**САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ**

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

АБДУХАКИМОВ САИДАКБАР ХАЗРАТКУЛ ЎҒЛИ

ПАНЖАРАДА ЎЗАРО ТАЪСИРЛАШУВЧИ ИККИ ФЕРМИОНЛИ СИСТЕМА БОҒЛАНГАН ҲОЛАТЛАРИ МАВЖУДЛИГИ ВА СОНИ ҲАҚИДА

01.01.01 – Математик анализ

**Физика–математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси
А В Т О Р Е Ф Е Р А Т И**

Самарқанд - 2021

УДК: 517.984

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

АБДУХАКИМОВ САИДАКБАР ХАЗРАТКУЛ ЎҒЛИ

ПАНЖАРАДА ЎЗАРО ТАЪСИРЛАШУВЧИ ИККИ ФЕРМИОНЛИ СИСТЕМА БОҒЛАНГАН ҲОЛАТЛАРИ МАВЖУДЛИГИ ВА СОНИ ҲАҚИДА

01.01.01 – Математик анализ

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси
А В Т О Р Е Ф Е Р А Т И

Самарқанд - 2021

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2021.2.PhD/FM557 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Самарқанд давлат университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, инглиз, рус (резюме)) Илмий кенгаш веб–саҳифаси (www.samdu.uz) ва «Ziyonet» Ахборот-таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Лақаев Саидаҳмат Норжигитович** физика-математика фанлари доктори, профессор, академик
Расмий оппонентлар:	**Ботиров Ғолибжон Исроилович** физика–математика фанлари доктори (DSc)
	Расулов Тўлқин Ҳусенович физика-математика фанлари номзоди, доцент
Етакчи ташкилот:	**Урганч давлат университети**

Диссертация ҳимояси Самарқанд давлат университети ҳузуридаги DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2021 йил «29» 12 соат 10⁰⁰ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 140104, Самарқанд ш., Университет хиёбони, 15-уй. Тел.: (+99866) 231–06–32, факс: (+99866) 235–19–38, e–mail: patent@samdu.uz).

Диссертация билан Самарқанд давлат университетининг Ахборот–ресурс марказида танишиш мумкин (№90 рақам билан рўйхатга олинган). (Манзил: 140104, Самарқанд ш., Университет хиёбони, 15-уй. Тел.: (+99866) 231–06–32, факс: (+99866) 235–19–38.)

Диссертация автореферати 2021 йил «17» 12 куни тарқатилди.
(2021 йил «17» 12 даги 1 рақамли реестр баённомаси).

А.С. Солеев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш раиси, физика-математика фанлари доктори, профессор

А.М. Халхўжаев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш илмий котиби, физика-математика фанлари доктори

И.А.Икромов
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш қошидаги илмий семинар раиси ўринбосари, физика-математика фанлари доктори, профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган илмий-амалий тадқиқотларнинг кўплаб ҳолларида микрооламда кузатиладиган жараёнларнинг илмий моделлари қаралади. Микроолам ҳодисаларини тадқиқ қилишда моддада электромагнит нурланишлар назарияси, квант майдонлар назарияси, заррачалар ҳаракатининг тўлқин назарияси ва шу каби назариялар асосида квант механикасига асос солинган. Квант механикасида тадқиқ қилинадиган ҳар қандай системада асосий физик миқдорлардан бири бу энергия бўлиб, энергия оператори (панжарадаги заррачалар системасига мос гамильтониан), яъни Шрёдингер операторининг спектрал хоссаларини таҳлил қилиш, квант механикасининг асосий масалаларидан бири ҳисобланади. Панжарадаги Шрёдингер операторлари ҳам экспериментал кузатишларнинг назарий асоси сифатида хизмат қилади. Шу боис квант механикаси, статистик физика ва қаттиқ жисмлар физикасида учрайдиган панжарадаги Шрёдингер операторлари спектрлари (дискрет ва муҳим спектри)га оид тадқиқотларни ривожлантириш муҳим вазифалардан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда жаҳон миқёсида панжарадаги Шрёдингер операторлари муҳим спектрларининг ўрни ва хос қийматларининг сони икки заррачали система тўла квазиимпульси, панжара ўлчами ва ўзаро таъсир энергиясининг ўзгаришига нисбатан ўзгарувчан бўлганлиги учун ушбу операторлар спектрларига оид масалаларни ҳал этиш математик физикада муҳим аҳамият касб этмоқда. Жумладан, панжарадаги икки заррачали Шрёдингер операторлари яккаланган хос қиймати, қуйи бўсаға резонанси ёки бўсаға хос қийматининг мавжудлигини исботлаш, панжарадаги икки заррачали Шрёдингер операторининг муҳим спектрининг ўрнини аниқлаш ва муҳим спектридан ташқарида ётадиган хос қийматларининг мавжудлик шартларини топишга оид тадқиқотларни ривожлантириш амалий-назарий жиҳатдан муҳим илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий тадбиқларга эга бўлган долзарб йўналишларига эътибор янада кучайтирилди. Бу борада мамлакатимиз олимлари томонидан кубик панжарадаги Шрёдингер операторларининг спектрал назариясини ривожлантиришга алоҳида эътибор берилмоқда. Панжарадаги Шредингер операторлари учун муҳим спектрдан ташқарида боғланган ҳолатлар мавжудлиги ва уларнинг сонини аниқлашга оид сезиларли натижаларга эришилди. «Алгебра ва унинг татбиқлари, дифференциал тенгламалар ва унинг татбиқлари, чизиқсиз тизимлар, динамик тизимлар ва уларнинг татбиқларини математик моделлаштириш, стохастик таҳлил, тиббий-биологик информатика, ҳисоблаш математикаси»[1] фанларининг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика

[1] Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 9 июлдаги «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-4387-сон қарори.

фанининг устувор вазифалари ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди. Бу қарор ижросини таъминлашда квант майдонлар назарияси ва чизиқли операторларнинг спектрал назариясини ривожлантириш муҳим илмий аҳамиятга эга ҳисобланади.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида» Фармони, 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сон «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида» ва 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Бизга маълумки, атом ва молекуляр ҳамда қаттиқ жисимлар физикаси, квант майдонлар назариясининг муҳим масалалари Шредингер операторларини тадқиқ қилишга қаратилган. Бу соҳадаги баъзи натижалар панжарадаги заррачалар системасига мос Шредингер операторлари учун XX асрнинг 90-йилларида дастлаб А.И.Могильнер, Д.С.Маттислар томонидан қаралган ва унга оид тадқиқотлар изчил ривожланди. Хусусан, дискрет Шрёдингер операторлари учун хос қийматларнинг мавжудлиги ва муҳим спектр атрофидаги ёйилмалари, ўзаро таъсир дойимийсининг бўсағавий қийматидаги ҳодисаларни аниқлаш каби масалалар М.Клаус, С.Альбеверио, П.Фариа де Вега, Р.А.Минлос, Б.Саймон, С.Н.Лақаев ва К.Макаров ва бошқалар томонидан тадқиқ қилинган. Панжарадаги заррачалар системасига мос Шрёдингер операторларининг спектрал хоссалари М.О.Каррол, Фариа да Веига ва Л.Иориаттилар томонидан система тўла квазиимпульсига боғлиқ равишда тадқиқ қилинган. Панжарадаги Шредингер операторларини қатъий математик маънода тадқиқ қилишда узлуксиз Шредингер операторларидаги каби муаммолар учрайди, яъни, дастлаб бир, икки ва ҳоказо заррачали операторларни ўрганиш зарурати пайдо бўлади.

Панжарадаги икки заррачали Шредингер оператори боғланган ҳолатларига мос хос қийматлар ўзаро таъсир доимийси ўзгариши натижасида муҳим спектрнинг қуйи бўсағасига яқинлашади ва таъсир доимийсининг баъзи қийматларида муҳим спектр қуйи бўсағаси билан устма-уст тушади. Д.Яфаев, Б.Саймон, Дж.Раух, М.Клауз ҳамда С.Н.Лақаевларнинг ишларида ушбу бўсаға қийматга боғланган ҳолат ёки виртуал ҳолат мос келишини аниқлаш масаласи қаралган.Нуқтали потенциаллар учун панжара ўлчами бешга тенг ёки бешдан катта бўлганда муҳим спектрнинг қуйи чегарасида бўсаға хос қиймати мавжудлиги, лекин панжара ўлчами бешдан кичик бўлганда эса мавжуд эмаслиги П.Фариа да Вига, С.Н.Лақаев ҳамда Ф.Хирошималар томонидан кўрсатилган.

Кейинчалик С.Албеверио, К.Макаров, С.Н.Лақаев, З.Мўминов томонидан $d = 3$ ўлчамли панжарада жуфт-жуфти билан қисқа масофада таъсирлашувчи ихтиёрий икки заррачали системага мос икки заррачали Шредингер оператори учун хос қийматнинг мавжудлик шартлари дисперсион функцияларнинг кенг синфи учун кўрсатилган. С.Н.Лақаев, Ш.Ю.Холматов, А.М.Халхўжаев ҳамда Ш.С.Лақаев ишларида ўлчамлари учдан катта бўлган панжараларда тортишувчи контакт потенциал ёрдамида таъсирлашувчи иккита квант заррачали системага мос дискрет Шредингер операторларининг панжара ўлчамлари, ўзаро таъсир доимийси ва система тўла квазиимпульсига боғлик ҳолда муҳим спектрдан пастда ягона хос қиймати мавжудлиги исботланган ҳамда хос қийматлар сони учун асимптотикалар топилган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилаётган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Самарқанд давлат университетининг илмий-тадқиқот ишлари режасига мувофиқ ОТ-Ф4-66-рақамли «Панжарадаги чекли сондаги заррачалар системаси моделлари. Энергия операторларининг муҳим ва дискрет спектрлари» (2017-2020 йй.) мавзусидаги фундаментал тадқиқот лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади панжарадаги икки заррачали Шредингер операторининг муҳим ва дискрет спектрларини тадқиқ қилишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари қуйидагилардан иборат:

бир ўлчамли панжарада ўзаро яқин қўшни тугунлар билан таъсирлашувчи икки фермионли системага мос Шредингер оператори хос қийматларининг мавжудлиги ёки йўқлигини ҳамда хос қийматларининг сонини икки заррачали система квазиимпульси ва таъсир энергиясига боғлиқ ҳолда тадқиқ қилиш;

икки ўлчамли панжарада қисқа таъсирли потенциал орқали ўзаро таъсирлашувчи икки фермионли системага мос Шредингер типидаги операторни, унинг қўзғалмас қисми $0 \in \mathbb{T}^2$ да айниган минимумга эга бўлган дисперцион функция бўлганда қуриш ҳамда $k = 0$ ва барча $\mu > 0$ ларда операторнинг муҳим спектрдан қуйида хос қийматлари мавжудлигини исботлаш;

ихтиёрий ўлчамли панжарада икки фермионли системага мос Шредингер операторларининг кенг синфи учун квазиимпульснинг нолмас қийматларида Шредингер операторининг муҳим спектридан қуйида хос қийматларининг мавжудлигини кўрсатиш;

ихтиёрий ўлчамли панжарада икки фермионли системага мос Шредингер оператори муҳим спектрининг қуйи бўсағаси резонанс ёки хос қиймат бўлганда, квазиимпульснинг нолмас қийматларида Шредингер операторининг муҳим спектридан қуйида хос қиймат пайдо бўлиши ёки бўлмаслигини аниқлаш.

