

**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI**



**NAMANGAN MUHANDISLIK-TEXNOLOGIYA INSTITUTI
«UMUMTEXNIKA FANLARI»
KAFEDRASI**

**«Прикладная механика»
fanidan**

O‘QUV-USLUBIY MAJMUA

Texnologik mashina va jihozlar (to‘qimachilik, yengil va paxta sanoati)

Bilim sohasi: 300000- Ishlab chiqarish-texnik soha
Ta’lim sohasi: 320000-Ishlab chiqarish texnologiyalari
Ta’lim yo’nalishi: 5320300-Texnologik mashilar va jihozlar
(to‘qimachilik, yengil va paxta sanoati)

Namangan – 2021 yil

Fan dasturi Oliy va o'rta maxsus, professional ta'limi yo'nalishlari bo'yicha O'quv-uslubiy birlashmalar faoliyatini Muvofiqlashtiruvchi Kengashning 2020__ yil "_30_" __10__dagi _6_-sonli bayonnoma bilan ma'kullangan.

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligining 2020__ yil "_7_" __12__dagi __648__ - sonli buyrug'i bilan ma'qullangan fan dasturlarini tayanch oliy ta'lim muassasasi tomonidan tasdiqlashga rozilik berilgan.

Fan dasturi 2020 yil "_7_" __10__da Toshkent to'qimachilik va yengil sanoat institutida ishlab chiqildi.

Tuzuvchi: Karimov A. "UTF" kafedrasida dotsenti v.b., t.f.n.

Taqrizchi: Tojiboev M. "TTDIT" kafedrasida dotsenti, t.f.n.

Namangan muhandislik- texnologiya instituti o'quv bo'limida son bilan ro'yhatga olingan.

O'quv bo'lim boshlig'i

B.Nigmatov

2021 yil.

1.Maruza matni.....	4
2.Amaliyot materiallar.....	85
3.Glossariy.....	135
4.Fan dasturi.....	137
5.Ishchi fan dasturi.....	148
6.Testlar.....	156
7.Uslubiy ishlar.....	160

1.Техт лекции

1-Лекция.

Введение и основные понятия. Задачи курса сопротивление материалов.

План.

1. Введение и основные понятия.
2. Задачи курса сопротивление материалов.

1. Введение и основные понятия

1. Сопротивление материалов – наука о прочности, жесткости и надежности элементов инженерных конструкций. Методами сопротивления материалов ведутся практические расчеты и определяются необходимые, как говорят, надежные размеры деталей машин, различных конструкций и сооружений.

Основные понятия сопротивления материалов опираются на законы и теоремы общей механики и в первую очередь на законы статики, без знания которых изучение данного предмета становится практически невозможным.

В отличие от теоретической механики сопротивление материалов рассматривает задачи, где наиболее существенными являются свойства деформируемых тел, а законы движения тела, как жесткого целого, не только отступают на второй план, но в ряде случаев являются попросту несущественными.

Сопротивление материалов имеет целью создать практически приемлемые простые приемы расчета типичных, наиболее часто встречающихся элементов конструкций. Необходимость довести решение каждой практической задачи до некоторого числового результата заставляет в ряде случаев прибегать к упрощающим гипотезам – предположениям, которые оправдываются в дальнейшем путем сопоставления расчетных данных с экспериментом.

Необходимо отметить, что первые заметки о прочности упоминаются в записках известного художника ЛЕОНАРДО Де ВИНЧИ, а начало науки о сопротивлении материалов связывают с именем знаменитого физика, математика и астронома ГАЛИЛЕО ГАЛИЛЕЯ. В 1660 году Р.ГУК сформулировал закон, устанавливающий связь между нагрузкой и деформацией: *«Какова сила – таково и действие»*. В XVIII веке необходимо отметить работы Л.ЭЙЛЕРА по устойчивости конструкций. XIX – XX века являются временем наиболее интенсивного развития науки в связи с общим бурным ростом строительства и промышленного производства при безусловно огромном вкладе ученых-механиков России.

2. Задачи курса сопротивление материалов.

Итак, мы будем заниматься **твердыми деформированными телами с изучением их физических свойств.**

Введем основные понятия, принимаемые при изучении дисциплины.

Прочность – это способность конструкции выдерживать заданную нагрузку, не разрушаясь.

Жесткость – способность конструкции к деформированию в соответствие с заданным нормативным регламентом.

Деформирование – свойство конструкции изменять свои геометрические размеры и форму под действием внешних сил

Устойчивость – свойство конструкции сохранять при действии внешних сил заданную форму равновесия.

Надежность – свойство конструкции выполнять заданные функции, сохраняя свои эксплуатационные показатели в определенных нормативных пределах в течение требуемого промежутка времени.

Ресурс – допустимый срок службы изделия. Указывается в виде общего времени наработки или числа циклов нагружения конструкции.

Отказ – нарушение работоспособности конструкции.

Опираясь на вышесказанное, можно дать определение прочностной надежности.

Прочностной надежностью называется отсутствие отказов, связанных с разрушением или недопустимыми деформациями элементов конструкции.

На рис.1 приведена структура модели прочностной надежности. Она включает известные модели или ограничения, которые априорно накладываются на свойства материалов, геометрию, формы изделия, способы нагружения, а также модель разрушения. Инженерные модели сплошной среды рассматривают материал как сплошное и однородное тело, наделенное свойством однородности структуры. Модель материала наделяется свойствами упругости, пластичности и ползучести.

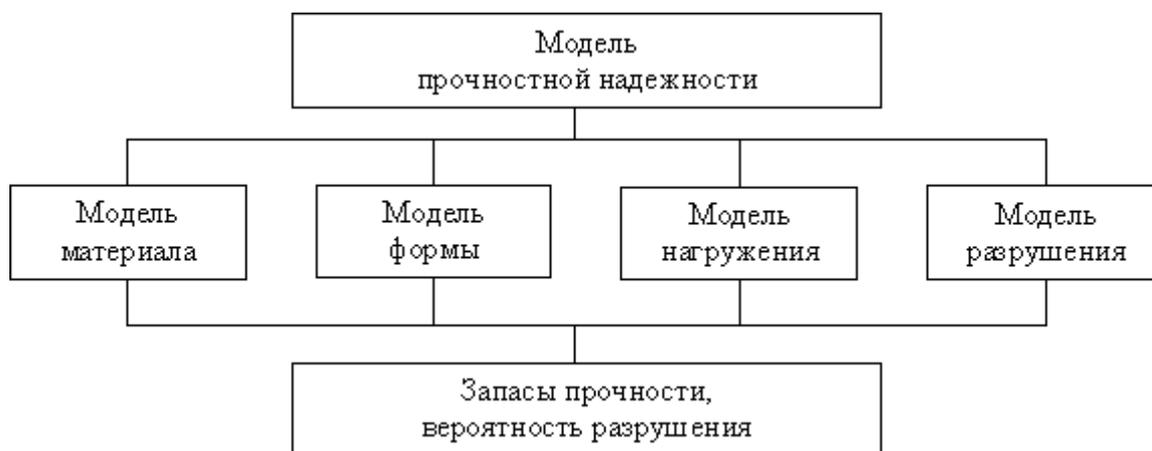


Рис.1. Структура модели прочностной надежности элементов конструкций

А) Модель материала

Упругостью называется свойство тела восстанавливать свою форму после снятия внешних нагрузок.

Пластичностью называется свойство тела сохранять после прекращения действия нагрузки, или частично полученную при нагружении, деформацию.

Ползучестью называется свойство тела увеличивать деформацию при постоянных внешних нагрузках.

Б) Модель материала

Основными моделями формы в моделях прочностной надежности, как известно, являются: стержни, пластины, оболочки и пространственные тела (массивы), рис.2. Модели

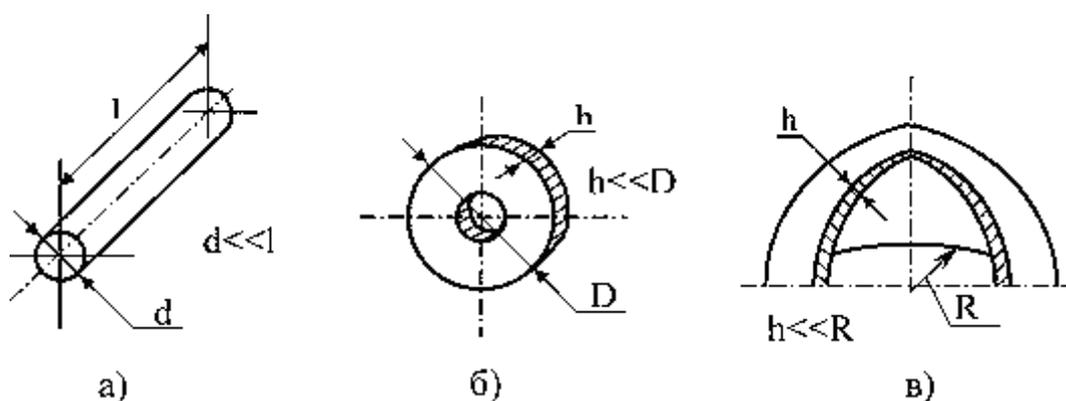


Рис.2. Основные модели формы в моделях прочностной надежности: а) стержень, б) пластина, в) оболочка

С) Модель нагружения содержат схематизацию внешних нагрузок по величине, характеру распределения (сосредоточенная или распределенная сила или момент), а также воздействию внешних полей и сред.

Внешние силы, действующие на элемент конструкции, подразделяются на 3 группы: 1) сосредоточенные силы, 2) распределенные силы, 3) объемные или массовые силы.

Сосредоточенные силы — силы, действующие на небольших участках поверхности детали (например давление шарика шарикоподшипника на вал, давление колеса на рельсы и т.п.)

Распределенные силы приложены значительным участкам поверхности (например давление пара в паропроводе, трубопроводе, котле, давление воздуха на крыло самолета и т.д.)

Объемные или массовые силы приложены каждой частице материала (например силы тяжести, силы инерции)

После обоснованного выбора моделей формы, материала, нагружения переходят к непосредственной оценке надежности с помощью моделей разрушения.

Д) Модели разрушения представляют собой уравнения, связывающие параметры работоспособности элемента конструкции в момент разрушения с параметрами, обеспечивающими прочность. Эти уравнения (условия) называют условиями прочности. Обычно рассматриваются в зависимости от условий нагружения четыре модели разрушения:

- статического разрушения,
- длительно статического разрушения,
- малоциклового статического разрушения,
- усталостного разрушения.

При малом числе циклов ($N < 10^2$) развиваются значительные пластические деформации (статическое разрушение), при большом числе циклов ($N > 10^5$) пластические деформации отсутствуют (усталостное разрушение). В промежуточной области ($10^2 < N < 10^5$) разрушение носит смешанный характер (малоцикловое разрушение). Если на элемент конструкции действует высокая температура (для алюминиевых сплавов свыше 200 C° , для стальных и титановых сплавов свыше 400 C° , для жаропрочных сплавов свыше 600 C°), но в этом случае рассматривается так называемая длительная прочность материала.

Таким образом, сопротивление материалов зависит не только от величин действующего усилия, но и от длительности самого воздействия.

