**САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ
ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ**

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ХАМИДОВ ШАХОБИДДИН ИЛХОМ ЎҒЛИ

ПАНЖАРАДАГИ БИР ВА ИККИ ЗАРРАЧАЛИ ШРЕДИНГЕР ОПЕРАТОРЛАРИ УЧУН БЎСАҒА ЭФФЕКТИ

01.01.01 –математик анализ

**Физика–математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси
А В Т О Р Е Ф Е Р А Т И**

Самарқанд - 2021

УДК: 517.984

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ХАМИДОВ ШАХОБИДДИН ИЛХОМ ЎҒЛИ

ПАНЖАРАДАГИ БИР ВА ИККИ ЗАРРАЧАЛИ ШРЕДИНГЕР ОПЕРАТОРЛАРИ УЧУН БЎСАҒА ЭФФЕКТИ

01.01.01 –математик анализ

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси
А В Т О Р Е Ф Е Р А Т И

Самарқанд - 2021

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2021.2.PhD/FM562 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Самарқанд давлат университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, инглиз, рус (резюме)) Илмий кенгаш веб–саҳифаси (www.samdu.uz) ва «Ziyonet» Ахборот-таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Лақаев Саидахмат Норжигитович** физика-математика фанлари доктори, профессор, академик
Расмий оппонентлар:	**Абдуллаев Жаникул Ибрагимович** физика–математика фанлари доктори, профессор
	Мўминов Захриддин Эшқобилович физика–математика фанлари доктори
Етакчи ташкилот:	**Бухоро давлат университети**

Диссертация ҳимояси Самарқанд давлат университети ҳузуридаги DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2021 йил «29» 12 соат 10^{00} даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 140104, Самарқанд ш., Университет хиёбони, 15-уй. Тел.: (+99866) 231–06–32, факс: (+99866) 235–19–38, e–mail: patent@samdu.uz).

Диссертация билан Самарқанд давлат университетининг Ахборот–ресурс марказида танишиш мумкин (№89 рақам билан рўйхатга олинган). (Манзил: 140104, Самарқанд ш., Университет хиёбони, 15-уй. Тел.: (+99866) 231–06–32, факс: (+99866) 235–19–38.)

Диссертация автореферати 2021 йил «17» 12 куни тарқатилди.
(2021 йил «17» 12 даги 1 рақамли реестр баённомаси).

А.С. Солеев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш раиси, физика-математика фанлари доктори, профессор

А.М. Халхўжаев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш илмий котиби, физика-математика фанлари доктори

И.А.Икромов
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш қошидаги илмий семинар раиси ўринбосари, физика-математика фанлари доктори, профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар, изланишларда аксарият ҳолларда микродунёда кечаётган жараёнларнинг илмий моделлари қаралади. Микродунё ҳодисаларини тавсифловчи квант майдонлар назариясининг ривожланиши квант механикасининг вужудга келишига асос бўлди. Квант механикасидаги ҳар қандай системада энг муҳим физик миқдорлардан бири бу энергиядир. Энергия оператори, яъни Шрёдингер операторининг спектрал хоссаларини таҳлил қилиш квант механикасининг асосий масалаларидан биридир. Панжарадаги заррачалар системаларига мос энергия оператори ҳам экспериментал кузатишларнинг назарий асоси сифатида хизмат қилади. Шу сабабли қаттиқ жисмлар физикаси, квант механикаси ва статистик физикада учрайдиган панжарадаги заррачалар системаларига мос энергия операторларининг дискрет ва муҳим спектрига оид тадқиқотларни ривожлантириш муҳим вазифалардан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда жаҳон миқёсида кубик панжарадаги бир ва икки квант заррачали система гамильтонианларига мос энергия операторлар оилаларининг спектрига оид муаммоларни ҳал этиш математик физикада муҳим аҳамият касб этмоқда. Жумладан, бир ва икки заррачали дискрет Шредингер операторлари учун боғланган ҳолатлар мавжудлигини исботлаш, унинг муҳим спектри ўрнини топиш ҳамда муҳим спектридан ташқаридаги хос қийматлари мавжудлиги учун шартларни топишга оид тадқиқотларни ривожлантириш амалий-назарий жиҳатдан муҳим илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий тадбиқига эга бўлган долзарб йўналишларига эътибор янада кучайтирилди. Бу борада мамлакатимиз олимлари томонидан кубик панжарадаги бир ва икки заррачали система энергия операторларининг спектрал назариясини ривожлантиришга алоҳида эътибор берилмоқда. Панжарадаги икки заррачали система энергия операторлари учун муҳим спектрдан ташқарида боғланган ҳолатлар мавжудлиги ва уларнинг сонини аниқлашга оид сезиларли натижаларга эришилди. “Алгебра ва унинг татбиқлари, дифференциал тенгламалар ва унинг татбиқлари, чизиқсиз тизимлар, динамик тизимлар ва уларнинг татбиқларини математик моделлаштириш, стохастик таҳлил, тиббий-биологик информатика, ҳисоблаш математикаси[1]” фанларининг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифалари ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди. Бу қарор ижросини таъминлашда

[1] Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сон “Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида” ги қарори.

квант майдонлар назарияси ва чизиқли операторларнинг спектрал назариясини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида» Фармони, 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сон «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида» ва 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Бизга маълумки, бир заррачали дискрет Шрёдингер операторлари комбинаторик лапласианлар ва квант графлари соҳасида муҳим ўрин тутади. Бу соҳадаги баъзи сўнги натижалар Г.Берколаико, О.Пост, Е.Коротяев, А.Григоръян, Н.Сабурова ва Ф.Чунг каби олимларнинг ишларида ўз аксини топган. Хусусан, дискрет Шрёдингер операторлари потенциаллари дельта функциялар бўлганда бу операторлар хос қийматларининг ўзгариши С.Альбеверио, П.Фариа де Вега, Х.Шульс-Балдес, Ж.Белиссард, Ф.Хирошима, С.Н.Лақаев, Х.Хаяши, И.Бозоров, З.Мўминов ва Ў.Қулжоновларнинг ишларида муҳокама қилинган. Бу соҳадаги баъзи натижаларни икки заррачали узлуксиз Шрёдингер операторлари учун Ньютон таъкидлаб ўтган ва Х.Тамура эса Б.Саймон томонидан олинган натижалар ёрдамида исботлаган.

Панжарадаги заррачалар системалари энергия операторлари Д.С.Маттис ва А.И.Могильнерлар томонидан назарий физика масаласи сифатида ўрганилган. Панжарадаги Шредингер операторларини қатъий математик маънода тадқиқ этишда узлуксиз Шредингер операторларидаги каби муаммолар учрайди, яъни, дастлаб бир, икки ва ҳоказо заррачали операторларни ўрганиш талаб этилади. Икки заррачали узлуксиз ва дискрет Шредингер операторлари боғланган ҳолатлари энергия сатҳлари ўзаро таъсир доимийси ўзгариши натижасида узлуксиз спектрнинг қуйи бўсағасига яқинлашади ва таъсир доимийсининг баъзи қийматларида узлуксиз спектр қуйи бўсағаси билан устма-уст тушади. Бу бўсаға қийматга боғланган ҳолат ёки виртуал ҳолат мос келишини аниқлаш масаласи Б.Саймон, Дж.Раух, Д.Яфаев, М.Клауз ва С.Н.Лақаевлар томонидан ўрганилган. Узлуксиз ва дискрет Шредингер операторлари учун хос қийматнинг мавжудлиги ва ўзаро таъсир ўзгармасининг бўсағавий қийматидаги хос қийматнинг асимптотикалари М.Клауз, Д.Яфаев, Б.Саймон, Х.Тамура, А.Соболев, С.Фассари, С.Н.Лақаев, Ш.Холматов, А.М.Холхўжаев ва Ш.С.Лақаевлар каби олимлар томонидан тадқиқ қилинган. Уч ўлчамли панжарадаги жуфт-жуфти билан ўзаро контакт потенциал ёрдамида таъсирлашувчи иккита бозонли системага мос икки заррачали дискрет Шредингер оператори учун квазиимпульснинг бўсаға эффекти, яъни номанфий Шредингер оператори муҳим спектрнинг қуйи чегарасида виртуал сатҳга ёки хос қийматга эга бўлса, қаралаётган оператор, квазиимпульснинг нолдан фарқли барча қийматларида, муҳим спектр қуйи чегарасидан пастда хос қийматга эга бўлиши ҳодисаси дастлаб С.Н.Лақаев томонидан исботланган.

Кейинчалик С.Албеверио, С.Н.Лақаев, К.Макаров, З.Мўминовлар томонидан ўлчами иккидан катта бўлган панжараларда жуфт-жуфти билан қисқа масофада таъсирлашувчи ихтиёрий икки заррачали системага мос икки заррачали Шредингер оператори учун бу эффектнинг мавжудлик шартлари операторнинг дисперсион функциялари кенг синфи учун кўрсатилган. С.Н.Лақаев, Ш.Ю.Холматов, А.М.Холхўжаев, Ш.С.Лақаев ишларида ўлчамлари бир, икки ва уч бўлган панжараларда тортишувчи контакт потенциал ёрдамида таъсирлашувчи иккита квант заррачали системага мос дискрет Шредингер операторларининг муҳим спектрдан пастда ягона хос қиймати мавжудлиги исботланган, ҳамда хос қиймат учун асимптотикалар панжаралар ўлчамлари, ўзаро таъсир доимийси ва квазиимпульсга боғлик ҳолда топилган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилаётган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Самарқанд давлат университетининг илмий-тадқиқот ишлари режасига мувофиқ ОТ-Ф4-66-рақамли «Панжарадаги чекли сондаги заррачалар системаси моделлари. Энергия операторларининг муҳим ва дискрет спектрлари»(2017-2020 й.) мавзусидаги фундаментал тадқиқот лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади панжарадаги бир ва икки заррачали Шредингер операторларининг муҳим ва дискрет спектрларини тадқиқ қилишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари қуйидагилардан иборат:

бир заррачали Шредингер операторининг муҳим спектридан қуйида хос қийматларнинг мавжуд ёки мавжуд эмаслигини потенциалга ва панжара ўлчамига боғлиқ ҳолда исботлаш;

бир заррачали Шредингер оператори муҳим спектрининг қуйи бўсағаси регуляр ёки сингуляр нуқта бўлганда ва кичик қўзғалишларда муҳим спектрдан қуйида Шредингер операторининг хос қиймати мос равишда пайдо бўлмаслиги ёки пайдо бўлишини исботлаш;

икки ўлчамли панжарадаги бир заррачали Шредингер оператори ташқи таъсир энергияси $\mu, \lambda \in R$ параметрлар орқали берилганда унинг муҳим спектридан ташқаридаги хос қийматларнинг аниқ сонини ва жойлашган ўрнини топиш;

икки ўлчамли панжарадаги икки заррачали Шредингер оператори таъсир энергияси $\mu, \lambda \in R$ параметрлар орқали берилганда квазиимпульснинг ноль қийматида, унинг муҳим спектридан ташқаридаги хос қийматлари сонининг ўзгаришини $\mu, \lambda \in R$ параметрларга боғлиқ кўрсатиш;

икки ўлчамли панжарадаги икки заррачали Шредингер оператори таъсир энергияси $\mu, \lambda \in R$ параметрлар орқали берилганда унинг муҳим спектридан ташқаридаги хос қийматларининг сонига оператор квазиимпульсининг барча нолмас қийматларида аниқ баҳо олиш.

Тадқиқотнинг объекти кубик панжарадаги бир ва икки заррачали системалар энергия операторларидан иборат.

