демак, S тўплами $\Pi = \{y = (y', 0, 0) \in W\}$ махсус конуссимон қиррага эга бўлган силлиқ кўпхиллик.

Фараз қилайлик, $D \in \mathbb{C}^n$ чегараланган соҳа ва унинг чегараси

$$\partial D = \Sigma \cup (S_1 \cup \dots \cup S_N),$$

кўринишда берилган бўлсин, бу ерда, Σ-силлиқ гиперсирт ва ҳар бир S_ν юқорида аниқланган конуссимон S гиперсиртга диффеоморф (p ва d ҳар хил). Шундай қилиб, ∂D – чекли сондаги конуссимон қиррага эга бўлган гиперсирт. Таъкидлашимиз лозимки, бундай соҳалар учун Стокс формуласи ўринли.

Махсус нуқтанинг етарлича кичик атрофидаги анализ локал бўлганлигидан, умумийликни чегараламаган ҳолда, $N = 1$ деб олса бўлади, яъни $\partial D = \Sigma \cup S$, бу ерда S юқорида аниқланган кўринишда бўлади. q ўлчамли Лебег ўлчовини $d\Lambda_q$ орқали белгилаймиз ва интегрални фақат кўпхилликнинг силлиқ бўлаги бўйича оламиз. Агар $f \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$ ва $f \in \mathcal{L}^1(S \setminus \Pi)$ бўлса, у ҳолда $f \in \mathcal{L}^1(\partial D)$ бўлади.

Фараз қилайлик, $f \in \mathcal{L}^1(\partial D)$ бўлсин. Агар

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon^{1-2n} \int_{S \cap B(y_0, \varepsilon)} |f(y) - f(y_0)| \, d\Lambda_{2n-1} = 0,$$

ўринли бўлса, $y_0 \in S$ нуқтаси f функцияси учун Лебег нуқтаси дейилади, бу ерда $B(y_0, \varepsilon)$ –маркази y_0 нуқтада радиуси ε га тенг шар.

1-лемма. *Агар* $y_0 = (y_0', 0, 0) \in \Pi$ *нуқта* $f \in \mathcal{L}^1(\partial D)$ *функциянинг Лебег нуқтаси ва* $z = x = (y_0', 0, x_{2n})$ *нуқтаси конус ўқида ётган бўлса, унда*

$$\lim_{z \to y^0} \left[\int_S (f(w) - f(y_0)) U(w - z) - \int_{S \setminus B(y_0, |x_{2n}|)} (f(w) - f(y_0)) U(w - y_0) \right] = 0$$

бўлади.

Бу тасдиқ конуссимон қиррали соҳалар учун Привалов теоремасини умумлашмаси бўлади. Бир жинсли конуссимон қиррали соҳалар учун бу тасдиқ Д. Джумабоев ишида, чегарада ягона конуссимон махсус нуқтали гиперсиртли соҳалар учун А. Кытманов ва С. Мысливецлар ишида келтирилган.

Бохнер-Мартинелли сингуляр интеграли учун Сохоцкий-Племель формуласининг аналогини келтирайлик. Бу формулалар комплекс анализда сингуляр интегралларнинг соҳа чегараси атрофидаги мавқеини аниқлайдиган асосий формулалар ҳисобланади.

2-теорема. *Агар* $f \in \mathcal{L}^1(\partial D)$ *функция* $z \in \partial D$ *нуқтасида Дини шартини қаноатлантирса, унда* $M_s[f](z)$ *Бохнер-Мартинелли сингуляр интеграли мавжуд бўлиб,*

$$M[f]^+(z) = (1 - \alpha(z)) f(z) + M_s[f](z),$$
$$M[f]^-(z) = -\alpha(z) f(z) + M_s[f](z)$$

Сохоцкий-Племель формулалари ўринли бўлади, бу ерда, $M^+[f](z)$ *- Бохнер-Мартинелли интегралининг соҳа ичидан чегаравий қиймати,* $M^-[f](z)$*- интегралнинг* D *соҳа ташқарасидаги чегаравий қиймати.*

Кейинчалик, интегралланувчи функциялар учун "сакраш" теоремаси исботланади.

3-теорема. *Агар* $z^0 \in \Pi$ *нуқта* $f \in \mathcal{L}^1(\partial D)$ *функциянинг Лебег нуқтаси бўлса, у ҳолда*

$$\lim_{z^{\pm} \to z_0} (M^+[f](z^+) - M^-[f](z^-)) = f(z^0)$$

бўлади, бу ерда, $z^{\pm}$ *нуқталари конуснинг* z^0 *нуқтадаги ўқида ётади,* $z^+ \in D$, $z^- \in \mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$, $|z^+| = |z^-|$.

Бу теорема Дини шартини қаноатлантирувчи функциялар учун Сохоцкий-Племель теоремасининг бевосита натижаси бўлади.

1-натижа. *Агар* $f \in \mathcal{C}(\partial D)$ *бўлиб,* $M[f]$ *функцияси* D *ичидан* ∂D *га* $M[f]^+$ *гача узлуксиз давом этса, у ҳолда* $M[f]$ D *нинг ташқарисидан* ∂D *га* $M[f]^-$ *гача давом этади ва*

$$M[f]^+(z) - M[f]^-(z) = f(z), \quad z \in \partial D.$$

тенглик ўринли бўлади.

Иккинчи ва учинчи теоремалар ва 1-натижа Д. Джумабоевнинг чегараси бир жинсли конуссимон қиррага эга соҳалар учун мос теоремаларнинг умумлашмасидир. Чегараси силлиқ соҳалар учун бу натижалар F. Hervey ва H. Lowson ишларида келтирилган.

3-параграфда биз голоморф акслантириш билан боглиқ бўлган Бохнер-Мартинелли интегралининг махсус бош қийматини кўриб чиқамиз. Сингуляр интеграл операторларининг умумий назариясидан маълумки, бу интеграл қиймати умуман олганда, махсус нуқтани олиб ташлашга боглиқ бўлади (атрофларнинг системасини танлашдан). Биз бу ерда Бохнер-Мартинелли интеграли учун, агар атрофлар системаси голоморф акслантириш ёрдамида тузилган бўлса, бундай эмаслигини кўрсатамиз. Яъни Бохнер-Мартинелли сингуляр интеграл учун қуйидаги теорема ўринли.

4-т*еорема.* *Айтайлик, f функция ∂D соҳада интегралланувчи, $z^0 \in \partial D$ нуқтада узлуксиз, унинг шу нуқтадаги узлуксизлик модули Дини шартини қаноатлантирса ва $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ - $\mathbb{C}^n$ фазода z^0 нуқта атрофида голоморф акслантириш, $\varphi(z^0) = 0$ ҳамда якобиан $\left|\frac{\partial \varphi(z^0)}{\partial z}\right| \neq 0$ бўлсин. У ҳолда*

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\partial D \setminus \{|\phi(z)| < \varepsilon\}} f(z) U(\zeta - z) = \alpha(z^0) f(z^0) + \int_{\partial D} [f(z) - f(z^0)] U(\zeta - z)$$

бўлади.

4-теоремада аниқланган Бохнер-Мартинелли сингуляр интегралининг бош қиймати Бохнер-Мартинелли интегралининг махсус бош қиймати дейилади.

Бу теорема, бизнингча, Коши интеграли учун ҳам, $n = 1$ бўлганда янги ҳисобланади.

Кейинги параграф силлиқ чегарага эга бўлган чегараланган соҳаларда Бохнер-Мартинелли сингуляр интегралининг ўрин алмаштириш-Пуанкаре-Бертран формуласига багишланган.

Сингуляр интеграл тенгламалар назариясида Коши типидаги махсус интеграл учун такрорий интегрални ўрин алмаштириш формуласи (кўп ҳолларда Пуанкаре-Бертран формуласи дейилади) асосий формулалардан бири ҳисобланади. Унинг натижаси бўлган “айланиш” формуласи кўп қўлланилади.

А.Сербин ишида $\mathbb{C}^n$ фазода $n > 1$ бўлганда, Бохнер-Мартинелли сингуляр интеграли учун “айланиш” ва ўрин алмаштириш формулалари ёзилган. Пуанкаре-Бертран формулани ҳосил қилишда “айланиш” формуласидан фойдаланилган. Диссертация ишининг 1-бобида Сербиннинг Бохнер-Мартинелли сингуляр интеграли учун “айланиш” формуласи ва мисол келтирилган, бу мисол - Бохнер-Мартинеллининг махсус интегралини шарда тўгридан тўгри ҳисоблашга асосланган, олинган “айланиш” формуласи $n > 1$ бўлганда ўринли булмайди, шундай қилиб, ўрин алмаштириш формуласи асосланмаган бўлиб қолади.

Бохнер-Мартинелли интеграли учун Пуанкаре-Бертран формуласи келтирамиз.

5-теорема. *Агар $f(\zeta, w) \in C^{\alpha}(\partial D_{\zeta} \times \partial D_w)$, $0 < \alpha < 1$ бўлса, унда $z \in \partial D$ учун ўрин алмаштириш (Пункаре-Бертран) формуласи*

$$\int_{\partial D_w} U(w - z) \int_{\partial D_\zeta} f(\zeta, z) U(\zeta - w) =$$

$$= \frac{1}{4} f(z,z) + \int_{\partial D_\zeta} \int_{\partial D_w} f(\zeta, w) U(w-z) U(\zeta - w)$$

ўринли бўлади (бу формуладаги барча интеграллар бош қиймат маъносида тушунилади, яъни сингуляр).

Ўрин алмаштириш формуласини олиш учун бир нечта леммалар исбот қилинган. Бу леммаларнинг айримлари алоҳида қизиқиш уйғотадиган леммалардир.

2-лемма. *Агар D-чегараси силлиқ бўлган чегараланган соҳа ва γ-коэффициентлари $C^1(\overline{D})$ синфга тегишли (p,q) типдаги дифференциал форма бўлса, у ҳолда*

$$\bar{\partial}_\zeta \int_{D_w} \gamma(w) \wedge U_{p,q-1}(w,\zeta) = \int_{D,w} \gamma(w) \wedge \bar{\partial}_\zeta U_{p,q-1}(w-\zeta) - \frac{\alpha q}{n} \gamma(\zeta),$$

бўлади, бу ерда, агар $\zeta \in D$ бўлса, $\alpha = 1$ ва $\zeta \in \partial D$ бўлса, $\alpha = \frac{1}{2}$, $U_{p,q}$ -қуйидагича аниқланган Коппелман ядроси:

$$U_{p,q}(\zeta, z) = (-1)^{p(n-q-1)} \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \times$$

$$\times \sum_{I,J}' \sum_{k \notin J} \sigma(J,k) \sigma(I) \frac{\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k}{|\zeta - z|^{2n}} d\bar{\zeta}[J,k] \wedge d\zeta[I] d\bar{z}_J \wedge dz_I,$$

бунда $dz_I = dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p}$, $d\zeta[I]$ формаси $d\zeta$ формадан $d\zeta_{i_1}, \ldots, d\zeta_{i_p}$ дифференциалларини чиқариб ташлашдан ҳосил бўлади, йиғиндидаги штрих йиғинди I ва J мултииндексларнинг ўсиш тартиби бўйича олиб боришни билдиради. Ишоралар $\sigma(J,k)$ ва $\sigma(I)$ қуйидагича аниқланади:

$$\sigma(J,k) dz = dz_k \wedge dz_J \wedge dz[J,k] \qquad \sigma(I) dz = dz_I \wedge dz[I].$$

$U_{p,q}(\zeta, z)$ ядроси ζ ўзгарувчиси бўйича $(n-p, n-q-1)$ типидаги, z ўзгарувчиси бўйича (p,q) типидаги иккилик дифференциал форма сифатида тушунилади. $q = -1$ ва $q = n$ учун $U_{p,q}(\zeta, z) = 0$ бўлади.

3-лемма. *Агар $z \in \partial D$ бўлса, у ҳолда*

$$\int_{\partial D_\zeta} \int_{\partial D_w} U(\zeta - w) U(w - z) = 0,$$

тенглик ўринли бўлади.

Бохнер-Мартинелли сингуляр интеграли учун «айланиш» формуласи ушбу кўринишга эга.

2-натижа. *Агар $f(\zeta, z) = f(\zeta) \in C^\alpha(\partial D)$, $0 < \alpha < 1$, бўлса, унда*

$$M_s^2 f = \frac{1}{4} f + \int_{\partial D_\zeta} f(\zeta) \bar{\partial}_\zeta \mu(\zeta, z), \quad z \in \partial D,$$

бўлади. Бу ерда,

$$\mu(\zeta, z) = \int_{D_w} U(w-z) \wedge U_{0,1}(\zeta, w).$$

Диссертациянинг **"Бохнер-Мартинелли сингуляр интегралининг тадбики"** деб номланувчи 3-боби ишнинг 2-бобида олинган натижаларнинг айрим татбиқларига, жумладан: кўп ўлчовли логарифмик чегирма формуласи-Южаков-Рус формуласини, чегарада оддий нолларга эга бўлган голоморф акслантириш учун умумлаштиришга ва Пуассон йигинди формуласига багишланган. Голоморф функциялар учун кўп ўлчовли чегирмалар, кўп ўлчовли интеграл формулалар билан богланган, хусусий ҳолда, Бохнер-Мартинелли интеграл формуласи билан чамбарчас богликдир.

3.1-параграфда Южаков-Рус формуласи, Бохнер-Мартинелли интеграл формуласи ёрдамида чегарада оддий нолларга эга акслантиришлар учун исботланган.

Фараз қилайлик, Ω – $\mathbb{C}^n$ фазода чегараланган соҳа бўлсин, ∂D бўлакли-силлиқ чегарага эга $D \subset\subset \Omega$ соҳа оламиз. Ω да голоморф бўлган

$$w = f(z) = (f_1, \ldots, f_n).$$

акслантиришни қараймиз.

6-теорема. *Агар $w = f(z)$ акслантиришнинг a^k ноллари ∂D чегарада ётадиган бўлса, лекин ∂D даги барча ноллар оддий ва $\varphi(z)$ функция D соҳада голоморф, $\overline{D}$ да $\lambda > 0$ кўрсаткичи билан Гельдер шартини қаноатлантирса, у ҳолда*

$$\mathrm{v.}p.\int_{\partial D} \varphi U(f) = \sum \alpha(a^k)\varphi(a^k),$$

формуласи ўринли бўлади, бу ерда $U(f)$ – Бохнер-Мартинелли ядроси, агар $a^k \in D$ бўлса, $\alpha(a^k) = 1$ бўлади, *агар $a^k \in \partial D$ бўлса, $\alpha(a^k)$ ноль нуқтада $f(\overline{U}_{a^k} \cap \partial D)$ сиртига ўтказилган уринма конуснинг $\mathbb{R}^{2n}$ да бирлик сфера юзасига бўлинган жисмий бурчагига тенг, U_{a^k} эса, a^k нуқтанинг етарлича кичик атрофидир.*

Бу ерда сингуляр интегралнинг бош қиймати махсус бош қиймат маъносида тушунилади:

$$\mathrm{v.}p.\int_{\partial D} \varphi\omega(f) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\partial D \setminus \{|f(\xi)| < \varepsilon\}} \varphi\omega(f).$$

Агар ∂D да f акслантиришнинг ноллари бўлмаса, бу формула Южаков-Рус формуласи бўлади.