Поскольку изучение сопротивления материалов базируется прежде всего на таких известных понятиях как сила, пара сил, связи, реакции в связях, равнодействующая система внешних сил, то...

2-Лекция.Растяжение-сжатие.

Внутренние усилия при растяжении-сжатии.

Осевое (центральное) растяжение или сжатие прямого бруса вызывается внешними силами, вектор равнодействующей которых совпадает с осью бруса. При растяжении или сжатии в поперечных сечениях бруса возникают только продольные силы N . Продольная сила N в некотором сечении равна алгебраической сумме проекции на ось стержня всех внешних сил, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения. По правилу знаков продольной силы N принято считать, что от растягивающих внешних нагрузок возникают положительные продольные силы N , а от сжимающих - продольные силы N отрицательны (рис. 5).

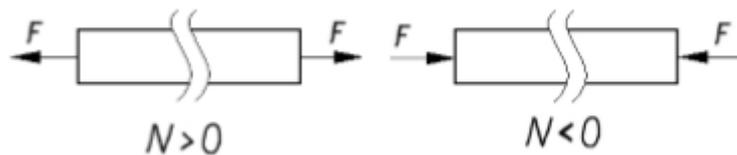


Рис.5. Правило знаков продольных сил

Чтобы выявить участки стержня или его сечения, где продольная сила имеет наибольшее значение, строят эпюру продольных сил, применяя метод сечений, подробно рассмотренный в статье:

[Анализ внутренних силовых факторов в статистически определимых системах](#)

Ещё настоятельно рекомендую взглянуть на статью:

[Расчёт статистически определимого бруса](#)

Если разберёте теорию в данной статье и задачи по ссылкам, то станете гуру в теме "Растяжение-сжатие" =)

Напряжения при растяжении-сжатии.

Определенная методом сечений продольная сила N , является равнодействующей внутренних усилий распределенных по поперечному сечению стержня (рис. 2, б). Исходя из определения напряжений, согласно выражению (1), можно записать для продольной силы:

$$N = \int_A \sigma dA$$

где σ — нормальное напряжение в произвольной точке поперечного сечения стержня. Чтобы **определить нормальные напряжения** в любой точке бруса необходимо знать закон их распределения по поперечному сечению бруса. Экспериментальные исследования показывают: если нанести на поверхность стержня ряд взаимно перпендикулярных линий, то после приложения внешней растягивающей нагрузки поперечные линии не искривляются и остаются параллельными друг другу (рис.6, а). Об этом явлении говорит **гипотеза плоских сечений** (гипотеза Бернулли): сечения, плоские до деформации, остаются плоскими и после деформации.

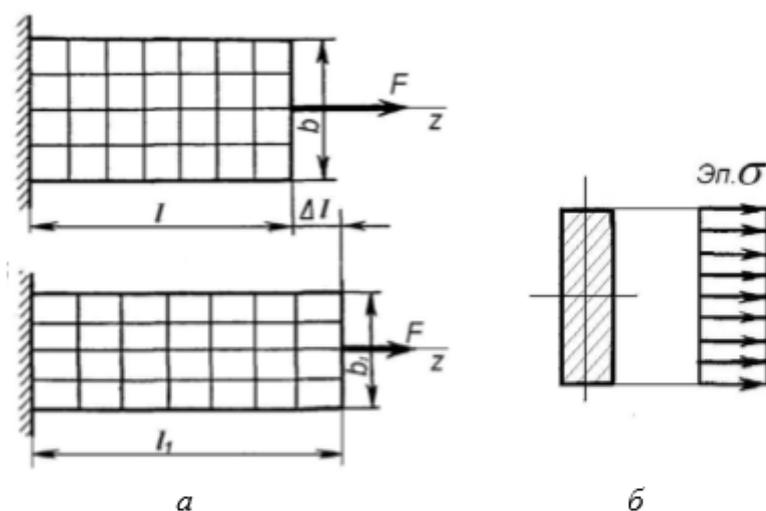


Рис. 6. К определению напряжений при центральном растяжении:

а – механизм деформации растяжении (сжатия); *б* - эпюра распределения напряжений в поперечном сечении растянутого бруса.

Так как все продольные волокна стержня деформируются одинаково, то и напряжения в поперечном сечении одинаковы, а эпюра напряжений σ по высоте поперечного сечения стержня выглядит, как показано на рис.6, б. Видно, что напряжения равномерно распределены по поперечному сечению стержня, т.е. во всех точках сечения $\sigma = \text{const}$. Выражение для определения **величины напряжения** имеет вид:

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

Таким образом, нормальные напряжения, возникающие в поперечных сечениях растянутого или сжатого бруса, равны отношению продольной силы к площади его поперечного сечения. **Нормальные напряжения принято считать положительными при растяжении и отрицательными при сжатии.**

Деформации при растяжении-сжатии.

Рассмотрим деформации, возникающие при растяжении (сжатии) стержня (рис.б, а). Под действием силы F брус удлиняется на некоторую величину Δl называемую абсолютным удлинением, или абсолютной продольной деформацией, которая численно равна разности длины бруса после деформации l_1 и его длины до деформации l

$$\Delta l = l_1 - l$$

Отношение абсолютной продольной деформации бруса Δl к его первоначальной длине l называют относительным удлинением, или **относительной продольной деформацией**:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

При растяжении продольная деформация положительна, а при сжатии – отрицательна. Для большинства конструкционных материалов на стадии упругой деформации выполняется **закон Гука** (4), устанавливающий линейную зависимость между напряжениями и деформациями:

$$\sigma = E\varepsilon$$

где модуль продольной упругости E , называемый еще **модулем упругости первого рода** является коэффициентом пропорциональности, между напряжениями и деформациями. Он характеризует жесткость материала при растяжении или сжатии (табл. 1).

Таблица 1

Модуль продольной упругости для различных материалов

Материал	E , МПа
Сталь	$2 \cdot 10^5$
Медь	$1 \cdot 10^5$
Дерево	$1 \cdot 10^4$
Алюминий	$0,67 \cdot 10^5$
Чугун	$1,6 \cdot 10^5$
Мрамор	$0,56 \cdot 10^5$

Абсолютная поперечная деформация бруса равна разности размеров поперечного сечения после и до деформации:

$$\Delta b = b_1 - b$$

Соответственно, **относительную поперечную деформацию** определяют по формуле:

$$\varepsilon' = \frac{\Delta b}{b}$$

При растяжении размеры поперечного сечения бруса уменьшаются, и ε' имеет отрицательное значение. Опытom установлено, что в пределах действия закона Гука при растяжении бруса поперечная деформация прямо пропорциональна продольной. Отношение поперечной деформации ε' к продольной деформации ε называется коэффициентом поперечной деформации, или **коэффициентом Пуассона μ** :

$$\mu = \frac{|\varepsilon'|}{\varepsilon}$$

Экспериментально установлено, что на упругой стадии нагружения любого материала значение $\mu = \text{const}$ и для различных материалов значения коэффициента Пуассона находятся в пределах от 0 до 0,5 (табл. 2).

Таблица 2

Коэффициент Пуассона.

Материал	μ
Сталь	0,25 - 0,33
Медь	0,31 - 0,34
Бронза	0,32 - 0,35
Алюминий	0,32 - 0,36
Чугун	0,23 - 0,27
Камень	0,16 - 0,34
Бетон	0,08 - 0,18
Фанера	0,07
Пробка	≈ 0

Абсолютное удлинение стержня Δl прямо пропорционально продольной силе N :

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}$$

Данной формулой можно пользоваться для вычисления абсолютного удлинения участка стержня длиной l при условии, что в пределах этого участка значение продольной силы **постоянно**. В случае, когда продольная сила N изменяется в пределах участка стержня, Δl определяют интегрированием в пределах этого участка:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N \cdot dl}{E \cdot A}$$

Произведение $(E \cdot A)$ называют **жесткостью сечения** стержня при растяжении (сжатии).

Расчеты на прочность и жесткость при растяжении и сжатии.

Опасным сечением при растяжении и сжатии называется поперечное сечение бруса, в котором возникает максимальное нормальное напряжение. Допускаемые напряжения вычисляются по формуле:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{[n]}$$

где $\sigma_{\text{пред}}$ - предельное напряжение ($\sigma_{\text{пред}} = \sigma_{\text{T}}$ - для пластических материалов и $\sigma_{\text{пред}} = \sigma_{\text{в}}$ - для хрупких материалов); $[n]$ - коэффициент запаса прочности. Для пластических материалов $[n] = [n_{\text{T}}] = 1,2 \dots 2,5$; для хрупких материалов $[n] = [n_{\text{в}}] = 2 \dots 5$, а для древесины $[n] = 8 \div 12$.

3- Лекция. Растяжение и сжатие .

План.

- 1. Растяжение (сжатие) .**
- 2. Гипотеза плоских сечений-гипотеза Я.Бернулли.**

3. Расчеты на прочность и жесткость при растяжении (сжатии).

Растяжение (сжатие) - простой вид сопротивления, при котором стержень нагружен силами, параллельными продольной оси стержня и приложенными в центр тяжести его сечения.

Рассмотрим стержень, упруго растянутый центрально приложенными сосредоточенными силами P .

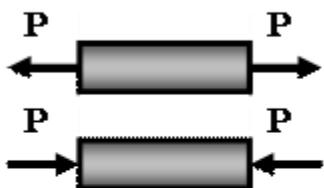


Рис. 9. Стержень при растяжении или сжатии

Прежде чем перейти к исследованию внутренних усилий и напряжений, возникающих в растянутом стержне, рассмотрим некоторые гипотезы, связанные с характером деформирования такого стержня и имеющие в сопротивлении материалов исключительно важное значение.

Принцип Сен-Венана: *в сечениях, достаточно удаленных от мест приложения сил, распределение напряжений и деформаций мало зависит от способа приложения нагрузок.*

Принцип Сен-Венана дает возможность вести расчет без учета местных (локальных) деформаций, возникающих вблизи точек приложения внешних сил и отличающихся от деформаций основного объема материала, что в большинстве случаев упрощает решение задачи.

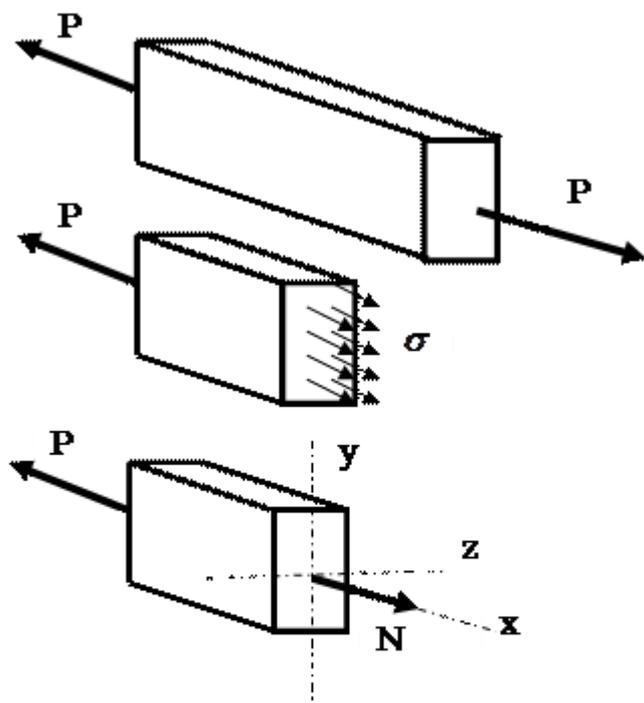


Рис.10. Стержень, нагруженный растягивающими силами, мысленно рассечен произвольным сечением.