Тадқиқотнинг предмети панжарадаги бир ва икки заррачали Шредингер операторларининг спектрал хоссаларини тадқиқ қилишдан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертацияда математик анализ, комплекс анализ, функционал анализ, математик физика, ўз-ўзига қўшма операторлар назарияси, Бирман-Швингер принципи, Фредгольм детерминантининг асимптотикасини аниқлаш усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

бир заррачали Шредингер операторининг муҳим спектридан қуйида хос қийматларнинг мавжуд ёки мавжуд эмаслиги потенциалга ва панжара ўлчамига боғлиқ ҳолда исботланган;

бир заррачали Шредингер оператори муҳим спектрининг қуйи бўсағаси регуляр ёки сингуляр нуқта бўлганда ва кичик қўзғалишларда муҳим спектрдан қуйида Шредингер операторининг хос қиймати мос равишда пайдо бўлмаслиги ёки пайдо бўлиши исботланган;

икки ўлчамли панжарадаги бир заррачали Шредингер оператори ташқи таъсир энергияси $\mu, \lambda \in R$ параметрлар орқали берилганда унинг муҳим спектридан ташқаридаги хос қийматларнинг аниқ сони ва жойлашган ўрни топилган;

икки ўлчамли панжарадаги икки заррачали Шредингер оператори таъсир энергияси $\mu, \lambda \in R$ параметрлар орқали берилганда квазиимпульснинг ноль қийматида унинг муҳим спектридан ташқаридаги хос қийматлари сонининг ўзгариши $\mu, \lambda \in R$ параметрларга боғлиқ кўрсатилган ҳамда квазиимпульснинг барча нолмас қийматларида хос қийматларининг сонига аниқ баҳо олинган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари қуйидагилардан иборат:

бир заррачали Шредингер операторининг муҳим спектридан қуйида боғланган ҳолатларнинг мавжуд ёки мавжуд эмаслиги потенциалга ва панжара ўлчамига боғлиқ эканлигини кўрсатиш усуллари параметрга боғлиқ умумлашган функциянинг мероморф давомидаги биринчи қутбни топиш имконини берган;

дискрет Шредингер операторининг муҳим спектрдан юқорида жойлашган хос қийматлар сонини аниқлаш усуллари муҳим спектрдан юқорида жойлашган умумлашган Фридрихс моделининг хос қийматлари мавжудлигини исботлаш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги. Математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги ва математик анализ, комплекс анализ, функционал анализ, математик физика, ўз-ўзига қўшма операторлар спектрал назарияси, Бирман-Швингер принципи, Фредгольм детерминантининг асимптотикасини аниқлаш усулларининг қўлланилиши билан асосланади.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти ўз-ўзига қўшма операторлар спектрал назариясида, квант механикаси ва қаттиқ жисмлар физикасида панжарадаги икки ва уч заррачали система энергия операторлари спектрлари ҳамда хос қиймати мавжудлигини кўрсатиш билан боғлик масалаларни ҳал этишда фойдаланиш мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти олинган илмий натижаларнинг қаттиқ жисмлар физикаси ва квант механикасида экспериментал тадқиқотлар ўтказиш ва қўллашга назарий асос сифатида хизмат қилиши билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Панжарадаги бир ва икки заррачали Шрёдингер операторининг муҳим ва дискрет спектрлари бўйича олинган натижалар асосида:

бир заррачали Шредингер операторининг муҳим спектридан қуйида боғланган ҳолатларнинг мавжуд ёки мавжуд эмаслиги потенциалга ва панжара ўлчамига боғлиқ эканлигини кўрсатиш усулларидан ОТ-Ф4-69 «Гармоник анализ, даражали геометрия ва уларнинг математик физика масалаларига татбиқлари» мавзусидаги фундаментал лойиҳада гармоник анализда тебранувчан интегралнинг тебраниши кўрсаткичини топишда фойдаланилган (Самарқанд давлат университетининг 2021 йил 23 ноябрдаги 10-4721-сон маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши параметрга боғлиқ умумлашган функциянинг мероморф давомидаги биринчи қутбни топиш имконини берган;

дискрет Шредингер операторининг муҳим спектрдан юқорида жойлашган хос қийматлар сонини аниқлаш усулларидан ERGS/1/2/2013/STG06/UKM/01/2 рақамли хорижий грантда қўзғалиш ранги бирга тенг бўлган умумлашган Фридрихс моделининг ягона хос қиймати мавжудлигини исботлашда фойдаланилган (Малайзия Кебангсаан университетининг 2021 йил 24 ноябрдаги маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши муҳим спектрдан юқорида жойлашган умумлашган Фридрихс моделининг хос қийматлари мавжудлигини исботлаш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари, 7 та илмий-амалий анжуманларда, жумладан 2 та халқаро ва 5 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 12 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон

Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг диссертациялар асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрлар рўйхатида 5 та мақола, жумладан, 1 таси хорижий ва 4 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат бўлиб, диссертациянинг ҳажми 98 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг биринчи боби **«Бошланғич маълумотлар ва панжарадаги бир ва икки заррачали система гамильтонианлари»** деб номланган ва бунда асосий натижаларни баён қилиш учун зарур бўлган тушунчалар ва натижалар, жумладан чегараланган ўз-ўзига қўшма операторлар спектрал назариясининг зарур теоремалари келтирилган, ҳамда бир заррачали ва иккита бир хил бозонлар системаси гамильтонианларининг координата ва импульс кўринишларида чегараланган ўз-ўзига қўшма операторлар сифатида мос гильберт фазоларида қаралган. Икки заррачали система тўла квазиимпульси киритилиб, икки бозонли система гамильтониани Фон-Нейман интегралига ёйилган. Натижада икки бозонли система гамильтониани спектрини ўрганиш масаласи қават операторлар, яъни дискрет Шредингер операторлари спектрал хоссаларини ўрганиш масаласига келтирилган.

Диссертациянинг иккинчи боби **«Панжарадаги бир заррачали Шредингер операторининг спектри ҳақида»** деб номланган бўлиб, бу бобда бир заррачали Шредингер операторининг муҳим спектридан қуйида боғланган ҳолатларнинг мавжуд ёки мавжуд эмаслиги потенциалга ва панжара ўлчамига боғлиқ эканлиги кўрсатилган. Бундан ташқари икки ўлчамли панжарадаги бир заррачали Шредингер оператори ташқи таъсир энергияси $\mu, \lambda \in R$ параметрлар орқали берилганда унинг муҳим спектридан ташқаридаги хос қийматларнинг аниқ сони ва жойлашган ўрни аниқланган.

Фараз қилайлик, $\mathrm{Z}^d -$ $d-$ўлчамли кубик панжара ва $\ell^2(\mathrm{Z}^d)-$ Z^dда аниқланган квадрати билан жамланувчи функциялар гилберт фазоси ҳамда $\ell^1(\mathrm{Z}^d)-\mathrm{Z}^d$да аниқланган жамланувчи функциялар Банах фазоси бўлсин. Шунингдек, $\ell^1(\mathrm{Z}^d;\mathrm{R}_0^-)\subset \ell^1(\mathrm{Z}^d)-$жамланувчи номусбат функциялар тўплами бўлсин. Бир заррачали Шредингер оператори $\hat{H}_{\hat{V}}$нинг координат тасвири $\ell^2(\mathrm{Z}^d)$ гильберт фазосида қуйидаги формула билан аниқланган:

$$\hat{H}_{\hat{V}} = \hat{H}_0 + \hat{V}.$$

Бу ерда $\hat{H}_0$ оператор ўрама типидаги оператор бўлиб,

$$(\hat{H}_0 \hat{f})(x) = \sum_{s \in \mathrm{Z}^d} \hat{\varepsilon}(x-s)\hat{f}(s), \qquad \hat{f} \in \ell^2(\mathrm{Z}^d),$$

формула билан аниқланган. Бунда, $\hat{\varepsilon}(\cdot) \in \ell^1(\mathrm{Z}^d)$. Шунинг билан биргаликда $\hat{\varepsilon}(s) = \overline{\hat{\varepsilon}(-s)}, \quad s \in \mathrm{Z}^d$, шартни қаноатлантирсин.

$\hat{V}$ оператор $\hat{v} \in \ell^1(\mathrm{Z}^d; \mathrm{R}_0^-)$ функцияга кўпайтириш оператори сифатида аниқланган, яъни

$$(\hat{V}\hat{f})(x) = \hat{v}(x)\hat{f}(x), \qquad \hat{f} \in \ell^2(\mathrm{Z}^d).$$

T^d - $d-$ўлчамли тор, яъни $(-\pi, \pi]^d$ куб, dp- T^d торда аниқланган Хаар ўлчови, яъни $\int_{\mathrm{T}^d} dp = 1$ ва $L^2(\mathrm{T}^d) - \mathrm{T}^d$да аниқланган квадрати билан интегралланувчи функциялар гилберт фазоси бўлсин. Бир заррачали Шредингер оператори H_V нинг импулс тасвири $L^2(\mathrm{T}^d)$ гильберт фазосида қуйидаги формула билан аниқланган:

$$H_V = H_0 + V.$$

Қўзғалмас H_0 оператори $L^2(\mathrm{T}^d)$ фазода $\varepsilon(\cdot)$ функцияга кўпайтириш оператори бўлиб,

$$(H_0 f)(p) = \varepsilon(p) f(p), \quad f \in L^2(\mathrm{T}^d),$$

формула билан аниқланган. Бунда,

$$\varepsilon(p) = \sum_{x \in \mathrm{Z}^d} e^{i(p,x)} \hat{\varepsilon}(x), \qquad p \in \mathrm{T}^d,$$

ҳақиқий қийматли узлуксиз жуфт функция.

V ўзаро таъсир (қўзғатиш) оператори $L^2(\mathrm{T}^d)$ фазода қуйидаги формула билан аниқланган:

$$(Vf)(p) = \int_{\mathrm{T}^d} v(p-q) f(q) dq, \quad f \in L^2(\mathrm{T}^d).$$

Бунда,

$$v(p) = \sum_{x \in \mathrm{Z}^d} e^{i(p,x)} \hat{v}(x), \qquad p \in \mathrm{T}^d.$$

$\hat{V}$ компакт оператор эканлигидан Г.Вейл теоремасига асосан $\hat{H}_{\hat{V}}$ операторнинг муҳим спектри $\hat{H}_0$ операторнинг муҳим спектри билан устма-уст тушади, яъни

$$\sigma_{ess}(\hat{H}_{\hat{V}}) = \sigma_{ess}(\hat{H}_0) = \sigma(H_0) = [\varepsilon_{\min}, \varepsilon_{max}],$$

бунда

$$\varepsilon_{\min} = \min_{p \in \mathrm{T}^d} \varepsilon(p), \qquad \varepsilon_{\max} = \max_{p \in \mathrm{T}^d} \varepsilon(p).$$

Фараз қилайлик, $C^n(\mathrm{T}^d)$, $n = 0,1,2,...$ T^dда n марта узлуксиз дифференциалланувчи функцияларнинг Банах фазоси бўлсин.

1-шарт. *(i)* Дисперсион муносабат $\varepsilon(\cdot)\in C^3(\mathrm{T}^d)$ ҳақиқий қийматли жуфт функция ҳамда $p_1,...p_l\in\mathrm{T}^d\,(p_1=0\in\mathrm{T}^d)$ нуқталарда айнимаган минимумга эга.

(ii) Айнан нол бўлмаган номусбат $\hat{v}$ функция абсолют жамланувчи, яъни $\hat{v}\in\ell^1(\mathrm{Z}^d;\mathrm{R}_0^-),\quad d\geq 3.$

1-таъриф. Фараз қилайлик, $d\geq 3$ва 1-шарт ўринли бўлсин. Умумлашган Бирман-Швингер оператори $\hat{\mathrm{B}}_{\hat{V}}(\varepsilon_{\min})$ни $\ell^2(\mathrm{Z}^d)$да интеграл оператор сифатида қуйидагича аниқлаймиз:

$$[\hat{\mathrm{B}}_{\hat{V}}(\varepsilon_{\min})\hat{\psi}](x):=[|\hat{V}|^{\frac{1}{2}}\hat{R}_0(\varepsilon_{\min})|\hat{V}|^{\frac{1}{2}}\hat{\psi}](x)$$

2-таъриф. Фараз қилайлик, $d\geq 3$ бўлсин. Агар 1 сони $\hat{\mathrm{B}}_{\hat{V}}(\varepsilon_{\min})$ оператор учун хос қиймат бўлмаса (хос қиймат бўлса), у ҳолда муҳим спектр $\sigma_{ess}(\hat{H}_{\hat{V}})$нинг $z=\varepsilon_{\min}$ бўсағаси $\hat{H}_{\hat{V}}$ операторнинг муҳим спектрининг регуляр (сингуляр) нуқтаси дейилади.

1-теорема. Фараз қилайлик, $d\geq 3$ ва 1-шарт ўринли бўлсин. Бирор $\hat{v}_0\in\ell^1(\mathrm{Z}^d;\mathrm{R}_0^-)$ учун $\varepsilon_{\min}$бўсаға $\hat{H}_{\hat{V}_0}$операторнинг муҳим спектрининг регуляр нуқтаси бўлсин. У ҳолда $\hat{v}_0$нинг шундай $U(\hat{v}_0)\subset\ell^1(\mathrm{Z}^d;\mathrm{R}_0^-)$ атрофи мавжудки, барча $\hat{v}\in U(\hat{v}_0)$ учун $\varepsilon_{\min}$бўсағадан қуйида $\hat{H}_{\hat{V}}$операторнинг хос қийматлари сони ўзгармайди.

Ўзаро таъсир $\hat{v}\in\ell^1(\mathrm{Z}^d;\mathrm{R}_0^-)$ учун

$$U_\gamma^{>}(\hat{v}_0):=\{\hat{v}\in\ell^1(\mathrm{Z}^d;\mathrm{R}_0^-):\left\|\hat{v}-\hat{v}_0\right\|_{\ell^1(\mathrm{Z}^d;\mathrm{R}_0^-)}<\gamma,\left\|\hat{\mathrm{B}}_{\hat{V}}(\varepsilon_{\min})\right\|>1\},$$
$$U_\gamma^{=}(\hat{v}_0):=\{\hat{v}\in\ell^1(\mathrm{Z}^d;\mathrm{R}_0^-):\left\|\hat{v}-\hat{v}_0\right\|_{\ell^1(\mathrm{Z}^d;\mathrm{R}_0^-)}<\gamma,\left\|\hat{\mathrm{B}}_{\hat{V}}(\varepsilon_{\min})\right\|=1\},$$
$$U_\gamma^{<}(\hat{v}_0):=\{\hat{v}\in\ell^1(\mathrm{Z}^d;\mathrm{R}_0^-):\left\|\hat{v}-\hat{v}_0\right\|_{\ell^1(\mathrm{Z}^d;\mathrm{R}_0^-)}<\gamma,\left\|\hat{\mathrm{B}}_{\hat{V}}(\varepsilon_{\min})\right\|<1\},$$

қисм тўпламларни аниқлаймиз.