3.2-параграф Пуассон йигинди формуласига багишланган бўлиб, Пуассон йигинди формуласи математик анализда қуйидагича аниқланади:

$$\sum_{k \in (a,b) \cap \mathbb{Z}\,;\, a,b \in \mathbb{Z}} \phi(k) + \frac{1}{2}(\phi(a) + \phi(b)) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_a^b \phi(x) e^{2\pi ikx} dx.$$

Агар a ва b сонлар бутун сонлар бўлмаганда, Л.А.Айзенберг томонидан бу формулани логарифмик чегирма ёрдамида олишнинг оддий усули топилган, бу ҳолда формуланинг ўнг томонида эса $\frac{1}{2}(\varphi(a) + \varphi(b))$ қўшилувчи бўлмайди.

3.2-параграфнинг 3.2.2 бандида Пуассон формуласининг кўп ўлчовли ҳолати қаралади. Ихтиёрий чегараланган $G \subset \mathbb{R}^n$ соҳа учун Пуассон формуласи мавжуд эмас. Шундай бўлса ҳам қуйидаги тасдиқ ўринли бўлади.

Фараз қилайлик, $G \subset \mathbb{R}^n$ соҳа ёқлари координаталар текисликларига параллел бўлган кўпёқли бўлсин.

2-тасдиқ. *Агар φ функция $\overline{G}$ соҳанинг атрофида ҳақиқий аналитик функция бўлса, у ҳолда*

$$\sum_{k\in\bar{G}\cap Z^n}\alpha(k)\phi(k)=\sum_{k\in Z^n}\int_G\phi(x)e^{2\pi i(k,x)}dx$$

ўринли бўлади, бу ерда, $(k,x)=k_1x_1+\ldots+k_nx_n$ *ва ўнг томондаги қатор "симметрик параллелепипедлар" маъносида яқинлашувчи бўлади. Агар* G *ни чегараловчи текисликлар ичида* $x_j=m$, $m\in\mathbb{Z}$ *кўринишидаги текисликлар бўлмаса, у ҳолда ўнг томондаги қатор Принсгейм маъносида йиғилади (параллелепипедлар бўйича йиғинди)*

Диссертациянинг тўртинчи боби **«Сонлар назариясида логарифмик чегирма татбиқлари»** деб номланган.

Маълумки, сонлар назарияси тараққиётида бир комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси катта аҳамият касб этди.

1982 йили Л.А.Айзенберг кўп ўлчовли логарифмик чегирма формуласи ёрдамида $\mathbb{R}^n$ фазодаги соҳада бутун нуқталар сони ва соҳа ҳажми орасидаги айирма учун интеграл формуласини топди. Сонлар назариясининг бир қатор классик масалалари (доирада бутун нуқталарнинг сони, Дирихле бўлувчилари, шарда бутун нуқталар сони масалалари ва бошқа шу кабилар) кўрсатилган айирманинг асимптотикасини ҳисоблаш масаласидир.

Шундай қилиб, бу масалалар интегралнинг асимптотикасини ўрганиш масаласига олиб келинади.

4.1-параграфда Л.А.Айзенбергнинг $Q\subset\mathbb{R}^3$ соҳадаги бутун нуқталар сони ва соҳа ҳажми ўртасидаги айирма учун интеграл формуласи чегарада бутун нуқталар бўлган ҳолат учун умумлаштирилган. 4.2-параграфда эса 4.1-параграфда олинган формула соҳа чегараси бўлакли икки каррали силлиқ ва чегарада бутун нуқталар бўлган ҳолда Оппенгейм айниятини умумлаштириш учун қўлланилади. Шу бобнинг 4.3-параграфида Оппенгейм айниятининг хусусий ҳолларда, эллипсоид, тетраэдр ва $\mathbb{R}^3$ фазода қувурлар кесишмалари учун аниқ кўриниши ёзилган. Олинган айниятларнинг ёзилиши мураккаб, аммо айниятнинг ўнг томони фақат элементар тригонометрик функцияларга боғлиқ бўлади.

Энди 4-бобнинг асосий натижаларини келтирамиз.

$\mathbb{C}^3$ фазода чегараланган $D=Q\times G$ соҳани қараймиз, бу ерда, Q - $\mathbb{R}^3_x$ текисликда ∂Q чегараси бўлакли-силлиқ бўлган чегараланган соҳа, биз бу соҳанинг йўналишини табиий равишда оламиз, G - $\mathbb{R}^3_y$ соҳада чегараланган, ∂G эса чегараси бўлакли силлиқ соҳа бўлсин. У ҳолда $(z_1,z_2,z_3)\in D$ нуқталар $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$, $z_3=x_3+iy_3$ кўринишда бўлиб, $(0,0,0)\in G$ бўлади.

Бутун нуқталарда нолларга эга бўлган қуйидаги акслантиришни оламиз:

$$f=(f_1,f_2,f_3),\ f_1(z)=e^{2\pi iz_1}-1,\ f_2(z)=e^{2\pi iz_2}-1,\ f_3(z)=e^{2\pi iz_3}-1.$$

$N(Q)$ орқали Q соҳада жойлашган бутун нуқталар сонини, $V(Q)$ орқали эса Q соҳанинг ҳажмини белгилаймиз. Агар ∂Q да бутун нуқталар бўлмаса, кўп ўлчовли логарифмик чегирма формуласи ёрдамида Л.А.Айзенберг томонидан ($\varphi\equiv1$ учун)

$$N(Q)-V(Q)=\frac{4}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty dt_1\wedge dt_2\wedge dt_3\times$$

$$\iint_{\partial Q}\frac{t_2t_3\sin 2\pi x_1dx_2\wedge dx_3-t_1t_3\sin 2\pi x_2dx_1\wedge dx_3+t_1t_2\sin 2\pi x_3dx_1\wedge dx_2}{(t_1^2-2t_1\cos 2\pi x_1+t_2^2-2t_2\cos 2\pi x_2+t_3^2-2t_3\cos 2\pi x_3+3)^3},\qquad(1)$$

интеграл формула олинди.

4.1-параграфда (1) формулани ∂Q чегарада бутун нуқталар бўлган ҳоли учун умумлаштириш қаралади. А.Айзенберг, А.Кытманов ва Б.Пренов ишларида худди шундай масала $\mathbb{R}^2$ ҳол учун ўрганилган.

3-тасдиқ. *Агар ∂Q икки каррали силлиқ ва чегарада бутун нуқталар мавжуд бўлса, у ҳолда*

$$N(Q)+\frac{1}{2}N(\partial Q)-V(Q)=\iint_{\partial Q}F(x_1,x_2,x_3),$$

формула ўринли бўлади, бу ерда

$$F(x_1,x_2,x_3)=\frac{4}{\pi}\times$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{t_2t_3\sin 2\pi x_1dx_2\wedge dx_3-t_1t_3\sin 2\pi x_2dx_1\wedge dx_3+t_1t_2\sin 2\pi x_3dx_1\wedge dx_2}{(t_1^2-2t_1\cos 2\pi x_1+t_2^2-2t_2\cos 2\pi x_2+t_3^2-2t_3\cos 2\pi x_3+3)^3}dt_1\wedge dt_2\wedge dt_3$$

формаси ∂Q да абсолют интегралланувчи.

Энди чегараси бўлакли икки каррали силлиқ бўлган Q соҳани қарайлик. $(l,m,n)\in\partial Q$ бутун нуқта бўлсин, $\alpha(l,m,n)$ орқали қуйидаги лимитни белгилаймиз:

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{l_\varepsilon^+}{4\pi\varepsilon^2},$$

бу ерда, l_ε^+ – маркази (l,m,n) бутун нуқтада, радиуси ε бўлган ∂B_ε сферадан олинган $\partial B_\varepsilon\cap Q$ сирт қисмининг юзаси, бу нормаланган жисмий бурчакдир. У ҳолда қуйидаги тасдиқ ўринли.

7-теорема. *Ушбу формула*

$$N(Q)-V(Q)+\sum\alpha(l,m,n)=\iint_{\partial Q}F(x_1,x_2,x_3),$$

ўринли,бу ерда

$$F(x_1,x_2,x_3)=\frac{4}{\pi}\times$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{t_2t_3\sin 2\pi x_1dx_2\wedge dx_3-t_1t_3\sin 2\pi x_2dx_1\wedge dx_3+t_1t_2\sin 2\pi x_3dx_1\wedge dx_2}{(t_1^2-2t_1\cos 2\pi x_1+t_2^2-2t_2\cos 2\pi x_2+t_3^2-2t_3\cos 2\pi x_3+3)^3}dt_1\wedge dt_2\wedge dt_3$$

формаси ∂Q-да абсолют интегралланувчи ва йиғинди ∂Q да ётган барча бутун (l,m,n) нуқталар бўйича олинган.

$\mathbb{R}^3$ фазода Q_λ шар бўлсин, λ шар радиусининг квадрати. Шарда бутун нуқталар сонини $N(Q)$ билан, $N(\partial Q_\lambda)$ билан эса сферадаги бутун нуқталар сонини белгилаймиз. Агар $V(Q)$ шар ҳажми бўлса, унда Оппенгейм айнияти ($\mathbb{R}^2$ фазода Вороной-Харди айнияти)

$$N(Q_\lambda)+\frac{1}{2}N(\partial Q_\lambda)=V(Q)+\lambda^{3/4}\sum_{n=1}^{\infty}r_3(n)n^{-3/4}J_{3/2}(2\pi(n,\lambda)^{1/2}),$$

кўринишга эга бўлади, бу ерда $J_{3/2}$ – Бессель функцияси, $r_3(n)$ – натурал n сонининг $n=m_1^2+m_2^2+m_3^2, m_1,m_2,m_3\in\mathbb{Z}$ учта квадратлар йиғиндиси кўринишидаги ёзилишлар сони.

Оппенгейм айниятида, Вороной-Харди айниятида бўлгани каби бу айниятнинг ўнг томонида $r_3(n)$ назарий сонли функция иштирок этган. Бу ерда мазкур қатор яқинлашувчи эмас, фақат Рисснинг қандайдир бир усули ёрдамида жамланади.

Бу параграфда биз, чегараси бўлакли икки каррали силлиқ бўлган соҳа учун Оппенгейм айниятини умумлашмасини ҳосил қиламиз.

Ҳосил қилинган айниятда юқорида қайд этилган камчиликлар учрамайди.

4-тасдиқ. Айтайлик, *∂Q – икки каррали силлиқ бўлса, у ҳолда*

$$N(Q)+\frac{1}{2}N(\partial Q)=V(Q)+\frac{\sqrt{\pi}}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{3^{k/2}}\sum_{l+m+n=k}\Bigg[\frac{A_{l,m,n}}{\Gamma(\frac{l}{2}+1)\Gamma(\frac{m+1}{2})\Gamma(\frac{n+1}{2})}-$$

$$-\frac{B_{l,m,n}}{\Gamma(\frac{l+1}{2})\Gamma(\frac{m}{2}+1)\Gamma(\frac{n+1}{2})}-\frac{C_{l,m,n}}{\Gamma(\frac{l+1}{2})\Gamma(\frac{m+1}{2})\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\Bigg]$$

ўринли бўлади, бу ерда

$$A_{l,m,n}=\iint_{\partial Q}\cos^l 2\pi x_1\cos^m 2\pi x_2\cos^n 2\pi x_3\sin 2\pi x_1 dx_2\wedge dx_3,$$
$$B_{l,m,n}=\iint_{\partial Q}\cos^l 2\pi x_1\cos^m 2\pi x_2\cos^n 2\pi x_3\sin 2\pi x_2 dx_1\wedge dx_3,$$
$$C_{l,m,n}=\iint_{\partial Q}\cos^l 2\pi x_1\cos^m 2\pi x_2\cos^n 2\pi x_3\sin 2\pi x_3 dx_1\wedge dx_2.$$

8-теорема. *Агар ∂Q –бўлакли икки каррали силлиқ бўлса, унда*

$$N(Q)+\sum\alpha(l,m,n)=V(Q)+\frac{\sqrt{\pi}}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{3^{k/2}}\sum_{l+m+n=k}\left[\frac{A_{l,m,n}}{\Gamma(\frac{l}{2}+1)\Gamma(\frac{m+1}{2})\Gamma(\frac{n+1}{2})}-\right.$$

$$\left.-\frac{B_{l,m,n}}{\Gamma(\frac{l+1}{2})\Gamma(\frac{m}{2}+1)\Gamma(\frac{n+1}{2})}+\frac{C_{l,m,n}}{\Gamma(\frac{l+1}{2})\Gamma(\frac{m+1}{2})\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\right]$$

ўринли бўлади, бу ерда

$$A_{l,m,n}=\iint_{\partial Q}\cos^l 2\pi x_1\cos^m 2\pi x_2\cos^n 2\pi x_3\sin 2\pi x_1 dx_2\wedge dx_3,$$
$$B_{l,m,n}=\iint_{\partial Q}\cos^l 2\pi x_1\cos^m 2\pi x_2\cos^n 2\pi x_3\sin 2\pi x_2 dx_1\wedge dx_3,$$
$$C_{l,m,n}=\iint_{\partial Q}\cos^l 2\pi x_1\cos^m 2\pi x_2\cos^n 2\pi x_3\sin 2\pi x_3 dx_1\wedge dx_2.$$

Диссертациянинг охирги 5-боби **“Кўп ўлчовли Лоран қатори ва айрим турдош масалалар”** деб номланади. Бу боб асосан, ишнинг олдинги бобларида олинган натижаларни кўп ўзгарувчили гармоник функцияларга татбиқига багишланган. 5-бобнинг мақсади $\partial D\setminus\{y_0\}$ да нолга тенг бўлган D соҳада гармоник функциянинг каноник ёйилмасини олиш ва бутун функциялар учун Декарт ишоралар қоидаси ҳамда Бюдан-Фурье теоремаларининг аналогларини ўрганишдан иборат. Каноник ёйилма гармоник функциялар учун Лоран қаторининг аналоги бўлиб хизмат қилиши мумкин. Бу ёйилмани аниқ кўринишда ёзиш учун, биз иккита соҳа оламиз: маркази нол нуқтада бўлган B бирлик шар ва ярим фазо.

Я.Ройтберг қуйидаги масалани қарайди: Фараз қилайлик, u функция $B\subset\mathbb{C}^n$ шарнинг S чегарасига яқин жойда чекли тартибли ўсишга эга бўлган гармоник функция бўлсин. У ҳолда u сферада $u_0\in\mathcal{D}'(S)$ кучсиз лимит қийматига эга, шундай маънодаrb, барча $v\in\mathcal{C}^\infty(S)$ учун

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_S u((1-\varepsilon)y)v(y)d\sigma=\langle u_0,v\rangle$$

бўлади, бу ерда $d\sigma$ -S даги Лебег ўлчови, $\langle u_0,v\rangle$ эса u_0 умумлашган функциянинг v функциядаги қиймати.

u функция ўзининг кучсиз чегаравий қиймати орқали барча $x\in B$ учун, Пуассон ядроси ёрдамида, тикланиши мумкин:

$$u(x)=\langle u_0,P(x,\cdot)\rangle.$$

Тескариси S чегарада берилган u_0 умумлашган функцияси учун $x\in B$ бўлганда, $u(x)=\langle u_0,P(x,\cdot)\rangle$ бўлади. u функция B шарда гармоник функция бўлиб, унинг S чегарадаги кучсиз лимит қийматлари u_0 билан устма-уст тушади.