Тадқиқотнинг объекти кубик панжарадаги икки заррачали системага мос Шредингер операторидан иборат.

Тадқиқотнинг предмети панжарадаги икки заррачали Шредингер операторининг спектрал хоссаларини тадқиқ қилишдан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида математик анализ, комплекс анализ, функционал анализ, математик физика, ўз-ўзига қўшма операторлар назарияси, Бирман-Швингер принципи, Фредгольм детерминантининг асимптотикасини аниқлаш усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

бир ўлчамли панжарада ўзаро яқин қўшни тугунлар билан таъсирлашувчи икки фермионли системага мос Шредингер оператори хос қийматларининг мавжудлиги ёки йўқлиги ҳамда хос қийматларининг сони икки заррачали система квазиимпульси ва таъсир энергиясига боғлиқ ҳолда тўлиқ тадқиқ қилинган;

икки ўлчамли панжарада қисқа-таъсирли потенциал орқали ўзаро таъсирлашувчи икки фермионли системага мос Шредингер типидаги оператор, унинг қўзғалмас қисми $0 \in \mathbb{T}^2$ да айниган минимумга эга бўлган дисперцион функция бўлганда қурилган ҳамда $k = 0$ ва барча $\mu > 0$ ларда операторнинг муҳим спектрдан қуйида хос қийматлари мавжудлиги исботланган;

ихтиёрий ўлчамли панжарада икки фермионли системага мос Шредингер операторининг кенг синфи учун квазиимпульснинг нолмас қийматларида Шредингер операторининг муҳим спектридан қуйида хос қийматларининг мавжудлиги кўрсатилган;

ихтиёрий ўлчамли панжарада икки фермионли системага мос Шредингер оператори муҳим спектрининг қуйи бўсағаси резонанс ёки хос қиймат бўлганда, квазиимпульснинг нолмас қийматларида Шредингер операторининг муҳим спектридан қуйида хос қиймат пайдо бўлиши ёки пайдо бўлмаслиги исботланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари қуйидагилардан иборат:

ихтиёрий ўлчамли панжарадаги икки фермионли системага мос икки заррачали Шредингер оператори хос қийматлари хоссалари Лапласнинг нолокал оператори учун баъзи чегаравий масалаларнинг хос қиймат ва хос функцияларни қуриш усулларини тадқиқ этиш имконини берган;

бир ўлчамли панжарадаги икки фермионли системага мос икки заррачали Шредингер оператори хос қийматлари хоссалари дискрет стационар Шредингер оператори учун узлуксиз спектрдан ташқарида хос қийматларнинг мавжуд эмаслиги Шредингер тенгламаси учун вақт чексизга интилганда нолга интилмайдиган ечимларнинг мавжуд эмаслигини кўрсатиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги. Математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги ҳамда математик анализ, комплекс анализ, функционал анализ, математик физика, ўз-ўзига қўшма операторлар спектрал назарияси, Бирман-Швингер принципи, Фредгольм детерминантининг асимптотикасини аниқлаш усулларининг қўлланилиши билан асосланади.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти ўз-ўзига қўшма операторлар спектрал назариясида, квант механикаси ва қаттиқ жисмлар физикасида панжарадаги икки ва уч заррачали система энергия операторлари спектрлари ҳамда хос қиймати мавжудлигини кўрсатиш билан боғлик масалаларни ҳал этишда фойдаланиш мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти олинган илмий натижаларнинг қаттиқ жисмлар физикаси ва квант механикасида экспериментал тадқиқотлар ўтказиш ва қўллашга назарий асос сифатида хизмат қилиши билан белгиланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Панжарадаги икки заррачали системага мос Шрёдингер операторининг муҳим ва дискрет спектрларига оид олинган натижалар асосида:

ихтиёрий ўлчамли панжарада икки фермионли системага мос Шредингер операторларининг кенг синфи учун квазиимпульснинг нолмас қийматларида Шредингер операторининг муҳим спектридан қуйида хос қийматлари мавжудлигини кўрсатиш усулларидан “Эллиптик тенгламалар ва уларнинг каср тартибли аналоги учун классик ва классик бўлмаган чегаравий масалаларни ечиш усулларини ишлаб чиқиш” мавзусидаги AP05131268 рақамли хорижий лойиҳада фойдаланилган (Хўжа Аҳмад Яссавий номли халқаро қозоқ-турк университетининг 2021 йил 2 ноябрдаги маълумотномаси). Панжарадаги икки фермионли системага мос икки заррачали Шредингер оператори хос қийматлари хоссалари Лапласнинг нолокал оператори учун баъзи чегаравий масалаларнинг хос қиймат ва хос функцияларни қуриш усулларини тадқиқ этиш имконини берган;

бир ўлчамли панжарада ўзаро яқин қўшни тугунларда таъсирлашувчи икки фермионли системага мос Шредингер оператори хос қийматларининг мавжудлиги ёки йўқлигини ҳамда хос қийматларининг сонини икки заррачали система квазиимпульси ва таъсир энергиясига боғлиқлигига оид натижалардан ОТ-Ф4-69 «Гармоник анализ, даражали геометрия ва уларнинг математик физика масалаларига татбиқлари» мавзусидаги тадқиқот лойиҳасида гармоник анализнинг математик физика масалаларига тадбиқларида фойдаланилган (Самарқанд давлат университетининг 2021 йил 23 ноябрдаги 10-4720-сон маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши дискрет стационар Шредингер оператори учун узлуксиз спектрдан ташқарида хос қийматларнинг мавжуд эмаслиги Шредингер тенгламаси учун вақт чексизга интилганда нолга интилмайдиган ечимларнинг мавжуд эмаслигини кўрсатиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Диссертациянинг асосий натижалари 3 та халқаро ва 4 та республика илмий–амалий анжуманларида, жами 7 та илмий–амалий анжуманларда муҳокамадан ўтган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 11 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий аттестацияси комиссиясининг фалсафа доктори диссертацияларини ҳимоя қилишда тавсия этилган илмий нашрларда 4 та мақола, жумладан, 1 таси хорижий ва 3 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 80 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **«Бошланғич маълумотлар ва панжарадаги бир ва икки заррачали система гамильтонианлари»** деб номланувчи биринчи бобида асосий натижаларни баён қилиш учун зарур бўлган тушунчалар ва натижалар, жумладан чегараланган ўз-ўзига қўшма операторлар спектрал назариясининг зарур теоремалари келтирилган ҳамда иккита бир хил фермионлар системаси гамильтонианларининг координата ва импульс кўринишларида чегараланган ўз-ўзига қўшма операторлар сифатида мос гильберт фазоларида қаралган. Икки заррачали система тўла квазиимпульси киритилиб, иккита бир хил фермионлар системаси гамильтониани Фон-Нейман интегралига ёйилган. Натижада иккита бир хил фермионлар системаси гамильтониани спектрини ўрганиш масаласи қават операторлар, яъни дискрет Шредингер операторлари спектрал хоссаларини ўрганиш масаласига келтирилган.

Диссертациянинг **«Панжарадаги икки фермионли системага мос дискрет Шредингер оператори хос кийматлари»** деб номланувчи иккинчи бобида бир ўлчамли панжарада ўзаро яқин қўшни тугунлар билан таъсирлашувчи икки фермионли системага мос Шредингер оператори хос қийматларининг мавжудлиги ёки йўқлиги ҳамда хос қийматларининг сонини икки заррачали система квазиимпульси ва таъсир энергиясига боғлиқ ҳолда тўлиқ ўрганилган. Бундан ташқари икки ўлчамли панжарада қисқа-таъсирли потенциал орқали ўзаро таъсирлашувчи икки фермионли системага мос Шредингер типидаги оператор қурилган. Унинг қўзғалмас қисми $0 \in \mathbb{T}^2$ да айниган минимумга эга бўлган дисперсион муносабат орқали берилганда операторнинг муҳим спектрдан қуйидаги хос қийматлари мавжудлиги $k = 0$ ва $\mu > 0$ ларда исботланган.

Иккинчи боб асосий натижаларининг қатъий математик баёнига ўтамиз.

Фараз қилайлик, $\mathbb{Z}^d - d$-ўлчамли кубик панжара ва $\ell^{2,o}(\mathbb{Z}^d) - \mathbb{Z}^d$ да аниқланган квадрати билан жамланувчи тоқ функциялар гилберт фазоси ҳамда $\ell^1(\mathbb{Z}^d) - \mathbb{Z}^d$да аниқланган жамланувчи функциялар Банах фазоси бўлсин. Панжарада ўзаро энг яқин қўшни тугунлар билан таъсирлашувчи икки фермионли системага мос дискрет Шредингер оператори $H_\lambda(k), k \in \mathbb{T}$ координата тасвири

$$H_\lambda(k) = H_0(k) + \lambda V, k \in \mathbb{T}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

формула билан аниқланган.