Гипотеза плоских сечений (гипотеза Я.Бернулли): *поперечные сечения стержня плоские и перпендикулярные его оси до деформации остаются плоскими и перпендикулярными оси, и после деформации.*

Мысленно рассекая стержень, определим внутренние силы в растянутом стержне:

- а) стержень, нагруженный растягивающими силами P и находящийся в равновесии, рассекаем произвольным сечением;
- б) отбрасываем одну из частей стержня, а ее действие на другую часть компенсируем внутренними усилиями интенсивностью σ ;
- в) осевое внутреннее усилие N , возникающее в сечении стержня, определим, составляя уравнения равновесия для отсеченной части:

$$N = \sum F_x . \quad (2.1)$$

Проецируя внешнюю силу P , действующую на отсеченную часть стержня, на другие оси (z и y), а также составляя уравнения моментов относительно координатных осей, легко убедиться, что осевое усилие N является единственным внутренним усилием, возникающим в сечении стержня (остальные тождественно равны нулю).

Таким образом, при растяжении (сжатии) из шести внутренних усилий в сечении стержня возникает только одно — **продольная сила N**.

Нормальные напряжения σ_x , возникающие в сечении стержня, связаны с осевым усилием N следующим образом:

$$\sigma_x = \frac{dN}{dF}, \text{ или } N = \int_F \sigma_x \cdot dF. \quad (2.2)$$

Учитывая, что в соответствии с гипотезой Бернулли напряжения равномерно распределены по поперечному сечению (т.е. $\sigma_x = \text{const}$), можно записать:

$$N = \sigma_x \cdot F. \quad (2.3)$$

Таким образом, нормальные напряжения при растяжении (сжатии) определяются как

$$\sigma_x = \frac{N}{F}. \quad (2.4)$$

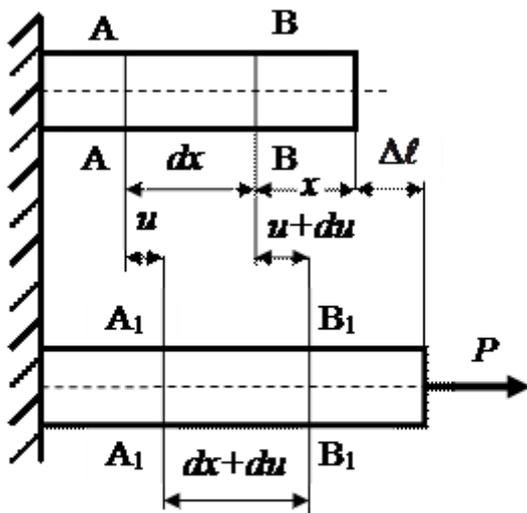


Рис. 11. Продольная деформация стержня при растяжении.

Рассмотрим стержень, находящийся под действием растягивающей нагрузки. Выделим (до деформации) двумя произвольными сечениями А-А и В-В бесконечно малый участок длиной dx на расстоянии x от свободного конца. Под действием внешней силы P сечение А-А переместится в положение А₁-А₁ на расстояние u , а сечение В-В - в положение В₁-В₁ на расстояние $u+du$ (du - бесконечно малая величина). Следовательно,

абсолютное удлинение отрезка dx равно разности его размеров до и после деформации $\Delta dx = du$.

Относительная продольная деформация точек сечения А-А стержня при растяжении

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \quad (2.5)$$

Для линейно-упругого материала связь между нормальными напряжениями и относительной деформацией при растяжении определяется законом Гука:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad , \quad (2.6)$$

или, учитывая, что $\sigma_x = N/F$,

$$\varepsilon_x = \frac{N}{F \cdot E} \quad , \quad (2.7)$$

где E - модуль нормальной упругости (модуль Юнга), постоянный коэффициент, который является константой материала (например, для стали $E=2 \cdot 10^{11}$ Па, для меди $E=1,2 \cdot 10^{11}$ Па, для титана $E=1,2 \cdot 10^{11}$ Па).

При растяжении стержень деформируется не только в продольном направлении, но и в поперечном.

Абсолютная поперечная деформация стержня определяется как разность его поперечных размеров до и после деформации:

$$\Delta a = a_1 - a \quad ;$$

$$\Delta b = b_1 - b \quad .$$

Относительная поперечная деформация стержня определяется отношением абсолютной поперечной деформации к соответствующему первоначальному размеру.

Относительная поперечная деформация при растяжении (сжатии) для изотропных материалов во всех направлениях одинакова:

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta a}{a}; \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta b}{b} \quad (2.11)$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_{\text{попер}} .$$

Между относительной поперечной и продольной деформациями при растяжении (сжатии) в пределах применимости закона Гука существует постоянное соотношение, которое называется коэффициентом поперечных деформаций (коэффициентом Пуассона μ).

Коэффициент Пуассона равен абсолютной величине отношения поперечной деформации к продольной

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon_{\text{попер}}}{\varepsilon_{\text{прод}}} \right| = \left| \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \right| = \left| \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \right| . \quad (2.12)$$

Коэффициент Пуассона – безразмерная величина.

Коэффициент Пуассона μ также как и модуль Юнга E характеризует упругие свойства материала. Для изотропных материалов коэффициент Пуассона находится в пределах от 0 до 0,5 (сталь $\mu \approx 0,3$; каучук $\mu \approx 0,5$).

Расчеты на прочность и жесткость при растяжении (сжатии)

Одна из основных задач сопротивления материалов – подобрать размеры деталей, обеспечивающие прочность и жесткость этих деталей, подверженных тому или иному силовому, температурному или другому воздействию. Указанные размеры можно определить из расчета на прочность или жесткость. При растяжении и сжатии допускаемые напряжения обозначают $[\sigma_p]$, $[\sigma_{сж}]$ соответственно.

Если из расчета известны максимальные и минимальные (по алгебраической величине) напряжения, возникающие в опасном сечении детали, то условия прочности могут быть записаны следующим образом:

$$\sigma_{\text{max}} \leq [\sigma_p]; \quad \sigma_{\text{min}} \leq [\sigma_{сж}] .$$

Если материал одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, что характерно для пластичных материалов (более строго для материалов в пластичном состоянии), а значит

$$[\sigma_p] = [\sigma_{сж}] = [\sigma] ,$$

$$\sigma_{\max} = \frac{|N_{\max}|}{F} \quad (2.15)$$

и условие прочности при растяжении (сжатии) запишем в виде:

$$\sigma_{\max} = \frac{|N_{\max}|}{F} \leq [\sigma] \quad (2.16)$$

В некоторых случаях для обеспечения нормальной работы машин и сооружений размеры их деталей нужно выбирать так, чтобы обеспечивалось условие жесткости, то есть ограничить предельные деформации (перемещения) элементов конструкции.

Условие жесткости, ограничивающее изменение длины элемента, имеет следующий общий вид: $\Delta l \leq [\Delta l]$,

где Δl - изменение размеров детали;

$[\Delta l]$ - допускаемая величина этого изменения.

Учитывая, что при растяжении (сжатии) абсолютное удлинение в общем виде определяется как алгебраическая сумма величин Δl по участкам

$$\Delta l = \sum \int \frac{N(x) \cdot dx}{E \cdot F(x)} \quad (2.17)$$

условие жесткости при растяжении (сжатии) запишем следующим образом:

$$|\Delta l| = \left| \sum \int \frac{N(x) \cdot dx}{E \cdot F(x)} \right| \leq [\Delta l] \quad (2.18)$$

4-Лекция. Механические свойства материалов при растяжении и сжатии. Диаграммы напряженного состояние.

План.

1.Методика проведения испытаний.

2.Диаграмма растяжения низкоуглеродистой стали.

3.Диаграмма низколегированной стали.

1.Методика проведения испытаний

При проектировании конструкций, машин и механизмов инженеру необходимо знать значения величин, характеризующих прочностные и деформационные свойства материалов. Их можно получить путем механических испытаний, проводимых в лабораториях на соответствующих испытательных машинах. Таких испытаний проводится много и самых различных, например испытания на твердость, сопротивляемость ударным и переменным нагрузкам, противодействие высоким температурам и т.д. Нами будут рассмотрены испытания на растяжение, они позволяют получить наибольшую информацию о механических свойствах материалов. Испытания проводятся в соответствии с ГОСТ 1497-89.

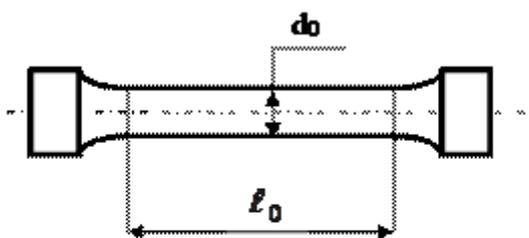


Рис. 3.1. Цилиндрический образец для испытаний на растяжение

При испытаниях на растяжение применяют цилиндрические или плоские образцы. Образцы имеют рабочую часть с начальной длиной l_0 , на которой определяется удлинение, и головки с переходным участком, форма и размеры которых зависят от способов их крепления в захватах машины (рис. 3.1). Различают длинные образцы с отношением $l_0/d_0 = 10$ и

короткие - $\ell_0/d_0 = 5$. Размеры образцов делают стандартными для того, чтобы результаты испытаний, полученные в разных лабораториях, были сравнимы.

Испытания проводят на разрывных или универсальных машинах. В зависимости от метода приложения нагрузки машины бывают с механическим или гидравлическим приводом. Все машины снабжены устройством для автоматической записи в определенном масштабе *диаграммы растяжения*, т.е. графика зависимости между растягивающей силой P и удлинением рабочей части образца Δl .

2. Диаграмма растяжения низкоуглеродистой стали

На рис. 3.2 изображена диаграмма растяжения низкоуглеродистой стали (ст.3), записанная с помощью специального устройства на испытательной машине.

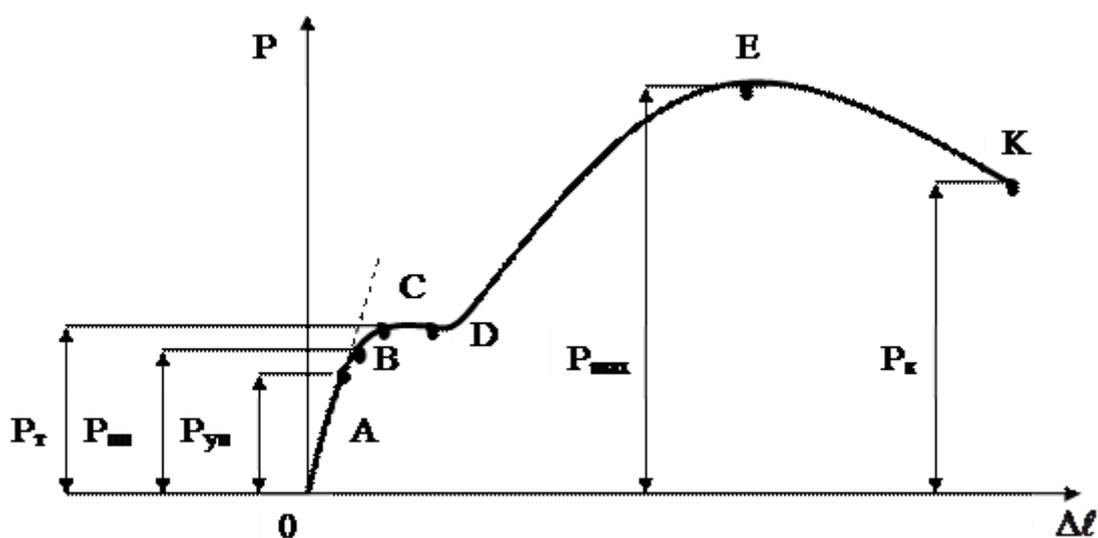


Рис.3.2. Диаграмма растяжения низкоуглеродистой стали.