Агар y_0 нуқта u_0 функциянинг ∂D даги махсус нуқтаси бўлса, бу масала махсус нуқталарга эга кўпхиллик анализида, шарнинг чегарасига яқин нуқталарда чекли тартибли ўсишга эга, шарда гармоник функциялар учун, В.Кондратьев томонидан ўрганилган. Айтайлик, $u_0=|y-y_0|^k$ ва $k\le-(n-1)$ бўлсин. u_0 функция бутун S чегарада умумлашган функциягача ихтиёрий усул билан давом этирилиши мумкин. Шундай экан, давом эттирилган функция $u_{0,N}$ - S чегарада y_0 дан ташқарида u_0 га тенг бўладиган умумлашган функция бўлади ва $u_N(x)=\langle u_{0,N},P(x,\cdot)\rangle, x\in B$, функцияси B да гармоник ва унинг S даги кучсиз чегаравий қийматлари $u_{0,N}$ бўлади. Жумладан, $S\setminus\{y_0\}$ да u_N функция u_0 билан устма-уст тушади,

Гиперфункцияни (Гиперфункция-аналитик функционал, япон математиги М.Сато томонидан киритилган ва ўрганилган) фойдаланиш S га яқин нуқталарда гармоник функцияларнинг чекли тартибли ўсишга эга бўлиши ҳақидаги қатъий шартидан воз кечиш имкониятини беради. Ихтиёрий очиқ тўпламда аниқланган гиперфункция, гиперфункция сифатида бутун фазога давом қилинади. Эслатамизки, B да гармоник бўлган ихтиёрий u функцияси S да гиперфункциядан иборат бўлган u_0 чегаравий қийматга эга бўлади. Янада кўпроқ, u барча $x\in B$ учун u_0 бўйича $u(x)=\langle u_0,P(x,\cdot)\rangle$-

Пуассон формуласи билан тикланади. Тескарисига, S да берилган u_0 гиперфункция учун B да гармоник бўлган $u(x)=\langle u_0, P(x,\cdot)\rangle$ функциянинг S сферадаги лимит қиймати u_0 билан устма-уст тушади.

5.1-параграфдаги тасдиқ 4-лемма (ёрдамчи бўлса ҳам) муҳим ҳисобланади.

4-лемма. *Фараз қилайлик, u_0 функция $S\setminus\{y_0\}$ да гиперфункция ва $u_{0,R}$ функция S чегарада u_0 гиперфункциянинг ихтиёрий давоми бўлсин. У ҳолда $S\setminus\{y_0\}$ да u_0 функцияга тенг бўлган B даги ихтиёрий гармоник функция ушбу*

$$u(x)=\langle u_{0,R}, P(x,\cdot)\rangle+\sum_{\beta\in\mathbb{Z}_+^{n-1}} c_\beta(-\partial_{y'})^\beta P(x,y_0),\quad x\in B, \tag{2}$$

кўринишга эга бўлади, бу ерда $P(x,y_0)$–бирлик шарда Пуассон ядроси, $(c_\beta)_{\beta\in\mathbb{Z}_+^{n-1}}$ эса, $\lim\limits_{|\beta|\to\infty}\sqrt[|\beta|]{|\beta! c_\beta|}=0$ лимит тенгликни бажарувчи комплекс сонлар кетма-кетлиги.

(2) ёйилма y бўйича инвариант эмас. Чунки y ўзгарувчи S да y_0 га яқин нуқталарда, y' бўйича ҳосилаларни локал координаталарда сақлайди. Инвариантликни олиш учун, биз S даги локал координаталарни $\mathbb{R}^n$ фазодаги ҳосилалар орқали ифодалашимиз керак бўлади.

Бу параграфдаги асосий натижа қуйидаги

Теорема 9. *Айтайлик, $u_0 - S\setminus\{y_0\}$ да гиперфункция ва $u_{0,R}$ -u_0 ни бутун S га гиперфункция сифатида ихтиёрий давом эттирилиши бўлсин. У ҳолда $S\setminus\{y_0\}$ да u_0 га тенг бўлган B даги ихтиёрий гармоник функция ушбу*

$$u(x)=\langle u_{0,R}, P(x,\cdot)\rangle+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{h_j(x-y_0)}{|x-y_0|^{2j}}P(x,y_0),\qquad x\in B,$$

кўринишга эга бўлади, бу ерда $\{h_j(z)\}_{j=0,1,\dots}$ бир қийматли аниқланган, $\mathbb{R}^n$ фазодаги даражаси j га тенг бўлган бир жинсли гармоник кўпҳадлар кетма-кетлиги.

5.2-параграфда гиперфункцияларни ярим фазода ёйиш масаласи ўрганилади. $\mathbb{R}_+^{n+1}$ деб юқори ярим фазони белгилайлик. У шундай (x,t), $x\in\mathbb{R}^n$, $t>0$ нуқталардан иборат бўлади. Унинг чегараси $\mathbb{R}^n$ фазоси. Ярим фазо учун Пуассон ядроси

$$P(x,t,y)=\sigma_n\frac{t}{(|x-y|^2+t^2)^{\frac{n+1}{2}}},\qquad \sigma_n=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}},$$

кўринишда бўлади, бу ерда $x,y\in\mathbb{R}^n$, $t>0$.

5.2- параграфнинг асосий натижаси ушбу теорема ҳисобланади.

10-теорема. *Фараз қилайлик, u_0 $\mathbb{R}^n\setminus\{y_0\}$ да компакт ташувчига эга бўлган гиперфункция ва $u_{0,R}$ функция u_0 ни бутун $\mathbb{R}^n$ фазога гиперфункция сифатида ихтиёрий давом эттирилиши бўлсин. У ҳолда $\mathbb{R}^n\setminus\{y_0\}$ да u_0 га тенг бўладиган $\mathbb{R}_+^{n+1}$ даги ҳар бир u гармоник функция*

$$u(x,t)=\langle u_{0,R},P(x,t,\cdot)\rangle+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{h_j(x-y_0)}{(|x-y_0|^2+t^2)^j}P(x,t,y_0),$$

кўринишга эга, бу ерда $\{h_j(z)\}_{j=0,1,...}$ $\mathbb{R}^n$ *фазода бир қийматли аниқланадиган j даражали бир жинсли гармоник кўпҳадлар кетма-кетлигидир.*

Ҳақиқий сонлар ўқидаги кесмада, ҳақиқий кўпҳаднинг ҳақиқий илдизлари сонини аниқлаш учун, кўп ҳолларда классик Штурм усули қўлланилади. Бу усул мураккаб ва ноқулай усул ҳисобланади. Одатда, Эрмит теоремаси, Декарт ишоралар қоидаси ва Бюдан-Фурье теоремаси билан комбинацияда қўлланилади. Кимёвий кинетика масалаларида алгебраик бўлмаган тенгламалар системаси ҳосил бўлади. Бу системада номаълумларни йўқотишдан кейин биз, бутун трансцендент функцияни оламиз. Шу сабабдан, табиий ҳолда, бутун функцияларнинг мусбатноллари тўгрисидаги Декартнинг ишоралар қоидаси ва бутун функциялар учун Бюдан-Фурье теоремалари аналогларини топиш масаласи келиб чиқади.

Айтайлик, ҳақиқий коэффициентли бутун $f(z)$ функция

$$f(z)=1+b_1z+\ldots+b_nz^n+\ldots \tag{3}$$

кўринишга эга бўлсин. Ушбу

$$1,b_1,\ldots b_n,\ldots$$

кетма-кетликда ишора алмашиш сонини W_- билан, ўзгармас ишоралар сонини W_+ билан белгилаймиз. Агар (3) кетма-кетликда ноллик элементлар бор бўлса, биз уларни тўлдириб қолдирамиз. Шундай қилиб коэффициентлар кетма-кетлигида фақат нолдан фарқли элементлар қатнашади. Бутун трансцендент f функция учун W_-,W_+ сонлари чекли ёки чексиз бўлиши мумкин.

5-тасдиқ. *Агар W_- чекли бўлса, унда f чекли сондаги мусбат нолларга эга.*

3-натижа. *Агар f функциянинг мусбат ноллари сони чексиз бўлса, унда ишора алмашиш сони W_- ҳам чексиз.*

f функциянинг барча ноллари ҳақиқий ва бу функциянинг Адамар ёйилмаси

$$f(z)=\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\beta_j}\right), \tag{4}$$

кўринишга эга бўлсин, бунда барча β_j лар ҳақиқий.

Масалан, агар $f(z)$ тартиби бирдан катта бўлмаган минимал типдаги бутун функция бўлса, (4) ёйилма бажарилади.

11-теорема. *Агар (4) кўринишдаги функциянинг Тейлор коэффициентлари қаторининг ишора алмашишлар сони W_- m га тенг бўлса, унда мусбат ноллар сони (карраларини қўшиб ҳисоблаганда) ҳам m га тенг бўлади.*

Агар функциянинг Тейлор коэффициентлари чексиз сондаги ишора алмашишга эга бўлса, унда $f(z)$ функциянинг мусбат ноллари сони чексиз бўлади.

4-натижа. *Айтайлик, (4) кўринишдаги ҳақиқий коэффициентли $f(z)$ бутун функция учун манфий ноллар сони (карраларини ҳисобга олганда) N_- га тенг ва*

$$1, -b_1, \ldots, (-1)^k b_k, \ldots \tag{5}$$

кетма-кетликдаги ишора алмашишлар сони W_+ бўлсин. Агар W_+ сони чекли булса, унда N_- сони чекли ва $W_+ = N_-$.

Агар кетма-кетлик (5) да чексиз сондаги ишора алмашиш бўлса, унда $f(z)$ нинг манфий ноллари сонида чексиз.

Биз бутун функциялар учун Бюдан-Фурье теоремаси аналогини қараймиз.

5-натижа. *Фараз қилайлик, функция (4) кўринишида бўлсин, a-ҳақиқий сон ва $f(a) \neq 0$. У ҳолда f функциянинг ҳақиқий ноллари сони (карраларини ҳисобга олганда)*

$$f(a), f'(a), \ldots, f^{(k)}(a), \ldots \tag{6}$$

сонлар кетма-кетлигидаги ишора алмашиш сонига тенг (нол сони ҳисобга олинмайди).

Бу дегани, агар бу кетма-кетликдаги ишора алмашишлар сони чекли ва S га тенг бўлса, унда f функциянинг a дан ўнгда ётган, ноллари сони ҳам s га тенг. Агар (6) да ишора алмашиш сони чексиз бўлса, унда функциянинг, a дан ўнгда ётган, ноллари сони ҳам чексиз.

6-натижа. *Фараз қилайлик, (4) кўринишдаги функция учун (5) даги кетма-кетлик ишора алмашишлар сони чекли ва p га тенг бўлсин ҳамда (6) кетма-кетликдаги ишора алмашишлар сони чекли ва q га тенг булсин, у ҳолда функциянинг $[a,b]$ кесмадаги ноллари сони (уларнинг карралигини ҳисобга олганда) $p-q$ га тенг.*

ХУЛОСА

Тадқиқот ишида олинган асосий натижалар қуйидагилардан иборат:

чегараси бўлакли силлиқ гиперсиртли соҳада Бохнер-Мартинелли сингуляр интеграли тадқиқ қилинди;

бир жинсли бўлмаган конуссимон қиррали соҳада Бохнер-Мартинелли сингуляр интеграли учун Привалов ва Сохоцкий-Племель теоремалари аналоги олинди;

ўрин алмаштириш-Пуанкаре-Бертран формуласини исботлаш натижасида Бохнер-Мартинелли сингуляр интеграли учун «айланиш» формуласи топилди;

чегарада оддий нолларга эга бўлган голоморф акслантиришлар учун Южаков-Рус формуласи-логарифмик чегирма формуласи умумлашмаси келтирилди;

соҳа чегараси бутун нуқталардан ташкил топган ҳолда Л.А.Айзенберг формуласи аналоги исботланди;

бўлакли икки каррали силлиқ чегаралар учун Оппенгеймнинг айнияти аналоглари олинди;

D соҳада гармоник ва $\partial D\backslash\{y_0\}$ да нольга тенг бўлган функциялар учун каноник ёйилма-Лоран қатори топилди;

бутун функциялар учун Декартнинг ишоралар қоидаси ва Бюдан-Фурьенинг теоремалари исботланди;

$\mathbb{R}^n$ фазода Пуассоннинг йиғинди формуласи олинди.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА

КАРАКАЛПАКСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ БЕРДАХА
НУКУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМЕНИ АЖИНИЯЗА

ПРЕНОВ БАРЛЫКБАЙ БАРАКБАЕВИЧ

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МЕТОДОВ В МНОГОМЕРНОМ КОМПЛЕКСНОМ АНАЛИЗЕ

01.01.01 – Математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ
ДОКТОРА (DSc) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Ташкент – 2021

Тема диссертации доктора (DSc) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2021.4.DSc/FM183

Диссертация выполнена в Каракалпакском государственном университете и Нукусском государственном педагогическом институте.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (http://ik-fizmat.nuu.uz/) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (http://www.ziyonet.uz/).

Научный консультант:	**Худайберганов Гулмирза** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Ганиходжаев Расул Набиевич** доктор физико-математических наук, профессор
	Шаимкулов Баходир Аллабердиевич доктор физико-математических наук, профессор
	Мысливец Симона Глебовна доктор физико-математических наук, профессор (СФУ, Россия)
Ведущая организация:	**Ургенчский государственный университет**

Защита диссертации состоится «09» 12 2021 года в 12:00 на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+998 71) 227 12 24, факс: (+998 71) 246 53 21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за № 107). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+998 71) 246 02 24).

Автореферат диссертации разослан «24» 11 2021 года.
(протокол рассылки № 2 от «24» 11 2021 года).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS ... MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

А.Садуллаев
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., академик

Н.К.Мамадалиев
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.ф.-м.н. (PhD)

Р.Н.Ганиходжаев
Председатель Научного семинара при научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация докторской диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. Исследования аналитического продолжения функций и сингулярные интегральные формулы, в многомерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$, являются актуальными задачами мирового уровня. Интегральное представление Бохнера-Мартинелли в многомерном комплексном анализе является таким же продуктивным и конструктивным инструментом, как и интегральные представление Коши в теории функций одного комплексного переменного, которое имеет множество важных приложений в различных областях математики и механики. Он устанавливает простое выражения голоморфной функции внутри области $D \in \mathbb{C}^n$ через ее значений на границе области ∂D. Сингулярный интеграл Бохнера-Мартинелли хорошо изучены, в областях с гладкой границей $\partial D \subset C^1$ и для функции из $C(\partial D)$: существования главного значения интеграла по Коши, граничные поведения интеграла Бохнера-Мартинелли и теоремы о «скачках», поведения интеграла на сечениях комплексными прямыми и граничная теорема Мореры и др. В последнее время, в связи с возрастанием интереса к этой интегральной формуле, возникает острая необходимость, в более широких областях, глубоко изучать её.

В настоящее время, в связи с более глубокими изучениями голоморфных функций в классических областях, возникла необходимость исследование сингулярного интеграла Бохнера-Мартинелли в областях с негладкой границей и границей с коническими особенностями. Это еще связано с тем, что сингулярные интегралы Бохнера-Мартинелли имеют прикладное значение, в частности, в вопросах аналитического продолжения функций в многомерном комплексном анализе, в теории вычетов, в теории чисел и др. Поэтому, является весьма целесообразным дальнейшие углубленное изучения сингулярного интегрального представления типа Бохнера-Мартинелли в ограниченных областях с негладкими границами и в областях с неоднородными коническими ребрами, получение формулы композиции (формулу Пуанкаре-Бертрана) и обращения сингулярного интеграла Бохнера-Мартинелли, исследование формулы Южакова-Руса-формулы логарифмического вычета для голоморфного отображения, формулу Л.Айзенберга для разности между числом целых точек в области и её объемом являются важными задачами сегодняшнего дня.