Бу ерда $H_0(k)$ оператор Тёплиц типидаги оператор бўлиб,

$$[H_0(k)f](x) = \sum_{y\in\mathbb{Z}} \mathcal{E}_k(x-y)f(y) \ , f \in \ell^{2,o}(\mathbb{Z})$$

формула билан аниқланган. Бунда,

$$\mathcal{E}_k(x) = \left[e^{i\frac{k}{2}x} + e^{-i\frac{k}{2}x}\right]\varepsilon(x), \ k \in \mathbb{T}, x \in \mathbb{Z}$$

ва

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 2, & x = 0, \\ -\frac{1}{2}, & |x| = 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Таъсир оператори V –кўпайтириш оператори бўлиб

$$[Vf](x) = v(x)f(x), \ f \in \ell^{2,o}(\mathbb{Z})$$

каби аниқланади, бунда

$$v(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |x| = 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

V компакт оператор эканлигидан Г.Вейл теоремасига асосан $H_\lambda(k)$ операторнинг муҳим спектри $H_0(k)$ операторнинг муҳим спектри билан устма-уст тушади, яъни

$$\sigma_{\mathrm{ess}}\big(H_\lambda(k)\big) = \sigma_{\mathrm{ess}}\big(H_0(k)\big) = [\hat{\mathcal{E}}_{\min}(k), \hat{\mathcal{E}}_{\max}(k)],$$

бунда

$$\hat{\mathcal{E}}_{\min}(k) := \min_{q\in\mathbb{T}} \hat{\mathcal{E}}_k(q) = 1 - \cos\frac{k}{2}, \qquad \hat{\mathcal{E}}_{\max}(k) := \max_{q\in\mathbb{T}} \hat{\mathcal{E}}_k(q) = 1 + \cos\frac{k}{2}.$$

Биз $C_0^-(k,\lambda)$ ва $C_0^+(k,\lambda)$ ларнинг ноллари Γ^- ва Γ^+ чизиқлар орқали (k,λ) параметрларнинг $(-\pi,\pi)\times\mathbb{R}$ йўлагини $G_\alpha, \alpha = 0, \pm 1$ боғланган компоненталарга ажратамиз:

$$G_1^- = \{(k,\lambda) \in \mathbb{R}^2 : C_0^-(k,\lambda) < 0\},$$
$$G_0^- = \{(k,\lambda) \in \mathbb{R}^2 : C_0^-(k,\lambda) > 0\}$$

ва

$$G_1^+ = \{(k,\lambda) \in \mathbb{R}^2 : C_0^+(k,\lambda) < 0\},$$
$$G_0^+ = \{(k,\lambda) \in \mathbb{R}^2 : C_0^+(k,\lambda) > 0\}.$$

1-теорема. Фараз қилайлик, $k \neq \pi$.

(i) Ихтиёрий $(k,\lambda)\in G_{00}=G_0^-\cap G_0^+$ учун $H_\lambda(k)$ оператор муҳим спектрдан қуйида хос қийматга эга эмас. Бундан ташқари бўсаға $H_\lambda(k)$ муҳим спектрининг регуляр нуқтаси.

(ii) Фараз қилайлик, $(k,\lambda)\in\Gamma^-$. У ҳолда $H_\lambda(k)$ оператор муҳим спектрдан ташқарида яккаланган хос қийматга эга эмас ва муҳим спектр бўсағаси $\hat{\mathcal{E}}_{\min}(k)$ бўсаға резонанси бўлади.

(iii) Фараз қилайлик, $(k,\lambda)\in\Gamma^+$. У ҳолда $H_\lambda(k)$ оператор муҳим спектрдан ташқарида яккаланган хос қийматга эга эмас ва муҳим спектр бўсағаси $\hat{\mathcal{E}}_{\max}(k)$ бўсаға резонанси бўлади.

(iv) Ихтиёрий $(k,\lambda)\in G_{10}=G_1^-\cap G_0^+$ учун $H_\lambda(k)$ оператор $(-\infty,\hat{\mathcal{E}}_{\min}(k)$ да ётувчи ягона $z^-(k,\lambda)$ хос қийматга эга.

(v) Ихтиёрий $(k,\lambda)\in G_{01}=G_0^-\cap G_1^+$ учун $H_\lambda(k)$ оператор $(\hat{\mathcal{E}}_{\max}(k),+\infty)$ да ётувчи ягона $z^+(k,\lambda)$ хос қийматга эга.

1-натижа. Фараз қилайлик, $k=\pi\in\mathbb{T}$. У ҳолда ихтиёрий $\lambda\in R$ учун $H_\lambda(\pi)$ оператор $\lambda<0$ учун $z(\pi,\lambda)<2$ ва $\lambda>0$ учун $z(\pi,\lambda)>2$ бўлган ягона $z(\pi,\lambda)=2+\frac{\lambda}{2}$ хос қийматга эга.

Бу ишда ε функцияни

$$\varepsilon(x)=\begin{cases}4, & |x|=0\\ -1, & |x|=1\\ \frac{1}{6}, & |x|=2\\ 0, & |x|>2\end{cases}$$

кўринишда танлаймиз ва $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{Z}^2$ учун $|x|=|x_1|+|x_2|$. Шунинг учун $\hat{\varepsilon}$ функция

$$\hat{\varepsilon}(p)=4-\sum_{i=1}^{2}[2\cos p_i-\frac{1}{3}\cos 2p_i]+\frac{2}{3}\cos p_1\cos p_2$$

кўринишда ва $\mathbb{T}^2$ да голоморф функция бўлади.

Бизнинг қуйдаги натижа ҳар бир нолмас потенциал μv учун $H_\mu(0)$ операторнинг муҳим спектрдан қуйида хос қийматларининг мавжудлигини кўрсатади.

2-теорема. Фараз қилайлик, $v\in\ell^1(\mathbb{Z}^2)$ номусбат, нолмас (айнан нолдан фарқли) жуфт функция бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $\mu>0$ учун $H_\mu(0)$ оператор $\sigma_{\rm ess}(H_\mu(0))$ муҳим спектр бўсағаси $\hat{\mathcal{E}}_{\min}(0)$ дан қуйида $z_\mu(0)$ хос қийматга эга бўлади.

Диссертациянинг **«Панжарадаги икки фермионли системанинг бўсаға эффекти»** деб номланувчи учинчи бобида ихтиёрий ўлчамли панжарада икки фермионли системага мос Шредингер операторларининг кенг синфи учун квазиимпульснинг нолмас қийматларида Шредингер операторининг муҳим спектридан қуйида хос қийматларининг мавжудлиги кўрсатилган.

Учинчи боб асосий натижаларининг қатъий математик баёнига ўтамиз.

Икки фермионли системага мос дискрет Шредингер оператори $\ell^{2,o}(\mathbb{Z}^d)$ гильберт фазосида қуйидаги формула билан аниқланган:

$$H(k) = H_0(k) + V, k \in \mathbb{T}^d.$$

Бу ерда, $H_0(k),\ k \in \mathbb{T}^d$ ўрама оператори

$$(H_0(k)f)(x) = \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} \mathcal{E}_k(x-y)f(y)\ , \qquad \varphi \in \ell^{2,o}(\mathbb{Z}^d)$$

каби тасвирланади , бунда

$$\mathcal{E}_k(x) = \left[e^{i\left(\frac{k}{2},x\right)} + e^{-i\left(\frac{k}{2},x\right)}\right]\varepsilon(x), (k,x) := \sum_{n=1}^{d} k_n x_n\ , k \in \mathbb{T}^d, x \in \mathbb{Z}^d$$

ва $\varepsilon\ \in \ell^1(\mathbb{Z}^d)$.

Ихтиёрий $v \in \ell^1(\mathbb{Z}^d)$ жуфт функция учун V оператор кўпайтириш оператори сифатида

$$(Vf)(x) = v(x)f(x), f \in \ell^{2,o}(\mathbb{Z}^d)$$

каби аниқланган.

1-гипотеза. (i). Дисперсион муносабат $\hat{\varepsilon} \in C^{(2)}(\mathbb{T}^d) - \mathbb{T}^d, d \geq 1$ даги ҳақиқий қийматли шартли манфий аниқланган функция.
(ii). Нолмас (айнан нолдан фарқли) жуфт v функция $\mathbb{Z}^d, d \geq 1$ да абсолют жамланувчи ва қуйидаги

$$\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} |x|^2 |v(x)| < \infty$$

шартни қаноатлантиради.

Фараз қилайлик 1-гипотеза шартлари бажарилсин. Ихтиёрий $k \in \mathbb{T}^d$ ва $x, y \in \mathbb{Z}^d$ учун биз

$$\mathcal{R}_0\left(0, \hat{\mathcal{E}}_{\min}(0); x, y\right) = \int_{\mathbb{T}^d} \frac{sin(p,x)sin(p,y)\eta(dp)}{\hat{\mathcal{E}}_0(p) - \hat{\mathcal{E}}_{\min}(0)}$$

ва

$$\mathcal{B}(0, \hat{\mathcal{E}}_{\min}(0); x, y) = |v(x)|^{\frac{1}{2}} R_0\left(0, \hat{\mathcal{E}}_{\min}(0); x, y\right)|v(y)|^{\frac{1}{2}}$$

функцияларни аниқлаймиз.

1-лемма. $d \geq 1$ бўлсин. Фараз қилайлик 1-гипотеза шартлари бажарилсин. У ҳолда қуйдаги таъсдиқлар ўринли:
(i) $\mathcal{R}_0(0, \hat{\mathcal{E}}_{\min}(0); \cdot, \cdot)$ функция $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d$ да аниқланган;
(ii) $\mathcal{B}(0, \hat{\mathcal{E}}_{\min}(0); \cdot, \cdot)$ ядро $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d$ да квадрати билан жамланувчи функция.

Биз $\mathbb{Z}^d$ панжарадаги $H(0)$ Шредингер операторига мос умумлашган Бирман-Швингер операторини қуйидагича аниқлаймиз.

1-таъриф. $d \geq 1$ бўлсин. Фараз қилайлик 1-гипотеза шартлари бажарилсин. Умумлашган (лимитик) $B\left(0, \hat{\mathcal{E}}_{\min}(0)\right)$ Бирман-Швингер оператори $\ell^{2,o}(\mathbb{Z}^d)$ да интеграл оператор орқали

$$[B\left(0, \hat{\mathcal{E}}_{\min}(0)\right)\psi](x) = [|V|^{\frac{1}{2}} R_0\left(0, \hat{\mathcal{E}}_{\min}(0)\right)|V|^{\frac{1}{2}}\psi](x)$$
$$= \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{B}\left(0, \hat{\mathcal{E}}_{\min}(0); x, y\right)\psi(y),$$

каби аниқланади, бу ерда

$$\left[R_0\left(0, \hat{\mathcal{E}}_{\min}(0)\right)\varphi\right](x) := \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{R}_0\left(0, \hat{\mathcal{E}}_{\min}(0); x, y\right)\varphi(y), \varphi \in \ell^1(\mathbb{Z}^d).$$

2-таъриф. $d \geq 1$ бўлсин. Муҳим спектр $\sigma_{\text{ess}}\,(H(0))$ нинг $z = \hat{\mathcal{E}}_{\min}(0)$ бўсаға қиймати $H(0)$ оператор муҳим спектрининг сингуляр (м.р. регуляр) нуқтаси дейилади агар 1 сони $B(0, \hat{\mathcal{E}}_{\min}(0))$ операторнинг ҳос қиймати (м.р. регуляр нуқтаси) бўлса.

Фараз қилайлик $\Phi(\mathbb{Z}^d)$,

$$\|\phi\| = \sup_{x \in \mathbb{Z}^d} \frac{|\phi(x)|}{|x| + 1}$$

нормага нисбатан $\phi(x) = O(|x| + 1), |x| \to \infty$ шартни қаноатлантирувчи $\phi \colon \mathbb{Z}^d \to R$ функцияларнинг Банах фазоси бўлсин.