2-теорема. Фараз қилайлик, $d\geq 3$ ва 1-шарт ўринли бўлсин. Бирор нолмас $\hat{v}_0\in\ell^1(\mathrm{Z}^d;\mathrm{R}_0^-)$ функция учун $\left\|\hat{\mathrm{B}}_{\hat{V}_0}(\varepsilon_{\min})\right\|=1$ тенглик ўринли бўлсин. У ҳолда шундай $\gamma>0$ сон мавжудки, қуйидагилар ўринли бўлади:

(i) Барча $\hat{v}\in U_\gamma^{>}(\hat{v}_0)$учун $\hat{H}_{\hat{V}}$оператор $\varepsilon_{\min}$бўсағадан қуйида $z_{\hat{v}}$ хос қийматга эга бўлади;

(ii) $d=3{,}4$ бўлсин. Барча $\hat{v}\in U_\gamma^{=}(\hat{v}_0)$учун $\varepsilon_{\min}$бўсаға $\hat{H}_{\hat{V}}$оператор учун виртуал сатҳ бўлади;

(iii) $d\geq 5$ бўлсин. Барча $\hat{v}\in U_\gamma^{=}(\hat{v}_0)$учун $\varepsilon_{\min}$бўсаға $\hat{H}_{\hat{V}}$операторнинг хос қиймати бўлади;

(iv) Барча $\hat{v} \in U_{\gamma}^{<}(\hat{v}_0)$ учун $\varepsilon_{\min}$ бўсаға $\hat{H}_{\hat{V}}$ операторнинг муҳим спектрининг регуляр нуқтаси бўлади ва шунинг учун $\hat{H}_{\hat{V}}$ оператор $\varepsilon_{\min}$ бўсағадан қуйида хос қийматга ҳам эга бўлмайди ҳамда $\varepsilon_{\min}$ бўсаға $\hat{H}_{\hat{V}}$ оператор учун виртуал сатҳ ҳам бўлмайди.

Фараз қилайлик, $L^{2,e}(\mathrm{T}^2) - \mathrm{T}^2$ да аниқланган квадрати билан интегралланувчи жуфт функцияларнинг гилберт фазоси бўлсин. Бир заррачали дискрет Шредингер оператори $H_{\mu\lambda}$ нинг импулс тасвири $L^{2,e}(\mathrm{T}^2)$ гильберт фазосида қуйидаги формула билан аниқланган:

$$H_{\mu\lambda} = H_0 + V_{\mu\lambda}.$$

Бу ерда H_0 оператор $L^{2,e}(\mathrm{T}^2)$ фазода $\varepsilon(\cdot)$ функцияга кўпайтириш оператори бўлиб,

$$(H_0 f)(p) = \varepsilon(p) f(p),$$

формула билан аниқланган. Бунда,

$$\varepsilon(p) = \sum_{i=1}^{2} (1 - \cos p_i).$$

ҳақиқий қийматли узлуксиз жуфт функция.
$V_{\mu\lambda}$ интеграл оператори қуйидаги формула билан аниқланган:

$$(V_{\mu\lambda} f)(p) = \int_{\mathrm{T}^2} v_{\mu\lambda}(p-q) f(q) dq = \int_{\mathrm{T}^2} (\mu + \lambda \sum_{i=1}^{2} \cos p_i \cos q_i) f(q) dq, \qquad f \in L^{2,e}(\mathrm{T}^2).$$

Бунда,

$$v(p) = \sum_{x \in \mathrm{Z}^d} e^{i(p,x)} \hat{v}(x), \qquad p \in \mathrm{T}^3,$$

бу ерда,

$$\hat{v}(x) = \begin{cases} \mu, & |s| = 0, \\ \dfrac{\lambda}{2}, & |s| = 1, \\ 0, & |s| > 1. \end{cases}$$

$V_{\mu\lambda}$ операторнинг ранги учга тенг, шунинг учун Г.Вейл теоремасига асосан $H_{\mu\lambda}$ операторнинг муҳим спектри H_0 операторнинг спектри билан устма-уст тушади, яъни

$$\sigma_{ess}(H_{\mu\lambda}) = \sigma(H_0) = [\varepsilon_{\min}, \varepsilon_{max}] = [0,4].$$

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$a(z) = \int_{\mathrm{T}^2} \frac{dq}{z - \varepsilon(q)}, \qquad b(z) = \int_{\mathrm{T}^2} \frac{\cos q_i dq}{z - \varepsilon(q)}, \qquad c(z) = \int_{\mathrm{T}^2} \frac{\cos^2 q_i dq}{z - \varepsilon(q)},$$

$$d(z) = \int_{\mathrm{T}^2} \frac{\cos q_i \cos q_j dq}{z - \varepsilon(q)}, \qquad i, j = 1,2, \qquad i \neq j.$$

3-теорема. *(i)* Агар $\mu > 0$ бўлса, у ҳолда $H_{\mu 0}$ оператор $(4,+\infty)$ интервалда ягона $\zeta^{+}(\mu)$ хос қийматга эга бўлади;

(ii) Агар $\mu < 0$ бўлса, у ҳолда $H_{\mu 0}$ оператор $(-\infty,0)$ интервалда ягона $\zeta^{-}(\mu)$ хос қийматга эга бўлади.

4-теорема. *(i)* Агар $\lambda > 0$ бўлса, у ҳолда $H_{0\lambda}$ оператор $(4,+\infty)$ интервалда ягона $\zeta^{+}(\lambda)$ хос қийматга эга бўлади;

(ii) Агар $\lambda < 0$ бўлса, у ҳолда $H_{0\lambda}$ оператор $(-\infty,0)$ интервалда ягона $\zeta^{-}(\lambda)$ хос қийматга эга бўлади.

1-натижа. $\Delta(\mu,\lambda,z)$ детерминант учун қуйидаги асимптотикалар ўринли:

(i) $z \in (4,+\infty)$ бўлсин. У ҳолда $z \to 4+$ учун қуйидагига эга бўламиз:

$$\Delta(\mu,\lambda,z) = [C_{-1}^{+}(\mu,\lambda)\ln(z-4) + C_{0}^{+}(\mu,\lambda)][\lambda(c(4)-d(4))-1] + o(z-4),$$

бу ерда

$$C_{-1}^{+}(\mu,\lambda) = \frac{1}{2\pi}(2\lambda + \mu - \lambda\mu), \qquad C_{0}^{+}(\mu,\lambda) = \frac{1}{2}(2 + 2\lambda - \lambda\mu).$$

(ii) $z \in (-\infty,0)$ бўлсин. У холда $z \to 0-$ учун қуйидагига эга бўламиз:

$$\Delta(\mu,\lambda,z) = [C_{-1}^{-}(\mu,\lambda)\ln(-z) + C_{0}^{-}(\mu,\lambda)][\lambda(c(0)-d(0))-1] + o(-z),$$

бу ерда

$$C_{-1}^{-}(\mu,\lambda) = -\frac{1}{2\pi}(2\lambda + \mu + \lambda\mu), \qquad C_{0}^{-}(\mu,\lambda) = \frac{1}{2}(2 - 2\lambda - \lambda\mu).$$

Асосий теоремани баён қилиш учун қуйидаги соҳаларни киритамиз:

$G_{3,+} = \{(\mu,\lambda) \in \mathrm{R}^2 : C_{-1}^{+}(\mu,\lambda) < 0, \quad \lambda_0^{+} < \lambda\},$

$G_{2,+} = \{(\mu,\lambda) \in \mathbb{R}^2 : C_{-1}^{+}(\mu,\lambda) < 0, \quad 0 < \lambda < \lambda_0^{+}, \quad 2 < \mu \quad or \quad C_{-1}^{+}(\mu,\lambda) > 0, \quad \lambda > \lambda_0^{+}\},$

$G_{1,+} = \{(\mu,\lambda) \in \mathrm{R}^2 : C_{-1}^{+}(\mu,\lambda) > 0, \quad \lambda < \lambda_0^{+}\},$

$G_{0,+} = \{(\mu,\lambda) \in \mathrm{R}^2 : C_{-1}^{+}(\mu,\lambda) < 0, \quad \lambda < \lambda_0^{+}, \quad \mu < 2\}$

ва

$G_{3,-} = \{(\mu,\lambda) \in \mathrm{R}^2 : C_{-1}^{-}(\mu,\lambda) < 0, \quad \lambda_0^{-} > \lambda\},$

$G_{2,-} = \{(\mu,\lambda) \in \mathbb{R}^2 : C_{-1}^{-}(\mu,\lambda) < 0, \quad \lambda_0^{-} < \lambda < 0, \quad \mu < -2 \quad or \quad C_{-1}^{-}(\mu,\lambda) > 0, \quad \lambda < \lambda_0^{-}\},$

$G_{1,-} = \{(\mu,\lambda) \in \mathrm{R}^2 : C_{-1}^{-}(\mu,\lambda) > 0, \quad \lambda > \lambda_0^{-}\},$

$G_{0,-} = \{(\mu,\lambda) \in \mathrm{R}^2 : C_{-1}^{-}(\mu,\lambda) < 0, \quad \lambda > \lambda_0^{-}, \quad -2 < \mu\}.$

5-теорема. *(i)* Фараз қилайлик, $(\mu,\lambda) \in G_{03} = G_{3,+}$. У ҳолда $H_{\mu\lambda}$ оператор муҳим спектрдан қуйида хос қийматга эга эмас, аммо муҳим спектрдан юқорида қуйидаги муносабатларни қаноатлантирувчи учта $z_1^{+}(\mu,\lambda), \quad z_2^{+}(\mu,\lambda) \quad ва \quad z_3^{+}(\lambda)$ хос қийматларга эга:

$$4 < z_2^{+}(\mu,\lambda) < \zeta_{\min}^{+}(\mu,\lambda) \le \zeta_{\max}^{+}(\mu,\lambda) < z_1^{+}(\mu,\lambda) \quad ва \quad 4 < z_3^{+}(\lambda).$$

(ii) Фараз қилайлик, $(\mu,\lambda)\in G_{02}=G_{0,-}\bigcap G_{2,+}$. У ҳолда $H_{\mu\lambda}$ оператор муҳим спектрдан қуйида хос қийматга эга эмас, аммо муҳим спектрдан юқорида қуйидаги муносабатларни қаноатлантирувчи иккита $z_1^+(\mu,\lambda)$ *ва* $z_2^+(\mu,\lambda)$ хос қийматларга эга:

$$4<z_2^+(\mu,\lambda)<\zeta_{\min}^+(\mu,\lambda)\le\zeta_{\max}^+(\mu,\lambda)<z_1^+(\mu,\lambda).$$

(iii) Фараз қилайлик, $(\mu,\lambda)\in G_{01}=G_{0,-}\bigcap G_{1,+}$. У ҳолда $H_{\mu\lambda}$ оператор муҳим спектрдан қуйида хос қийматга эга эмас, аммо муҳим спектрдан юқорида ягона $z_1^+(\mu,\lambda)$ хос қийматга эга.

(iv) Фараз қилайлик, $(\mu,\lambda)\in G_{11}=G_{1,-}\bigcap G_{1,+}$. У ҳолда $H_{\mu\lambda}$ оператор қуйидаги муносабатларни қаноатлантирувчи иккита $z_1^-(\mu,\lambda)$ *ва* $z_1^+(\mu,\lambda)$ хос қийматларга эга:

$$z_1^-(\mu,\lambda)<0 \quad \text{ва} \quad 4<z_1^+(\mu,\lambda).$$

(v) Фараз қилайлик, $(\mu,\lambda)\in G_{12}=G_{1,-}\bigcap G_{2,+}$. У ҳолда $H_{\mu\lambda}$ оператор қуйидаги муносабатларни қаноатлантирувчи учта $z_1^-(\mu,\lambda)$, $z_1^+(\mu,\lambda)$ *ва* $z_2^+(\mu,\lambda)$ хос қийматларга эга:

$$z_1^-(\mu,\lambda)<0 \quad \text{ва} \quad 4<z_2^+(\mu,\lambda)<\zeta_{\min}^+(\mu,\lambda)\le\zeta_{\max}^+(\mu,\lambda)<z_1^+(\mu,\lambda).$$

(vi) Фараз қилайлик, $(\mu,\lambda)\in G_{21}=G_{2,-}\bigcap G_{1,+}$. У ҳолда $H_{\mu\lambda}$ оператор қуйидаги муносабатларни қаноатлантирувчи учта $z_1^-(\mu,\lambda)$, $z_2^-(\mu,\lambda)$ *ва* $z_1^+(\mu,\lambda)$ хос қийматларга эга:

$$z_1^-(\mu,\lambda)<\zeta_{\min}^-(\mu,\lambda)\le\zeta_{\max}^-(\mu,\lambda)<z_2^-(\mu,\lambda)<0 \quad \text{ва} \quad 4<z_1^+(\mu,\lambda).$$

(vii) Фараз қилайлик, $(\mu,\lambda)\in G_{10}=G_{1,-}\bigcap G_{0,+}$. У ҳолда $H_{\mu\lambda}$ оператор муҳим спектрдан қуйида ягона $z_1^-(\mu,\lambda)$ хос қийматга эга, аммо муҳим спектрдан юқорида хос қийматга эга эмас.