В нашей стране, в годы независимости, большое внимание уделяется актуальным научным направлениям, которые имеют практическое применения к фундаментальным наукам. В связи с этим, особое внимание было уделено решению актуальных задач с применением интегральных методов в самом комплексном анализе и в смежных областях. В результате развития интегральных методов, они нашли значительные применения в математической физике, в комбинаторике, в статической физике, в решений системы алгебраических и неалгебраических систем уравнений, в химической кинетике, в теорий чисел и т.д. Основными задачами и направлениями деятельности математической науки, в нашей стране, являются проведение исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям «Математический анализ и функциональный анализ, прикладная математика и математическое моделирование, дифференциальное уравнения и математическая физика, теория вероятностей и теория динамических систем». Чтобы обеспечить выполнение этого постановления, важно изучить и разработать новые интегральные методы в многомерном комплексном анализе и применять их на современные прикладные задачи в разных областях, имеет важное значение.

Исследования в данной работе, в определенной степени, служат решению задач, указанных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан № УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия дальнейшему развитию Республики Узбекистан», № ПП-3682 от 27 апреля 2018 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов», № ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развития научных исследований в области математики» и в других нормативных правовых актах, связанных с этими мероприятиями.

Связь исследования с приоритетными направлениями развития науки и технологий республики. Данная диссертационная работа выполнена в соответствии с приоритетными направлениями развития науки и технологий Республики Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации. Научные исследования по многомерному комплексному анализу активно ведется в университетах и научных центрах США (The University of North Carolina, Stony Brook University, Princeton university, University of Massachusetts, Ohio State University), Германии (Потсдамский университет, uni.potsdam.de), Италии (Римский университет, unirome1.it), России (МГУ, НГУ, СФУ и др.), Израиля (Bar-Ilan university), Франции, Китая и в других развитых странах мира[1].

Основным конструктивным методом в теории голоморфного продолжения является интегральная формула Бохнера(Bochner,USA) – Мартинелли(Martinelli,Italy). Дальнейшими исследованиями в этой области занимались такие известные математики как C. Look, Z. Tongde, T. Chun, L.Liangin, Ma Daowei, S. Jigang (China), Г. Хенкин (Россия-Франция), F. Harvey, H. Lowson (USA), Л. Айзенберг (Россия-Израиль), M. Sato, T. Kawai, T. Kashiwara (Japan), Е. Чирка, В. Какичев, Ш. Даутов, А. Кытманов, А. Цих, В. Кондратьев, С. Мысливец (Россия), В. Кондратьев, Н. Тарханов (Россия-Германия), M. Passare (Sweden) и другие.

[1] Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации получен по источникам: www.sferu.ru, www.bsu.by, www.mi-ras.ru, www.susu.ru, www.math.kz, www.ayu.edu.kz, www.rmi.tsu.ge, www.rwth-aachen.de, www.ull.es, www.nust.edu.pk, www.ime.unicmp.br, www.unishivaji.ac.in, www.ualg.pt, www.apply.shu.edu.cn и др.

В диссертационной работе сделаны соответствующие ссылки на работы этих авторов, касающихся непосредственно к диссертации.

Степень изученности проблемы. Классическая формула Бохнера-Мартинелли получена, когда аргумент функции участвующий под знаком интеграла не может быть на границе области. Если, этот аргумент лежит на границе области, то вообще говоря, интеграл не существует как собственный. Тогда мы рассматриваем главное значение сингулярного интеграла типа Бохнера- Мартинелли. Граничные поведения-формулы Сохоцкого- Племеля, формулы «скачка», формулы обращения, композиция повторных особых интегралов тесно связаны с главными значениями сингулярного интеграла. Этим и примыкающим к этим проблемам, с различными граничными условиями и условиями на функции занимались многие ученые: C. Look, Z.Tongde, T. Chung, M. Daowei, L. Liangin, S. Jigang, F. Harvey, H. Lowson, L.Boas, R. Boas, Г. Хенкин, Е. Чирка, Л. Айзенберг, В. Какичев, Н. Тарханов, А. Аронов, А. Кытманов, Ш. Даутов, Ш. Ярмухаммедов, А. Романов, А. Сербин, N. Vasilevskiy, M. Shapiro, А. Газиев, Б. Шаимкулов, Д. Джумабаев и др.

Многомерные вычеты тесно связаны с многомерными интегральными представлениями для голоморфных функций, в частности, с интегральной формулой Бохнера-Мартинелли. Многомерные вычеты, хотя они имеют многочисленные приложения в исследованиях фейнмановских интегралов, в теории уравнений математической физики, алгебре, комбинаторном анализе, в изучениях систем алгебраических и неалгебраических уравнений, возникающих в задачах химической кинетики и в других областях прикладной науки, их теория еще далека от завершения. Поэтому исследования интегральных представлений и многомерных вычетов является одной из актуальных задач многомерного комплексного анализа.

Известно, что на комплексной плоскости большую роль играет принцип аргумента (фактически эта – одномерная формула логарифмического вычета). Для функций многих комплексных переменных, ее обобщением является формула многомерного логарифмического вычета Южакова-Руса, построенная по системе голоморфных функций $f_1, f_2, ..., f_n$ в ограниченной области D. В формуле многомерного логарифмического вычета интеграл берется по границе области. Он является сингулярным, если общие нули системы $f_1, f_2, ..., f_n$ лежат на границе области. Рассмотрение обобщенной формулы многомерного логарифмического вычета, когда система $f_1, f_2, ..., f_n$ имеет простые нули на границе области и изучения применения полученной формулы также является актуальной задачей.

По этим направлениям можно отметить работы А. Южакова, G. Roos, Л. Айзенберга, А. Кытманова, А. Циха, M. Passare, N. Tarkhanov, Б.Шаимкулова, F. Hervey, H. Lowson, G. Lupaccioli, Я. Ройтберга, M. Sato, T.Kawai, M. Kashiwara и др.

В диссертации рассматривается также обобщение формулы Южакова-Roos, когда на гиперповерхности имеется нули голоморфного отображение и применения полученной обобщенной формулы в многомерном комплексном анализе (обобщение формулы Л. Айзенберга для разности между числом целых точек в области и ее объемом), в теории чисел (получения тождеств Оппенгейма) и в математическом анализе (формулы суммирования Пуассона в $\mathbb{C}^n$).

В этом направлении можно отметить работы Л. Айзенберга, А. Южакова, G. Roos, А. Цих, M. Passare, А. Кытманова, Г. Вороного, В. Иванова, Е. Мышкина, М. Маринова, Я. Ройтберга, Н. Тарханова, А. Куприкова, L. Boas, R. Boas, C. Muller и др.

Связь темы диссертации с научно-исследовательским работами высшего учебного заведения, в котором выполняется диссертация. Тема диссертации соответствует научно-исследовательской теме ОТ-4-27 «Описание преддуальных пространств Йордановых троек, пространства емкостей и голоморфное продолжение функций» кафедр математического анализа и алгебры, геометрии и функционального анализа Каракалпакского государственного университета и теме «Проблемы математики и её обучения» кафедры методики обучения математики Нукусского государственного педагогического института.

Цель исследования является вычисление главного значения сингулярного интеграла типа Бохнера-Мартинелли для областей граница которых содержит неоднородное коническое ребро; получить для таких областей формулы Привалова и Сохоцкого-Племеля; доказать формулу обращения и формулу Пуанкаре-Бертрана для сингулярных интегралов типа Бохнера-Мартинелли; применение полученных формул в самом многомерном комплексном анализе, в теории чисел и в др. смежных областях.

Задачи исследования:

получение аналогов теоремы Привалова и Сохоцкого-Племеля для сингулярного интеграла типа Бохнера-Мартинелли в областях с неоднородными коническими ребрами;

доказательство формулы перестановки и как следствие получение формулы обращения, для сингулярного интеграла типа Бохнера-Мартинелли;

обобщение формулы Южакова-Руса – формула логарифмического вычета для голоморфного отображения, имеющего простые нули на границе;

доказательство аналога формулы Л. А. Айзенберга для случая, когда граница области содержит целые точки.

получение аналогов тождества Оппенгейма для областей с кусочно дважды гладкой границей.

получение канонические представления для гармонических функций в области D, равных нулю на $\partial D\setminus\{y_0\}$ и доказательства аналогов правила знаков Декарта и теорема Бюдана-Фурье для целых функций.

Основными объектами исследования являются гиперповерхности в $\mathbb{C}^n$ с неоднородными коническими ребрами и сингулярные интегралы на этих гиперповерхностях голоморфное отображение имеющие нули на границе, гармонические в D и равны нулю на $\partial D\setminus\{y_0\}$ гармонические функции.

Предмет исследования является сингулярные интегралы типа Бохнера-Мартинелли в областях с неоднородными коническими ребрами, формула Южакова-Руса – формула логарифмического вычета для голоморфного отображения, формула Л. А. Айзенберга для случая, когда граница области содержит целые точки, тождества Оппенгейма для областей с кусочно дважды гладкой границей.

Методы исследования. В диссертационной работе применяются современные методы многомерного комплексного анализа, формула Стокса, формула Пуанкаре для голоморфных фукций и теоремы об основных свойствах голоморфных фукции, ряды Тейлора и Лорана для голоморфных функции, теоремы о граничных значениях обобщенных гармонических функции.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

получены аналоги теоремы Привалова и Сохоцкого-Племеля для сингулярного интеграла Бохнера-Мартинелли в областях с неоднородными коническими ребрами;

доказана формула перестановки (формула Пуанкаре-Бертрана) и как следствие получена формула обращения, для сингулярного интеграла Бохнера-Мартинелли;

обобщена формула Южакова-Руса – формула логарифмического вычета для голоморфного отображения, имеющего простые нули на границе;

доказан аналог формулы Л. А. Айзенберга для случая, когда граница области содержит целые точки;

получены аналоги тождества Оппенгейма для областей с кусочно дважды гладкой границей;

получены канонические представления для гармонических функций в области D, равных нулю на $\partial D\setminus\{y_0\}$ и доказаны аналоги правила знаков Декарта и теорема Бюдана-Фурье для целых функций.

Практические результаты исследования помог получить в анализе и в теории чисел, новые тождества и позволил более углубленно исследовать эти задачи. Полученные практические результаты , будет интересным, не только специалистам по теории функции, а в алгебре, в гармоническом анализе и в др. смежных областях, в рассмотрении прикладных задач.

Достоверность результатов исследования обусловлена строгими математическими доказательствами с использованием формулы Стокса, формулы Пуанкаре для голоморфных функции, свойства голоморфных функции, ряды Тейлора и Лорана, граничные теоремы для обобщенных гармонических представлении, а также публикациями в международных рейтинговых математических журналах.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов исследования заключается в том, что полученные в диссертационной работе результаты, могут быть использованы в дальнейшем, для более углубленного изучения самих интегральных методов и их применения, в смежных областях и получения новых интегральных представлении в многомерном комплексном анализе.

Практическая значимость результатов исследования состоит в том, что полученные интегральные формулы позволяет в теории чисел получить тождества Оппенгейма для областей с кусочно дважды гладкой границей, в химической кинетике для вычисления нулей не алгебраических систем уравнений.

Внедрение результатов исследования. Результаты, полученные в диссертации внедрены на практике в следующих направлениях:

в областях с кусочно гладкой границей и для непрерывных на границе функции: существования главного значения по Коши интеграла Бохнера-Мартинелли, граничные поведения интеграла Бохнера-Мартинелли и теоремы о «скачках», были использованы в зарубежном гранте под номером 14-01-00544 по теме «Многомерные интегральные преобразования и их применения в комплексной аналитической геометрии и в теории дифференциальных и разностных уравнений» (справка Сибирского федерального университета от 17-сентября 2021 года под номером 157). В результате удалось, в областях с негладкой границей и границей с неоднородными коническими ребрами, получать основные формулы комплексного анализа, формулы Сохоцкого-Племеля, формулы «скачка», формулы Пуанкаре-Бертрана и формулу обращения для таких областей;

в многомерном комплексном анализе, в формуле многомерного логарифмического вычета интеграл берется по границе области. Он является сингулярным, если общие нули системы $f_1, f_2, ..., f_n$ лежат на границе области. Обобщенная формула многомерного логарифмического вычета, когда система $f_1, f_2, ..., f_n$ имеет простые нули на границе области были для обобщения формулу Л.А.Айзенберга для разности между числом целых точек в области и ее объемом, в случае когда граница содержит целые точки. использованы в зарубежном гранте под номером 18-51-41011, по теме «Многомерный комплексный анализ» (справка Сибирского федерального университета от 17-сентября 2021 года под номером 158). В результате удалось, обобщить тождества Оппенгейма, в теории чисел, для ограниченных областей с кусочно дважды гладкой границы и доказать пространственный аналог формулы Пуассона;

в теорий функций многих комплексных переменных, так называемые вычетные интегралы и обобщенная формула многомерного логарифмического вычета, в случае когда на границе есть простые нули голоморфного отображения, были использованы для исследования степенные суммы корней алгебраических и неалгебраических систем уравнений в зарубежном гранте РФФИ под номером 15-01-00277 по теме «Неалгебраические системы уравнений, степенные суммы корней и компьютерная алгебра» (справка Сибирского федерального университета от 17-сентября 2021 года под номером 159). В результате, удалось вычислить корни трансцендентных уравнений и неалгебраических систем уравнений встречающиеся в химической кинетике.

Апробация работы. Все основные результаты были обсуждены на Республиканском семинаре по теории функции академика А. Садуллаева и на городском семинаре Института математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета (Россия), на совместном семинаре кафедры математического анализа Ургенчского госуниверситета и Хорезмского отделения Института математики им. Романовского, а также на совместном семинаре кафедры математического анализа Каракалпакского государственного университета, Каракалпакского отделения Института математики им. Романовского и кафедры методики обучения математики Нукусского государственного педагогического института. Результаты исследования доложены на 29 научных и научно-практических конференциях, в том числе 11 международных.

Публикация результатов исследования. По результатам исследования диссертационной работы опубликованы всего 44 работы, в том числе 15 статьей, входящих в Перечень Высшей аттестационной комиссии Республики Узбекистан или включенных в международные реферативные базы данных Scopus.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка использованной литературы. Общий объем 171 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИСЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность рассмотренных задач в диссертационной работе, определено соответствие иследования приоритетным направлениям развития науки и технологий Республики Узбекистан, приведены обзор зарубежных научных работ по теме работы и степень исследованности проблемы, определены цель и задачи, выявлены объект и предмет изучения, указаны теоретическая и практическая значимость полученных результатов, приведены сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертационной работы.

Первая глава, названной **"Предварительные сведения"**, посвящена применяемому аппарату и результатам, примыкающим к основной части диссертационной работы. В частности, приведены необходимые сведения для дальнейшего изучения рассматриваемых в диссертационной работе задач: основные свойства сингулярного интеграла Бохнера-Мартинелли и многомерного логарифмического вычета, о некоторых формулах суммирования, о гармоническом продолжении обобщенных функции, результаты о нулях целой функции и др.