1-эслатма. Бўсаға $z = \hat{\mathcal{E}}_{\min}(0)$, $H(0), 0 \in \mathbb{T}^d$ оператор муҳим спектрининг сингуляр нуқтаси ва ψ функция $B\left(0, \hat{\mathcal{E}}_{\min}(0)\right)\psi = \psi$ тенгламанинг тривиал бўлмаган ечими бўлсин. У ҳолда умумлашган Бирман-Швингер принципидан қуйдагича ҳулоса қиламиз:

1. Агар $d = 1$ (м.р. $d = 2$) бўлса, у ҳолда

$$f = R_0\left(0, \hat{\mathcal{E}}_{\min}(0)\right)|V|^{\frac{1}{2}}\psi, \psi \in \ell^{2,o}(\mathbb{Z}^d)$$

функция $H(0)f = \hat{\mathcal{E}}_{\min}(0)f$ тенгламанинг ечими ва у $\Phi(\mathbb{Z}^d)$ (м.р. $\ell_0(\mathbb{Z}^d)$) да ётади. Бундан ташқари, агар $f \in \Phi(\mathbb{Z}^d) \backslash \ell^{2,o}(\mathbb{Z}^d)$ м.р. $f \in \ell_0(\mathbb{Z}^d) \backslash \ell^{2,o}(\mathbb{Z}^d)$ бўлса, у ҳолда $z = \hat{\mathcal{E}}_{\min}(0)$ сингуляр нуқта $H(0), 0 \in \mathbb{T}^d$ операторнинг вертуал сатҳи дейилади.

2. Агар $d \geq 3$ бўлса, у ҳолда $H(0)f = \hat{\mathcal{E}}_{\min}(0)f$ тенгламанинг (5) ечими, $\ell^{2,o}(\mathbb{Z}^d)$ да ётади, яъни $z = \hat{\mathcal{E}}_{\min}(0)$ сингуляр нуқта $H(0), 0 \in \mathbb{T}^d$ операторнинг ҳос қиймати бўлади.

Диссертациянинг асосий натижаси бўлган қуйидаги (қўзғалиш назариясидан фойдаланмасдан) олинган натижамиз шуни кўрсатадики, агар бўсаға $z = \hat{\mathcal{E}}_{\min}(0)$ муҳим спектрининг сингуляр нуқтаси бўлса, у ҳолда

$H(k), k \in \mathbb{T}^d$ Шредингер оператори барча $k \neq 0$ ларда янги ҳос қийматларни ҳосил қилади.

3-теорема. Фараз қилайлик $d \geq 1$ бўлсин ва 1-гипотеза шартлари бажарилсин ҳамда бўсаға $z = \hat{\mathcal{E}}_{\min}(0)$, $H(0)$ оператор муҳим спектрининг сингуляр нуқтаси, яъни $||B(0, \hat{\mathcal{E}}_{\min}(0))|| = 1$ тенглик ўринли бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $k \in \mathbb{T}^d \setminus \{0\}$ учун $H(k),\ k \in \mathbb{T}^d$ оператор $\hat{\mathcal{E}}_{\min}(k)$ дан қуйида ҳос қийматга эга бўлади. Бундан ташқари, $H(k), k \in\ \mathbb{T}^d \setminus \{0\}$ операторнинг ҳар бир $Z(k)$ ҳос қиймати $Z(k) > \hat{\mathcal{E}}_{\min}(0)$ тенгсизликни қаноатлантиради.

Шу билан бирга, бизнинг қуйдаги натижамиз шундан иборатки, агар бўсаға $z = \hat{\mathcal{E}}_{\min}(0)$ муҳим спектрининг регуляр нуқтаси бўлса, у ҳолда $H(k), k \in \mathbb{T}^d$ Шредингер оператори квазиимпульснинг кичик қўзғалишида янги ҳос қийматларни ҳосил қилмайди.

4-теорема. Фараз қилайлик $d \geq 1$ ва 1-гипотеза шартлари бажарилсин ҳамда бўсаға $z = \hat{\mathcal{E}}_{\min}(0)$, $H(0)$ оператор муҳим спектрининг регуляр нуқтаси, яъни $\left\|B\left(0, \hat{\mathcal{E}}_{\min}(0)\right)\right\| < 1$ тенгсизлик ўринли бўлсин. У ҳолда $0 \in \mathbb{T}^d$ нуқтанинг шундай $U(0) \subset \mathbb{T}^d$ атрофи мавжудки барча $k \in U(0)$ лар учун $H(k)$ оператор $\hat{\mathcal{E}}_{\min}(k)$ дан қуйида ҳос қийматга эга эмас ва $k \in \mathbb{T}^d \setminus\ U(0) \subset \mathbb{T}^d$ учун $H(k)$ оператор $\hat{\mathcal{E}}_{\min}(k)$ дан қуйида ҳос қийматга эга бўлиши мумкин. Бундан ташқари, $H(k), k \in \mathbb{T}^d \setminus U(0)$ операторнинг ҳар бир $Z(k)$ ҳос қиймати $Z(k) > \hat{\mathcal{E}}_{\min}(0)$ тенгсизликни қаноатлантиради.

Эслатма. Диссертацияда икки фермионли система кўриб чиқилганлиги сабабли, ихтиёрий заррачалар ҳолидан фарқли ўлароқ, бу ҳолда бўсаға ҳодисаси панжара ўлчами $d \geq 1$ учун содир бўлади. Бундан ташқари, бу ҳолда биз томондан келтирилган ва исботланган умумлашган Бирман-Швингер принципи $H(0),\ 0 \in \mathbb{T}^d$ Шредингер операторининг вертуал сатҳи ёки боғланган ҳолатини киритишга имкон беради ва биз киритган умумлашган Бирман-Швингер операторидан фойдаланиб асосий натижалар шакллантирилди.

Фараз қилайлик $H(0)$ оператор $\hat{\mathcal{E}}_{\min}(0)$ дан қуйида жойлашган $Z_1(0) \leq \cdots \leq Z_n(0)$ (карраликлари билан ҳисоблаганда) $n \geq 1$ та ҳос қийматга эга ва $\mathcal{H}_n(0) \subset \mathcal{H} = \ell^{2,o}(\mathbb{Z}^d)$, $Z_1(0) \leq\ \ldots \leq\ Z_n(0)$ ҳос қийматларга мос ҳос векторларга тортилган n ўлчамли инвариант қисим фазо ҳамда $\mathcal{H}_n^\perp(0) = \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_n \subset \ell^{2,o}(\mathbb{Z}^d)$ бўлсин. Шунингдек $H^\perp(0)$ оператор $H(0)$ нинг $\hat{\mathcal{E}}_{\min}(0)$ дан қуйида ҳос қийматга эга бўмайдиган $\mathcal{H}_n^\perp(0)$ қисим фазодаги қисми ва $B^\perp\left(0, \hat{\mathcal{E}}_{\min}(0)\right)$ оператор $H^\perp(0)$ га мос Бирман-Швингер оператори бўлсин. У ҳолда 3- ва 4-теоремалардан қуйдаги натижалар келиб чиқади.

2-натижа. Фараз қилайлик $d \geq 1$ ва 3-теорема шартлари бажарилсин, шунингдек $H(0)$ оператор муҳим спектр бўсағасидан қуйида $n \geq 1$ та ҳос қийматга эга ва бўсаға $z = \hat{\mathcal{E}}_{\min}(0)$, $H^{\perp}(0)$ оператор муҳим спектрининг сингуляр нуқтаси, яъни $||B^{\perp}(0, \hat{\mathcal{E}}_{\min}(0))|| = 1$ тенглик ўринли бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $k \in \mathbb{T}^d \setminus \{0\}$ учун $H(k),\ k \in \mathbb{T}^d$ оператор $\hat{\mathcal{E}}_{\min}(k)$ дан қуйида камида $n+1$ та ҳос қийматга эга бўлади. Бундан ташқари, $H(k), k \in \mathbb{T}^d \setminus \{0\}$ операторнинг ҳар бир $Z(k)$ ҳос қиймати $Z(k) > Z_1(0)$ тенгсизликни қаноатлантиради.

3-натижа. Фараз қилайлик $d \geq 1$ ва 1-гипотеза шартлари бажарилсин, шунингдек $H(0)$ оператор муҳим спектр бўсағасидан қуйида $n \geq 1$ та ҳос қийматга эга ва $||B^{\perp}(0, \hat{\mathcal{E}}_{\min}(0))|| < 1$ тенгсизлик бажарилсин, яъни бўсаға $z = \hat{\mathcal{E}}_{\min}(0)$, $H^{\perp}(0)$ оператор муҳим спектрининг регуляр нуқтаси бўлсин. У ҳолда $0 \in \mathbb{T}^d$ нуқтанинг шундай $U(0) \subset \mathbb{T}^d$ атрофи мавжудки барча $k \in U(0)$ лар учун $H(k)$ оператор $\hat{\mathcal{E}}_{\min}(k)$ дан қуйида камида n та ҳос қийматга эга. Бундан ташқари, $H(k),\ k \in \mathbb{T}^d \setminus U(0)$ операторнинг ҳар бир $Z(k)$ ҳос қиймати $Z(k) > Z_1(0)$ тенгсизликни қаноатлантиради.

ХУЛОСА

Диссертация иши панжарада икки фермионли системага мос Шредингер операторларининг муҳим ва дискрет спектрларини тадқиқ килишга бағишланган.

Диссертация тадқиқотининг асосий натижалари асосида қуйидаги хулосаларга келамиз:

Бир ўлчамли панжарада ўзаро яқин қўшни тугунлар билан таъсирлашувчи икки фермионли системага мос Шредингер оператори хос қийматларининг мавжудлиги ёки йўқлиги ҳамда хос қийматларининг сони икки заррачали система квазиимпульси ва таъсир энергиясига боғлиқ ҳолда тўлиқ тадқиқ қилинган;

Икки ўлчамли панжарада қисқа-таъсирли потенциал орқали ўзаро таъсирлашувчи икки фермионли системага мос Шредингер типидаги оператор, унинг қўзғалмас қисми $0 \in \mathbb{T}^2$ да айниган минимумга эга бўлган дисперцион функция бўлганда қурилган ҳамда $k = 0$ ва барча $\mu > 0$ ларда операторнинг муҳим спектрдан қуйида хос қийматлари мавжудлиги исботланган;

Ихтиёрий ўлчамли панжарада икки фермионли системага мос Шредингер операторларининг кенг синфи учун квазиимпульснинг нолмас қийматларида Шредингер операторининг муҳим спектридан қуйида хос қийматларининг мавжудлиги кўрсатилган;

Ихтиёрий ўлчамли панжарада икки фермионли системага мос Шредингер оператори муҳим спектрининг қуйи бўсағаси резонанс ёки хос қиймат бўлганда, квазиимпульснинг нолмас қийматларида Шредингер операторининг муҳим спектридан қуйида хос қиймат пайдо бўлиши ёки пайдо бўлмаслиги исботланган.