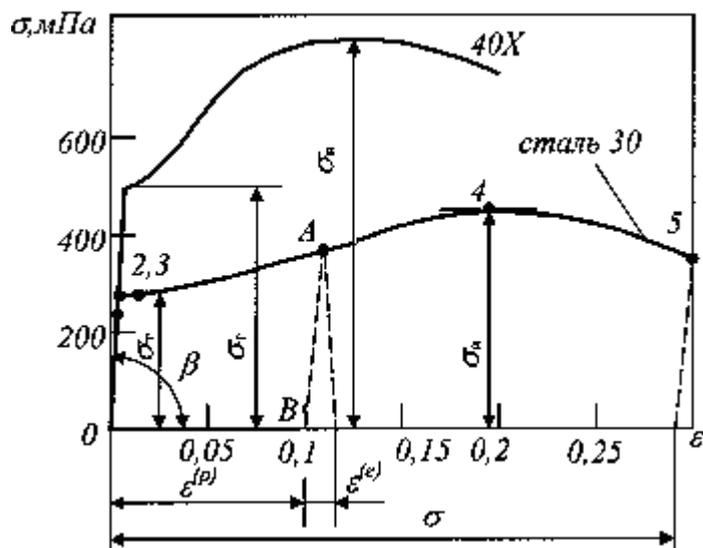


Рис.4. Диаграмма растяжения низкоуглеродистой стали

В начальной стадии нагружения до некоторой точки А диаграмма растяжения представляет собой наклонную прямую, что указывает на пропорциональность между нагрузкой и деформацией – справедливость закона Гука. Нагрузка, при которой эта пропорциональность еще не нарушается, на диаграмме обозначена через $P_{пц}$ и используется для вычисления предела пропорциональности:

$$\sigma_{пц} = \frac{P_{пц}}{F_0}, \quad (3.1)$$

где F_0 – площадь поперечного сечения образца до испытания.

Пределом пропорциональности $\sigma_{пц}$ называется наибольшее напряжение, до которого существует прямо пропорциональная зависимость между нагрузкой, и деформацией. Для ст.3 предел пропорциональности приблизительно равен $\sigma_{пц} = 195 \dots 200$ МПа.

Зона ОА называется зоной упругости. Здесь возникают только упругие, очень незначительные деформации. Данные, характеризующие эту зону, позволяют определить значение модуля упругости E .

После достижения предела пропорциональности деформация начинает расти быстрее, чем нагрузка, и диаграмма становится криволинейной. На этом участке в непосредственной близости от точки А находится точка В, соответствующая пределу упругости.

Пределом упругости $\sigma_{\text{уп}}$ называется максимальное напряжение, при котором в материале не обнаруживаются признаков пластической (остаточной) деформации.

Предел упругости существует независимо от закона прямой пропорциональности. Он характеризует начало перехода от упругой деформации к пластической.

У большинства металлов значения предела пропорциональности и предела упругости незначительно отличаются друг от друга. Поэтому обычно считают, что они практически совпадают. Для стали ст.3 $\sigma_{\text{уп}} = 205 \dots 210$ МПа.

При дальнейшем нагружении криволинейная часть диаграммы переходит в почти горизонтальный участок CD – площадку текучести. Здесь деформации растут практически без увеличения нагрузки. Нагрузка P_m , соответствующая точке D, используется при определении физического предела текучести:

$$\sigma_{\text{ж}} = \frac{P_m}{F_0} \quad (3.2)$$

Физическим пределом текучести $\sigma_{\text{ж}}$ называется наименьшее напряжение, при котором образец деформируется без заметного увеличения растягивающей нагрузки.

Предел текучести является одной из основных механических характеристик прочности металлов. Для стали ст.3 $\sigma_{\text{ж}} = 220 \dots 250$ МПа.

Зона BD называется зоной общей текучести. В этой зоне значительно развиваются пластические деформации. При этом у образца повышается температура, изменяются электропроводность и магнитные свойства.

Диаграмма после зоны текучести снова становится криволинейной. Образец приобретает способность воспринимать возрастающее усилие до

значения P_{max} - точка E на диаграмме. Усилие P_{max} используется для вычисления временного сопротивления:

$$\sigma_{\varepsilon} = \frac{P_{max}}{F_0} \quad (3.3)$$

Напряжение, соответствующее наибольшей нагрузке, предшествующей разрушению образца, называется **временным сопротивлением**.

Для стали марки ст.3 временное сопротивление $\sigma_{\varepsilon} = 370 \dots 470$ МПа.

Зона DE называется зоной упрочнения. Здесь удлинение образца происходит равномерно по всей его длине, первоначальная цилиндрическая форма образца сохраняется, а поперечные сечения изменяются незначительно и также равномерно.

При максимальном усилии или несколько меньшем его на образце в наиболее слабом месте возникает локальное уменьшение поперечного сечения – шейка (а иногда и две). Дальнейшая деформация происходит в этой зоне образца. Сечение в середине шейки продолжает быстро уменьшаться, но напряжения в этом сечении все время растут, хотя растягивающее усилие и убывает. Вне области шейки напряжения уменьшаются, и поэтому удлинение остальной, части образца не происходит. Наконец, в точке К образец разрушается. Сила, соответствующая точке К, называется разрушающей P_K , а напряжения – **истинным сопротивлением разрыву** (истинным пределом прочности), которые равны:

$$\sigma_K = \frac{P_K}{F_K} \quad (3.4)$$

где F_K - площадь поперечного сечения в месте разрыва.

Зона EK называется зоной местной текучести, Истинные напряжения в момент разрыва (в шейке) в образце из стали ст.3 достигают 900... 1000 МПа.

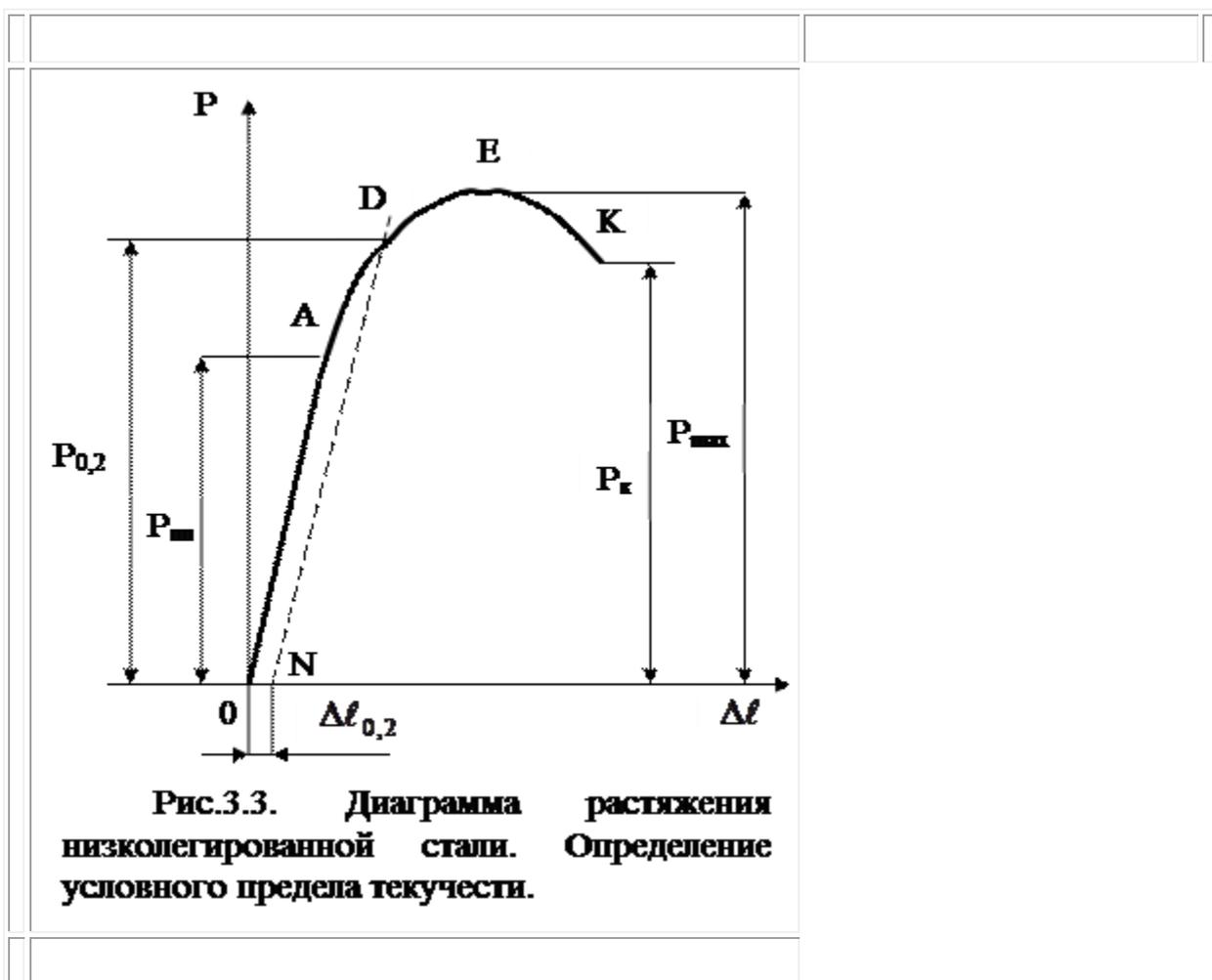
Интересен механизм разрушения образца из низкоуглеродистой стали. Образец разрушается, как правило, с образованием «чашечки» на одной его части и «конуса» - на другой. Этот излом называют чашечным или изломом «чашечка - конус».

Помимо указанных характеристик прочности, после разрушения образца определяют характеристики пластичности.

3. Диаграмма низколегированной стали

Диаграмма растяжения низколегированной стали изображена на рисунке. Аналогичную диаграмму имеют и другие пластичные материалы, например красная медь, сплавы алюминия.

В начале диаграммы между нагрузкой и деформацией тоже соблюдается прямо пропорциональная зависимость (закон Гука). Точка, где эта зависимость нарушается, соответствует пределу пропорциональности. После точки А прямолинейный участок диаграммы плавно переходит в криволинейный – зону пластических деформаций.