Вторая глава диссертации, названная **"Сингулярный интеграл (типа) Бохнера-Мартинелли в ограниченных областях с негладкими границами"**, содержит результаты об исследовании сингулярного интеграла (типа) Бохнера-Мартинелли в областях с кусочно-гладкой и в областях граница которых содержит неоднородные конические ребра. В параграфе 2.1.

рассмотрено главное значение (по Коши) интеграла Бохнера-Мартинелли в областях с кусочно-гладкой границей.

Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{C}^n$ с кусочно-гладкой границей, а f - суммируемая функция на ∂D, т.е. $f \in \mathcal{L}^1(\partial D)$.

Обозначим через

$$M[f](z) = F(z) = \int_{\partial D} f(\zeta) U(\zeta, z)$$

интеграл типа Бохнера-Мартинелли от f, где ядро Бохнера - Мартинелли имеед вид

$$U(\zeta, z) = U(\zeta - z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\overline{\zeta}_k - \overline{z}_k}{|\zeta - z|^{2n}} d\overline{\zeta}[k] \wedge d\zeta.$$

Если f голоморфна в D и непрерывна в $\overline{D}$, то $M[f](z) \equiv f(z)$, т.е. - это есть интегральная формула Бохнера-Мартинелли в $\mathbb{C}^n$.

Если $z \in \partial D$, то интеграл Бохнера-Мартинелли становится сингулярным (особым). Его главное значение (по Коши) определяется так

$$M_s[f](z) = F_s(z) = \text{v.}p. \int_{\partial D} f(\zeta) U(\zeta - z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial D \setminus B(z,\varepsilon)} f(\zeta) U(\zeta - z),$$

где $B(z,\varepsilon) = \{\zeta : |\zeta - z| < \varepsilon\}, \ \varepsilon > 0$.

Пусть $S(z,\varepsilon)$ – сфера с центром в точке $z \in \partial D$, радиусом $\varepsilon > 0$ и

$$\alpha(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{VolS(z,\varepsilon) \cap D}{VolS(z,\varepsilon)}$$

есть телесный угол касательного конуса к поверхности ∂D в точке z, деленный на площадь поверхности единичной сферы $\Sigma_{2n} = \dfrac{2\pi^n}{(n-1)!}$ в $\mathbb{C}^n$.

Предложение 1. *Пусть f удовлетворяет на $\overline{D}$ условию Гельдера с показателем $\lambda > 0$, тогда существует главное значение по Коши интеграла Бохнера-Мартинелли, причем оно выражается формулой*

$$\text{v.}p. \int_{\partial D} f(\zeta) U(\zeta - z) = \int_{\partial D} [f(\zeta) - f(z)] U(\zeta - z) + \alpha(z) f(z).$$

Для функций, удовлетворяющих условию Дини, предложение 1 допускает следующие обобщение. Зафиксируем точку $z^0 \in \partial D$ и обозначим через

$$\Theta(\delta) = \sup_{|\zeta - z^0| \leqslant \delta} |f(\zeta) - f(z^0)|$$

модуль непрерывности функции f в точке z^0, а через $\alpha(z^0)$ – нормированный телесный угол касательного конуса к ∂D в точке z^0.

Теорема 1. *Если f – суммируемая функция на ∂D, непрерывная в точке $z^0 \in \partial D$ и ее модуль непрерывности в этой точке удовлетворяет условию Дини*

$$\int_0^{\beta} \frac{\Theta(\delta)}{\delta} d\delta < \infty,$$

где $\beta > 0$, то сингулярный интеграл $F_s(z^0)$ существует и для любого некасательного пути γ с концом z^0, целиком лежащего в D, имеем

$$\lim_{\gamma\ni z\to z^0} F^+(z) = \left(1-\alpha(z^0)\right)f(z^0) + F_s(z^0).$$

Во всех предшествующих работах, где рассматривались главное значение по Коши сингулярного интеграла Бохнера-Мартинелли, граница области являются гладкими, а функция, как минумум, непрерывная во всей границе области.

Параграф 2.2 посвящен изучению интеграла Бохнера-Мартинелли в ограниченных областях пространства $\mathbb{C}^n$, $n>1$, граница которых содержит конические ребра и тем самым не является кусочно-гладкой. В случае, когда граница области содержит одну коническую особую точку, интеграл Бохнера-Мартинелли был рассмотрен в работе А.Кытманова и С.Мысливец. В случае конических ребер этот интеграл изучался в работе Д.Джумабаева. Но при этом требовалась однородность самого ребра, что значительно сужало класс множеств. В нашем рассмотрении это требование отсутствует. Сначала введем класс поверхностей, которые мы будем изучать.

Будем отождествлять пространство $\mathbb{C}^n$ с пространством $\mathbb{R}^{2n}$ следующим образом: $z=(z_1,\ldots,z_n)$ – комплексный n-мерный вектор из $\mathbb{C}^n$, $x=(x_1,\ldots,x_{2n})$ – действительный $2n$ - мерный вектор из $\mathbb{R}^{2n}$ и $z_j = x_j + ix_{n+j}$, $j=1,\ldots,n$. Разделим переменные x_j на группы: $x'=(x_1,\ldots,x_q)$, $x''=(x_{q+1},\ldots,x_{2n-1})$, $q\geqslant 0$. Обозначим $d=2n-2-q$, т.е. $d+q=2n-2$.

Пусть X – компактное замкнутое гладкое многообразие в $\mathbb{R}^{d+1}\setminus\{0\}$ размерности d, определяемое вещественно-значной функцией $\rho\in C^1(\mathbb{R}^{d+1}\setminus\{0\})$ со свойствами:

$$X=\{x''\in\mathbb{R}^{d+1}: \rho(x'')=0\},\quad d\rho\neq 0 \quad \text{на } X.$$

В отличие от работы Д. Джумабаева мы не требуем однородности функции ρ.

Фиксируем $\varepsilon_0>0$. Рассмотрим множество

$$C_0=\{(rx'',r)\in\mathbb{R}^{d+2}: x''\in X,\, x_{2n}=r\in[0,\varepsilon_0]\}.$$

Тогда C_0 есть коническая гладкая поверхность размерности $d+1$ в $\mathbb{R}^{d+2}$ с единственной особой точкой в нуле.

Мы также будем рассматривать пространство $\mathbb{C}^n$ в переменных $w=(w_1,\ldots,w_n)$ и пространство $\mathbb{R}^{2n}$ в переменных $y=(y_1,\ldots,y_{2n})$, причем $w_j=y_j+iy_{n+j}$, $j=1,\ldots,n$. Тогда в переменных w

$$C_0=\{(y'',y_{2n}): y''=rx'',\, y_{2n}=r,\, x''\in X,\, r\in[0,\varepsilon_0]\}.$$

Пусть W – ограниченная область в $\mathbb{R}^q$ и $y'\in W$. Обозначим $S=W\times C_0$ - гиперповерхность в $\mathbb{C}^n$, т.е.

$$S=\{y=(y',y'',y_{2n})\in\mathbb{R}^{2n}: \chi(y)=\chi(y'',y_{2n})=0,\, y'\in W\}.$$

Множество S является гладким многообразием с особым коническим ребром $\Pi=\{y=(y',0,0)\in W\}$.

Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{C}^n$. Будем считать, что граница D задается в виде

$$\partial D = \Sigma \cup (S_1 \cup \ldots \cup S_N),$$

где Σ является гладкой гиперповерхностью, а каждая из S_ν диффеоморфна конической гиперповерхности S (с разными p и q), рассмотренной выше. Таким образом, ∂D – гладкая гиперповерхность с конечным числом конических ребер. Отметим, что в таких областях справедлива формула Стокса.

Так как, анализ вблизи особых точек является локальным, можно считать без ограничения общности, что $N=1$, т. е. $\partial D = \Sigma \cup S$, где S имеет выше указанный вид. Меру Лебега размерности q будем обозначать $d\Lambda_q$ и интегрировать по ней будем только на гладких частях многообразий. Функция $f \in \mathcal{L}^1(\partial D)$, если $f \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$ и $f \in \mathcal{L}^1(S \setminus \Pi)$.

Пусть $f \in \mathcal{L}^1(\partial D)$, точку $y_0 \in S$ назовем точкой Лебега для функции f, если

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon^{1-2n} \int_{S \cap B(y_0,\varepsilon)} |f(y) - f(y_0)|\, d\Lambda_{2n-1} = 0,$$

где $B(y_0,\varepsilon)$ – шар с центром в точке y_0 радиуса ε.

Лемма 1. *Если $y_0 = (y_0', 0, 0) \in \Pi$ - точка Лебега функции $f \in \mathcal{L}^1(\partial D)$ и точка $z = x = (y_0', 0, x_{2n})$ лежит на оси конуса, то*

$$\lim_{z \to y^0} [\int_S (f(w) - f(y_0)) U(w - z) - \int_{S \setminus B(y_0, |x_{2n}|)} (f(w) - f(y_0)) U(w - y_0)] = 0.$$

Данное утверждение является обобщением теоремы Привалова, на случай, для областей с неоднородными коническими ребрами. Для областей с однородными коническими ребрами оно содержится в работе Д. Джумабаева а, когда на границе единственная коническая особая точка в работе А. Кытманова и С.Мысливец.

Приведем аналог формулы Сохоцкого-Племеля для особого интеграла Бохнера-Мартинелли. Эти формулы являются одними из основными формулами граничных значений сингулярных интегралов в комплексном анализе.

Теорема 2. *Если $f \in \mathcal{L}^1(\partial D)$ удовлетворяет условию Дини в точке $z \in \partial D$, то особый интеграл Бохнера-Мартинелли $M_s[f](z)$ существует и справедливы формулы Сохоцкого-Племеля*

$$M[f]^+(z) = (1 - \alpha(z)) f(z) + M_s[f](z),$$

$$M[f]^-(z) = -\alpha(z) f(z) + M_s[f](z)$$

где $M[f]^+(z)$ - граничное значение интеграла Бохнера-Мартинелли $M[f]$ изнутри области D, а $M[f]^-(z)$ - граничное значение данного интеграла извне области.

Далее доказывается теорема о скачке для интегрируемых функций.

Теорема 3. *Пусть $z^0 \in \Pi$ – точка Лебега функции $f \in \mathcal{L}^1(\partial D)$, тогда*

$$\lim_{z^{\pm} \to z_0} (M[f]^+(z^+) - M[f]^-(z^-)) = f(z^0),$$

где точки $z^{\pm}$ лежат на оси конуса в точке z^0 и $z^+ \in D$, $z^- \in \mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$, $|z^+| = |z^-|$.

Для функций, удовлетворяющих условию Дини, данное утверждение есть прямое следствие формул Сохоцкого-Племеля.

Следствие 1. *Если $f \in C(\partial D)$ и $M[f]$ непрерывно продолжается изнутри D на ∂D до функции $M[f]^{+}$, то функция $M[f]$ непрерывно продолжается извне D на ∂D до функции $M[f]^{-}$ и справедливо равенство*

$$M[f]^{+}(z)-M[f]^{-}(z)=f(z), \quad z\in\partial D.$$

Теоремы 2 и 3 являются обобщениями соответствующих утверждении Д.Джумабаева для областей, граница которых содержит однородные конические ребра.

В § 2.3 рассмотрено специальное главное значение интеграла Бохнера-Мартинелли, связанное с голоморфным отображением. Из общей теории сингулярных интегральных операторов известно, что величина этого интеграла, вообще говоря, зависит от способа выкалывания особой точки (выбора системы окрестностей). Здесь мы покажем, что для сингулярного интеграла Бохнера-Мартинелли это не так, если только строить окрестностей с помощью голоморфного отображения. Именно, для сингулярного интеграла Бохнера-Мартинелли верна следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть f - суммируемая функция на ∂D, непрерывная в точке $z^{0}\in\partial D$, причем ее модуль непрерывности в этой точке удовлетворяет условию Дини, а $\varphi=(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ - голоморфное отображение в окрестности точки z^{0} в C^{n} такое, что для $\varphi(z^{0})=0$ и якобиан $\left|\dfrac{\partial\varphi(z^{0})}{\partial z}\right|\neq 0$. Тогда*

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\partial D\setminus\{|\varphi(z)|<\varepsilon\}} f(z)U(\zeta-z)=\alpha(z^{0})f(z^{0})+\int_{\partial D}[f(z)-f(z^{0})]U(\zeta-z).$$

Главное значение особого интеграла Бохнера-Мартинелли, определенное в теореме 4, назовем специальным главным значением интеграла Бохнера-Мартинелли.

Эта теорема, по видимому, является новой и для интеграла типа Коши, при $n=1$.

Следующий параграф посвящен формуле перестановки особого интеграла Бохнера-Мартинелли в ограниченных областях с гладкой границей. Формула перестановки повторного особого интеграла (типа) Коши (которую часто называют формулой Пуанкаре-Бертрана) является одной из основных в теории сингулярных интегральных уравнений. Особенно часто используется ее следствие – формула обращения.

В работах А.Сербина приводятся формула обращения и формула Пуанкаре-Бертрана (формула перестановки повторного интеграла) для сингулярного интеграла Бохнера-Мартинелли в $\mathbb{C}^{n}$ при $n>1$. Причем в доказательстве формулы Пуанкаре-Бертрана используется формула обращения. В главе 1 приводится формула обращения Сербина для сингулярного интеграла типа Бохнера-Мартинелли и пример - он основан на прямом вычислении особого интеграла Бохнера-Мартинелли в шаре, показывающий, что полученная формула обращения не имеет место при $n>1$, тем самым формула перестановки становится необоснованной.

Формула Пуанкаре-Бертрана для интеграла Бохнера-Мартинелли.

Теорема 5. *Пусть* $f(\zeta, w) \in C^{\alpha}(\partial D_{\zeta} \times \partial D_{w}), 0 < \alpha < 1$, *тогда для* $z \in \partial D$ *справедлива формула перестановки (Пуанкаре-Бертрана)*

$$\int_{\partial D_w} U(w-z) \int_{\partial D_\zeta} f(\zeta, z) U(\zeta - w) =$$

$$= \frac{1}{4} f(z,z) + \int_{\partial D_\zeta} \int_{\partial D_w} f(\zeta, w) U(w-z) U(\zeta - w).$$

(Все интегралы в этой формуле понимаются в смысле главного значения, т.е. сингулярные).

Для установления формулы перестановки использовался ряд вспомогательных утверждений, имеющих самостоятельный интерес. В частности, следующие леммы.

Лемма 2. *Если* D *– ограниченная область с гладкой границей и дифференциальная форма* γ *типа* (p,q) *имеет коэффициенты класса* $C^1(\overline{D})$, *то*

$$\overline{\partial}_\zeta \int_{D_w} \gamma(w) \wedge U_{p,q-1}(w,\zeta) = \int_{D,w} \gamma(w) \wedge \overline{\partial}_\zeta U_{p,q-1}(w-\zeta) - \frac{\alpha q}{n} \gamma(\zeta),$$

где $\alpha = 1$, *если* $\zeta \in D$, *и* $\alpha = \frac{1}{2}$, *если* $\zeta \in \partial D$, *а* $U_{p,q}$ *— ядро Коппельмана, которая определяется следующии образом:*

$$U_{p,q}(\zeta, z) = (-1)^{p(n-q-1)} \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \times$$

$$\times {\sum_{I,J}}' \sum_{k \notin J} \sigma(J,k) \sigma(I) \frac{\overline{\zeta}_k - \overline{z}_k}{|\zeta - z|^{2n}} d\overline{\zeta}[J,k] \wedge d\zeta[I] d\overline{z}_J \wedge dz_I,$$

где $dz_I = dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p}$, *форма* $d\zeta[I]$ *получается из формы* $d\zeta$ *вычеркиванием дифференциалов* $d\zeta_{i_1}$, ..., $d\zeta_{i_p}$, *штрих у знака суммы означает, что суммирование ведется по возрастающим мультииндексам* I *и* J. *Знаки* $\sigma(J,k)$ *и* $\sigma(I)$ *определяются так:*

$$\sigma(J,k) dz = dz_k \wedge dz_J \wedge dz[J,k] \qquad \sigma(I) dz = dz_I \wedge dz[I].$$

Ядро $U_{p,q}(\zeta, z)$ понимается как двойная дифференциальная форма типа $(n-p, n-q-1)$ по переменному ζ и типа (p,q) по переменному z. Для $q=-1$ и $q=n$ положим $U_{p,q}(\zeta,z)=0$.