SCIENTIFIC COUNCIL FOR AWARDING SCIENTIFIC DEGREES DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 AT SAMARKAND STATE UNIVERSITY

SAMARKAND STATE UNIVERSITY

ABDUKHAKIMOV SAIDAKBAR KHAZRATKUL UGLI

ON THE EXISTENCE AND NUMBER OF BOUND STATES OF A SYSTEM OF TWO FERMIONS INTERACTING ON A LATTICE

01.01.01-Mathematical analysis

ABSTRACT OF DISSERTATION
for the doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences

Samarkand – 2021

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2021.2.PhD/FM557.

Dissertation has been prepared at Samarkand State University.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (www.samdu.uz) and the «Ziyonet» Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific superviser:	**Lakaev Saidahmat Norjigitovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences,Professor, Academician
Official opponents:	**Botirov Golibjon Isroilovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences
	Rasulov Tulkin Xusenovich Candidate of Physical and Mathematical Sciences
Leading organization:	**Urganch State University**

Defense will take place «29» 12 2021 at 10^{00} at the meeting of Scientific Council number DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 at Samarkand State University. (Address: University Boulevard 15, Samarkand city, 140104, Uzbekistan, Ph.: (+99866)231-06-32, fax: (+99866)235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource center at Samarkand State University (is registered №90) (Address: University Boulevard 15, Samarkand city, 140104, Uzbekistan, Ph.: (+99866)231-06-32).

Abstract of dissertation sent out on «17» 12 2021 year
(Mailing report № 1 on «17» 12 2021 year)

A.S.Soleev
Chairman of scientific council on award of scientific degree, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor

A.M.Khalkhuzhayev
Scientific secretary of scientific council on award of scientific degree, Doctor of Physical and Mathematical Sciences

I.A. Ikromov
Vice-chairman of scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

Actuality and demand of the theme of dissertation. Many scientific and practical studies conducted around the world are mostly devoted to scientific models of the processes occurring in the microworld. For the study of microworld phenomena, quantum mechanics was based on the theory of electromagnetic radiation in matter, the theory of quantum fields, the wave theory of particle motion, and others. One of the most important physical quantities in any system of quantum mechanics is its energy. The analysis of the spectral properties of the energy operator (Hamiltonian) i.e., Schrödinger operator is one of the main problems of quantum mechanics. In this regard, the particles systems of the Schrödinger operator on the lattice serve as the theoretical basis for experimental observations. Therefore, the development of research on spectrum (discrete spectrum and essential spectrum) of the energy operators corresponding to particles systems on the lattice remains to be important in solid state physics, quantum mechanics, and statistical physics.

Nowadays, the solution of problems related to the spectrum of these operators is important in mathematical physics, as the position and number of eigenvalues of the essential spectrum of Schrödinger operators in the grid are variable with respect to changes in the total quasi-impulse and interaction energy of a two-particle system. In particular, the two-particle Schrödinger operators in the grid prove the existence of an isolated eigenvalues, a lower threshold resonance, or a threshold eigenvalue, the development of research to determine the location of the essential spectrum of the two-particle Schrödinger operator on a lattice and to find the conditions for the existence of eigenvalues lying below the essential spectrum is one of the most important theoretical and practical scientific studies.

In our country, a lot of attention is being paid to fundamental sciences which have scientific and practical applications. The spectral theory of the Schrödinger operators associated with systems of one and two particle moving on lattices have quite wide range of applications in various fields, therefore its development is of special importance. For the discrete Schrödinger operators associated with systems of two particles moving on lattices, number of interesting results were obtained the existence of bound states which is located outside of the essential spectrum and for their number under various conditions. Conducting research have been identified as the main tasks and areas of activity of mathematical science at the level of international standards in the priority areas of "Functional analysis, mathematical physics and statistical physics"[1]. To ensure the implementation of the decision, it is

[1] Decree of President of the Republic of Uzbekistan at the "On state support for the further development of mathematics education and science, as well as measures to radically improve the activities of the Institute of

important to develop theory of quantum field and spectral theory of linear operators.

The subject and object of our dissertation are in line with tasks identified in the Decrees and Resolutions of the President of the Republic of Uzbekistan of February 7, 2017, PF-4947, "On the strategy of action for the further development of the Republic of Uzbekistan", PQ-4387 dated July 9, 2019 "On state support for the further development of mathematics education and science, as well as measures to radically improve the activities of the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan" and PQ-4708 of May 7, 2020 "On measures to improve the quality of education and research in the field of mathematics" as well as in other regulations related to this activity.

Connection of research to priority directions of development of science and technologies of the Republic. This study was performed in accordance with the priority areas of science and technology of the Republic of Uzbekistan, IV, "Mathematics, Mechanics and Computer Science".

The degree of scrutiny of the problem. We know that the physics of atoms and molecules as well as solids, important issues in quantum field theory are focused on the study of Schrödinger operators. Some of the results in this field were first considered by A.I.Mogilner, D.S.Mattis in the 1990s for Schrödinger operators corresponding to a system of particles in a grid, and research on it has developed steadily. In particular, issues such as the existence of eigenvalues for discrete Schrödinger operators and their distributions around essential spectrum, the detection of events at the threshold value of the interaction constant by M.Klaus, S.Albeverio, P.Faria de Vega, R.A.Minlos, B.Simon, S.Researched, S.N.Lakaev, K. Makarov and others. The spectral properties of Schrödinger operators corresponding to a system of particles in a lattice were studied by M.O.Carroll, Faria da Veiga and L.Ioriatti in relation to the complete quasi-impulse of the system. In the study of Schrödinger operators on a lattice in a strictly mathematical sense, there are problems similar to those of continuous Schrödinger operators, i.e., there is a need to study one, two, etc. particle operators firstly.

The eigenvalues corresponding to the bound states of the two-particle Schrödinger operator in the grid approach the lower threshold of the essential spectrum as a result of the change in the interaction constant, and at eigenvalues of the interaction constant overlap with the lower threshold of the essential spectrum. In the work of D.Yafaev, B.Simon, D.Raux, M.Claus and S.N.Lakaev, the question of determining the correspondence of the state or virtual state associated with this threshold value was considered. P.Faria da Viga, S.N.Lakaev, and F.Hiroshima were shown that there is a threshold value at the lower limit of the essential spectrum when the grid size is equal to or greater than five for point potentials, but not when the grid size is less than five.

Mathematics named after V.I.Romanovsky of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan” PQ-4387 dated July 9, 2019.

Then S.Albeverio, K.Makarov, S.N.Lakaev, Z.Muminov developed a condition for the existence of a eigenvalue for the two-particle Schrödinger operator corresponding to an arbitrary two-particle system interacting in pairs at a distance of d=3 in a grid for a wide class of dispersion functions were shown. In the works of S.N.Lakaev, Sh.Yu.Kholmatov, A.M.Khalkhodjaev and Sh.S.Lakaev the existence of a unique eigenvalue below the essential spectrum in relation to the complete quasi-impulse was proven and asymptotics were found for the number of eigenvalues.

Connection of the theme of the dissertation with the research works of higher education, where the dissertation is carried out. The dissertation is done in accordance with the planned theme of scientific research "Models of systems with a limited number of particles on a lattice. Essential and discrete spectra of energy operators" (OT-F4-66, Samarkand State University, 2017-2020).

The aim of research work. is to study essential and discrete spectra of two particle Schrödinger operator on a lattice.

Tasks of the research:

to completely study the presence or absence and the number of eigenvalues of the two-particle Schrödinger operator corresponding to a system of two fermions on the one-dimensional lattice with the interaction of the nearest sites, depending on the two-particle quasi-momentum and the interaction energy of the particles;

to construct the two-particle discrete Schrödinger-type operator associated with a system of two fermions on the two-dimensional cubic lattice interacting through a short-range potential; to prove that if the unperturbed part with a dispersion relation having a degenerate minimum for $0 \in \mathbb{T}^2$, then the existence of eigenvalues lying below the essential spectrum of the operator for $k = 0$ and all $\mu > 0$;

to prove the existence of eigenvalues of the Schrödinger operator below the threshold of the essential spectrum for any value of the nonzero quasi-momentum for a wide class of the two-particle Schrödinger operators corresponding to a system of two fermions on an integer cubic lattice for any dimension;

to prove the threshold of the essential spectrum of the two-particle Schrödinger operator, being a singular point, i.e., as a virtual level or threshold eigenvalue, generates or does not generate eigenvalues outside the essential spectrum for all nonzero values of the quasi-momentum of the system and all lattice dimensions.

The research object is two-particle Schrödinger operators in the cubic lattice.

The research subject is spectral study of two-particle Schrödinger operators on a lattice.

Research methods: The research uses the methods of mathematical analysis, complex analysis, functional analysis, mathematical physics, theory of the self-adjoint operators, Birman-Schwinger principle, analytical continuity of the Fredholm determinant.

The scientific novelty of the research is as follows:

the presence or absence and the number of eigenvalues of the two-particle Schrödinger operator corresponding to a system of two fermions on the one-dimensional lattice with the interaction of the nearest sites, depending on the two-particle quasi-momentum and the interaction energy of the particles, was completely studied;

the two-particle discrete Schrödinger -type operator is constructed, associated with a system of two fermions on the two-dimensional cubic lattice interacting through a short-range potential; the existence of eigenvalues lying below the essential spectrum of the operator for $k = 0$ and all $\mu > 0$ is proved if the unperturbed part with a dispersion relation having a degenerate minimum for $0 \in \mathbb{T}^2$;

the existence of eigenvalues of the Schrödinger operator is proved below the threshold of the essential spectrum for any value of the nonzero quasi-momentum for a wide class of the two-particle Schrödinger operators corresponding to a system of two fermions on an integer cubic lattice for any dimension;

the threshold of the essential spectrum of the two-particle Schrödinger operator, being a singular point, i.e., as a virtual level or threshold eigenvalue, generates or does not generate eigenvalues outside the essential spectrum for all nonzero values of the quasi-momentum of the system and all lattice dimensions is established and proved.

Practical results of the research:

the properties of the eigenvalues of the two-particle Schrödinger operator corresponding to a two-fermion system in an arbitrary dimensional lattice allowed the study of methods for constructing the eigenvalues and eigenfunctions of some boundary value problems for the nonlinear operator Laplace;

the properties of the two-particle Schrödinger operator corresponding to a two-dimensional lattice system in a one-dimensional lattice. The absence of eigenvalues outside the continuous spectrum for a discrete Schrödinger operator made it possible to show that there are no non-zero solutions for the Schrödinger equation.