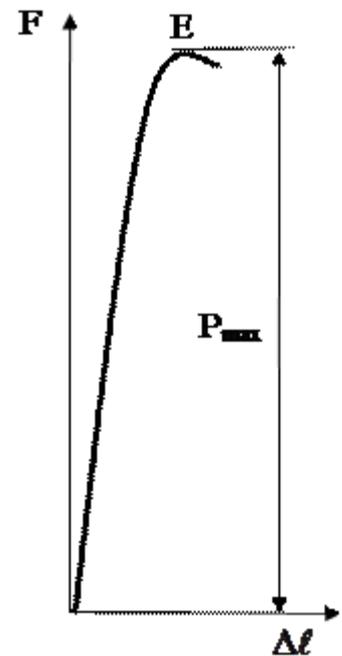


Рис.3.4. Диаграмма растяжения чугуна.

На диаграмме растяжения нет площадки текучести. Поэтому вместо физического предела текучести определяют **условный предел текучести** $\sigma_{0,2}$ (точка D на рис. 3.3) – напряжение, при котором остаточное удлинение достигает 0,2% от рабочей длины образца:

$$\sigma_{0,2} = \frac{P_{0,2}}{F_0} \quad (3.7)$$

Для определения нагрузки $P_{0,2}$ вычисляется значение заданного остаточного удлинения 0,2 % исходя из рабочей длины образца. Отрезок, соответствующий остаточной деформации АД, откладываем вправо от точки О (на рис.3.3 — отрезок ON). Из точки N проводится прямая, параллельная прямой ОА, до пересечения с диаграммой растяжения. Ордината точки пересечения D равна нагрузке $P_{0,2}$.

Допускаемые напряжения – это наибольшие напряжения, которые можно допустить в конструкции при условии его безопасной, надежной и долговечной работы.

Выбор коэффициента запаса прочности зависит:

- состояния материала (хрупкий, пластичный);
- характера нагрузки (статическая, динамическая или переменная);
- неточности задания величины внешней нагрузки;
- неточности расчетных схем и приближенности методов расчета;
- значимости проектируемого сооружения или конструкции и т.д.

Для пластичных материалов (конструкционных сталей) значение коэффициента запаса прочности принимается $n_{\text{пл}} = 1,4 \dots 1,6$.

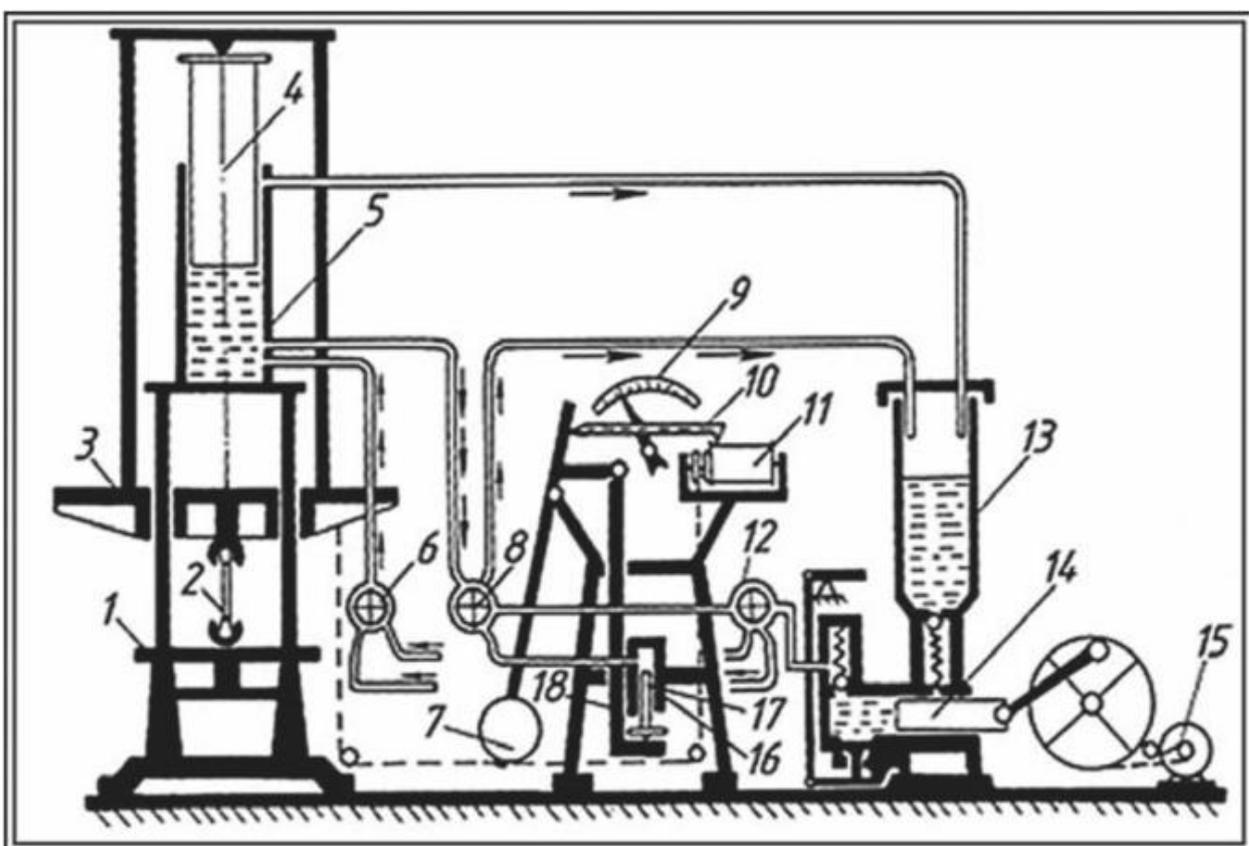
Для хрупких материалов – $n_{\text{х}} = 2,5 \dots 3$.

Следовательно, допускаемое напряжение для расчета пластичных материалов вычисляется по формуле:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пл}}}{n_{\text{пл}}}, \quad (3.8)$$

для хрупких

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{х}}}{n_{\text{х}}}. \quad (3.9)$$



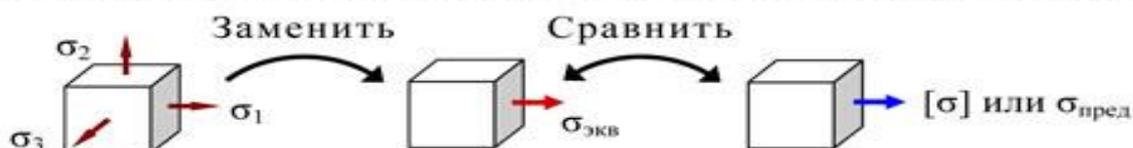
5-Лекция. Понятия о теориях прочности.

3.12. ПОНЯТИЯ О ТЕОРИЯХ ПРОЧНОСТИ

Теории прочности используются для оценки прочности конструкций в случае плоского и объемного напряженных состояний. При двух- и трехосном напряженном состоянии соотношения между нормальными и касательными напряжениями настолько разнообразны (тензор напряжений содержит девять компонентов, из которых шесть независимы), что экспериментальная проверка опасного состояния для каждого из соотношений практически исключается.

Задача несколько упрощается, если вместо шести компонентов напряжений рассматривать эквивалентные им три главных напряжения и найти такую их комбинацию, которая была бы равноопасной линейному напряженному состоянию, то есть простому растяжению или сжатию. Характеристики прочности и пластичности, полученные при испытании на растяжение, достаточно полно приведены в справочной литературе.

Суть теорий (гипотез, критериев) прочности состоит в том, что, определив главную причину разрушения материала (преимущественное влияние того или иного фактора), можно подобрать соответствующее эквивалентное напряжение при сложном напряженном состоянии, а затем сопоставить его с простым одноосным растяжением, как показано на схеме.



Эквивалентное напряжение $\sigma_{\text{эkv}}$ – напряжение, которое следует создать в растянутом образце, чтобы его напряженное состояние стало равноопасным с заданным.

Создан ряд теорий (гипотез, критериев) прочности (более 20), позволяющих определить вид функциональных зависимостей, представляющих сложное напряженное состояние эквивалентным ему одноосным напряженным состоянием.

В качестве причин наступления опасного состояния считают: а) нормальные напряжения – разрушение хрупкое, путем отрыва; б) линейные деформации; в) касательные напряжения – разрушение пластичное, путем сдвига; г) энергия деформации и другие.

Следует заметить, что опасное состояние как для пластичных материалов (момент появления больших остаточных деформаций), так и для хрупких (момент появления трещин) лежит на границе области упругого деформирования. Это позволяет при всех дальнейших вычислениях, относящихся к проверкам прочности, пользоваться формулами, выведенными при условии применимости закона Гука.

ГИПОТЕЗА НАИБОЛЬШИХ НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ (первая теория прочности)

Прочность при любом напряженном состоянии будет обеспечена, если максимальное нормальное напряжение не превзойдет допустимого, определенного при простом растяжении:

$$\sigma_{\text{эkv}(I)} = \sigma_1 \leq [\sigma].$$

Здесь $[\sigma]$ – допускаемое напряжение при растяжении. Эту гипотезу связывают с именем Г. Галилея (XVII). Гипотеза пренебрегает действием двух других главных напряжений и не учитывает появления пластических деформаций; дает удовлетворительные результаты для хрупких материалов: стекло, керамика, камень, кирпич, бетон, гипс.

ГИПОТЕЗА НАИБОЛЬШИХ ЛИНЕЙНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ (вторая теория прочности)

Прочность при любом напряженном состоянии будет обеспечена, если наибольшее относительное удлинение не превзойдет допускаемого, определенного при простом растяжении:

$$\varepsilon_{\max} \leq [\varepsilon].$$

Гипотеза предложена Э. Мариоттом (1682), развита Б. Сен-Венаном (XIX). Из первой строки обобщенного закона Гука для объемного напряженного состояния (3.12)

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \varepsilon_{\max}.$$

Для линейного напряженного состояния, когда $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad [\varepsilon] = \frac{[\sigma]}{E}.$$

Решая совместно последние три равенства, получим:

$$\sigma_{\text{экв(II)}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma].$$

Экспериментально гипотеза подтверждается слабо, в расчетной практике применялась в начале прошлого века.

ГИПОТЕЗА НАИБОЛЬШИХ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ (третья теория прочности)

Прочность при любом напряженном состоянии будет обеспечена, если наибольшее касательное напряжение не превзойдет допускаемого, определенного при простом растяжении

$$\tau_{\max} \leq [\tau].$$

Гипотеза предложена Ш. Кулоном (1773 г.), развита Б. Сен-Венаном (1871). Для объемного напряженного состояния

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (3.17)$$

При простом растяжении (линейном напряженном состоянии, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$)

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2}; \quad [\tau] = \frac{[\sigma]}{2}.$$

Решая совместно последние два равенства, получим:

$$\sigma_{\text{экв(III)}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]. \quad (3.17)$$

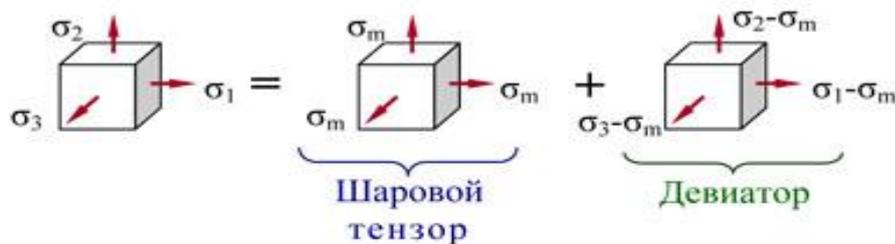
Гипотеза не учитывает действие второго главного напряжения σ_2 . Хорошо согласуется с опытом для пластичных материалов.