Лемма 3. *Верно равенство*

$$\int_{\partial D_\zeta} \int_{\partial D_w} U(\zeta - w) U(w - z) = 0,$$

если $z \in \partial D$.

Формула обращения для сингулярного интеграла Бохнера-Мартинелли имеет вид:

Следствие 2. *Если* $f(\zeta, z) = f(\zeta) \in C^{\alpha}(\partial D)$, $0 < \alpha < 1$, *то*

$$M_s^2 f = \frac{1}{4} f + \int_{\partial D_\zeta} f(\zeta) \overline{\partial}_\zeta \mu(\zeta, z), \quad z \in \partial D,$$

где

$$\mu(\zeta, z) = \int_{D_w} U(w - z) \wedge U_{0,1}(\zeta, w).$$

Третья глава диссертации, названная **"Приложения сингулярного интеграла Бохнера-Мартинелли"**, посвящена некоторым приложениям, полученных во второй главе диссертационной работы результатов, а именно, распространению формулы многомерного логарифмического вычета Южакова–Руса для отображений, имеющих простые нули на границе области, и формуле суммирования Пуассона. Многомерные вычеты тесно связаны с многомерными интегральными представлениями для голоморфных функций, в частности, с интегралной формулой Бохнера-Мартинелли.

В § 3.1 доказана формула Южакова-Руса для отображении, которая получена с помощью формулой Бохнера-Мартинелли, имеющих простые нули на границе .

Пусть Ω – ограниченная область пространства $\mathbb{C}^n$. Возьмем область $D \subset\subset \Omega$ с кусочно-гладкой границей ∂D. Рассмотрим в Ω голоморфное отображение

$$w = f(z) = (f_1, \ldots, f_n).$$

Теорема 6. *Если ∂D содержит нули – a^k отображения $w = f(z)$, но все нули на ∂D простые, и функция $\varphi(z)$, голоморфная в D, удовлетворяет на $\overline{D}$ условию Гельдера с показателем $\lambda > 0$, то верна формула*

$$\mathrm{v}.p.\int_{\partial D} \varphi U(f) = \sum \alpha(a^k)\varphi(a^k),$$

где $U(f)$ – ядро Бохнера-Мартинелли, $\alpha(a^k) = 1$, если $a^k \in D$, и $\alpha(a^k)$ равняется телесному углу касательного конуса к поверхности $f(\overline{U}_{a^k} \cap \partial D)$ в точке 0, деленному на площадь поверхности единичной сферы в $\mathbb{R}^{2n}$, если $a^k \in \partial D$, а U_{a^k} – достаточно малая окрестность a^k.

Здесь главное значение по Коши сингулярного интеграла понимается в смысле специального главного значения:

$$\mathrm{v}.p.\int_{\partial D} \varphi\omega(f) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\partial D \setminus \{|f(\xi)| < \varepsilon\}} \varphi\omega(f).$$

Если на ∂D нет нулей отображении f, то эта формула есть формула Южакова–Руса.

§ 3.2 посвящен формулам суммирования Пуассона. В анализе хорошо известна формула суммирования Пуассона

$$\sum_{k \in (a,b) \cap \mathbb{Z}; a,b \in \mathbb{Z}} \varphi(k) + \frac{1}{2}(\varphi(a) + \varphi(b)) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_a^b \varphi(x) e^{2\pi i k x} dx.$$

Л.А.Айзенберг нашел простой способ получения этой формулы с помощью формулы логарифмического вычета, когда a и b нецелые, т.е. когда в левой части равенства нет слагаемого $\frac{1}{2}(\varphi(a) + \varphi(b))$.

В п. 3.2.2 §3.2 обсуждается вопрос о многомерном аналоге формулы Пуассона. Известно, что для произвольной ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^n$ формула Пуассона не определена. Тем не менее, имеет место следующее утверждение.

Пусть область $G \subset \mathbb{R}^n$ – многогранник с гранями параллельными координатным плоскостям. Тогда справедливо

Предложение 2. *Если* φ – *вещественно-аналитическая функция в окрестности* $\overline{G}$, *то*

$$\sum_{k \in \overline{G} \cap Z^n} \alpha(k)\varphi(k) = \sum_{k \in Z^n} \int_G \varphi(x) e^{2\pi i(k,x)} dx,$$

где $(k,x) = k_1 x_1 + \ldots + k_n x_n$ *и ряд в правой части сходится в смысле суммирования по "симметричными параллелепипедам". Если среди ограничивающих* G *плоскостей нет плоскостей вида* $x_j = m$, *где* $m \in \mathbb{Z}$, *то ряд в правой части сходится в смысле суммирования по Принсгейму (суммирования по параллелепипедам).*

Четвертая глава диссертации, называется **"Применение логарифмического вычета в теории чисел"**.

Хорошо известно, какую большую роль сыграли в развитии теории чисел методы теории функции одного комплексного переменного.

В 1982 г. Л.А.Айзенберг, с помощью формулы многомерного логарифмического вычета получил интегральную формулу для разности между числом целых точек в области пространства $\mathbb{R}^n$ и ее объемом. Ряд классических задач теории чисел (проблема числа целых точек в круге, проблема делителей Дирихле, проблема числа целых точек в шаре и др.) являются задачами о вычислении асимптотики указанной разности.

Таким образом, эти задачи будут сведены к изучению асимптотики указанного ниже интеграла.

В § 4.1 формула Л.А.Айзенберга, для разности между числом целых точек в области $Q \subset \mathbb{R}^3$ и ее объемом распространена на случай, когда на границе есть целые точки. В § 4.2 эта - полученная формула, применена для обобщения тождества Оппенгейма, в случае, когда граница области кусочно дважды гладкая и содержит целые точки. В последнем параграфе этой главы, записаны в явном виде, тождества Оппенгейма, когда область Q: эллипсоид, тетраэдр и пересечения труб в $\mathbb{R}^3$ с помощью теоремы 6. Полученные тождества записываются громоздко, но их правые части зависят только от элементарных тригонометрических функции.

Приведем основные результаты этой главы.

Рассмотрим в $\mathbb{C}^3$ ограниченную область $D = Q \times G$, где Q – ограниченная область плоскости $\mathbb{R}^3_x$ с кусочно-гладкой границей ∂Q, которую мы ориентируем естественным образом, а G – ограниченная область плоскости $\mathbb{R}^3_y$ с кусочно-гладкой границей ∂G. Точки $(z_1, z_2, z_3) \in D$ имеют вид $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, $z_3 = x_3 + iy_3$ а точка $(0,0,0) \in G$.

В качестве отображения имеющего нули только в целых точках $Q \times (0,0,0)$, возьмем следующее

$$f = (f_1, f_2, f_3),\ f_1(z) = e^{2\pi i z_1} - 1,\ f_2(z) = e^{2\pi i z_2} - 1,\ f_3(z) = e^{2\pi i z_3} - 1.$$

Обозначим через $N(Q)$ число целых точек, лежащих в Q, а через $V(Q)$ – обьем Q, тогда, если на ∂Q нет целых точек, с помощью формулы многомерного логарифмического вычета (когда $\varphi \equiv 1$) Л.А.Айзенбергом получена следующая интегральная формула

$$N(Q) - V(Q) = \frac{4}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty dt_1 \wedge dt_2 \wedge dt_3 \times$$

$$\iint_{\partial Q} \frac{t_2 t_3 \sin 2\pi x_1 dx_2 \wedge dx_3 - t_1 t_3 \sin 2\pi x_2 dx_1 \wedge dx_3 + t_1 t_2 \sin 2\pi x_3 dx_1 \wedge dx_2}{(t_1^2 - 2t_1\cos 2\pi x_1 + t_2^2 - 2t_2 \cos 2\pi x_2 + t_3^2 - 2t_3\cos 2\pi x_3 + 3)^3}. \qquad (1)$$

Целью этого параграфа является распространение формулы (1) на случай, когда на границе ∂Q есть целые точки. Аналогичная задача, в случае $\mathbb{R}^2$ рассмотрены в работах А.Айзенберга, А.Кытманова и Б.Пренова.

Предложение 3. *Если* ∂Q *- дважды гладкая и на границе есть целые точки, то справедлива формула*

$$N(Q) + \frac{1}{2}N(\partial Q) - V(Q) = \iint_{\partial Q} F(x_1, x_2, x_3),$$

где

$$F(x_1, x_2, x_3) = \frac{4}{\pi}\times$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{t_2 t_3 \sin 2\pi x_1 dx_2 \wedge dx_3 - t_1 t_3 \sin 2\pi x_2 dx_1 \wedge dx_3 + t_1 t_2 \sin 2\pi x_3 dx_1 \wedge dx_2}{(t_1^2 - 2t_1\cos 2\pi x_1 + t_2^2 - 2t_2 \cos 2\pi x_2 + t_3^2 - 2t_3\cos 2\pi x_3 + 3)^3}\times$$

$$\times dt_1 \wedge dt_2 \wedge dt_3$$

абсолютно интегрируема на ∂Q.

Рассмотрим теперь область Q с кусочно дважды гладкой границей. Пусть точка $(l,m,n) \in \partial Q$. Через $\alpha(l,m,n)$ обозначим предел

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{l_\varepsilon^+}{4\pi\varepsilon^2},$$

где l_ε^+ – площадь части поверхности $\partial B_\varepsilon \cap Q$ сферы ∂B_ε с центром в целой точке (l,m,n) радиуса ε, это есть нормированный телесный угол, тогда верно утверждение.

Теорема 7. *Справедлива формула*

$$N(Q) - V(Q) + \sum \alpha(l,m,n) = \iint_{\partial Q} F(x_1, x_2, x_3),$$

где

$$F(x_1, x_2, x_3) = \frac{4}{\pi}\times$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{t_2 t_3 \sin 2\pi x_1 dx_2 \wedge dx_3 - t_1 t_3 \sin 2\pi x_2 dx_1 \wedge dx_3 + t_1 t_2 \sin 2\pi x_3 dx_1 \wedge dx_2}{(t_1^2 - 2t_1\cos 2\pi x_1 + t_2^2 - 2t_2 \cos 2\pi x_2 + t_3^2 - 2t_3\cos 2\pi x_3 + 3)^3}\times$$

$$\times dt_1 \wedge dt_2 \wedge dt_3$$

абсолютно интегрируема на ∂Q*, суммирование ведется по всем целым точкам* (l,m,n) *из* ∂Q.

Пусть Q_λ – шар в $\mathbb{R}^3$, а λ – квадрат радиуса шара. Обозначим через $N(Q)$ – число целых точек в шаре, а $N(\partial Q_\lambda)$ – число целых точек на сфере. Тогда, если $V(Q)$ – объем шара, то имеет место тождество Оппенгейма (в $\mathbb{R}^2$

тождество Вороного-Харди).

$$N(Q_\lambda)+\frac{1}{2}N(\partial Q_\lambda)=V(Q)+\lambda^{3/4}\sum_{n=1}^{\infty}r_3(n)n^{-3/4}J_{3/2}(2\pi(n,\lambda)^{1/2}),$$

где $J_{3/2}$ – функция Бесселя, $r_3(n)$ – число представлений натурального числа n в виде суммы трех квадратов $n=m_1^2+m_2^2+m_3^2,\ m_1,m_2,m_3\in\mathbb{Z}$.

В тождестве Оппенгейма, как в тождестве Вороного-Харди определенным недостатком является тот факт, что в правую часть входит теоретико-числовая функция $r_3(n)$. В данном случае есть и другой недостаток: данный ряд не сходится, а лишь суммируется одним из методов Рисса.

В этом параграфе мы получим аналог тождества Оппенгейма для ограниченных областей, граница которых кусочно дважды гладкая.

Полученные тождества не имеют указанного выше недостатков.

Предложение 4. *Пусть ∂Q – дважды гладкая, тогда*

$$N(Q)+\frac{1}{2}N(\partial Q)=V(Q)+$$

$$+\frac{\sqrt{\pi}}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{3^{k/2}}\sum_{l+m+n=k}\Bigg[\frac{A_{l,m,n}}{\Gamma(\frac{l}{2}+1)\Gamma(\frac{m+1}{2})\Gamma(\frac{n+1}{2})}-$$

$$-\frac{B_{l,m,n}}{\Gamma(\frac{l+1}{2})\Gamma(\frac{m}{2}+1)\Gamma(\frac{n+1}{2})}-\frac{C_{l,m,n}}{\Gamma(\frac{l+1}{2})\Gamma(\frac{m+1}{2})\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\Bigg],$$

где

$$A_{l,m,n}=\iint_{\partial Q}\cos^l 2\pi x_1\cos^m 2\pi x_2\cos^n 2\pi x_3\sin 2\pi x_1 dx_2\wedge dx_3,$$

$$B_{l,m,n}=\iint_{\partial Q}\cos^l 2\pi x_1\cos^m 2\pi x_2\cos^n 2\pi x_3\sin 2\pi x_2 dx_1\wedge dx_3,$$

$$C_{l,m,n}=\iint_{\partial Q}\cos^l 2\pi x_1\cos^m 2\pi x_2\cos^n 2\pi x_3\sin 2\pi x_3 dx_1\wedge dx_2.$$

Теорема 8. *Если ∂Q – кусочно дважды гладкая, то*

$$N(Q)+\sum\alpha(l,m,n)=V(Q)+\frac{\sqrt{\pi}}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{3^{k/2}}\times$$

$$\times\sum_{l+m+n=k}\left[\frac{A_{l,m,n}}{\Gamma(\frac{l}{2}+1)\Gamma(\frac{m+1}{2})\Gamma(\frac{n+1}{2})}-\right.$$

$$\left.-\frac{B_{l,m,n}}{\Gamma(\frac{l+1}{2})\Gamma(\frac{m}{2}+1)\Gamma(\frac{n+1}{2})}+\frac{C_{l,m,n}}{\Gamma(\frac{l+1}{2})\Gamma(\frac{m+1}{2})\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\right],$$

где

$$A_{l,m,n}=\iint_{\partial Q}\cos^l 2\pi x_1\cos^m 2\pi x_2\cos^n 2\pi x_3\sin 2\pi x_1 dx_2\wedge dx_3,$$

$$B_{l,m,n}=\iint_{\partial Q}\cos^l 2\pi x_1\cos^m 2\pi x_2\cos^n 2\pi x_3\sin 2\pi x_2 dx_1\wedge dx_3,$$

$$C_{l,m,n} = \iint_{\partial Q} \cos^l 2\pi x_1 \cos^m 2\pi x_2 \cos^n 2\pi x_3 \sin 2\pi x_3 dx_1 \wedge dx_2.$$

Последняя пятая глава, названа «Многомерные ряды Лорана и некоторые смежные вопросы».