(viii) Фараз қилайлик, $(\mu,\lambda)\in G_{20}=G_{2,-}\bigcap G_{0,+}$. У ҳолда $H_{\mu\lambda}$ оператор муҳим спектрдан қуйида қуйидаги муносабатларни қаноатлантирувчи иккита $z_1^-(\mu,\lambda)$ *ва* $z_2^-(\mu,\lambda)$ хос қийматларга эга:

$$z_1^-(\mu,\lambda)<\zeta_{\min}^-(\mu,\lambda)\le\zeta_{\max}^-(\mu,\lambda)<z_2^-(\mu,\lambda)<0,$$

аммо муҳим спектрдан юқорида хос қийматга эга эмас.

(ix) Фараз қилайлик, $(\mu,\lambda)\in G_{30}=G_{3,-}$. У ҳолда $H_{\mu\lambda}$ оператор муҳим спектрдан қуйида қуйидаги муносабатларни қаноатлантирувчи учта $z_1^-(\mu,\lambda)$, $z_2^-(\mu,\lambda)$ *ва* $z_3^-(\lambda)$ хос қийматларга эга:

$$z_1^-(\mu,\lambda)<\zeta_{\min}^-(\mu,\lambda)\le\zeta_{\max}^-(\mu,\lambda)<z_2^-(\mu,\lambda)<0 \quad \text{ва} \quad z_3^-(\lambda)<0,$$

аммо муҳим спектрдан юқорида хос қийматга эга эмас.

Диссертациянинг учинчи боби **«Бир тугунда ва энг яқин қўшни тугунлар билан таъсирга эга Бозе-Хаббард моделлари: Айнан ечилиши мумкин бўлган ҳол»** деб номланган бўлиб, бу бобда икки ўлчамли панжарадаги икки заррачали Шредингер оператори таъсир энергияси $\mu, \lambda \in R$ параметрлар орқали берилганда, квазиимпульсининг ноль қийматида, унинг муҳим спектридан ташқаридаги хос қийматлари сонининг ўзгариши $\mu, \lambda \in R$ параметрларга боғлиқ кўрсатилган. Бундан ташқари икки ўлчамли панжарадаги икки заррачали Шредингер оператори таъсир энергияси $\mu, \lambda \in R$ параметрлар орқали берилганда унинг муҳим спектридан ташқаридаги хос қийматларининг сонига оператор квазиимпульсининг барча нолмас қийматларида аниқ баҳо олинган.

Икки бозонли системага мос дискрет Шредингер оператори $L^{2,e}(\mathrm{T}^2)$ гильберт фазосида қуйидаги формула билан аниқланган:

$$H_{\mu\lambda}(K) = H_0(K) + V_{\mu\lambda},\, K \in \mathrm{T}^2,$$

бу ерда $H_0(K)$ қўзғалмас оператор $\varepsilon_K(p) = 2\sum_{i=1}^{2}(1 - \cos\frac{K_i}{2}\cos p_i)$ функцияга кўпайтириш оператори сифатида аниқланган.

Қўзғалиш оператори $V_{\mu\lambda}$ қуйидагича аниқланган:

$$(V_{\mu\lambda} f)(p) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathrm{T}^2}(\mu + \lambda\sum_{i=1}^{2}\cos p_i \cos q_i) f(q)dq, \qquad f \in L^{2,e}(\mathrm{T}^2).$$

$V_{\mu\lambda}$ операторнинг ранги учга тенг бўлгани учун Г.Вейл теоремасига асосан $H_{\mu\lambda}(K)$ операторнинг муҳим спектри $H_0(K)$ операторнинг спектри билан устма-уст тушади, яъни

$$\sigma_{ess}(H_{\mu\lambda}(K)) = \sigma(H_0(K)) = [\varepsilon_{\min}(K), \varepsilon_{max}(K)],$$

бу ерда

$$\varepsilon_{\min}(K) := \min_{p \in \mathrm{T}^2} \varepsilon_K(p) = 2\sum_{i=1}^{2}(1 - \cos\frac{K_i}{2}) \geq 0 = \varepsilon_{\min}(0),$$

$$\varepsilon_{\max}(K) := \max_{p \in \mathrm{T}^2} \varepsilon_K(p) = 2\sum_{i=1}^{2}(1 + \cos\frac{K_i}{2}) \leq 8 = \varepsilon_{\max}(0).$$

6-теорема. Фараз қилайлик, бирор $\mu, \lambda \in \mathrm{R}$ учун $H_{\mu\lambda}(0)$ оператор муҳим спектрдан қуйида (юқорида) n та хос қийматга эга бўлсин. У ҳолда ҳар бир $K \in \mathrm{T}^2$ учун $H_{\mu\lambda}(K)$ оператор муҳим спектрдан қуйида (юқорида) камида n та хос қийматга эга бўлади.

$(\mu, \lambda) -$ текисликда қуйидаги тўққизта тўпламларни аниқлаймиз:

$$S_{01} := \{(\mu, \lambda) \in \mathrm{R}^2 : \lambda > \frac{\pi}{4 - \pi}\},$$

$$S_{00} := \{(\mu, \lambda) \in \mathrm{R}^2 :| \lambda |< \frac{\pi}{4 - \pi}\},$$

$$S_{10} := \{(\mu, \lambda) \in \mathrm{R}^2 : \lambda < \frac{\pi}{4 - \pi}\},$$

$$C_0^+ := \{(\mu,\lambda) \in \mathrm{R}^2 : \lambda\mu - 4\lambda - 2\mu > 0, \lambda < 2\},$$
$$C_1^+ := \{(\mu,\lambda) \in \mathrm{R}^2 : \lambda\mu - 4\lambda - 2\mu < 0\},$$
$$C_2^+ := \{(\mu,\lambda) \in \mathrm{R}^2 : \lambda\mu - 4\lambda - 2\mu > 0, \lambda > 2\},$$
$$C_0^- := \{(\mu,\lambda) \in \mathrm{R}^2 : \lambda\mu + 4\lambda + 2\mu > 0, \lambda > -2\},$$
$$C_1^- := \{(\mu,\lambda) \in \mathrm{R}^2 : \lambda\mu + 4\lambda + 2\mu < 0\},$$
$$C_2^- := \{(\mu,\lambda) \in \mathrm{R}^2 : \lambda\mu + 4\lambda + 2\mu > 0, \lambda < -2\}.$$

Фараз қилайлик, $n_+(H_{\mu\lambda}(K))$ $(n_-(H_{\mu\lambda}(K)),$ $H_{\mu\lambda}(K)$ операторнинг муҳим спектридан юқоридаги (қуйидаги) хос қийматлари сони бўлсин.

7-теорема. Фараз қилайлик, $K \in \mathrm{T}^2$ ва $(\mu,\lambda) \in \mathrm{R}^2$ бўлсин. У ҳолда

$$(\mu,\lambda) \in C_2^+ \cap S_{01} \quad \Rightarrow \quad n_+(H_{\mu\lambda}(K)) = 3,$$
$$(\mu,\lambda) \in C_2^+ \Delta S_{01} \quad \Rightarrow \quad n_+(H_{\mu\lambda}(K)) \geq 2,$$
$$(\mu,\lambda) \in C_1^+ \setminus S_{01} \quad \Rightarrow \quad n_+(H_{\mu\lambda}(K)) \geq 1,$$
$$(\mu,\lambda) \in \overline{C_0^+} \quad \Rightarrow \quad n_+(H_{\mu\lambda}(K)) = 0,$$

ва

$$(\mu,\lambda) \in C_2^- \cap S_{10} \quad \Rightarrow \quad n_-(H_{\mu\lambda}(K)) = 3,$$
$$(\mu,\lambda) \in C_2^- \Delta S_{10} \quad \Rightarrow \quad n_-(H_{\mu\lambda}(K)) \geq 2,$$
$$(\mu,\lambda) \in C_1^- \setminus S_{10} \quad \Rightarrow \quad n_-(H_{\mu\lambda}(K)) \geq 1,$$
$$(\mu,\lambda) \in \overline{C_0^-} \quad \Rightarrow \quad n_-(H_{\mu\lambda}(K)) = 0$$

муносабатлар ўринли бўлади.

8-теорема. Фараз қилайлик, $K = 0$ бўлсин. У ҳолда 7-теоремадаги барча тенгсизликлар учун тенглик ўринли бўлади.

Бундан ташқари

$$L^{2,e,s}(\mathrm{T}^2) := \{f \in L^{2,e}(\mathrm{T}^2) : f(p_1, p_2) = f(p_2, p_1), p_1, p_2 \in \mathrm{T}\}$$

ва

$$L^{2,e,a}(\mathrm{T}^2) := \{f \in L^{2,e}(\mathrm{T}^2) : f(p_1, p_2) = -f(p_2, p_1), p_1, p_2 \in \mathrm{T}\}$$

симметрик ва антисимметрик жуфт функциялар фазоси бўлиб, улар $H_{\mu\lambda}(0)$ операторга нисбатан инвариант ҳамда қуйидаги тасдиқлар ўринли:

(i) Агар $(\mu,\lambda) \in \overline{S_{00}}$ бўлса, у ҳолда $H_{\mu\lambda}(0)$ оператор муҳим спектрдан ташқарида антисимметрик боғланган ҳолатга эга эмас.

(ii) Агар $(\mu,\lambda) \in S_{01}$ $((\mu,\lambda) \in S_{10})$ бўлса, у ҳолда $H_{\mu\lambda}(0)$ оператор муҳим спектрдан юқорида (қуйида) ягона антисимметрик боғланган ҳолатга эга.

(iii) Агар $(\mu,\lambda) \in C_2^+$ $((\mu,\lambda) \in C_2^-)$ бўлса, у ҳолда $H_{\mu\lambda}(0)$ оператор муҳим спектрдан юқорида (қуйида) айнан иккита симметрик боғланган ҳолатга эга.

(iv) Агар $(\mu,\lambda)\in C_1^+\bigcup\partial C_2^+$ $((\mu,\lambda)\in C_1^-\bigcup\partial C_2^-)$ бўлса, у ҳолда $H_{\mu\lambda}(0)$ оператор муҳим спектрдан юқорида (қуйида) ягона симметрик боғланган ҳолатга эга.

(v) Агар $(\mu,\lambda)\in\overline{C_0^+}$ $((\mu,\lambda)\in\overline{C_0^-})$ бўлса, у ҳолда $H_{\mu\lambda}(0)$ оператор муҳим спектрдан юқорида (қуйида) симметрик боғланган ҳолатга эга эмас.

1-лемма. Қуйидаги тенглик ўринли:

$$\sigma(H_{\mu\lambda}(0))=\sigma(H_{\mu\lambda}^s)\bigcup\sigma(H_\lambda^a),$$

бу ерда

$$H_{\mu\lambda}^s:=H_0(0)+V_{\mu\lambda}^s \quad ва \quad H_\lambda^a:=H_0(0)+V_\lambda^a,$$

ҳамда

$$(V_{\mu\lambda}^s f)(p)=\frac{\mu}{4\pi^2}\int\limits_{T^2}f(q)dq+\frac{\lambda}{8\pi^2}(\cos p_1+\cos p_2)\int\limits_{T^2}(\cos q_1+\cos q_2)f(q)dq$$

ва

$$(V_\lambda^a f)(p)=\frac{\lambda}{8\pi^2}(\cos p_1-\cos p_2)\int\limits_{T^2}(\cos q_1-\cos q_2)f(q)dq$$

операторлар $H_{\mu\lambda}(0)$нинг $L^{2,e,s}(T^2)$ ва $L^{2,e,a}(T^2)$ фазолардаги қисми.

9-теорема. Фиксирланган $(\mu,\lambda)\in R^2$ учун қуйидагилар ўринли:

(i) Агар $2\lambda+\mu\geq 0$ бўлса, у ҳолда $H_{\mu\lambda}^s$ оператор 8 дан катта камида битта хос қийматга эга.

(ii) Агар $2\lambda+\mu\leq 0$ бўлса, у ҳолда $H_{\mu\lambda}^s$ оператор камида битта манфий хос қийматга эга.

ХУЛОСА

Диссертация иши панжарадаги бир ва икки заррачали Шредингер операторларининг муҳим ва дискрет спектрларини тадқиқ килишга бағишланган.