ГИПОТЕЗА УДЕЛЬНОЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ ФОРМОИЗМЕНЕНИЯ – ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПРОЧНОСТИ (четвертая теория прочности)

Прочность при любом напряженном состоянии будет обеспечена, если удельная потенциальная энергия деформации, идущая на изменение формы, не превзойдет допустимого значения, определенного при простом растяжении

$$u_{\phi} \leq [u].$$

Согласно гипотезе, высказанной Д. Максвеллом в 1856 г. и разработанной М. Хубером в 1930 г., удельную потенциальную энергию деформации следует разложить на две компоненты, одна из которых отвечает за изменение объема, а другая – формы. В расчетах учитывать лишь одну из них – последнюю. Напряжения σ_1 , σ_2 и σ_3 , действующие по граням параллелепипеда, тоже можно разложить на две компоненты, как показано на схеме:



$$\begin{aligned} \sigma_1 &= (\sigma_1 - \sigma_m) + \sigma_m; \\ \sigma_2 &= (\sigma_2 - \sigma_m) + \sigma_m; \\ \sigma_3 &= (\sigma_3 - \sigma_m) + \sigma_m, \end{aligned}$$

где $\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$ – среднее напряжение.

Первая компонента – шаровой тензор, по граням которого действует среднее напряжение σ_m , отвечает только за изменение объема (одинаковое удлинение всех ребер). Вторая компонента – девиатор (от лат. *deviatio* – отклонение) отвечает за изменение формы элементарного параллелепипеда.

Энергия формоизменения для объемного напряженного состояния (вывод опускается):

$$u_{\phi} = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2].$$

При одноосном растяжении, когда $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, приняв $\sigma_{\text{эkv}} = \sigma_1$, получим:

$$u_{\phi} = \frac{1+\mu}{3E} \sigma_1^2.$$

Тогда условие прочности по четвертой теории можно записать так:

$$\sigma_{\text{эkv(IV)}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma]. \quad (3.18)$$

Четвертая теория более точно, чем третья, описывает появление в материале малых пластических деформаций. Опыты хорошо подтверждают четвертую теорию для пластичных материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие.

ГИПОТЕЗА КУЛОНА-МОРА (ТЕОРИЯ ПРОЧНОСТИ МОРА, 1900)

Прочность при любом напряженном состоянии будет обеспечена, если круг Мора не выходит за пределы огибающих кругов, построенных на допускаемых напряжениях при простом растяжении и сжатии.

$$\sigma_{\text{эkv(V)}} = \sigma_1 - \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]} \sigma_3 \leq [\sigma_+].$$

Гипотеза (ее иногда называют пятой и обозначают римской цифрой V) применяется для материалов, обладающих разным сопротивлением растяжению и сжатию (чугун, бетон...). В случае, если допускаемые напряжения при растяжении $[\sigma_+]$ и сжатии $[\sigma_-]$ одинаковы, теория Мора совпадает с третьей теорией прочности.

Таким образом, для практических расчетов следует рекомендовать четвертую или третью теории прочности (строго говоря – теории перехода локального объема в пластическое состояние) для материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, то есть пластичных, и теорию Мора – для материалов, различно сопротивляющихся растяжению и сжатию.

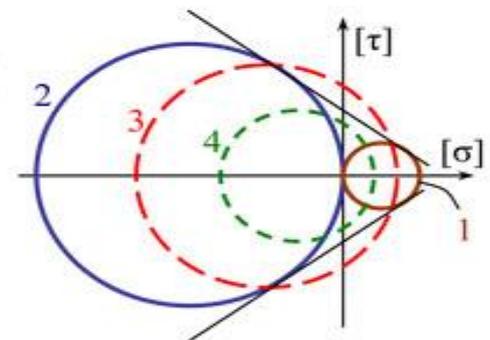


Рис. 3.12. Круги Мора: для осевого растяжения (1); осевого сжатия (2); опасного напряженного состояния (3); безопасного напряженного состояния (4)

6-Лекция. Геометрические характеристики плоских сечений.

План.

1.Содержание

Площадь плоских сечений

Статические моменты сечения

2.Моменты инерции плоских сечений простой формы

Моменты инерции простых сечений

3.Моменты инерции сечений сложной формы

Сопротивление стержня различным видам деформирования часто зависит не только от его материала и размеров, но и от характера осевой линии, формы поперечных сечений и их ориентации.

Уже в древности строители знали, что доска или брус, поставленные на ребро, во много раз лучше противостоят изгибу, чем положенные плашмя. Речь идет как об их несущей способности, так и о деформативности. Для двутавровой стандартной балки, поставленной на две опоры, эти показатели примерно в 7 и 30 раз выше, чем у балки квадратного поперечного сечения такой же площади, сделанной из того же материала. Таким образом, рациональное расположение материала по сечению позволяет снизить его расход.

Как увидим дальше, этот вывод имеет обобщение на форму конструкции в целом. Но в данный момент, отвлекаясь от физических свойств изучаемого объекта, рассмотрим основные геометрические характеристики поперечных сечений стержня, определяющие сопротивление различным видам его деформирования.

В расчетах конструкций на механическую надежность очень часто приходится оперировать такими характеристиками плоских фигур, как статический момент, осевой и полярный моменты инерции. Хотя вычисление вышеназванных геометрических характеристик относится к числу простейших задач интегрального исчисления, тем не менее, в силу их узкого прикладного значения они практически не рассматриваются во втузовском курсе высшей математики. По установившейся традиции геометрические характеристики плоских фигур изучаются в курсе сопротивления материалов.

Геометрические характеристики – числовые величины (параметры), определяющие размеры, форму, расположение поперечного сечения однородного по упругим свойствам деформируемого элемента конструкции (и, как следствие, характеризующие сопротивление элемента различным видам деформации).

Площадь плоских сечений

Площадь сечения является одной из геометрических характеристик, используемых, главным образом, в расчетах на растяжение и сжатие. При расчетах на кручение, изгиб, а также на устойчивость используются более

сложные геометрические характеристики: статические моменты, моменты инерции, моменты сопротивления и т.д.

Проектирование конструкций с оптимальными формами и размерами сечений является одним из путей снижения веса и стоимости машин и сооружений.

Площадь, ограниченная произвольной кривой, есть

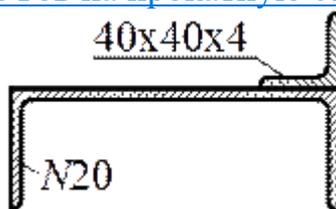
$$A = \int_A dA \quad (1)$$

Для вычисления геометрических характеристик сложных сечений, состоящих из простейших фигур, они разбиваются на конечное число n простейших частей. В этом случае

$$A = \sum_{i=1}^n A_i. \quad (2)$$

Площадь является простейшей геометрической характеристикой сечения, имеет размерность L^2 . Отметим два важных свойства: площадь всегда положительна и не зависит от выбора системы координат.

Для сечений, составленных из профилей стандартного проката, площадь каждого профиля и остальные необходимые для расчетов размеры принимаются по таблицам ГОСТов на прокатную сталь.



При расчетах на изгиб, кручение, сложное сопротивление и устойчивость используются более сложные геометрические характеристики: статические моменты, моменты инерции сечений, которые зависят не только от формы и размеров сечений, но также от положения осей и точек (полусов), относительно которых они вычисляются.

Статические моменты сечения

Статическим моментом плоского сечения относительно некоторой оси называется, взятая по всей его площади A , сумма произведений площадей элементарных площадок dA на их расстояния от этой оси (рис. 4.1):

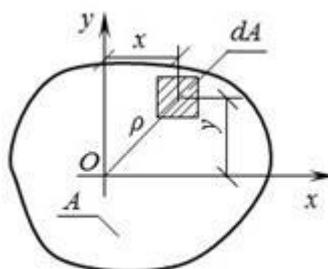


Рис. 4.1

$$S_x = \int_A y dA, \quad S_y = \int_A x dA; \quad (3)$$

$$S_x = \iint_A y dx dy, \quad S_y = \iint_A x dx dy; \quad (4)$$

$$S_x = Ay_c, \quad S_y = Ax_c, \quad (5)$$

где y_c – расстояние от центра тяжести всего плоского сечения до оси x ; x_c – расстояние от центра тяжести всего сечения до оси y .

Статический момент сложного сечения относительно некоторой оси равен сумме статических моментов всех частей этого сечения относительно той же оси:

$$S_x = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n = \sum_{i=1}^n A_i y_i; \\ S_y = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n = \sum_{i=1}^n A_i x_i. \quad (6)$$

В формулах (6) введены обозначения: A_1, A_2, \dots, A_n – площади простых элементов, составляющих плоское сложное сечение; $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \dots, x_n, y_n$ – координаты центров тяжести простых составляющих сложного плоского сечения относительно выбранных осей x и y .

Из выражений (4) можно определить координаты центра тяжести плоского сечения:

$$x_c = \frac{S_y}{A}; \quad y_c = \frac{S_x}{A}. \quad (7)$$

Для сложного поперечного сечения формулы (7) можно представить в следующем виде

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n}; \\ y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n}. \quad (8)$$

Зависимости между статическими моментами одного и того же сечения относительно двух параллельных друг другу осей x и x_1 , а также y и y_1 имеют вид:

$$S_{x_1} = S_x - aA; \quad S_{y_1} = S_y - bA, \quad (9)$$

где параметры a, b показаны на рис. 4.2.

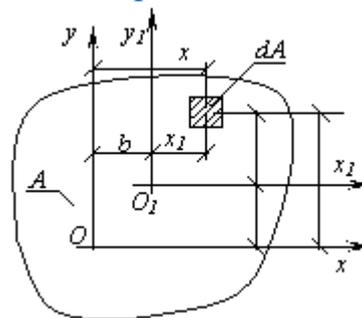


Рис.4.2

У к а з а н и я.

1. Изменение положительного направления оси y вызывает изменение знака статического момента S_x . Аналогично, изменение положительного направления оси x вызывает изменение знака статического момента S_y .

2. Статический момент сечения равен нулю относительно любой оси, проходящей через центр тяжести этого сечения.

3. Если плоское сечение имеет ось симметрии, то эта ось всегда проходит через центр тяжести плоского сечения, а поэтому, согласно п.2, статический момент сечения относительно оси симметрии всегда равен нулю.

4. Если плоское сечение имеет две оси симметрии, то центр тяжести сечения лежит на пересечении этих осей симметрии.

-

2. Моменты инерции плоских сечений простой формы

В дополнение к статическим моментам в системе координат xOy рассмотрим три интегральных выражения:

$$\begin{aligned} I_x &= \int_A y^2 dA; \\ I_y &= \int_A x^2 dA; \\ I_{xy} &= \int_A xy dA. \end{aligned} \quad (10)$$

Первые два интегральных выражения называются осевыми моментами инерции относительно осей x и y , а третье - центробежным моментом инерции сечения относительно осей x , y .