Эта – глава является, по сути, демонстрацией применения результатов предыдущих глав к изучению гармонических функции многих переменных. Целью главы 5, является получение канонического представления для гармонических функций в D, равных нулю на $\partial D \setminus \{y_0\}$, и рассмотрению аналогов правила знаков Декарта и теоремы Бюдана-Фурье для целых функций. Каноническое представление может служить аналогом разложения Лорана для гармонических функций. Для того чтобы получить это разложение в явном виде мы рассмотрим две области: единичный шар B с центром в нуле и с границей S и полупространство.

Я. Ройтберг рассматривал следующую задачу: Пусть u — гармоническая функция в шаре $B \subset \mathbb{C}^n$ конечного порядка роста вблизи границы S. Тогда u имеет слабые предельные значения $u_0 \in \mathcal{D}'(S)$ на сфере в том смысле, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_S u((1-\varepsilon)y)v(y)d\sigma = \langle u_0, v \rangle$$

для всех $v \in \mathcal{C}^\infty(S)$, где $d\sigma$ — мера Лебега на S, а $\langle u_0, v \rangle$ — значение распределения u_0 на функцию v. Функция u может быть восстановлена по ее слабым граничным значениям с помощью формулы Пуассона

$$u(x) = \langle u_0, P(x, \cdot) \rangle$$

для всех $x \in B$. Обратно, для данного распределения u_0 на S функция $u(x) = \langle u_0, P(x, \cdot) \rangle$, $x \in B$ является гармонической функцией в B и ее слабые предельные значения на S совпадают с u_0.

Если y_0 – особая точка функции u_0 на ∂D, то в анализе многообразий с особенностями, такую задачу, когда u — гармоническая функция в шаре B конечного порядка роста вблизи границы S, изучал В.А.Кондратьев.

Пусть $u_0 = |y - y_0|^k$ и $k \le -(n-1)$. Эта функция u_0 может быть продолжена до распределения на всем S любым способом, а продолженное распределение $u_{0,N}$ -есть распределение на S, равное u_0 вне y_0 и функция $u_N(x) = \langle u_{0,N}, P(x, \cdot) \rangle$, $x \in B$ является гармонической в B и ее слабые граничные значения на S равны $u_{0,N}$. В частности, u_N совпадает с u_0 на $S \setminus \{y_0\}$.

Использование гиперфункций (гиперфункция-аналитический функционал, введенным и изученным японским математиком M.Sato) позволяет отказаться от жестких условий конечности порядка роста вблизи S. Любая гиперфункция, определенная на любом открытом множестве, продолжается как гиперфункция на все пространство. Напомним, что любая гармоническая функция u в B имеет граничное значение u_0 на S, которое является гиперфункцией. Более того, u может быть восстановлено по u_0 формулой Пуассона $u(x)=\langle u_0, P(x,\cdot)\rangle$ для всех $x\in B$. Обратно, для данной гиперфункции u_0 на S функция $u(x)=\langle u_0, P(x,\cdot)\rangle$ является гармонической в B и ее предельные значения на сфере S совпадают с u_0.

Важным (хотя и вспомогательным) результатом параграфа 5.1, служит следующее утверждение.

Лемма 4. *Пусть u_0 есть гиперфункция на $S\setminus\{y_0\}$ и $u_{0,R}$ любое продолжение u_0 до гиперфункции на всем S. Тогда любая гармоническая функция u в B, равная u_0 на $S\setminus\{y_0\}$, имеет вид*

$$u(x)=\langle u_{0,R}, P(x,\cdot)\rangle+\sum_{\beta\in Z_+^{n-1}} c_\beta(-\partial_{y'})^\beta P(x,y_0),\quad x\in B, \tag{2}$$

где $P(x,y_0)$ – ядро Пуассона в единичном шаре, а $(c_\beta)_{\beta\in Z_+^{n-1}}$ – последовательность комплексных чисел таких, что $\lim\limits_{|\beta|\to\infty}\sqrt[|\beta|]{|\beta! c_\beta|}=0$.

Разложение (2) не инвариантно по y, потому что оно содержит производные по y' в локальных координатах вблизи y_0 на S. Чтобы получить инвариантность, мы должны выразить производные в локальных координатах на S через производные в координатах окружающего пространства $\mathbb{R}^n$. Основным результатом этого параграфа является следующая теорема.

Теорема 9. *Пусть u_0 – гиперфункция на $S\setminus\{y_0\}$ и $u_{0,R}$ – любое продолжение u_0 как гиперфункции на все S. Каждая гармоническая функция u в B, равная u_0 на $S\setminus\{y_0\}$ имеет вид*

$$u(x)=\langle u_{0,R}, P(x,\cdot)\rangle+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{h_j(x-y_0)}{|x-y_0|^{2j}}P(x,y_0),\qquad x\in B,$$

где $\{h_j(z)\}_{j=0,1,\ldots}$ есть последовательность однородных гармонических полиномов степени j в $\mathbb{R}^n$, которая однозначно определяется.

Следующий § 5.2 посвящен аналогичному разложению гиперфункций в полупространстве. Обозначим $\mathbb{R}_+^{n+1}$ верхнее полупространство. Оно состоит из точек (x,t) таких, что $x\in\mathbb{R}^n$, $t>0$. Его границей является пространство $\mathbb{R}^n$. Введем ядро Пуассона для полупространства

$$P(x,t,y)=\sigma_n\frac{t}{(|x-y|^2+t^2)^{\frac{n+1}{2}}},\qquad \sigma_n=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}},$$

где $x,y\in\mathbb{R}^n$, $t>0$.

Основным результатом данного параграфа служит следующее утверждение.

Теорема 10. *Пусть u_0 есть гиперфункция с компактным носителем на $\mathbb{R}^n\setminus\{y_0\}$ и $u_{0,R}$ любое продолжение u_0 как гиперфункции на все $\mathbb{R}^n$. Тогда* *каждая гармоническая функция u на $\mathbb{R}_{+}^{n+1}$, равная u_0 на $\mathbb{R}^n \setminus \{y_0\}$, имеет вид*

$$u(x,t) = \langle u_{0,R}, P(x,t,\cdot)\rangle + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{h_j(x-y_0)}{(|x-y_0|^2 + t^2)^j} P(x,t,y_0),$$

где $\{h_j(z)\}_{j=0,1,\dots}$ – последовательность однородных гармонических полиномов степени j в $\mathbb{R}^n$, которая однозначно определяется.

Для определения числа вещественных корней вещественного многочлена на отрезке вещественной оси часто применяют классический метод Штурма. Но этот метод достаточно громоздкий и неудобный. Обычно применяется теорема Эрмита в комбинации с правилом знаков Декарта и теоремой Бюдана-Фурье.

В задачах химической кинетики возникают системы неалгебраических уравнений. При исключении неизвестных из таких систем мы получаем целую трансцендентную функцию. Поэтому естественным образом возникает задача об аналоге правила знаков Декарта о числе положительных нулей целой функции, а также об аналоге теоремы Бюдана-Фурье для целых функций.

Пусть целая функция $f(z)$ с вещественными коэффициентами имеет вид

$$f(z) = 1 + b_1 z + \ldots + b_n z^n + \ldots . \tag{3}$$

Обозначим число перемен знака в последовательности

$$1, b_1, \ldots b_n, \ldots$$

через W_-, а число постоянств знака в (3) через W_+. Если в последовательности коэффициентов (3) есть нулевые элементы, то мы их просто опускаем. Таким образом в последовательности коэффициентов участвуют только ненулевые элементы. Для целой трансцендентной функции f числа W_-, W_+ могут быть конечными или бесконечными.

Предложение 5. *Если W_- конечно, то функция f имеет конечное число положительных нулей.*

Следствие 3. *Если число положительных нулей f бесконечно, то число перемен знака W_- также бесконечно.*

Пусть все нули функции f являются вещественными и разложение Адамара для функции f имеет вид

$$f(z) = \prod_{j=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{\beta_j}\right), \tag{4}$$

где все β_j – вещественные.

Оно выполняется, если, например, $f(z)$ является целой функцией не выше чем первого порядка минимального типа.

Теорема 11. *Если у функции вида (4) число перемен знака W_- в ряду коэффициентов Тейлора равно m, то число положительных нулей (считая их вместе с кратностями) также равно m. Если у коэффициентов Тейлора функции бесконечное число перемен знака, то число положительных нулей $f(z)$ бесконечно.*

Следствие 4. *Пусть для целой функции $f(z)$ вида (4) с вещественными* *коэффициентами число отрицательных нулей (с учетом кратностей) равно* N_-*, а число перемен знака в последовательности чисел*

$$1, -b_1, \dots, (-1)^k b_k, \dots \tag{5}$$

равно W_+*. Если число* W_+ *конечно, то число* N_- *также конечно и* $W_+ = N_-$.

Если у последовательности (5) бесконечное число перемен знака, то число отрицательных нулей $f(z)$ бесконечно.

Рассмотрим сейчас аналог теоремы Бюдана-Фурье для целых функций.

Следствие 5. *Пусть функция имеет вид (4),* a *– вещественное число и* $f(a) \neq 0$. *Тогда число вещественных нулей функции* f *(с учетом их кратностей) равно числу перемен знака в последовательности чисел*

$$f(a), f'(a), \dots, f^{(k)}(a), \dots \tag{6}$$

(нулевые числа не учитываются).

Это означает, что если число перемен знака в этой последовательности – конечно и равно s, то число нулей функции f, лежащих правее a, также равно s. Если число перемен знака в (6) бесконечно, то число нулей функции, лежащих правее a, также бесконечно.

Следствие 6. *Пусть для функции вида (4) число перемен знака в последовательности (5) конечно и равно* p*, а число перемен знака в последовательности (6) конечно и равно* q*, тогда число нулей функции на отрезке* $[a,b]$ *(с учетом их кратностей) равно* $p-q$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты полученные в работе состоит в следующем:

-исследованы сингулярные интегралы типа Бохнера-Мартинелли, в ограниченных областях, граница которых кусочно-гладкие гиперповерхности;

-получены аналоги теоремы Привалова и Сохоцкого-Племеля для сингулярного интеграла Бохнера-Мартинелли в областях с неоднородными коническими ребрами;

-доказана формула перестановки(формула Пуанкаре-Бертрана) и, как следствие получена формула обращения, для сингулярного интеграла Бохнера-Мартинелли;

-обобщена формула Южакова-Руса – формула логарифмического вычета для голоморфного отображения, имеющего простые нули на границе;

-доказан аналог формулы Л.А.Айзенберга для случая, когда граница области содержит целые точки;

-обобщены тождества Оппенгейма для областей с кусочно дважды гладкой границей;

-получены канонические представления-ряд Лорана для гармонических функций в области D, равных нулю на $\partial D \setminus \{y_0\}$.

-доказаны аналоги правила знаков Декарта и теорема Бюдана-Фурье для целых функций;

-получена формула суммирования Пуассона в $\mathbb{R}^n$.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES
DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

KARAKALPAK STATE UNIVERSITY NAMED AFTER BERDAKH
NUKUS STATE PEDAGOGICAL INSTITUTE
NAMED AFTER AJINIYAZ

PRENOV BARLYKBAY BARAKBAEVICH

APPLICATION OF INTEGRAL METHODS IN MULTI-DIMENSIONAL COMPLEX ANALYSIS

01.01.01 – Mathematical analysis

ABSTRACT OF DOCTORAL DISSERTATION (DSc)
ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent – 2021

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2021.4.DSc/FM183

Dissertation has been prepared at Karakalpak State University and Nukus State Pedagogical Institute.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (resume)) on the website of Scientific Council (http://ik-fizmat.nuu.uz/) and the "ZiyoNet" Information and educational portal (http://www.ziyonet.uz/).

Scientific supervisor:	**Khudayberganov Gulmirza** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor
Official opponents:	**Ganikhodjaev Rasul Nabievich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor
	Shaimkulov Bakhodir Allaberdiyevich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor
	Myslivets Simona Glebovna Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor (SibFU, Russia)
Leading organization:	**Urgench state university**

Defense will take place on «09» 12 2021 at 12:00 at the meeting of Scientific Council DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 at National University of Uzbekistan. (Address: 4 University str., Almazar district, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Tel.: (+998 71) 246 53 21, Fax: (+998 71) 246 53 21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource center at National University of Uzbekistan (registered for No.107). (Address: 4 University str., Almazar district, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Tel.: (+998 71) 246 02 24).

Abstract of dissertation sent out on «24» 11 2021.
(Mailing report No. 2 on «24» 11 2021).

A. Sadullaev
Deputy chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., Academician

N.K. Mamadaliev
Scientific secretary of Scientific Council on award of scientific degrees, PhD in Math. and Physics

R.N. Ganikhodjaev
Chairman of Scientific seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., Professor

INTRODUCTION (abstract of doctoral dissertation)

The relevance and importance of the topic of the dissertation. Investigations of the analytic continuation of functions and singular integral formulas in the multidimensional complex space $\mathbb{C}^n$ are topical world-class problems. The Bochner-Martinelli integral representation in multivariate complex analysis is as productive and constructive as the Cauchy integral representation in the theory of functions of one complex variable, which has many important applications in various fields of mathematics and mechanics. It establishes a simple expression of a holomorphic function inside the domain $D \in \mathbb{C}^n$ in terms of its values on the boundary of the domain ∂D. A whole theory has been created for the study and application of the Bochner-Martinelli integral for domains with a smooth boundary $\partial D \subset C^1$ and for a function from $C(\partial D)$: the boundary behavior of the Bochner-Martinelli integral and theorems on "jumps", the behavior of the integral on sections of complex lines and the boundary theorem of Morera. In this regard, there is an urgent need, in broader areas, to deeply study the singular integral of the Bochner-Martinelli type.

At present, in connection with the need for a deep study of holomorphic functions in classical domains, there is an urgent need to study the Bochner-Martinelli singular integral in domains with a nonsmooth boundary and with a boundary with conical singularities. This is also due to the fact that the Bochner-Martinelli singular integrals are of practical importance, in particular, in matters of analytic continuation of functions in multivariate complex analysis, in the theory of residues, in number theory, etc. Therefore, it is highly advisable to further in-depth study of the singular integral representation Bochner-Martinelli type in bounded domains with non-smooth boundaries and in domains with non-uniform conical edges, obtaining the composition formula and inversion of the Bochner-Martinelli singular integral, investigation of the Yuzhakov-Rus formula for the logarithmic residue formula for a holomorphic mapping, L. Eisenberg's formula for the difference between a number whole points in the area and its volume are important tasks of today.

In our country, in the years of independence, much attention is paid to topical scientific areas that have practical application to the fundamental sciences. In particular, special attention was paid to solving urgent problems using integral methods in the most complex analysis and in related fields. As a result of the development of this direction, significant results were achieved in mathematical physics, in combinatorics, in static physics, in solutions of a system of algebraic and non-algebraic systems of equations, in chemical kinetics, in number theory, etc. The main tasks and activities of mathematical science are research at the level of international standards in the priority areas "Mathematical analysis and functional analysis, complex analysis and harmonic analysis, applied mathematics and mathematical modeling, differential equations and mathematical physics, probability theory and the theory of dynamical systems." To ensure the implementation of this solution, it is important to study and develop new integral methods in multivariate complex analysis and to apply them to modern applied problems in related areas is of great importance.