Асосий тадқиқот натижалари қуйидагилардан иборат:

бир заррачали Шредингер операторининг муҳим спектридан қуйида боғланган ҳолатларнинг мавжуд ёки мавжуд эмаслиги потенциалга ва панжара ўлчамига боғлиқ ҳолда исботланган;

бир заррачали Шредингер оператори муҳим спектрининг қуйи бўсағаси регуляр ёки сингуляр нуқта бўлганда ва кичик қўзғалишларда муҳим спектрдан қуйида Шредингер операторининг хос қиймати мос равишда пайдо бўлмаслиги ёки пайдо бўлиши исботланган;

икки ўлчамли панжарадаги бир заррачали Шредингер оператори ташқи таъсир энергияси $\mu, \lambda \in R$ параметрлар орқали берилганда унинг муҳим спектридан ташқаридаги хос қийматларнинг аниқ сони ва жойлашган ўрни аниқланган;

икки ўлчамли панжарадаги икки заррачали Шредингер оператори таъсир энергияси $\mu, \lambda \in R$ параметрлар орқали берилганда квазиимпульснинг ноль қийматида унинг муҳим спектридан ташқаридаги хос қийматлари сонининг ўзгариши $\mu, \lambda \in R$ параметрларга боғлиқ кўрсатилган;

икки ўлчамли панжарадаги икки заррачали Шредингер оператори таъсир энергияси $\mu, \lambda \in R$ параметрлар орқали берилганда унинг муҳим спектридан ташқаридаги хос қийматларининг сонига оператор квазиимпульсининг барча нолмас қийматларида аниқ баҳо олинган.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 AT SAMARKAND STATE UNIVERSITY

SAMARKAND STATE UNIVERSITY

KHAMIDOV SHAKHOBIDDIN ILKHOM UGLI

THE THRESHOLD EFFECTS FOR ONE- AND TWO- PARTICLE OF THE SCHRÖDINGER OPERATORS ON A LATTICE

01.01.01-Mathematical analysis

ABSTRACT OF DISSERTATION
for the doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences

Samarkand – 2021

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2021.2.PhD/FM562.

The dissertation was performed at the Samarkand State University.

The abstract of dissertation is posted in three languages (Uzbek, English and Russian (resume)) on the website (www.samdu.uz) and in the website «Ziyonet» Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific superviser:	**Lakaev Saidakhmat Norjigitovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Academician
Official opponents:	**Abdullayev Janikul Ibragimovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Muminov Zahriddin Eshkobilovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences
Leading organization:	**Bukhara State University**

Defense will take place «29» 12 2021 at 10^{00} at the meeting of Scientific Council number DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 at Samarkand State University. (Address: University Boulevard 15, Samarkand city, 140104, Uzbekistan, Ph.: (+99866)231-06-32, fax: (+99866)235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource center at Samarkand State University (is registered №89) (Address: University Boulevard 15, Samarkand city, 140104, Uzbekistan, Ph.: (+99866)231-06-32).

Abstract of dissertation sent out on «17» 12 2021 year
(Mailing report № 1 on «17» 12 2021 year)

A.S.Soleev
Chairman of scientific council on award of scientific degree, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor

A.M.Khalkhuzhaev
Scientific secretary of scientific council on award of scientific degree, Doctor of Physical and Mathematical Sciences

I.A. Ikromov
Vice-chairman of scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

INTRODUCTION (Annotation of Doctor of Philosophy (PhD) dissertation)

Actuality and demand of the theme of dissertation. Many scientific and practical studies conducted around the world are devoted to scientific models of the processes occurring in the microworld. The development of the theory of quantum fields describing the phenomena of the microworld was the basis for the emergence of quantum mechanics. One of the most important physical quantities in any system of quantum mechanics is its energy. The analysis of the spectral properties of the energy operator i.e., Schrödinger operator is one of the main problems of quantum mechanics. In this regard, the particles systems of the energy operator on the lattice serve as the theoretical basis for experimental observations. Therefore, the development of research on discrete and essential spectrum of the energy operators corresponding to particles systems on the lattice remains to be important in solid state physics, quantum mechanics, and statistical physics.

The solution of problems related to the spectrum of families of energy operators corresponding to the gamiltonians of one- and two-quantum particle systems on a cubic lattice are important in mathematical physics. In particular, the development of the research to prove the existence of bound states of one- and two-particle discrete Schrödinger operators, to find the location of the essential spectrum and to determine sufficient conditions for the existence of eigenvalues outside the essential spectrum are very demanding.

In our country, a lot of attention is being paid to fundamental sciences which have scientific and practical applications. The spectral theory of the energy operators associated with systems of one and two particles moving on lattices have quite wide range of applications in various fields, therefore its development is of special importance. For the energy operators associated with systems of two particles moving on lattices, number of interesting results were obtained on the existence of bound states which is located outside of the essential spectrum and for their number under various conditions. Conducting research at the level of international standards in the priority areas of “Algebra and its applications, differential equations and their applications, linear systems, dynamic systems and mathematical modeling of their applications, stochastic analysis, medical-biological informatics, computational mathematics”[1] is identified as one of the main tasks of the scientific researches. To ensure the implementation of the decision, it is important to develop theory of quantum field and spectral theory of linear operators.

The subject and object of our dissertation are in line with tasks identified in the Decrees and Resolutions of the President of the Republic of Uzbekistan of February 7, 2017, PF-4947, “On the strategy of action for the further development of the Republic of Uzbekistan”, PQ-4387 dated July 9, 2019 “On state support for

[1] Decree of President of the Republic of Uzbekistan at the “On state support for the further development of mathematics education and science, as well as measures to radically improve the activities of the Institute of Mathematics named after V.I.Romanovsky of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan” PQ-4387 dated July 9, 2019.

the further development of mathematics education and science, as well as measures to radically improve the activities of the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan" and PQ-4708 of May 7, 2020 "On measures to improve the quality of education and research in the field of mathematics" as well as in other regulations related to this activity.

Connection of research to priority directions of development of science and technologies of the Republic. This work was performed in accordance with the priority areas of science and technology development in the Republic of Uzbekistan IV, "Mathematics, Mechanics and Computer Science".

The degree of scrutiny of the problem. The one-particle discrete Schrödinger operators have attracted considerable attention due to the practical applications and their impotance in other fundamental sciences; for some recent summaries refer to the works of scientists such as E.Korotyaev, A.Grigor'yan, O.Post, N.Saburova, G.Berkolaiko, F.Chung and others. Particularly, eigenvalue behavior of discrete Schrödinger operators were discussed by H.Hayashi, S.Albeverio, H.Schulz-Baldes, J.Bellissard and are discussed in the works of P.Faria da Veiga, F.Hiroshima, S.N.Lakaev, I.N.Bozorov, Z.E.Muminov and U.Kuljonov when potentials are delta functions with a single point mass. A continuous version of the two-particle Schrödinger operator were mentioned by R.Newton and proved by H.Tamura using a result of B.Simon.

The energy operators corresponding to systems of particles on a lattice were studied within the theoretical physics by scientists A.I.Mogilner and D.S.Mattis. In studying the Schrödinger operators on lattices in the mathematical sense the same problems arise as in the case of continuous Schrödinger operator. Namely, it is necessary to study the one and many-particle operators. It is known that with the decrease of the coupling constant, the energy of the bound state of the two-particle system energy operator approaches to the edge of the continuous spectrum, and in finite value of the coupling constant reaches to the edge. The problem of whether the threshold is a bound state or a virtual level was studied in the works of B.Simon, J.Rauch, D.R.Yafaev, M.Klaus and S. N.Lakaev. For continuous and discrete Schrödinger operators, the existence of an eigenvalue and expansion for the eigenvalues on the threshold value of the coupling constant were studied by scientists D.R.Yafaev, M.Klaus, H.Tamura, S.Fassari, B.Simon, A.Sobolev, S.N.Lakaev, Sh.Yu.Kholmatov, A.M.Khalkhuzhayev and Sh.S.Lakaev. In the works of S.N.Lakaev for two-particle discrete Schrödinger operators on a three-dimensional lattice associated to a system of two bosons, the threshold effects of the quasi-momentum was studied, it was shown that if the nonnegative Schrödinger operator has a virtual level on the left threshold of the essential spectrum, then for all nonzero values of the quasi-momentum the operator has an eigenvalue lying below the bottom of essential spectrum.

In the works of S.Albeverio, K.Makarov, S.N.Lakaev and Z.E.Muminov, the two-particle Schrödinger operators, associated to a system of two arbitrary particles were studied on a lattice for lattice dimensions greater than two. Certain conditions for the existence of eigenvalues, depending on the dispersion functions were found. The discrete Schrödinger operators, corresponding to a system of two quantum particles moving on a one, two and three dimensional lattices interacting with the pair attractive contact potentials are considered in the works of S.N.Lakaev, Sh.Yu.Kholmatov, A.M.Khalkhuzhayev and Sh.S.Lakaev. The existence of a unique eigenvalue lying to the left of essential spectrum was proved and asymptotics were found for the eigenvalue depending on the dimension of the lattice, the coupling constant and the quasi-momentum.

Connection of the theme of the dissertation with the research works of higher education, where the dissertation is carried out. The dissertation researcg is done in accordance with the planned theme of scientific research Samarkand State University of the fundamentional project OT-F4-66-number "Models of systems with a limited number of particles on a lattice. Essential and discrete spectra of energy operators"(2017-2020).

The aim of research work is to investigate essential and discrete spectra of one and two particle Schrödinger operator on a lattice.

Tasks of the research:

to prove the existance or absence of bound states below the bottom of the essential spectrum of the one-particle Schrödinger operator depending on the potential and the dimension of the lattice;

to prove that if the lower threshold of the essential spectrum of the one-particle Schrödinger operator is a regular point or a singular point, then respectively it does not create or creates eigenvalue below the essential spectrum under small perturbations;

to find the exact number and location of eigenvalues outside the essential spectrum of the one-particle discrete Schrödinger operator on the two-dimensional lattice with the external interaction energy $\mu, \lambda \in R$;

to show depending on the parameters $\mu, \lambda \in R$, the change in the number of eigenvalues outside the essential spectrum of the two-particle Schrödinger operator on the two-dimensional lattice with interaction energy $\mu, \lambda \in R$, for zero value of the quasi-momentum;

to obtain the exact estimate of the number of eigenvalues outside the essential spectrum of the two-particle Schrödinger operator on the two-dimensional lattice with interaction energy $\mu, \lambda \in R$, for all non-zero values of the quasi-momentum of the operator.

The research object is one and two-particle Schrödinger operators in the cubic lattice.

The research subject is spectral study of one and two-particle Schrödinger operators on a lattice.

Research methods: The research uses the methods of mathematical analysis, complex analysis, functional analysis, mathematical physics, theory of the self-adjoint operators, Birman-Schwinger principle, analytical continuity of the Fredholm determinant.

The scientific novelty of the research is as follows:

the conditions for the existance or absence of bound states below the bottom of the essential spectrum of the one-particle Schrödinger operator depending on the potential and the dimension of the lattice were proven;

if the lower threshold of the essential spectrum of the one-particle Schrödinger operator is a regular point or a singular point, then respectively it does not create or creates eigenvalue below the essential spectrum under small perturbations were proven;

the exact number and location of eigenvalues outside the essential spectrum of the one-particle discrete Schrödinger operator on the two dimensional lattice with the external interaction energy $\mu, \lambda \in R$ were found;

the change in the number of eigenvalues outside the essential spectrum of the two-particle Schrödinger operator on the two-dimensional lattice with interaction energy $\mu, \lambda \in R$, for zero value of the quasi-momentum depending on the parameters $\mu, \lambda \in R$ was shown;

the exact estimate of the number of eigenvalues outside the essential spectrum of the two-particle Schrödinger operator on the two-dimensional lattice with interaction energy $\mu, \lambda \in R$, for all non-zero values of the quasi-momentum of the operator was obtained.

Practical results of the research:

the conditions for the existence or absence of bound states below the bottom of the essential spectrum of the one-particle Schrödinger operator depending on the potential and the dimension of the lattice were used to find the first pole of the meromorphic parameter-dependent generalized functions;

spectral properties related to the number of eigenvalues, which are located above the essential spectrum of the discrete Schrödinger operator were used to prove the existence of a unique eigenvalue of the generalized Friedrichs model with perturbation of rank one and to obtain its Puiseux series expansion.

The reliability of the results of the study. The results were obtained by using the methods of mathematical analysis, complex analysis, functional analysis, mathematical physics, theory of the self-adjoint operators, Birman-Schwinger principle, analytical continuity of the Fredholm determinant, strict mathematical proofs and the application of rigorous mathematical considerations. Our results are published in several peer-reviewed papers where the proofs are carefully checked by editors and the referees.

Scientific and practical significance of research results. The scientific significance of the research results of the study lies in the fact that obtained results can be used in the spectral theory of self-adjoint operators, quantum mechanics, solid state physics, quantum field theory, in particular, solutions of problems related to the spectrum of Hamiltonians of systems of two and three particles on a lattice. Our work is fully fundamental and the obtained results are applicable in different fields of science such as soled state physics and quantum mechanics.

Implementation of the research results. The results obtained in the thesis for the essential and discrete spectra of the one- and two-particle Schrödinger operator on a lattice were used in the following research projects:

the conditions for the existence or absence of bound states below the bottom of the essential spectrum of the one-particle Schrödinger operator depending on the potential and the dimension of the lattice was used in the fundamental project OT-F4-69 “Harmonic analysis, degree geometry and their applications to the problems of mathematical physics” (November 23, 2021 reference from the Samarkand State University, No. 10-4721). Our results were used to find the first pole of the meromorphic parameter-dependent generalized functions;

spectral properties related to the number of eigenvalues, which are located above the essential spectrum of the discrete Schrödinger operator was used in the foreign project ERGS/1/2/2013/STG06/UKM/01/2 to prove the existence of eigenvalues of the generalized Friedrichs model, which is located above the essential spectrum (November 24, 2021 reference from the National University of Malaysia) approved by Ministry of High Education of Malaysia (Malaysia). The methods used to establish the number of eigenvalues for the discrete Schrödinger operator on lattice enabled us to prove the existence of eigenvalues of the generalized Friedrichs model, which is located above the essential spectrum. These results have played an important role to prove the existence of a unique eigenvalue of the generalized Friedrichs model with perturbation of rank one and to obtain its Puiseux series expansion.