The reliability of the results of the study. The results have been obtained by using the methods of mathematical analysis, complex analysis, functional analysis, mathematical physics, theory of the self-adjoint operators, Birman-Schwinger principle, analytical continuity of the Fredholm determinant, strict mathematical proofs and the application of rigorous mathematical considerations.

Scientific and practical significance of research results. The scientific value of the results of the study lies in the fact that they can be used in the spectral theory of self-adjoint operators, quantum mechanics, solid state physics, quantum field theory, in particular, solutions of problems related to the spectrum of Hamiltonians of systems of two and three particles on a lattice. The practical importance of the research results is determined by the fact that the obtained scientific results are relevant to solid state physics and quantum mechanics.

Implementation of the research results. Based on scientific results on the essential and discrete spectra of the two-particle Schrödinger operator on a lattice:

the existence of eigenvalues below the threshold of the essential spectrum is proved for a nonzero value of the quasi-momentum for a wide class of two-particle Schrödinger operators corresponding to a system of two fermions on an integer cubic lattice $\mathbb{Z}^d, d \geq 1$ were used in the foreign grant project AP05131268 on the topic "Development of methods for solving classical and non-classical boundary value problems for elliptic equations and their fractional analogues" (International Kazakh-Turkish University named after Khoja Ahmed Yasawi, certificate dated November 2, 2021). The properties of the eigenvalues of two-particle Schrödinger operators corresponding to a system of two fermions on a lattice made it possible to study methods for constructing eigenfunctions and eigenvalues of some boundary value problems for the nonlocal Laplace operator;

the presence or absence and number of eigenvalues of the two-particle Schrödinger operator, corresponding to a system of two fermions on a one-dimensional lattice with the interaction of nearest sites, has been fully investigated, depending on the two-particle quasi-momentum and the particle interaction energy was used in the fundamental project OT-F4-69 "Harmonic analysis, degree geometry and their applications to the problems of mathematical physics" (November 23, 2021 reference from the Samarkand State University, №. 10-4720). The absence of eigenvalues outside the continuous spectrum for the discrete stationary Schrödinger operator made it possible to show that the Schrödinger equation has no solutions tending to zero as time tends to infinity.

Approbation of the research results. The main results of the research have been discussed in 3 international and 4 republican scientific conferences.

Publications of the research results. On the topic of the dissertation 11 scientific works have been published, 4 of them are included in the list of journals proposed by the Higher Attestation Commission of the Republic of Uzbekistan for defending the PhD thesis, in addition 1 of them was published in international journal of mathematics and physics indexed in Scopus and Web of Science, and 3 papers published in national mathematical journals.

The structure and volume of the dissertation. The dissertation consists of introduction, three main chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 80 pages.

THE MAIN CONTENT OF THE DISSERTATION

In the introduction is given the actuality and relevance of the thesis topics, determined the appropriate research priority areas of science and technology of the Republic, presented a review of international research on the theme of the dissertation and the degree of scrutiny of the problem, formulated goals and objectives, identified the object and subject of study, scientific novelty and practical results of the research are stated, revealed the theoretical and practical importance of the obtained results, information on the implementation of the research results about the published works and the structure of dissertation are given.

In the first chapter of the thesis, titled **"Preliminary notations and one and two particle Hamiltonians on lattices"** is given basic notions and results including the necessary theorems of spectral theory of bounded self-adjoint operators in order to describe main results and the Hamiltonian of the system two identical fermions in coordinate and momentum representation are considered as bounded self-adjoint operator in corresponding Hilbert space. Determining two particle quasi-momentum, the Hamiltonian of system of the two identical fermions is decomposed into a direct Von Neumann integral. As a result, studying spectral properties of the Hamiltonian of the two identical fermions system is reduced to study fiber operators, i.e. investigating spectral properties of the discrete Schrödinger operators.

In the second chapter, titled **"The eigenvalues of the Schrödinger operator for a system of two-fermions on a lattice**" it was completely studied the presence or absence and the number of eigenvalues of the two-particle Schrödinger operator corresponding to a system of two fermions on the one-dimensional lattice with the interaction of the nearest sites, depending on the two-particle quasi-momentum and the interaction energy of the particles. Moreover, the two-particle discrete Schrödinger-type operator is constructed, associated with a system of two fermions on the two-dimensional cubic lattice interacting through a short-range potential; the existence of eigenvalues lying below the essential spectrum of the operator for $k = 0$ and all $\mu > 0$ is proved if the unperturbed part with a dispersion relation having a degenerate minimum for $0 \in \mathbb{T}^2$.

We consider the strict mathematical description of Chapter II.

Let $\mathbb{T}^d$ be the d-dimansional cubic lattice and $\ell^{2,o}$ $(\mathbb{Z}^d)$be the Hilbert space of square-summable odd functions on $\mathbb{Z}^d$. Let ℓ^1 $(\mathbb{Z}^d)$ be the Banach space of summable functions on $\mathbb{Z}^d$.

The discrete two-particle Schrödinger operators $H_\lambda(k), k \in \mathbb{T}$, associated to a system of two identical fermions, in the position space representation has the form

$$H_\lambda(k) = H_0(k) + \lambda V, k \in \mathbb{T},\ \lambda \in \mathbb{R},$$

where $H_0(k)$ is the Teoplitz type operator

$$[H_0(k)f](x) = \sum_{y\in\mathbb{Z}} \mathcal{E}_k(x-y)f(y)\ , f \in \ell^{2,o}(\mathbb{Z})$$

where

$$\mathcal{E}_k(x) = \left[e^{i\frac{k}{2}x} + e^{-i\frac{k}{2}x}\right]\varepsilon(x),\ k \in \mathbb{T}, x \in \mathbb{Z}$$

and

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 2, & x = 0, \\ -\frac{1}{2}, & |x| = 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

We define multiplication operator V by the function $v(\cdot)$ as

$$[Vf](x) = v(x)f(x),\ f \in \ell^{2,o}(\mathbb{Z}),$$

where

$$v(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |x| = 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Since the operator V is compact, by the Weyl's theorem, the essential spectrum $\sigma_{ess}\big(H_\lambda(k)\big)$ of the operator $H_\lambda(k)$ coincides with the essential spectrum $\sigma_{ess}\big(H_0(k)\big)$ of the operator $H_0(k)$, i.e.,

$$\sigma_{\mathrm{ess}}\big(H_\lambda(k)\big) = \sigma_{ess}\big(H_0(k)\big) = \big[\hat{\mathcal{E}}_{\min}(k), \hat{\mathcal{E}}_{\max}(k)\big],$$

where

$$\hat{\mathcal{E}}_{\min}(k) := \min_{q\in\mathbb{T}} \hat{\mathcal{E}}_k(q) = 1 - \cos\frac{k}{2}, \qquad \hat{\mathcal{E}}_{\max}(k) := \max_{q\in\mathbb{T}} \hat{\mathcal{E}}_k(q) = 1 + \cos\frac{k}{2}.$$

We partition of the parameters (k,λ) strip $(-\pi,\pi)\times\mathbb{R}$ to a connected components $G_\alpha, \alpha = 0, \pm 1$ by means of the curves Γ^- and Γ^+, which are zeros of $C_0^-(k,\lambda)$ and $C_0^+(k,\lambda)$:

$$G_1^- = \{(k,\lambda) \in R^2 : C_0^-(k,\lambda) < 0\},$$
$$G_0^- = \{(k,\lambda) \in R^2 : C_0^-(k,\lambda) > 0\}$$

and

$$G_1^+ = \{(k,\lambda) \in R^2 : C_0^+(k,\lambda) < 0\},$$
$$G_0^+ = \{(k,\lambda) \in R^2 : C_0^+(k,\lambda) > 0\}.$$

Theorem 1. Let $k \neq \pi$.

1. For any $(k,\lambda) \in G_{00} = G_0^- \cap G_0^+$ the operator $H_\lambda(k)$ has no eigenvalues outside of the essential spectrum. Moreover the thresholds are regular points of the ess. spectrum of $H_\lambda(k)$.

2. Assume $(k,\lambda) \in \Gamma^-$. Then the operator $H_\lambda(k)$ has no isolated eigenvalues outside of the essential spectrum and $\hat{\mathcal{E}}_{\min}(k)$, the threshold of the ess. spec. is a threshold resonance.

3. Assume $(k,\lambda) \in \Gamma^+$. Then the operator $H_\lambda(k)$ has no isolated eigenvalues outside of the essential spectrum and $\hat{\mathcal{E}}_{\max}(k)$, the threshold of the ess. spec. is a threshold resonance.

4. For any $(k,\lambda) \in G_{10} = G_1^- \cap G_0^+$ the operator $H_\lambda(k)$ has a unique eigenvalue $z^-(k,\lambda)$, which lies in $(-\infty, \hat{\mathcal{E}}_{\min}(k))$.

5. For any $(k,\lambda) \in G_{01} = G_0^- \cap G_1^+$ the operator $H_\lambda(k)$ has a unique eigenvalue $z^+(k,\lambda)$, which lies in $(\hat{\mathcal{E}}_{\max}(k), +\infty)$.

Corollary 1. Let $k = \pi \in \mathbb{T}$. Then for any $\lambda \in R$ the operator $H_\lambda(\pi)$ has a unique eigenvalue $z(\pi,\lambda) = 2 + \frac{\lambda}{2}$ satisfying $z(\pi,\lambda) < 2$ for $\lambda < 0$ and $z(\pi,\lambda) > 2$ for $\lambda > 0$.

In this paper we choose the function ε, which has the form

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 4, & |x| = 0 \\ -1, & |x| = 1 \\ \frac{1}{6}, & |x| = 2 \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}$$

and $|x| = |x_1| + |x_2|$ for $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$. So the function $\hat{\varepsilon}$ is of the form

$$\hat{\varepsilon}(p) = 4 - \sum_{i=1}^{2} [2\cos p_i - \frac{1}{3}\cos 2p_i] + \frac{2}{3}\cos p_1 \cos p_2$$

and hence it is holomorphic function on $\mathbb{T}^2$.

The main result is the existence of the eigenvalues of the operator $H_\mu(0)$ for each nonzero potential μv.

Theorem 2. Let $v(\cdot) \in \ell^1(\mathbb{Z}^2)$ be a non-positive, nonzero (not identically zero) even function. Then for any $\mu > 0$ the operator $H_\mu(0)$ has an eigenvalue $z_\mu(0)$ below the threshold $\hat{\mathcal{E}}_{min}(0)$ of the essential spectrum $\sigma_{ess}(H_\mu(0))$.

In the third chapter, titled «**Threshold effects in a system of two fermions on an optical lattice**» it was considered the existence of eigenvalues of the Schrödinger operator is proved below the threshold of the essential spectrum for any value of the nonzero quasi-momentum for a wide class of the two-particle Schrödinger operators corresponding to a system of two fermions on an integer cubic lattice for any dimension.

We consider the strict mathematical description of Chapter III.