The studies in this work, to a certain extent, serve to solve the problems specified in the Resolutions of the President of the Republic of Uzbekistan No. UP-4947 dated February 7, 2017 "On the strategy of action for the further development of the Republic of Uzbekistan", No. PP-3682 dated April 27, 2018 "On measures on further improvement of the system of practical implementation of innovative ideas, technologies and projects ", No. PP-4708 of May 7, 2020" On measures to improve the quality of education and the development of scientific research in mathematics "and in other regulatory legal acts related to these events.

The aim of the research is to calculate the principal value of a singular integral of Bochner-Martinelli type for domains whose boundary contains an inhomogeneous conical edge; to obtain for such areas the formulas of Privalov and Sokhotskiy-Plemelj; prove the inversion formula and the Poincaré-Bertrand formula for singular integrals of Bochner-Martinelli type; application of the formulas obtained in the most multidimensional complex analysis, in number theory and in other related fields.

The main objects of research are hypersurfaces in $\mathbb{C}^n$ with inhomogeneous conical edges and singular integrals on these hypersurfaces, holomorphic maps with zeros on the boundary, harmonic in D and equal to zero on $\partial D \setminus \{y_0\}$ harmonic functions.

The scientific novelty of the research is as follows:

analogs of the Privalov and Sokhotsky-Plemelj theorem for the Bochner-Martinelli singular integral in domains with non-uniform conical edges are obtained;

the permutation formula was proved (the Poincaré-Bertrand formula) and, as a consequence, an inversion formula was obtained for the Bochner-Martinelli singular integral;

generalized the Yuzhakov-Rus formula - the formula for the logarithmic residue for a holomorphic map having simple zeros on the boundary;

an analogue of L. A. Aizenberg's formula was proved for the case when the boundary of the domain contains integer points;

analogs of Oppenheim's identity are obtained for domains with piecewise twice smooth boundary;

canonical representations are obtained for harmonic functions in the domain D that are equal to zero on $\partial D \setminus \{y_0\}$ and analogues of Descartes' rule of signs and the Budan-Fourier theorem for entire functions are proved.

Scientific and practical significance of the research results.

The scientific significance of the research results lies in the fact that the results obtained in the dissertation work can be used in the future, for a more in-depth study of the integral methods themselves and their application in related fields and for obtaining new integral representations in multivariate complex analysis.

The practical significance of the research results lies in the fact that the obtained integral formulas allow in number theory to obtain Oppenheim's identities for domains with piecewise twice smooth boundaries, in chemical kinetics for calculating the zeros of non-algebraic systems of equations.

Implementation of research results. The results obtained in the dissertation were implemented in the following research areas:

in domains with piecewise smooth boundaries and for continuous functions on the boundary: the existence of the Cauchy principal value of the Bochner-Martinelli integral, the boundary behavior of the Bochner-Martinelli integral, and theorems on "jumps" were used in a foreign grant No. 14-01-00544 on the topic "Multidimensional integral transformations and their applications in complex analytic geometry and in the theory of differential and difference equations" (reference from the Siberian Federal University dated September 17, 2021, number 157). As a result, it was possible, in areas with a non-smooth boundary and a boundary with inhomogeneous conical edges, to obtain the basic formulas of complex analysis, the Sokhotskiy-Plemelj formulas, the "jump" formula, the Poincaré-Bertrand formula and the inversion formula for such areas;

in multivariate complex analysis, in the multivariate logarithmic residue formula, the integral is taken over the boundary of the region. It is singular if the common zeros of the $f_1, f_2, ..., f_n$ system lie on the boundary of the domain. The generalized formula for the multidimensional logarithmic residue when the $f_1, f_2, ..., f_n$ system has simple zeros on the boundary of the region were for generalization the L.A. Aisenberg formula for the difference between the number of integer points in the region and its volume, in the case when the boundary contains integer points. used in a foreign grant under the number 18-51-41011, on the topic "Multidimensional complex analysis" (certificate of the Siberian Federal University dated September 17, 2021 under number 158). As a result, it was possible to generalize Oppenheim's identities, in number theory, for bounded domains with piecewise twice smooth boundaries and to prove a spatial analogue of Poisson's formula;

in the theory of functions of many complex variables, the so-called residue integrals and the generalized formula for the multidimensional logarithmic residue, in the case when there are simple zeros of the holomorphic mapping on the boundary, were used to study the power sums of the roots of algebraic and non-algebraic systems of equations in the foreign RFBR grant under the number 15-01 - 00277 on the topic "Non-algebraic systems of equations, power sums of roots and computer algebra" (reference from the Siberian Federal University dated September 17, 2021, number 159). As a result, it was possible to calculate the roots of transcendental equations and non-algebraic systems of equations found in chemical kinetics.

The volume and structure of the dissertation. The dissertation consists of an introduction, five chapters, a conclusion and a list of references. The total volume of the dissertation is 171 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (часть I; part I)

1. Пренов Б.Б., Тарханов Н.Н. Замечание о скачке интеграла Мартинелли-Бохнера для областей с кусочно-гладкой границей // Сибирский математический журнал. №1,1989, Т. XXX, с, 199-201, Россия. **IF-0,375 (01.00.00; №59)**

2. Айзенберг Л.А., Пренов Б.Б. О применении многомерного логарифмического вычета к формуле суммирования Пуассона // Известия АН УзССР. Сер. Физ-мат. Наук; 1989, №1, с 3-7. С 1990г. Узбекский математический журнал. **(01.00.00; №6)**

3. Пренов Б.Б., Тарханов Н.Н. О сингулярном интеграле Мартинелли-Бохнера // Сибирский математический журнал. 1992, т. 33, №2 с. 202-205, Россия. **IF-0,375. (01.00.00; №59)**

4. Кытманов А.М., Пренов Б.Б., Тарханов Н.Н. Формула Пуанкаре-Бертрана для интеграла Мартинелли-Бохнера // Известия ВУЗов. Математика. 1992, №11, с. 29-34. Россия. **IF-0,176. (01.00.00; №22)**

5. Prenov B.B., Tarkhanov N.N. Kernel spikes of singular Problems // Communications in partial differential equation. vo1. 28, №3,4. 2003. pp. 505-516. New York. USA. **IF-1,239. Elsevier BV Scopus.**

6. Пренов Б.Б. О свойствах интеграла Бохнера-Мартинелли в областях с коническими ребрами // Доклады АН РУз, 4, 2007. с. 19-22. **(01.00.00; №7)**

7. Пренов Б.Б. Об аналогах ряда Лорана для гармонических функций // Журнал СФУ. Математика и Физика. 2010, 3(2), 244-247. **IF-0,262, IS-0,290**, http://journal.sfu-kras.ru. **(01.00.00; №59)**.

8. Пренов Б.Б. Граничное поведение интеграла Бохнера- Мартинелли в областях с коническими ребрами // Журнал СФУ, Математика и Физика, 2012, 5(3), 422-429. Россия. **IF-0,262, IS-0,290**, http://journal.sfu-kras.ru **(01.00.00; №59)**.

9. Пренов Б.Б. О правиле знаков Декарта для целых функции с вещественными коэффициентами // Вестник Национального университета Узбекистана. "Университет". Ташкент, 2017, 2/2, с.187-191. **(01.00.00; №8)**

10. Пренов Б.Б. Аналоги правилы Декарта и теоремы Бюдана-Фурье для целых функций конечного порядка роста //. ДАН РУз ,№6, с 13-15. 2017. **(01.00.00; №7)**

11. Prenov B.B. On the number of Real Zeros of Entire Functions of finite Order of Growth. // Algebra and Analysis. Pluripotential theory Springer. Procedeeings in Mathematics & Statictics, 2017.Vol 264, pp. 125-130(**3. Scopus, IF=0,31)**

12. Prenov B.B. "On an analog of Descartes' rule of signs and the Budan–Fourier theorem for entire functions", Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ., 11:3 (2018), 317–321, **IF-0,262, IS-0,290.**

13. Kytmanov A.M., Dzhumabaev D.Kh., Utemuratov B.P., Prenov B.B. Jump theorems for the Bochner-Martinelli integral in domains with a piecewise smooth boundary // Bulletin of national Univercity of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences. Vol.3, Issue 1. 2-24-2020. Pp.1-19. **(01.00.00; №8)**

14. Prenov B.B. On the application of multidimensional logarithmic residue to systems of non-algebraic equations // Bulletin of national Univercity of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences. Tashkent. **(01.00.00 №7)**. vol.3, 2020. Issue 2. p. 133-146.

15. Prenov B.B. Some examples of systems of non-algebraic equations // Bulletin of the Institute of Mathematics. Tashkent. 2020, №2, pp, 11-18.**(01.00.00; №6)**

II бўлим (часть II; part II)

16. Пренов Б.Б. Тождества Оппенгейма для эллипсоида // В кн: Актуальные вопросы комплексного анализа, Ташкент ,1985, с. 124.

17. Пренов Б.Б Аналог тождества Оппенгейма для тетраэдра // В кн: Многомерный комплексный анализ. Красноярск, ИФ СО АН СССР, 1985, с. 252-255, Россия.

18. Пренов Б.Б. Аналог тождества Вороного-Харди для треугольника // В кн: Математический анализ и алгебра. Ташкент, 1986, с.51-58.

19. Пренов Б.Б. Замечание о формуле суммирования Пуассона // В кн: XI Всесоюзная школа по теории операторов в функционалъных пространствах. Ч. II. Челябинск , 1986, с. 104, Россия.

20. Пренов Б.Б. Тождество Оппенгейма для эллипсоида // ВИНИТИ №1634-85 Деп. Москва, Россия, 1-10.

21. Айзенберг Л.А., Кытманов А.М., Пренов Б.Б. Применение многомерного логарифмического вычета для получения аналогов тождества Вороного-Харди // Известия ВУЗов. Математика, 1986, №5, с.11-16, Россия. IF-0,176. (01.00.00;№22)

22. Айзенберг Л.А., Кытманов А.М., Пренов Б.Б. О применении многомерного логарифмического вычета // Доклады АН УзССР, №5, 1986, с. 11-13. (01.00.00;№7)

23. Пренов Б.Б., Тарханов Н.Н., Цих А.К. О сингулярном интеграле Мартинелли-Бохнера, В кн: Комплексный анализ и математическая физика. Красноярск. 1987, с. 90. Россия.

24. Айзенберг Л.А., Пренов Б.Б. Аналоги тождества Оппенгейма и многомерный логарифмический вычет // Вестник Уральского госуниверситета. Математика. Исследования по топологии и теория операторов. Свердловск, 1990, с. 4-13,Россия.

25. Пренов Б.Б., Сатбаев С. Представление для разности между числом целых точек на секторе и его площадью // В сб. материалов IV НТК молодых ученых и специалистов КГУ. Нукус, 1992.

26. Пренов Б.Б., Нарекеев Б. Представление разности целых точек на пересечении труб и его объемом // В кн: Материалыой НТК молодых ученых и специалистов КГУ, Нукус, 1993. с. 49.

27. Prenov B.B., Tarkhanov N.N. Kernel spikes of singular Problems //. Preprint 2002. 36 ISS N 1437-739X Institut fur Mathematik. Uni Potsdam 2001, 1-16, Deutshland.

28. Пренов Б.Б., Сауханов Ж. Об аналоге ряда Лорана гармонических функции для полупространства // В кн: Материалы 1-ой Республиканской конференции магистрантов, Нукус, 2003. с. 76-78.

29. Пренов Б.Б. О гармоническом представлении гиперфункции // Тезисы X-ой международной конференции им. Акад. М.Кравчука, Киев 2004, с. 491, Украина.

30. Пренов Б.Б. Об одном аналоге ряда Лорана // В кн: "Геометрический анализ и его приложения". Волгоград. 2004, с. 110-112. Россия.

31. Пренов Б.Б. Об аналогах ряда Лорана для гармонических функций в шаре// Тезисы Республиканской научной конференции "Дифференциальные уравнение и их приложения". Нукус, 2009. с. 61-62.

32. Пренов Б.Б. Специальное главное значение интеграла Бохнера-Мартинелли // Modern of dynamical systems and their applications. Abstracts of the republican scientific conference with participiation of foreign scientists. 1-3 May 2017 . C. Tashkent.

33. Пренов Б.Б. Контрпример к формуле обращения интеграла Бохнера-Мартинелли полученным А. И. Сербиным // Тезисы республиканской научно-теоретической конференции. 2017, 27-28 апреля, Нукус, с 5-7.

34. Пренов Б.Б. Сингулярный интегральный оператор Бохнера-Мартинелли в областях с коническими ребрами // XVIII- международная конференция им. Акад . М.Кравчука. 7-10 октября, 2017, 4 стр.,Киев, Украина.

35. Prenov B.B. About analoge rules of Descarts signs for general functions // The second USA-Uzbekistan conference on analysis and mathematical physics. August 08-12.2017, Urgensh, Uzbekistan. P. 107-108.

36. Пренов Б.Б. Об одном каноническом представлении гармонических функции // Abstracts of the Uzbek-Israel International Scientific Conference "Contemporary problems in Mathematics and physics". Tashkent. October 6-10, 2017. P.203.

37. Prenov B.B. Об одном аналого ряда Лорана для гармонических функций // Международная школа-конференция "Комплексный анализ и его приложения" 2-9 июня 2018 г. Геленджик, Кубанский университет, Россия, E-mail. coman@kubsu.ru.

38. Пренов Б.Б. Некоторые примеры систем неалгебраических уравнений. // "Mathematical analysis and its to Mathematical physics" International conference. Samarkand state university. Uzbekistan, September 17-20, 2018. p. 30-33.

39. Пренов Б.Б. Об одном обобщении леммы Привалова. // "Фан ва таьлим-тарбиянинг долзарб масалалари" мавзусидаги республика илмий-назарий ва амалий анжумани. Нукус 2018, 1-2 Май. 337-339 б.

40. Prenov B.B. On local logarithmic residue. // Abstracts of the Uzbek-Israel joint international conference STEMM. Bukhara-Samarkand-Tashkent, May 13-17 2019. P 117-118.

41. Пренов Б.Б. О вычислении степенных сумм корней систем неалгебрачиских уравнений // "Актуальные проблемы и применения анализа" Материалы республиканской научной конференции. Карши, 4-5 октябрь, 2019. с.31.

42. Пренов Б.Б. Формула многомерного логарифмического вычета для гладких функции // Ózbekiston respublikasi fanlar akademiyasi V.I.Romanovskiy nomidagi matematika insitituti. "Matematikaning zamonaviy muammolari" ilmiy onlayn-konferensiya tezislar tóplami. 20 may 2020 yil. 113-115 b.

43. Prenov B.B. About multidimensional logarithmic residue formula // Abstracts of the International online conference. " Frontier in Mathematics and computer science". Tashkent, October 12-15, 2020. P 82-86.

44. Кытманов А., Пренов Б. Вычетные интегралы связанные с системой неалгебраических уравнений // "Теории функции одного и многих комплексных переменных" материалы международной научно-практической онлайн-конференции. 26-28 ноября 2020 г. Нукус. 56-65 стр.

Автореферaтнинг ўзбек, рус ва инглиз тилларидаги нусхалари "Ўзбекистон математика журнали" таҳририятидан таҳрирдан ўтказилди.
23 ноябрь 2021 йил.

Бичими: 84x60 1/16. «Times New Roman» гарнитураси.
Рақамли босма усулда босилди.
Шартли босма табоғи: 4. Адади 100. Буюртма № 68/21.

Гувоҳнома № 851684.
«Tipograff» МЧЖ босмахонасида чоп этилган.
Босмахона манзили: 100011, Тошкент ш., Беруний кўчаси, 83-уй.