Approbation of the research results. The main results of the research have been discussed in 2 international and 5 republican scientific conferences.

Publications of the research results. On the topic of the dissertation, 12 research papers have been published in the scientific journals, 5 of them are included in the list of journals proposed by the Higher Attestation Commission of the Republic of Uzbekistan for defending the Doctor of Philosophy thesis, in addition 1 of them was published in international journal of mathematics and physics indexed in Scopus, and 4 papers published in national mathematical journals.

The structure and volume of the dissertation. The dissertation consists of introduction, three chapters, conclusion and references. The volume of the dissertation is 98 pages.

THE MAIN CONTENT OF THE DISSERTATION

In the introduction is given the actuality and relevance of the thesis topics are described, the appropriate research priority areas of science and technology of the Republic are determined. Moreover, we give a review of international research on the theme of the dissertation and the degree of scrutiny of the problem, formulate goals and objectives, identify the object and subject of study. The scientific novelty and practical results of the research, the theoretical and practical importance of the obtained results, information on the implementation of the research results about the published works and the structure of dissertation are also presented in this chapter.

In the first chapter of the thesis, titled **"Preliminary notations and one and two particle Hamiltonians on lattices"**, the Hamiltonian of the system of two identical bosons in coordinate and momentum representation are described as bounded self-adjoint operator in a corresponding Hilbert space. We also introduce basic notions and provide several necessary theorems of spectral theory of bounded self-adjoint operators in order to describe main results. Two-particle quasi-momentum, decomposition of the Hamiltonian of system of the two identical bosons into a direct Von Neumann integral are also presented in this chapter.

In the second chapter, titled **"On the spectrum of the one particle Schrödinger operator on a lattice**", it is shown that the existance or absence of bound states below the bottom of the essential spectrum of the one-particle Schrödinger operator depending on the potential and the dimension of the lattice. Moreover, the exact number and location of eigenvalues outside the essential spectrum of the one-particle discrete Schrödinger operator on the two dimensional lattice with the external interaction energy by the parameters $\mu, \lambda \in R$ is found.

Let Z^d be the $d-$dimansional cubic lattice and $\ell^2(\mathrm{Z}^d)$ be the Hilbert space of square-summable functions on Z^d. Let $\ell^1(\mathrm{Z}^d)$ be the Banach space of summable functions on Z^d. In addition, let $\ell^1(\mathrm{Z}^d;\mathrm{R}_0^-)\subset\ell^1(\mathrm{Z}^d)$ be the set of summable non-positive functions. In the position space representation, the one-particle Schrödinger operator $\hat{H}_{\hat{V}}$ acts in $\ell^2(\mathrm{Z}^d)$ as

$$\hat{H}_{\hat{V}} = \hat{H}_0 + \hat{V}.$$

Here the operator $\hat{H}_0$ is the convolution type operator given

$$(\hat{H}_0\hat{f})(x) = \sum_{s\in\mathrm{Z}^d}\hat{\varepsilon}(x-s)\hat{f}(s), \qquad \hat{f}\in\ell^2(\mathrm{Z}^d),$$

where $\hat{\varepsilon}(\cdot)\in\ell^1(\mathrm{Z}^d)$. We also assume that $\hat{\varepsilon}(s)=\overline{\hat{\varepsilon}(-s)}, \quad s\in\mathrm{Z}^d$.

The operator $\hat{V}$ is the multiplication operator by the function $\hat{v}\in\ell^1(\mathrm{Z}^d;\mathrm{R}_0^-)$:

$$(\hat{V}\hat{f})(x) = \hat{v}(x)\hat{f}(x), \qquad \hat{f}\in\ell^2(\mathrm{Z}^d).$$

Let $T^d = (-\pi, \pi]^d$ be the $d-$dimansional torus, equipped with the Haar measure dp i.e., $\int_{T^d} dp = 1$ and $L^2(T^d)$be the Hilbert space of square-integrable functions on T^d. In the momentum space representation, the one-particle Schrödinger operator H_V acts in $L^2(T^d)$ as

$$H_V = H_0 + V.$$

The unperturbed operator H_0 is the multiplication operator by the function $\varepsilon(\cdot)$:

$$(H_0 f)(p) = \varepsilon(p) f(p), \quad f \in L^2(T^d),$$

where

$$\varepsilon(p) = \sum_{x \in Z^d} e^{i(p,x)} \hat{\varepsilon}(x), \qquad p \in T^d,$$

is a real-valued even function.

The perturbation operator V is defined in $L^2(T^d)$ as

$$(Vf)(p) = \int_{T^d} v(p-q) f(q) dq, \quad f \in L^2(T^d),$$

where

$$v(p) = \sum_{x \in Z^d} e^{i(p,x)} \hat{v}(x), \qquad p \in T^d.$$

Since the operator $\hat{V}$ is compact, by the Weyl's theorem, the essential spectrum $\sigma_{ess}(\hat{H}_{\hat{V}})$ of the operator $\hat{H}_{\hat{V}}$ coincides with the essential spectrum $\sigma_{ess}(\hat{H}_0)$ of the operator $\hat{H}_0$, i.e.,

$$\sigma_{ess}(\hat{H}_{\hat{V}}) = \sigma_{ess}(\hat{H}_0) = \sigma(H_0) = [\varepsilon_{\min}, \varepsilon_{max}],$$

where

$$\varepsilon_{\min} = \min_{p \in T^d} \varepsilon(p), \qquad \varepsilon_{\max} = \max_{p \in T^d} \varepsilon(p).$$

Let $C^n(T^d)$, $\quad n = 0,1,2,...$ be the Banach space of n times continuously differentiable functions on T^d.

Hypothesis 1. *(i)* Assume that the dispersion relation $\varepsilon(\cdot) \in C^3(T^d)$is a real-valued even function having a nondegenerate minimum at $p_1,...p_l \in T^d$, with $p_1 = 0 \in T^d$.

(ii) Assume, in addition, that the nonzero (not identically zero) non-positive function $\hat{v}$ is absolutely summable, i.e., $\hat{v} \in \ell^1(Z^d; R_0^-)$, $\quad d \geq 3$.

Definition 1. Let $d \geq 3$. Assume Hypothesis 1. We define the generalized Birman-Schwinger operator $\hat{B}_{\hat{V}}(\varepsilon_{\min})$ as an integral operator acting in $\ell^2(Z^d)$ as

$$[\hat{B}_{\hat{V}}(\varepsilon_{\min})\hat{\psi}](x) := [|\hat{V}|^{\frac{1}{2}} \hat{R}_0(\varepsilon_{\min}) |\hat{V}|^{\frac{1}{2}} \hat{\psi}](x)$$

Definition 2. Let $d \geq 3$. If the number 1 is not an eigenvalue (resp. is an eigenvalue) of the operator $\hat{\mathrm{B}}_{\hat{V}}(\varepsilon_{\min})$, then the threshold $z = \varepsilon_{\min}$ of the essential spectrum $\sigma_{ess}(\hat{H}_{\hat{V}})$ is called a regular (resp. singular) point of the essential spectrum of the operator $\hat{H}_{\hat{V}}$.

Theorem 1. Let $d \geq 3$. Assume Hypothesis 1. Assume, in addition, that the threshold $\varepsilon_{\min}$ is a regular point of the essential spectrum of the operator $\hat{H}_{\hat{V}_0}$ for some $\hat{v}_0 \in \ell^1(\mathrm{Z}^d;\mathrm{R}_0^-)$. Then there exists a neighborhood $U(\hat{v}_0) \subset \ell^1(\mathrm{Z}^d;\mathrm{R}_0^-)$ of $\hat{v}_0$ such that for all $\hat{v} \in U(\hat{v}_0)$, the number of eigenvalues of the operator $\hat{H}_{\hat{V}}$ below the threshold $\varepsilon_{\min}$ remains unchanged.

We introduce the following subsets of interactions $\hat{v} \in \ell^1(\mathrm{Z}^d;\mathrm{R}_0^-)$.

$$U_\gamma^{>}(\hat{v}_0) := \{\hat{v} \in \ell^1(\mathrm{Z}^d;\mathrm{R}_0^-) : \|\hat{v} - \hat{v}_0\|_{\ell^1(\mathrm{Z}^d;\mathrm{R}_0^-)} < \gamma, \|\hat{\mathrm{B}}_{\hat{V}}(\varepsilon_{\min})\| > 1\},$$
$$U_\gamma^{=}(\hat{v}_0) := \{\hat{v} \in \ell^1(\mathrm{Z}^d;\mathrm{R}_0^-) : \|\hat{v} - \hat{v}_0\|_{\ell^1(\mathrm{Z}^d;\mathrm{R}_0^-)} < \gamma, \|\hat{\mathrm{B}}_{\hat{V}}(\varepsilon_{\min})\| = 1\},$$
$$U_\gamma^{<}(\hat{v}_0) := \{\hat{v} \in \ell^1(\mathrm{Z}^d;\mathrm{R}_0^-) : \|\hat{v} - \hat{v}_0\|_{\ell^1(\mathrm{Z}^d;\mathrm{R}_0^-)} < \gamma, \|\hat{\mathrm{B}}_{\hat{V}}(\varepsilon_{\min})\| < 1\}.$$

Theorem 2. Let $d \geq 3$. Assume Hypothesis 1. Assume, in addition, that for some nonzero function $\hat{v}_0 \in \ell^1(\mathrm{Z}^d;\mathrm{R}_0^-)$ the equality $\|\hat{\mathrm{B}}_{\hat{V}_0}(\varepsilon_{\min})\| = 1$ holds. Then there exists $\gamma > 0$ such that:

(i) For all $\hat{v} \in U_\gamma^{>}(\hat{v}_0)$, the operator $\hat{H}_{\hat{V}}$ has an eigenvalue $z_{\hat{v}}$ below the threshold $\varepsilon_{\min}$;

(ii) Let $d = 3,4$. Then for all $\hat{v} \in U_\gamma^{=}(\hat{v}_0)$, the threshold $\varepsilon_{\min}$ is a virtual level of the operator $\hat{H}_{\hat{V}}$;

(iii) Let $d \geq 5$. Then for all $\hat{v} \in U_\gamma^{=}(\hat{v}_0)$, the threshold $\varepsilon_{\min}$ is an eigenvalue of the operator $\hat{H}_{\hat{V}}$;

(iv) For all $\hat{v} \in U_\gamma^{<}(\hat{v}_0)$, the threshold $\varepsilon_{\min}$ is a regular point of the operator $\hat{H}_{\hat{V}}$ and therefore, the $\hat{H}_{\hat{V}}$ has neither eigenvalues below the threshold $\varepsilon_{\min}$, nor a virtual level equal to $\varepsilon_{\min}$.

Let $L^{2,e}(\mathrm{T}^2)$ be the Hilbert space of square-integrable even functions on T^2. In the momentum space representation, the one-particle discrete Schrödinger operator $H_{\mu\lambda}$ acts in $L^{2,e}(\mathrm{T}^2)$ as

$$H_{\mu\lambda} = H_0 + V_{\mu\lambda},$$

where the operator H_0 is the multiplication operator by the function

$$\varepsilon(p)=\sum_{i=1}^{2}(1-\cos p_i).$$

The operator $V_{\mu\lambda}$ is the integral operator:

$$(V_{\mu\lambda}f)(p)=\int_{T^2}v_{\mu\lambda}(p-q)f(q)dq=\int_{T^2}(\mu+\lambda\sum_{i=1}^{2}\cos p_i\cos q_i)f(q)dq,\qquad f\in L^{2,e}(T^2).$$

Here

$$v(p)=\sum_{x\in Z^d}e^{i(p,x)}\hat{v}(x),\qquad p\in T^2,$$

where

$$\hat{v}(x)=\begin{cases}\mu, & |s|=0,\\ \dfrac{\lambda}{2}, & |s|=1,\\ 0, & |s|>1.\end{cases}$$

Since the operator $V_{\mu\lambda}$ has rank at most three, by Weyl's theorem the essential spectrum $\sigma_{ess}(H_{\mu\lambda})$ of the operator $H_{\mu\lambda}$ coincides with the spectrum $\sigma(H_0)$ of the operator H_0, i.e.,

$$\sigma_{ess}(H_{\mu\lambda})=\sigma(H_0)=[\varepsilon_{\min},\varepsilon_{max}]=[0,4].$$

Let

$$a(z)=\int_{T^2}\frac{dq}{z-\varepsilon(q)},\qquad b(z)=\int_{T^2}\frac{\cos q_i dq}{z-\varepsilon(q)},\qquad c(z)=\int_{T^2}\frac{\cos^2 q_i dq}{z-\varepsilon(q)},$$

$$d(z)=\int_{T^2}\frac{\cos q_i\cos q_j dq}{z-\varepsilon(q)},\qquad i,j=1,2,\qquad i\neq j.$$

Theorem 3. *(i)* If $\mu>0,$ then the operator $H_{\mu0}$ has a unique eigenvalue $\zeta^+(\mu)$ in $(4,+\infty)$;

(ii) If $\mu<0,$ then the operator $H_{\mu0}$ has a unique eigenvalue $\zeta^-(\mu)$ in $(-\infty,0)$.