The discrete operator $H(k), k \in \mathbb{T}^d$ associated to a system of two identical fermions is defined in $\ell^{2,o}(\mathbb{Z}^d)$ as

$$H(k) = H_0(k) + V, k \in \mathbb{T}^d.$$

Here, the Laurent-Toeplitz operator $H_0(k),\ k \in \mathbb{T}^d$ is represented as

$$(H_0(k)f)(x) = \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} \mathcal{E}_k(x-y)f(y)\ , \qquad f\in \ell^{2,o}(\mathbb{Z}^d),$$

where

$$\mathcal{E}_k(x) = \left[e^{i\left(\frac{k}{2},x\right)} + e^{-i\left(\frac{k}{2},x\right)}\right]\varepsilon(x), (k,x) := \sum_{n=1}^{d} k_n x_n\ , k\in\mathbb{T}^d, x\in\mathbb{Z}^d$$

and $\varepsilon(\cdot)\in\ell^1(\mathbb{Z}^d)$.

The operator V is defined as the operator of multiplication by the function $v(\cdot)$:

$$(Vf)(x) = v(x)f(x), f\in\ell^{2,o}(\mathbb{Z}^d).$$

Hypothesis.

1. The dispersion relation $\hat{\varepsilon}\in C^{(2)}(\mathbb{T}^d)$ is a real-valued conditionally negatively defined function on $\mathbb{T}^d, d\geq 1$.

2. A nonzero (not identically equal to zero) even nonpositive function v is absolutely summable on $\mathbb{Z}^d, d\geq 1$ and satisfies the condition

$$\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} |x|^2|v(x)| < \infty.$$

Let the condition Hypothesis be satisfied. For any $k\in\mathbb{T}^d$ and $x,y\in\mathbb{Z}^d$ we define functions

$$\mathcal{R}_0\left(0,\hat{\mathcal{E}}_{min}(0);x,y\right) = \int_{\mathbb{T}^d} \frac{sin(p,x)sin(p,y)\eta(dp)}{\hat{\mathcal{E}}_0(p)-\hat{\mathcal{E}}_{min}(0)}$$

and

$$\mathcal{B}(0,\hat{\mathcal{E}}_{min}(0);x,y) = |v(x)|^{\frac{1}{2}}R_0\left(0,\hat{\mathcal{E}}_{min}(0);x,y\right)|v(y)|^{\frac{1}{2}}.$$

Lemma 1. Let $d\geq 1$. Suppose that the condition Hypothesis is satisfied. Then the following assertions hold true:

1. the function $\mathcal{R}_0(0,\hat{\mathcal{E}}_{min}(0);\cdot,\cdot)$ is defined on $\mathbb{Z}^d\times\mathbb{Z}^d$;

2. the kernel $\mathcal{B}(0,\hat{\mathcal{E}}_{min}(0);\cdot,\cdot)$ is a quadratically summable function on $\mathbb{Z}^d\times\mathbb{Z}^d$.

Now we define the generalized Birman-Schwinger operator corresponding to the Schrödinger operator $H(0)$ on the lattice $\mathbb{Z}^d$.

Definition 1. Let $d\geq 1$. Suppose that the condition Hypothesis.The generalized (limit) Birman-Schwinger operator $B\left(0,\hat{\mathcal{E}}_{min}(0)\right), 0\in\mathbb{T}^d$, is defined as the integral operator acting in $\ell^{2,o}(\mathbb{Z}^d)$ as

$$[B\left(0,\hat{\mathcal{E}}_{min}(0)\right)\psi](x) = [|V|^{\frac{1}{2}}R_0\left(0,\hat{\mathcal{E}}_{min}(0)\right)|V|^{\frac{1}{2}}\psi](x)$$
$$= \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} \mathcal{B}\left(0,\hat{\mathcal{E}}_{min}(0);x,y\right)\psi(y),$$

where

$$\left[R_0\left(0,\hat{\mathcal{E}}_{min}(0)\right)\varphi\right](x) := \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} \mathcal{R}_0\left(0,\hat{\mathcal{E}}_{min}(0);x,y\right)\varphi(y),\ \varphi\in\ell^1(\mathbb{Z}^d).$$

Definition 2. Let $d \geq 1$. The threshold value $z = \hat{\mathcal{E}}_{min}(0)$, of the essential spectrum $\sigma_{ess}\,(H(0))$ is called singular (resp. regular) point of the essential spectrum of the operator $H(0)$ if the number 1 is an eigenvalue (resp. no eigenvalue) of the operator $B(0,\hat{\mathcal{E}}_{min}(0))$.

Let $\Phi(\mathbb{Z}^d)$ be a Banach space of functions $\phi\colon\mathbb{Z}^d \to R$, satisfying the condition $\phi(x) = O(|x|+1)$ as $|x|\to\infty$ relative to the norm

$$\|\phi\| = \sup_{x\in\mathbb{Z}^d}\frac{|\phi(x)|}{|x|+1}$$

Remark 1. Let the threshold $z = \hat{\mathcal{E}}_{min}(0)$ be the singular point of the essential spectrum of the operator $H(0), 0\in\mathbb{T}^d$ and ψ is a nontrivial solution (up to a constant factor) of the equation $B\left(0,\hat{\mathcal{E}}_{min}(0)\right)\psi = \psi,\ \ 0\in T^d$. Then from the generalized Birman-Schwinger principle we conclude the following:

1. If $d=1$ (resp. $d=2$) then the function

$$f = R_0\left(0,\hat{\mathcal{E}}_{min}(0)\right)|V|^{\frac{1}{2}}\psi, \psi\in\ell^{2,o}(\mathbb{Z}^d)$$

is a solution of $H(0)f = \hat{\mathcal{E}}_{min}(0)f$ and it belongs to $\Phi(\mathbb{Z}^d)$ (resp. $\ell_0(\mathbb{Z}^d)$). Moreover, if $f\in\Phi(\mathbb{Z}^d)\backslash\ell^{2,o}(\mathbb{Z}^d)$ resp. $f\in\ell_0(\mathbb{Z}^d)\backslash\,\ell^{2,o}(\mathbb{Z}^d)$, then the singular point $z = \hat{\mathcal{E}}_{min}(0)$ is called the virtual level of the operator $H(0), 0\in\mathbb{T}^d$.

2. If $d\geq 3$, then the solution (5) of $H(0)f = \hat{\mathcal{E}}_{min}(0)f$ belongs to $\ell^{2,o}(\mathbb{Z}^d)$, i.e. the singular point $z = \hat{\mathcal{E}}_{min}(0)$ is an eigenvalue of $H(0), 0\in\mathbb{T}^d$.

Our nonperturbative (not using perturbation theory) result, the main result of the dissertation, states that if the threshold $\hat{\mathcal{E}}_{min}(0)$ is a singular point of the essential spectrum, then it generates new eigenvalues (discrete spectrum) Schrödinger operator $H(k),\ k\in\mathbb{T}^d$ for all $k\neq 0$.

Theorem 3. Let $d\geq 1$. Assume Hypothesis and the threshold $z = \hat{\mathcal{E}}_{min}(0)$ is a singular point of the essential spectrum of the operator $H(0)$, i.e. the equality $||B(0,\hat{\mathcal{E}}_{min}(0))|| = 1$ is true. Then for any $k\in\mathbb{T}^d\setminus\{0\}$ the operator $H(k),\ k\in\mathbb{T}^d$ has eigenvalues below the threshold $\hat{\mathcal{E}}_{min}(k)$. Moreover, each eigenvalue $Z(k)$ of the operator $H(k), k\in\ T^d\setminus\ \{0\}$ satisfies the inequality $Z(k) > \hat{\mathcal{E}}_{min}(0)$.

At the same time, our perturbative result is that if the threshold $z = \hat{\mathcal{E}}_{min}(0)$ is a regular point of the essential spectrum of the operator $H(0)$, then for small perturbations of the quasimomentum it does not generate new eigenvalues.

Theorem 4. Let $d \geq 1$. Assume Hypothesis and the threshold $\hat{\mathcal{E}}_{min}(0)$ is a regular point of the essential spectrum of the operator $H(0)$, i.e. the inequality $\left\|B\left(0, \hat{\mathcal{E}}_{min}(0)\right)\right\| < 1$ holds. Then there exists a neighborhood $U(0) \subset \mathbb{T}^d$ of the point $0 \in \mathbb{T}^d$ such that for all $k \in U(0)$ the operator $H(k)$ does not have eigenvalues below the threshold $\hat{\mathcal{E}}_{min}(k)$ and for $k \in \mathbb{T}^d \setminus U(0) \subset \mathbb{T}^d$ the operator $H(k)$ can have its eigenvalue below the threshold $\hat{\mathcal{E}}_{min}(k)$. Moreover, each eigenvalue $Z(k)$ of the operator $H(k), k \in \mathbb{T}^d \setminus U(0)$ satisfies the inequality $Z(k) > \hat{\mathcal{E}}_{min}(0)$.

Remark 2. Since the system of fermions is considered in the dissertation, in contrast to the case of arbitrary particles, in this case the threshold phenomenon occurs for all lattice dimensions $d \geq 1$. In addition, in this case, the generalized Birman-Schwinger principle formulated and proved by us allows us to judge the virtual or eigenstate of the Schrödinger operator $H(0)$, $0 \in \mathbb{T}^d$ and formulate the main results using the generalized Birman-Schwinger operator introduced by us.

Let the operator $H(0)$ have $n \geq 1$ eigenvalues $Z_1(0) \leq \cdots \leq Z_n(0)$ (counting multiplicities) that lie below the threshold $\hat{\mathcal{E}}_{min}(0)$ and let $\mathcal{H}_n(0) \subset \mathcal{H} = \ell^{2,o}(\mathbb{Z}^d)$ be n-dimensional invariant subspace spanned by all eigenvectors corresponding to the eigenvalues $Z_1(0) \leq \ldots \leq Z_n(0)$ and $\mathcal{H}_n^{\perp}(0) = \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_n \subset \ell^{2,o}(\mathbb{Z}^d)$. Let the operator $H^{\perp}(0)$ be part of $H(0)$ in the subspace $\mathcal{H}_n^{\perp}(0)$, which does not have a discrete spectrum below the threshold $\hat{\mathcal{E}}_{min}(0)$ and $B^{\perp}(0, \hat{\mathcal{E}}_{min}(0))$ is the Birman-Schwinger operator corresponding to $H^{\perp}(0)$. Then the following corollaries follow from the theorems Theorem 3 and Theorem 4.