Для сечений, состоящих из n -числа областей (рис. 4.6), формулы (10) будут иметь вид:

$$\begin{aligned} I_x &= \sum_{k=1}^n \int_{A_k} y^2 dA = \sum_{k=1}^n I_x^{(k)}; \\ I_y &= \sum_{k=1}^n \int_{A_k} x^2 dA = \sum_{k=1}^n I_y^{(k)}; \\ I_{xy} &= \sum_{k=1}^n \int_{A_k} xy dA = \sum_{k=1}^n I_{xy}^{(k)}. \end{aligned}$$

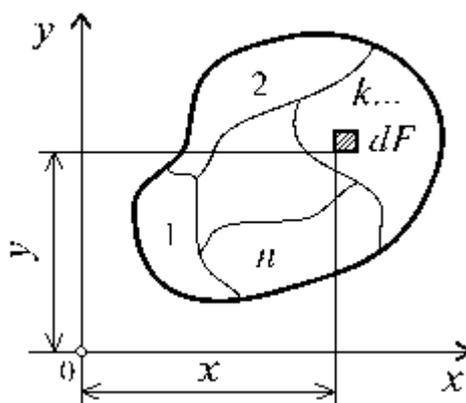


Рис. 4.6

Рассмотрим, как изменяются моменты инерции сечения при параллельном переносе координатных осей x и y (см. рис. 4.7). Преобразуя формулы (10), получим:

$$I_x = I_{x_1} + 2bS_{x_1} + b^2A;$$

$$I_y = I_{y_1} + 2aS_{y_1} + a^2 A; \quad (11)$$

$$I_{xy} = I_{x_1y_1} + aS_{x_1} + bS_{y_1} + abA.$$

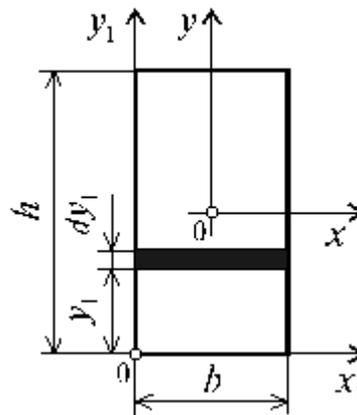


Рис. 4.7

Если предположить, что оси x_1 и y_1 (см. рис. 4.7) являются центральными, тогда $S_{x_1} = S_{y_1} = 0$ и выражения (11) упрощаются и принимают вид:

$$I_x = I_{x_1} + b^2 A;$$

$$I_y = I_{y_1} + a^2 A; \quad (12)$$

$$I_{xy} = I_{x_1y_1} + abA.$$

Оси называются центральными, если они проходят через центр тяжести фигуры, т. е. статические моменты относительно этих осей равны нулю. Главными осями инерции фигуры называются оси относительно которых центробежный момент инерции равен нулю. Если фигура имеет хотя бы одну ось симметрии, то эта ось является главной осью.

Определим осевые моменты инерции прямоугольника относительно осей x и y , проходящих через его центр тяжести (рис. 4.7). В качестве элементарной площадки dA возьмем полоску шириной b и высотой dy (рис. 4.7). Тогда будем иметь:

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dA b dy = \frac{b}{3} \left(\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8} \right) = \frac{bh^3}{12}.$$

Аналогичным образом можно установить, что $I_y = \frac{bh^3}{12}$.

Центробежный момент инерции сечения относительно осей, хотя бы одна из которых является осью симметрии, равен нулю.

Для систем, рассматриваемых в полярной системе координат (рис. 4.8, а), вводится также полярный момент инерции:

$$I_p = \int_A \rho^2 dA.$$

где ρ - радиус-вектор точки тела в заданной полярной системе координат.

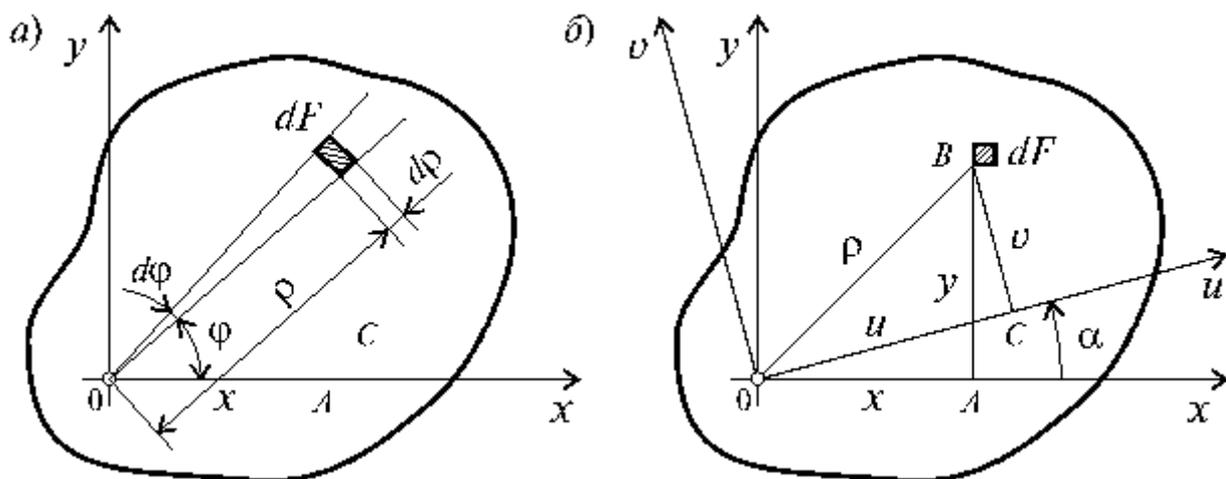


Рис. 4.8

Вычислим полярный момент инерции круга радиуса R . На рис. 4.8, а показана элементарная площадка, очерченная двумя радиусами и двумя концентрическими поверхностями, площадью

$$dF = \rho d\rho d\varphi.$$

Интегрирование по площади заменим двойным интегрированием:

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Найдем зависимость между полярным и осевыми моментами инерции для круга. Из геометрии видно (рис. 4.8, б), что

$$\rho^2 = x^2 + y^2,$$

следовательно,

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = I_x + I_y.$$

Данное условие называется условием инвариантности. Формулируется условие инвариантности следующим образом: сумма осевых моментов инерции относительно двух любых взаимно перпендикулярных осей есть величина постоянная и равная полярному моменту инерции относительно точки пересечения этих осей.

Так как оси x и y для круга равнозначны, то $I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4}$.

Полярный момент инерции кольца может быть найден как разность моментов инерции двух кругов: наружного (радиусом R) и внутреннего (радиусом r):

$$I_p^K = \frac{\pi R^4}{2} - \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4).$$

Размерность моментов инерции L^4 . Осевые и полярные моменты инерции всегда положительны, центробежный момент инерции может быть положительным, отрицательным, равным нулю.

Для фигур, имеющих более двух осей симметрии, осевые моменты инерции относительно всех центральных осей равны между собой. К таким фигурам относятся равносторонний треугольник, квадрат, круг и т.д.

7-Лекция. Радиусом инерции плоской фигуры. Моменты инерции простых сечений

План.

1. Главные оси инерции и главные моменты инерции
2. Понятие о радиусе и эллипсе инерции сечения
3. Моменты сопротивления
4. Стандартные прокатные профили

Моменты инерции простых сечений

Вычислим моменты инерции простейших фигур.

Прямоугольник (рис. 4.9)

Определим моменты инерции относительно осей, совпадающих со сторонами, и относительно центральных осей (рис.4.9).

По определению $I_x = \int_A y^2 dA$.

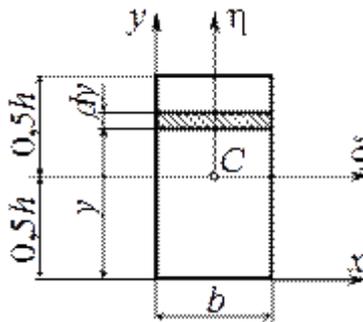


Рис. 4.9

Элемент площади равен $dA = bdy$,

следовательно $I_x = b \int_0^h y^2 dy = bh^3/3$.

По формуле $I_x = I_{\xi} + y_c^2 A$, откуда, учитывая что $A = bh, y_c = 0,5h$, находим

$$I_{\xi} = I_x - y_c^2 A = \frac{bh^3}{3} - \left(\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{bh^3}{12}.$$

Аналогично получим $I_y = b^3 h/3$ и $I_{\eta} = b^3 h/12$.

Треугольник (рис. 4.10)

Момент инерции относительно оси x, совпадающей с основанием,

$$I_x = \int_A y^2 dA.$$

Но $dA = b(y)dy$, $b(y) = (b/h)(h-y)$.

Следовательно,

$$I_x = \left(\frac{b}{h}\right) \int_0^h y^2 (h-y) dy = \frac{b^3 h}{12}.$$

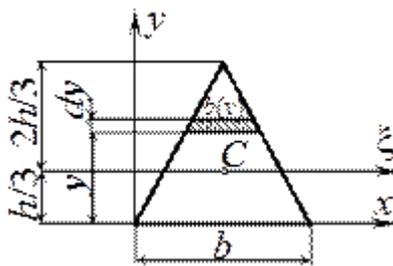


Рис. 4.10

По формуле параллельного переноса $I_{\xi} = I_x - y_c^2 A$, откуда

$$I_{\xi} = I_x - y_c^2 A = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \left(\frac{bh}{2}\right) = \frac{bh^3}{36}.$$

Круг (рис. 4.11)

Для любых центральных осей $I_{\xi} = I_{\eta}$, поэтому $I_{\rho} = 2I_{\xi}$.

Как известно, полярный момент инерции круга равен $I_{\rho} = \left(\frac{\pi}{32}\right) d^4$.

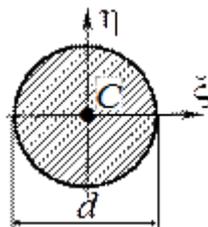


Рис. 4.11

Следовательно, $I_{\xi} = I_{\eta} = \frac{I_{\rho}}{2} = \pi d^4 / 64$.

Кольцо ($\alpha = \frac{d_2}{d_1}$) (рис. 4.12)

Момент инерции относительно оси ξ (рис.4.12) можно определить как разность моментов инерции наружного и внутреннего круга:

$$I_{\xi} = \left(\frac{\pi}{64}\right) d_1^4 - \left(\frac{\pi}{64}\right) d_2^4 = \left(\frac{\pi}{64}\right) d_1^4 (1 - \alpha^4).$$

Для тонкого кольца существует приближенная формула $I_{\xi} = \pi d_{cp}^3 t / 8$, где d_{cp} – средний диаметр, t – толщина кольца.

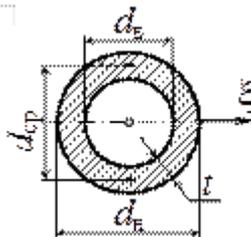


Рис. 4.12

3. Моменты инерции сечений сложной формы

Момент инерции сечения сложной формы относительно некоторой оси равен сумме моментов инерций его составных частей относительно той же оси:

$$J_x = J_x^I + J_x^{II} + J_x^{III} + \dots, \quad (13)$$

что непосредственно следует из свойств определенного интеграла. Таким образом, для вычисления момента инерции сложной фигуры надо разбить ее на ряд простых фигур, вычислить моменты инерции этих фигур, а затем просуммировать их.