Theorem 4. *(i)* If $\lambda>0,$ then the operator $H_{0\lambda}$ has a unique eigenvalue $\zeta^+(\lambda)$ in $(4,+\infty)$;

(ii) If $\lambda<0,$ then the operator $H_{0\lambda}$ has a unique eigenvalue $\zeta^-(\lambda)$ in $(-\infty,0)$.

Corollary 1. The following asymptotics are true for the determinant $\Delta(\mu,\lambda,z)$:

(i) Let $z\in(4,+\infty)$. Then as $z\to 4+$ we have

$$\Delta(\mu,\lambda,z)=[C_{-1}^{+}(\mu,\lambda)\ln(z-4)+C_0^{+}(\mu,\lambda)][\lambda(c(4)-d(4))-1]+o(z-4),$$

where

$$C_{-1}^{+}(\mu,\lambda)=\frac{1}{2\pi}(2\lambda+\mu-\lambda\mu),\qquad C_0^{+}(\mu,\lambda)=\frac{1}{2}(2+2\lambda-\lambda\mu).$$

(ii) Let $z \in (-\infty, 0)$. Then as $z \to 0-$ we have

$$\Delta(\mu,\lambda,z) = [C_{-1}^{-}(\mu,\lambda)\ln(-z) + C_0^{-}(\mu,\lambda)][\lambda(c(0)-d(0))-1] + o(-z),$$

where

$$C_{-1}^{-}(\mu,\lambda) = -\frac{1}{2\pi}(2\lambda+\mu+\lambda\mu), \qquad C_0^{-}(\mu,\lambda) = \frac{1}{2}(2-2\lambda-\lambda\mu).$$

To formulate the main theorem we introduce following regions:

$G_{3,+} = \{(\mu,\lambda) \in \mathrm{R}^2 : C_{-1}^{+}(\mu,\lambda) < 0, \quad \lambda_0^{+} < \lambda\},$

$G_{2,+} = \{(\mu,\lambda) \in \mathbb{R}^2 : C_{-1}^{+}(\mu,\lambda) < 0, \quad 0 < \lambda < \lambda_0^{+}, \quad 2 < \mu \quad or \quad C_{-1}^{+}(\mu,\lambda) > 0, \quad \lambda > \lambda_0^{+}\},$

$G_{1,+} = \{(\mu,\lambda) \in \mathrm{R}^2 : C_{-1}^{+}(\mu,\lambda) > 0, \quad \lambda < \lambda_0^{+}\},$

$G_{0,+} = \{(\mu,\lambda) \in \mathrm{R}^2 : C_{-1}^{+}(\mu,\lambda) < 0, \quad \lambda < \lambda_0^{+}, \quad \mu < 2\}$

and

$G_{3,-} = \{(\mu,\lambda) \in \mathrm{R}^2 : C_{-1}^{-}(\mu,\lambda) < 0, \quad \lambda_0^{-} > \lambda\},$

$G_{2,-} = \{(\mu,\lambda) \in \mathbb{R}^2 : C_{-1}^{-}(\mu,\lambda) < 0, \quad \lambda_0^{-} < \lambda < 0, \quad \mu < -2 \quad or \quad C_{-1}^{-}(\mu,\lambda) > 0, \quad \lambda < \lambda_0^{-}\},$

$G_{1,-} = \{(\mu,\lambda) \in \mathrm{R}^2 : C_{-1}^{-}(\mu,\lambda) > 0, \quad \lambda > \lambda_0^{-}\},$

$G_{0,-} = \{(\mu,\lambda) \in \mathrm{R}^2 : C_{-1}^{-}(\mu,\lambda) < 0, \quad \lambda > \lambda_0^{-}, \quad -2 < \mu\}.$

Theorem 5. *(i)* Assume $(\mu,\lambda) \in G_{03} = G_{3,+}$. Then the operator $H_{\mu\lambda}$ has no eigenvalues below the essential spectrum, but it has three eigenvalues $z_1^{+}(\mu,\lambda)$, $z_2^{+}(\mu,\lambda)$ *and* $z_3^{+}(\lambda)$ satisfying the relations

$$4 < z_2^{+}(\mu,\lambda) < \zeta_{\min}^{+}(\mu,\lambda) \le \zeta_{\max}^{+}(\mu,\lambda) < z_1^{+}(\mu,\lambda) \quad and \quad 4 < z_3^{+}(\lambda).$$

(ii) Assume $(\mu,\lambda) \in G_{02} = G_{0,-} \cap G_{2,+}$. Then the operator $H_{\mu\lambda}$ has no eigenvalues below the essential spectrum, but it has two eigenvalues $z_1^{+}(\mu,\lambda)$ *and* $z_2^{+}(\mu,\lambda)$ satisfying the relations

$$4 < z_2^{+}(\mu,\lambda) < \zeta_{\min}^{+}(\mu,\lambda) \le \zeta_{\max}^{+}(\mu,\lambda) < z_1^{+}(\mu,\lambda).$$

(iii) Assume $(\mu,\lambda) \in G_{01} = G_{0,-} \cap G_{1,+}$. Then the operator $H_{\mu\lambda}$ has no eigenvalues below the essential spectrum, but it has unique eigenvalue $z_1^{+}(\mu,\lambda)$ above the essential spectrum.

(iv) Assume $(\mu,\lambda) \in G_{11} = G_{1,-} \cap G_{1,+}$. Then the operator $H_{\mu\lambda}$ has two eigenvalues $z_1^{-}(\mu,\lambda)$ *and* $z_1^{+}(\mu,\lambda)$ satisfying the following relations

$$z_1^{-}(\mu,\lambda) < 0 \quad and \quad 4 < z_1^{+}(\mu,\lambda).$$

(v) Assume $(\mu,\lambda) \in G_{12} = G_{1,-} \cap G_{2,+}$. Then the operator $H_{\mu\lambda}$ has three eigenvalues $z_1^{-}(\mu,\lambda)$, $z_1^{+}(\mu,\lambda)$ *and* $z_2^{+}(\mu,\lambda)$ satisfying the following relations

$$z_1^{-}(\mu,\lambda) < 0 \quad and \quad 4 < z_2^{+}(\mu,\lambda) < \zeta_{\min}^{+}(\mu,\lambda) \le \zeta_{\max}^{+}(\mu,\lambda) < z_1^{+}(\mu,\lambda).$$

(vi) Assume $(\mu,\lambda) \in G_{21} = G_{2,-} \cap G_{1,+}$. Then the operator $H_{\mu\lambda}$ has three eigenvalues $z_1^{-}(\mu,\lambda)$, $z_2^{-}(\mu,\lambda)$ *and* $z_1^{+}(\mu,\lambda)$ satisfying the following relations

$$z_1^-(\mu,\lambda) < \zeta_{\min}^-(\mu,\lambda) \le \zeta_{\max}^-(\mu,\lambda) < z_2^-(\mu,\lambda) < 0 \quad and \quad 4 < z_1^+(\mu,\lambda).$$

(vii) Assume $(\mu,\lambda) \in G_{10} = G_{1,-} \bigcap G_{0,+}$. Then the operator $H_{\mu\lambda}$ has unique eigenvalue $z_1^-(\mu,\lambda)$ below the essential spectrum, but it has no eigenvalues above the essential spectrum.

(viii) Assume $(\mu,\lambda) \in G_{20} = G_{2,-} \bigcap G_{0,+}$. Then the operator $H_{\mu\lambda}$ has two eigenvalues $z_1^-(\mu,\lambda)$ *and* $z_2^-(\mu,\lambda)$ satisfying the following relations

$$z_1^-(\mu,\lambda) < \zeta_{\min}^-(\mu,\lambda) \le \zeta_{\max}^-(\mu,\lambda) < z_2^-(\mu,\lambda) < 0,$$

but it has no eigenvalues above the essential spectrum.

(ix) Assume $(\mu,\lambda) \in G_{30} = G_{3,-}$. Then the operator $H_{\mu\lambda}$ has three eigenvalues $z_1^-(\mu,\lambda)$, $z_2^-(\mu,\lambda)$ *and* $z_3^-(\lambda)$ satisfying the following relations

$$z_1^-(\mu,\lambda) < \zeta_{\min}^-(\mu,\lambda) \le \zeta_{\max}^-(\mu,\lambda) < z_2^-(\mu,\lambda) < 0 \quad and \quad z_3^-(\lambda) < 0,$$

but it has no eigenvalues above the essential spectrum.

In the third chapter, titled **"Bose-Hubbard models with on-site and nearest-neighbor interactions: Exactly solvable case**", it is shown that the change in the number of eigenvalues outside the essential spectrum of the two-particle Schrödinger operator on the two dimensional lattice with interaction energy dependent on the parameters $\mu, \lambda \in R$, at zero value of the quasi-momentum depending on the parameters $\mu, \lambda \in R$. In addition, the exact estimate of the number of eigenvalues outside the essential spectrum of the two-particle Schrödinger operator on the two dimensional lattice with interaction energy dependent on the parameters $\mu, \lambda \in R$, at all non-zero values of the quasi-momentum of the operator is obtained.

The discrete operator $H_{\mu\lambda}(K), K \in \mathrm{T}^2$, associated to a system of two identical bosons is defined in $L^{2,e}(\mathrm{T}^2)$ as

$$H_{\mu\lambda}(K) = H_0(K) + V_{\mu\lambda}, K \in \mathrm{T}^2,$$

where the unperturbed operator $H_0(K)$ is the multiplication operator by the function

$$\varepsilon_K(p) = 2\sum_{i=1}^{2}(1 - \cos\frac{K_i}{2}\cos p_i).$$

The perturbation operator $V_{\mu\lambda}$ is defined as

$$(V_{\mu\lambda} f)(p) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathrm{T}^2}(\mu + \lambda\sum_{i=1}^{2}\cos p_i \cos q_i) f(q)dq, \qquad f \in L^{2,e}(\mathrm{T}^2).$$

Since the operator $V_{\mu\lambda}$ has rank at most three, by Weyl's theorem the essential spectrum $\sigma_{ess}(H_{\mu\lambda}(K))$ of the operator $H_{\mu\lambda}(K)$ coincides with the spectrum $\sigma(H_0(K))$ of the operator $H_0(K)$, i.e.,

$$\sigma_{ess}(H_{\mu\lambda}(K)) = \sigma(H_0(K)) = [\varepsilon_{\min}(K), \varepsilon_{max}(K)],$$

where

$$\varepsilon_{\min}(K) := \min_{p\in \mathrm{T}^2} \varepsilon_K(p) = 2\sum_{i=1}^{2}(1-\cos\frac{K_i}{2}) \geq 0 = \varepsilon_{\min}(0),$$

$$\varepsilon_{\max}(K) := \max_{p\in \mathrm{T}^2} \varepsilon_K(p) = 2\sum_{i=1}^{2}(1+\cos\frac{K_i}{2}) \leq 8 = \varepsilon_{\max}(0).$$

Theorem 6. Suppose that $H_{\mu\lambda}(0)$ has n eigenvalues below resp. above the essential spectrum for some $\mu,\lambda \in \mathrm{R}$. Then for every $K \in \mathrm{T}^2$ the operator $H_{\mu\lambda}(K)$ has at least n eigenvalues below resp. above its essential spectrum.

In the $(\mu,\lambda)-$ plane let us define the following nine sets:

$$S_{01} := \{(\mu,\lambda) \in \mathrm{R}^2 : \lambda > \frac{\pi}{4-\pi}\},$$

$$S_{00} := \{(\mu,\lambda) \in \mathrm{R}^2 :| \lambda |< \frac{\pi}{4-\pi}\},$$

$$S_{10} := \{(\mu,\lambda) \in \mathrm{R}^2 : \lambda < \frac{\pi}{4-\pi}\},$$

$$C_0^+ := \{(\mu,\lambda) \in \mathrm{R}^2 : \lambda\mu - 4\lambda - 2\mu > 0, \lambda < 2\},$$

$$C_1^+ := \{(\mu,\lambda) \in \mathrm{R}^2 : \lambda\mu - 4\lambda - 2\mu < 0\},$$

$$C_2^+ := \{(\mu,\lambda) \in \mathrm{R}^2 : \lambda\mu - 4\lambda - 2\mu > 0, \lambda > 2\},$$

$$C_0^- := \{(\mu,\lambda) \in \mathrm{R}^2 : \lambda\mu + 4\lambda + 2\mu > 0, \lambda > -2\},$$

$$C_1^- := \{(\mu,\lambda) \in \mathrm{R}^2 : \lambda\mu + 4\lambda + 2\mu < 0\},$$

$$C_2^- := \{(\mu,\lambda) \in \mathrm{R}^2 : \lambda\mu + 4\lambda + 2\mu > 0, \lambda < -2\}.$$

Let $n_+(H_{\mu\lambda}(K))$ *resp*. $n_-(H_{\mu\lambda}(K))$ be the number of eigenvalues of the operator $H_{\mu\lambda}(K)$ above resp. below its essential spectrum.