Corollary 2. Let $d \geq 1$. Suppose that the assumptions of the theorem Theorem 3 are satisfied and the operator $H(0)$ has $n \geq 1$ eigenvalues below the threshold of the essential spectrum, and also the threshold $\hat{\mathcal{E}}_{min}(0)$ is a singular point of the essential spectrum of the operator $H^{\perp}(0)$, i.e. the equality $||B^{\perp}(0, \hat{\mathcal{E}}_{min}(0))|| = 1$ holds. Then for all $k \in \mathbb{T}^d \setminus \{0\}$ the operator $H(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$ has at least $n+1$ eigenvalues below the threshold $\hat{\mathcal{E}}_{min}(k)$. Moreover, for each eigenvalue $Z(k)$ of the operator $H(k), k \in \mathbb{T}^d \setminus \{0\}$ the inequality $Z(k) > Z_1(0)$ holds.

Corollary 3. Let $d \geq 1$. Assume Hypothesis. Suppose the operator $H(0)$ has $n \geq 1$ eigenvalues below the threshold of the essential spectrum and the inequality $||B^{\perp}(0, \hat{\mathcal{E}}_{min}(0))|| < 1$, i.e. the threshold $z = \hat{\mathcal{E}}_{min}(0)$ is a regular point of the essential spectrum of the operator $H^{\perp}(0)$. Then there exists a neighborhood $U(0) \subset \mathbb{T}^d$ of the point $0 \in \mathbb{T}^d$ such that for all $k \in U(0)$ the operator $H(k)$ has only n eigenvalues below the threshold $\hat{\mathcal{E}}_{min}(k)$, and for all $H(k)$, $k \in \mathbb{T}^d \setminus U(0)$

the operator $H(k)$ has at least n eigenvalues below the threshold $\hat{\mathcal{E}}_{min}(k)$. Moreover, for each eigenvalue $Z(k)$ of the operator $H(k)$, $k \in \mathbb{T}^d \setminus U(0)$, the inequality $Z(k) > Z_1(0)$ holds.

CONCLUSION

The dissertation is devoted to study essential and discrete spectrum of the two particle Schrödinger operator on a lattice.

The main results of the research are as follows:

The presence or absence and the number of eigenvalues of the two-particle Schrödinger operator corresponding to a system of two fermions on the one-dimensional lattice with the interaction of the nearest sites, depending on the two-particle quasi-momentum and the interaction energy of the particles, was completely studied;

The two-particle discrete Schrödinger -type operator is constructed, associated with a system of two fermions on the two-dimensional cubic lattice interacting through a short-range potential; the existence of eigenvalues lying below the essential spectrum of the operator for $k = 0$ and all $\mu > 0$ is proved if the unperturbed part with a dispersion relation having a degenerate minimum for $0 \in \mathbb{T}^2$;

The existence of eigenvalues of the Schrödinger operator is proved below the threshold of the essential spectrum for any value of the nonzero quasi-momentum for a wide class of the two-particle Schrödinger operators corresponding to a system of two fermions on an integer cubic lattice for any dimension;

The threshold of the essential spectrum of the two-particle Schrödinger operator, being a singular point, i.e., as a virtual level or threshold eigenvalue, generates or does not generate eigenvalues outside the essential spectrum for all nonzero values of the quasi-momentum of the system and all lattice dimensions is established and proved.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.02.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
САМАРКАНДСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ**

САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

АБДУХАКИМОВ САИДАКБАР ХАЗРАТКУЛ УГЛИ

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЧИСЛЕ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ СИСТЕМЫ ДВУХ ФЕРМИОНОВ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ НА РЕШЕТКЕ

01.01.01 – Математический анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Самарканд – 2021

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за B2021.2.PhD/FM557

Диссертация выполнена в Самаркандском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.samdu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный консультант:	**Лакаев Саидахмат Норжигитович** доктор физико-математических наук, профессор, академик
Официальные оппоненты:	**Ботиров Голибжон Исроилович** доктор физико-математических наук (DSc)
	Расулов Тулкин Хусенович кандидат физико-математических наук, доцент
Ведущая организация:	**Ургенчский государственный университет**

Защита диссертации состоится «29» 12 2021 года в «10^{00}» часов на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 при Самаркандском государственном университете. (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (+99866)231-06-32, факс: (+99866) 235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Самаркандского государственного университета (зарегистрирована за №90). (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (+99866)231-06-32, факс: (+99866) 235-19-38).

Автореферат диссертации разослан «17» 12 2021 года.
(протокол рассылки № 1 от «17» 12 2021 года).

А.С. Солеев
Председатель научного совета по присуждению научных степеней, доктор физико-математических наук, профессор

А.М. Халхужаев
Ученый секретарь научного совета по присуждению научных степеней, доктор физико-математических наук

И.А.Икромов
Заместитель председателя научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, доктор физико-математических наук, профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Целью исследования - является исследование существенного и дискретного спектров двухчастичного оператора Шрёдингера на решетке.

Объектом исследования Оператор Шредингера, соответствующий двухчастичной системе на кубической решетке.

Научная новизна исследования полностью исследован наличие или отсутствие и количество собственных значений двухчастичного оператора Шредингера, соответствующего системе двух фермионов на одномерной решетке с взаимодействием ближайших узлах, в зависимости от двухчастичного квазиимпульса и энергии взаимодействия частиц;

Построен оператор типа двухчастичного оператора Шредингера, соответствующего системе двух фермионов на двумерной кубической решетке, взаимодействующих с помощью короткодействующего потенциала. Доказано существование собственных значений, лежащих ниже существенного спектра оператора при $k = 0$ и всех $\mu > 0$, если невозмущенная часть представляет собой оператор типа свертки с дисперсионным соотношением, имеющим вырожденный минимум в $0 \in \mathbb{T}^2$;

Доказано существование собственных значений ниже порога существенного спектра при ненулевом значении квазиимпульса для широкого класса двухчастичных операторов Шредингера, соответствующих системе двух фермионов на целочисленной кубической решетке $\mathbb{Z}^d, d \geq 1$;

Установлен, что порог существенного спектра двухчастичного оператора Шредингера, будучи сингулярной точкой, т. е. как виртуальный уровень или пороговое собственное значение, порождает или не порождает собственные значения вне существенного спектра при всех ненулевых значениях квазиимпульса системы для всех размерностей решетки.

Внедрение результатов исследования. На основе научных результатов для существенного и дискретного спектров двухчастичного оператора Шрёдингера на решетке:

из методов доказательств существования собственных значений ниже порога существенного спектра при ненулевом значении квазиимпульса для широкого класса двухчастичных операторов Шредингера, соответствующих системе двух фермионов на целочисленной кубической решетке $\mathbb{Z}^d, d \geq 1$ использованы в зарубежном гранте AP05131268 на тему «Разработка методов решения классических и неклассических краевых задач для эллиптических уравнений и их дробных аналогов» (Международный казахско-турецкий университет имени Ходжа Ахмеда Ясави, справка от 2 ноября 2021 года). Свойства собственных значений двухчастичного оператора Шредингера, соответствующего системе двух фермионов на решетке, позволило исследовать методы построения собственных функций и собственных значений некоторых краевых задач для нелокального оператора Лапласа;

из результатов о зависимости существования или отсутствия, а также числа собственных значений от двухчастичного квазиимпульса и энергии взаимодействия оператора Шредингера, соответствующего системе двух фермионов, взаимодействующих на соседних узлах решётки, использовалась в фундаментальном проекте OT-F4-69 «Гармонический анализ, степенная геометрия и их приложения к задачам математической физики» (Справка Самаркандского Государственного университета от 23 ноября 2021 года № 10-4720). Отсутствие собственных значений вне непрерывного спектра для дискретного стационарного оператора Шредингера позволило показать, что уравнение Шредингера не имеет решений, стремящихся к нулю при стремлении времени к бесконечности.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 80 страницы.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
LIST OF PUBLISHED WORKS
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

I бўлим (part I; I часть)

1. S.N.Lakaev, S.Kh.Abdukhakimov. Threshold effects in a two-fermion system on an optical lattice // Theoretical and Mathematical Physics. – Moscow, 2020. – Vol.203. – №2. – P. 251-268. (№ 3. Scopus. IF=0.834).
2. S.N.Lakaev, S.Kh.Abdukhakimov. On the existence of bound states of a system of two fermions interacting on a lattice // Bulletin of the Institute of Mathematics. – Ташкент, 2021. – Vol.4. – №4. – P. 19-27.
3. S.Kh.Abdukhakimov. The existence and location of eigenvalues of the two particle discrete Schrödinger operators //Scientific journal of Samarkand University. – Samarkand, 2021. – №5. – P. 33-43. (01.00.00; №02).
4. С.Н.Лакаев, С.Х.Абдухакимов. Панжарадаги икки фермионли системага мос дискрет Шредингер оператори хос кийматлари // Scientific journal of Samarkand University. – Samarkand, 2017. – №3. – P. 17-22. (01.00.00; №02).

II бўлим (part II; II часть)

5. С.Н.Лакаев, С.Х.Абдухакимов. The existence and location of eigenvalues of the two particle discrete Schrodinger operators // «Frontier in mathematics and computer science» номли халкаро конференсияси. – Тошкент, 2020, 12-15 октябр, 90 бет.
6. С.Н.Лакаев, С.Х.Абдухакимов.The Fermi-Hubbard model with nearest-neighbor interaction: exactly solvable case // «Современные методы математической физики и их приложения» мавзусидаги республика илмий конференцияси. – Тошкент, 2020, 17-18 ноябр, 145-146 бет.
7. С.Н.Лакаев, С.Х.Абдухакимов. Threshold effects in a syst em of two fermions in optical lattice // «Фундаментал математика муаммолари ва уларнинг татбилари» мавзусидаги республика илмий-амалий конференцияси. – Навоий, 2019, 25 май, 55-56 бет.
8. С.Н.Лакаев, С.Х.Абдухакимов, М.О. Ахмадова. Панжарадаги икки фермионли системага мос дискрет Шредингер оператори хос қийматлари // «Новые результаты математики и их приложения» республиканской научной конференции. – Самарканд, 2018, 14-15 май, 62-64 бет.
9. С.Н.Лакаев, С.Х.Абдухакимов. Собственны значения оператора Шредингера для системы двухфермионов на решетке // «Mathematical analysis and its application to mathematical physics» scientific program of the international conference. - Samarkand, 2018, September 17-20, pp: 72-73.

10. С.Н.Лакаев, С.Х.Абдухакимов. Панжарадаги икки фермионли системага мос дискрет Шредингер оператори хос қийматлари // «Аник фанларни касбга йуналтириб укитиш муаммолари ва ечимлари» республика илмий-амалий конференцияси. – Навоий, 2018, 23 ноябр, 9-10 бет.

11. С.Н.Лакаев, С.Х.Абдухакимов. Панжарадаги икки фермионли системага мос дискрет Шредингер оператори хос қийматлари // «Замонавий топология муаммолари ва тадбиклари» номли халкаро конференсияси. – Тошкент, 2017, 11-12 май, 66-68 бет.