Theorem 7. Let $K \in \mathrm{T}^2$ and $(\mu,\lambda) \in \mathrm{R}^2$. Then

$$(\mu,\lambda) \in C_2^+ \cap S_{01} \quad \Rightarrow \quad n_+(H_{\mu\lambda}(K)) = 3,$$

$$(\mu,\lambda) \in C_2^+ \Delta S_{01} \quad \Rightarrow \quad n_+(H_{\mu\lambda}(K)) \geq 2,$$

$$(\mu,\lambda) \in C_1^+ \setminus S_{01} \quad \Rightarrow \quad n_+(H_{\mu\lambda}(K)) \geq 1,$$

$$(\mu,\lambda) \in \overline{C_0^+} \quad \Rightarrow \quad n_+(H_{\mu\lambda}(K)) = 0,$$

and

$$(\mu,\lambda) \in C_2^- \cap S_{10} \quad \Rightarrow \quad n_-(H_{\mu\lambda}(K)) = 3,$$

$$(\mu,\lambda) \in C_2^- \Delta S_{10} \quad \Rightarrow \quad n_-(H_{\mu\lambda}(K)) \geq 2,$$

$$(\mu,\lambda) \in C_1^- \setminus S_{10} \quad \Rightarrow \quad n_-(H_{\mu\lambda}(K)) \geq 1,$$

$$(\mu,\lambda) \in \overline{C_0^-} \quad \Rightarrow \quad n_-(H_{\mu\lambda}(K)) = 0.$$

Theorem 8. Let $K=0$. Then all inequalities in theorem 7 are in fact equalities. Moreover, the spaces

$$L^{2,e,s}(\mathrm{T}^2):=\{f\in L^{2,e}(\mathrm{T}^2):\ f(p_1,p_2)=f(p_2,p_1),p_1,p_2\in\mathrm{T}\}$$

and

$$L^{2,e,a}(\mathrm{T}^2):=\{f\in L^{2,e}(\mathrm{T}^2):\ f(p_1,p_2)=-f(p_2,p_1),p_1,p_2\in\mathrm{T}\}$$

of symmetric and antisymmetric even functions are invariant with respect to $H_{\mu\lambda}(0)$ and:

(i) If $(\mu,\lambda)\in\overline{S_{00}}$, then $H_{\mu\lambda}(0)$ has no antisymmetric bound states outside the essential spectrum.

(ii) If $(\mu,\lambda)\in S_{01}$ *resp.* $(\mu,\lambda)\in S_{10}$, then $H_{\mu\lambda}(0)$ has a unique antisymmetric bound state above resp. below the essential spectrum.

(iii) If $(\mu,\lambda)\in C_2^+$ *resp.* $(\mu,\lambda)\in C_2^-$, then $H_{\mu\lambda}(0)$ has a exactly two symmetric bound states above resp. below the essential spectrum.

(iv) If $(\mu,\lambda)\in C_1^+\bigcup\partial C_2^+$ *resp.* $(\mu,\lambda)\in C_1^-\bigcup\partial C_2^-$, then $H_{\mu\lambda}(0)$ has a unique symmetric bound state above resp. below the essential spectrum.

(v) If $(\mu,\lambda)\in\overline{C_0^+}$ *resp.* $(\mu,\lambda)\in\overline{C_0^-}$, then $H_{\mu\lambda}(0)$ has no symmetric bound states above resp. below the essential spectrum.

Lemma 1. $\sigma(H_{\mu\lambda}(0))=\sigma(H^s_{\mu\lambda})\bigcup\sigma(H^a_\lambda)$,

where $H^s_{\mu\lambda}:=H_0(0)+V^s_{\mu\lambda}$ *and* $H^a_\lambda:=H_0(0)+V^a_\lambda$,

with

$$(V^s_{\mu\lambda}f)(p)=\frac{\mu}{4\pi^2}\int\limits_{\mathrm{T}^2}f(q)dq+\frac{\lambda}{8\pi^2}(\cos p_1+\cos p_2)\int\limits_{\mathrm{T}^2}(\cos q_1+\cos q_2)f(q)dq$$

and

$$(V^a_\lambda f)(p)=\frac{\lambda}{8\pi^2}(\cos p_1-\cos p_2)\int\limits_{\mathrm{T}^2}(\cos q_1-\cos q_2)f(q)dq$$

are the restrictions of $H_{\mu\lambda}(0)$ onto $L^{2,e,s}(\mathrm{T}^2)$ and $L^{2,e,a}(\mathrm{T}^2)$.

Theorem 9. Fix $(\mu,\lambda)\in\mathrm{R}^2$.

(i) If $2\lambda+\mu\geq 0$, then $H^s_{\mu\lambda}$ has at least one eigenvalue greater than 8.

(ii) If $2\lambda+\mu\leq 0$, then $H^s_{\mu\lambda}$ has at least one negative eigenvalue.

CONCLUSION

The dissertation is devoted to study essential and discrete spectrum of the one and two particle Schrödinger operator on a lattice.

The main results of the research are as follows:

the conditions for the existance or absence of bound states below the bottom of the essential spectrum of the one-particle Schrödinger operator depending on the potential and the dimension of the lattice were proven;

if the lower threshold of the essential spectrum of the one-particle Schrödinger operator is a regular point or a singular point, then respectively it does not create or creates eigenvalue below the essential spectrum under small perturbations were proven;

the exact number and location of eigenvalues outside the essential spectrum of the one-particle discrete Schrödinger operator on the two dimensional lattice with the external interaction energy $\mu, \lambda \in R$ were found;

the change in the number of eigenvalues outside the essential spectrum of the two-particle Schrödinger operator on the two-dimensional lattice with interaction energy $\mu, \lambda \in R,$ for zero value of the quasi-momentum depending on the parameters $\mu, \lambda \in R$ was shown;

the exact estimate of the number of eigenvalues outside the essential spectrum of the two-particle Schrödinger operator on the two-dimensional lattice with interaction energy $\mu, \lambda \in R,$ for all non-zero values of the quasi-momentum of the operator was obtained.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.02.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
САМАРКАНДСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ХАМИДОВ ШАХОБИДДИН ИЛХОМ УГЛИ

ПОРОГОВЫЕ ЭФФЕКТЫ ДЛЯ ОДНО И ДВУХЧАСТИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ ШРЕДИНГЕРА НА РЕШЕТКЕ

01.01.01 – Математический анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Самарканд – 2021

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за B2021.2.PhD/FM562.

Диссертация выполнена в Самаркандском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.samdu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz)

Научный консультант:	**Лакаев Саидахмат Норжигитович** доктор физика-математических наук, профессор, академик
Официальные оппоненты:	**Абдуллаев Жаникул Ибрагимович** доктор физика-математических наук, профессор
	Муминов Захриддин Эшкобилович доктор физика-математических наук
Ведущая организация:	**Бухарский государственный университет**

Защита диссертации состоится «29» 12 2021 года в «10⁰⁰» часов на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 при Самаркандском государственном университете. (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (+99866)231-06-32, факс: (+99866) 235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Самаркандского государственного университета (зарегистрирована за №89). (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (+99866)231-06-32, факс: (+99866) 235-19-38).

Автореферат диссертации разослан «17» 12 2021 года.
(протокол рассылки № 1 от «17» 12 2021 года).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

А.С. Солеев
Председатель научного совета по присуждению научных степеней, доктор физико-математических наук, профессор

А.М. Халхужаев
Ученый секретарь научного совета по присуждению научных степеней, доктор физико-математических наук

И.А.Икромов
Замиститель председателя научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, доктор физико-математических наук, профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Целью исследования - является изучение существенных и дискретных спектров одно- и двухчастичного операторов Шрёдингера на решетке.

Объектом исследования одно- и двухчастичные операторы Шредингера на кубической решетке.

Научная новизна исследования определяется следующими пунктами:

доказано, что существование или отсутствие связанных состояний ниже дна существенного спектра одночастичного оператора Шредингера зависит от потенциала и размерности решетки;

доказано, что если нижний порог существенного спектра одночастичного оператора Шредингера является сингулярной или регулярной точкой, и возмущение малое, тогда, соответственно, существует или отсутствует собственное значение ниже существенного спектра;

найдено точное количество и расположение собственных значений вне существенного спектра одночастичного дискретного оператора Шредингера на двумерной решетке, если энергией внешнего взаимодействия задана с параметрами $\mu, \lambda \in R$;

показано изменение числа собственных значений вне существенного спектра двухчастичного оператора Шредингера на двумерной решетке, при нулевом значении квазиимпульса и с энергией взаимодействия, заданной с параметрами $\mu, \lambda \in R$ в зависимости от параметров $\mu, \lambda \in R$ и получена точная оценка для числа собственных значений при всех ненулевых значениях квазиимпульса оператора.

Внедрение результатов исследования. Полученные в диссертации результаты для существенных и дискретных спектров одно- и двухчастичного оператора Шрёдингера на решетке были использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

существование или отсутствие связанных состояний ниже дна существенного спектра одночастичного оператора Шредингера в зависимости от потенциала и размерности решетки использовалось в фундаментальном проекте OT-F4-69 «Гармонический анализ, степенная геометрия и их приложения к задачам математической физики» для нахождения индекса колебания в гармоническом анализе колеблющегося интеграла (Справка Самаркандского Государственного университета от 23 ноября 2021 года № 10-4721). В результате это позволило найти первый полюс в мероморфном продолжении обобщенной функции с параметром.

спектральные свойства, связанные с количеством собственных значений, которые расположены выше существенного спектра дискретного оператора Шредингера, были использованы в зарубежном научно-исследовательском проекте ERGS/1/2/2013/STG06/UKM/01/2 для доказательства существования единственного собственного значения обобщенной модели Фридрихса, расположенного выше существенного спектра (Справка Национального университета Малайзии от -24 ноября - 2021 года). В результате это позволило доказать существование собственных значений обобщенной модели Фридрихса, расположенных выше существенного спектра.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 98 страницы.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
LIST OF PUBLISHED WORKS
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

I бўлим (Part I; Часть I)

1. S.N.Lakaev, Sh.Yu.Kholmatov, Sh.I.Khamidov. Bose–Hubbard models with on-site and nearest-neighbor interactions: exactly solvable case // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. – United Kingdom, 2021. – Vol.54. – №24. – P. 1-22. (Scopus. IF=2.1).
2. Sh.I.Khamidov. The existence of eigenvalues of the one-particle Schrödinger operator on a lattice // Scientific journal of Samarkand University. – Samarkand, 2021. – №5. – P. 23-32. (01.00.00; №02).
3. S.N.Lakaev, Sh.I.Khamidov. Threshold effects in the spectrum of the one-particle Schrödinger operator on a lattice // Scientific journal of Samarkand University. – Samarkand, 2020. – №5. – P. 4-15. (01.00.00; №02).
4. S.N.Lakaev, Sh.I.Khamidov, S.N.Lakaev. The number and location of eigenvalues of the one particle discrete Schrödinger operators // Uzbek Mathematical Journal. – Tashkent, 2019. – №4. – P. 116-127. (01.00.00; №06).
5. А.М.Халхўжаев, Ш.И.Хамидов. О спектре трехчастичного оператора Шредингера на решетке с контактным потенциалом // Uzbek Mathematical Journal. – Tashkent, 2015. – №2. – P. 127-136. (01.00.00; №06).

II бўлим (Part II; Часть II)

6. С.Н.Лакаев, Ш.И.Хамидов, А.К.Амиров. О существовании собственных значений одночастичного оператора Шредингера на решетке // Академик Ш.Қ.Фармонов таваллудининг 80 йиллигига бағишланган «Стохастик таҳлилнинг долзарб муаммолари» Республика илмий конференцияси. – Tashkent, 2021. – P. 459-461.
7. Ш.И.Хамидов, А.К.Амиров. О существовании собственных значений одночастичного оператора Шредингера на решетке // “Илм-фан ва таълимда инновацион ёндашувлар, муаммолар, таклиф ва ечимлар” мавзусидаги 12-сонли Республика кўп тармоқли илмий-онлайн конференцияси. – Фарғона, 2021. – С. 27-30.
8. S.N.Lakaev, Sh.I.Khamidov. The number and location of eigenvalues of the two particle discrete Schrödinger operators // “Frontier in mathematics and computer science” International Online Conference. – Tashkent, 2020. – P. 91-92.
9. S.N.Lakaev, Sh.I.Khamidov. The existence of eigenvalues of the one-particle Schrödinger operator on lattices // “Modern methods of mathematical physics and their applications” Republican scientific conference. – Tashkent, 2020. – P. 147-149.
10. S.N.Lakaev, Sh.I.Khamidov. The existence of bound states of one-particle Schrödinger operators in optical lattice // “Fundamental matematika

muammolari va ularning tatbiqlari” Respublika ilmiy-amaliy konferensiyasi. – Navoiy, 2019. – P. 56-57.

11. S.N.Lakaev, Sh.I.Khamidov, L.S.Usmonov. Panjaradagi bir zarachali sistemaga mos diskret Schrödinger operatori xos qiymatlari haqida // “Aniq fanlarning kasbga yo’naltirib o’qitish muammolari va yechimlari” Respublika ilmiy-amaliy konferensiyasi. – Navoiy, 2018. – P. 10-11.
12. A.M.Khalkhuzhaev, Sh.I.Khamidov. Ikki zarrachali diskret Schrödinger operatori xos qiymatlarining mavjudligi haqida // Scientific program of the international conference “Mathematical analysis and its application to mathematical physics”. – Samarkand, 2018. – P. 83-84.