Изменение моментов инерции сечения при повороте осей координат

Найдем зависимость между моментами инерции относительно осей x, y и моментами инерции относительно осей x_1, y_1 , повернутых на угол α . Пусть $J_x > J_y$ и положительный угол α отсчитывается от оси x против часовой стрелки. Пусть координаты точки M до поворота – x, y , после поворота – x_1, y_1 (рис. 4.19).

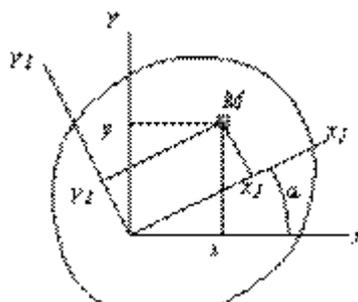


Рис.4.19

Из рисунка 4.19 следует:

$$x_1 = x \cos \alpha + y \sin \alpha; \quad y_1 = y \cos \alpha - x \sin \alpha.$$

Теперь определим моменты инерции относительно осей x_1 и y_1 :

$$\begin{aligned} J_{x_1} &= \int_F y_1^2 dF = \int_F (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dF \\ &= \cos^2 \alpha \int_F y^2 dF - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_F xy dF + \sin^2 \alpha \int_F x^2 dF, \end{aligned}$$

$$\text{или } J_{x_1} = J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha. \quad (14)$$

Аналогично:

$$J_{y_1} = \int_F x_1^2 dF = J_x \sin^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha - J_{xy} \cos 2\alpha. \quad (15)$$

$$J_{x_1 y_1} = \int_F x_1 y_1 dF = \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha \quad (16)$$

Сложив почленно уравнения (14), (15), получим:

$$J_{x_1 y_1} = J_x (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + J_y (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = J_x + J_y = J_p,$$

т.е. сумма моментов инерции относительно любых взаимно перпендикулярных осей остается постоянной и не изменяется при повороте системы координат (условие инвариантности).

Главные оси инерции и главные моменты инерции

С изменением угла поворота осей α каждая из величин J'_{x_1} и J'_{y_1} меняется, а сумма их остается неизменной. Следовательно, существует такое значение $\alpha = \alpha_0$, при котором моменты инерции достигают экстремальных

значений, т.е. один из моментов инерции достигает своего максимального значения, в то время другой момент инерции принимает минимальное значение. Для нахождения значения α_0 возьмем первую производную от J'_{x1} (или J'_{y1}) и приравняем ее нулю:

$$\frac{dJ_{x1}}{d\alpha} = -2J_x \cos\alpha_0 \sin\alpha_0 + 2J_y \sin\alpha_0 \cos\alpha_0 - J_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0,$$

или

$$(J_x - J_y) \sin 2\alpha_0 - 2J_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}. \quad (17)$$

Покажем, что относительно полученных осей центробежный момент инерции равен нулю. Для этого приравняем правую часть уравнения (16) нулю:

$$\frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x},$$

т.е. получили ту же формулу для α_0 .

Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, а осевые моменты инерции принимают экстремальные значения называются *главными осями*. Если эти оси являются также и центральными, то они называются *главными центральными осями*. Осевые моменты инерции относительно главных осей называются *главными моментами инерции*.

Обозначим главные оси через x_0 и y_0 . Тогда

$$J_{x0} = J_x \cos^2 \alpha_0 + J_y \sin^2 \alpha_0 - J_{xy} \sin 2\alpha_0,$$

$$J_{y0} = J_x \sin^2 \alpha_0 + J_y \cos^2 \alpha_0 - J_{xy} \sin 2\alpha_0,$$

$$J_{x_0 y_0} = 0.$$

Если сечение имеет ось симметрии, то эта ось всегда является одной из главных центральных осей инерции сечения.

В литературе главные оси иногда обозначаются через u и v .

Главные моменты инерции I_u и I_v могут быть также определены по формулам:

$$I_u = \frac{I_z + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{zy}^2} \quad I_v = \frac{I_z + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{zy}^2}$$

При повороте осей координат удовлетворяется следующее равенство:

$$I_z + I_y = I_{z\alpha} + I_{y\alpha} = I_u + I_v = \text{const}$$

Моменты сопротивления относительно главных центральных осей u и v могут быть подсчитаны по формулам:

$$W_u = \frac{I_u}{|u_{\max}|}$$

где u_{\max}, v_{\max} - координаты точек сечения, наиболее удаленных от главных центральных осей u и v . Эти координаты можно вычислить, используя связь между координатами в повернутых на угол α_0 осях по формулам:

$$u = z \cdot \cos \alpha_0 + y \cdot \sin \alpha_0$$

$$v = y \cdot \cos \alpha_0 - z \cdot \sin \alpha_0$$

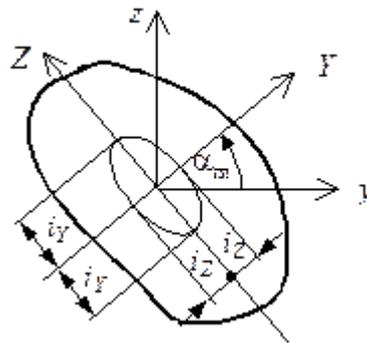
Понятие о радиусе и эллипсе инерции сечения

Радиусом инерции плоской фигуры относительно какой-либо оси, называется длина перпендикуляра, отсчитываемая от этой оси и вычисляемая по формуле:

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{F}} \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}} \quad (18)$$

$$i_u = \sqrt{\frac{I_u}{F}} \quad i_v = \sqrt{\frac{I_v}{F}}$$

После определения моментов инерции относительно главных осей можно построить эллипс инерции – это эллипс, полуоси которого равны радиусам инерции относительно главных осей. Радиус инерции i_y откладывается вдоль главной оси Z , а i_z – вдоль оси Y (рис. 4.21). Построение эллипса инерции удобно использовать для анализа правильности определения моментов инерции. Эллипс инерции должен быть вытянут в том направлении, в котором вытянута фигура.



8-Лекция. Чистый сдвиг .

План

1. Чистый сдвиг
2. Чистым сдвигом напряжённого состояния.

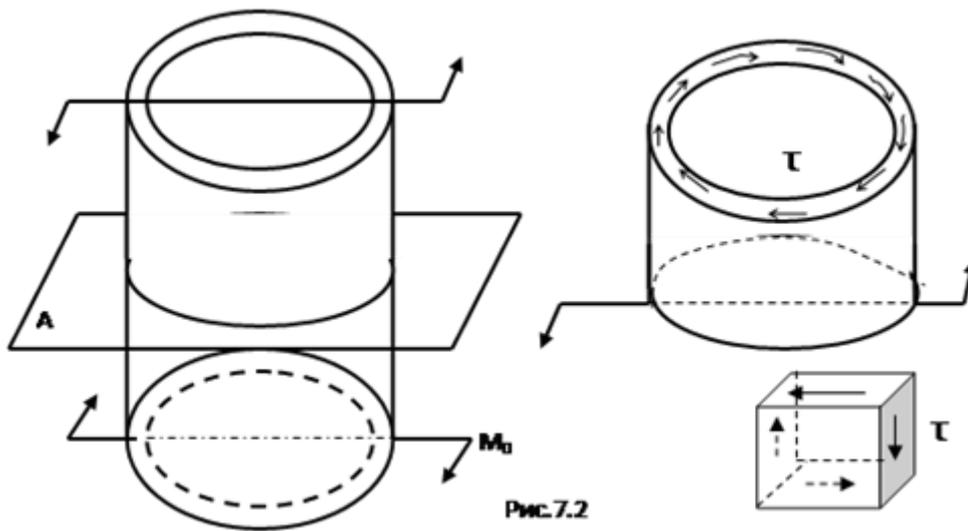
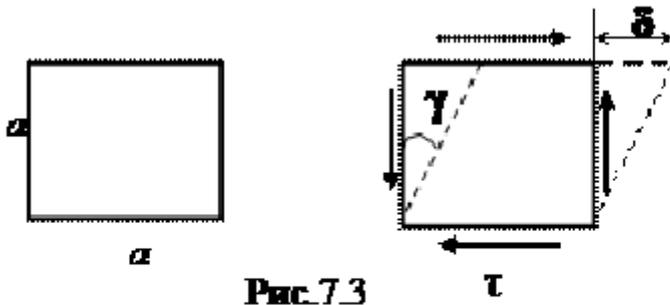


Рис. 7.2

1. Чистым сдвигом называется такой вид плоского напряженного состояния, при котором по граням элементарного параллелепипеда, выделенного в окрестности рассматриваемой точки, действуют одни лишь касательные напряжения. В качестве примера такого напряженного состояния можно рассмотреть тонкостенную цилиндрическую трубку, нагруженную по торцам парами сил (рис.7.2). Рассечем её плоскостью А, отбросим верхнюю часть и покажем оставшуюся нижнюю часть. В сечении действуют касательные напряжения τ , величина которых определится из условия равенства момента равномерно распределенных по сечению внутренних сил внешнему моменту

$$\tau = \frac{M_0}{2\pi R^2 \delta}$$

M_0 : , где R – средний радиус трубки, δ – её толщина. Нормальных напряжений в этом сечении не будет. Вырежем из стенки бесконечно малый элемент в виде кубика. На его нижней грани будут действовать касательные напряжения такие же, как и на верхней, но в противоположном направлении. На передней и задней стенках напряжений нет. Так как элемент должен находиться в равновесии, то на боковых стенках также должны быть касательные напряжения, которые создают пару сил, но направленную в противоположную сторону. При чистом сдвиге длины ребер элементарного параллелепипеда не изменяются, а изменяются углы между гранями (рис. 7.3). Верхняя грань параллелепипеда перемещается относительно противоположной грани на величину δ , называемую абсолютным



сдвигом. Прямые углы изменяются на величину γ , называемую углом сдвига.

Мерой деформации при сдвиге служит относительный сдвиг $\frac{\delta}{a}$ (аналогично $\frac{\Delta l}{l}$ при центральном растяжении, сжатии). Так как $\frac{\delta}{a} = \text{tg} \gamma$, то в силу малости деформаций $\text{tg} \gamma = \gamma$, тогда $\frac{\delta}{a} = \gamma$ (рад). Как показывает опыт, угол сдвига γ прямо пропорционален касательным напряжениям. Эта зависимость между γ и τ называется законом Гука при сдвиге и записывается

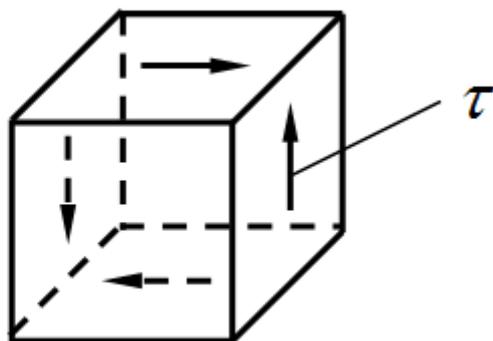
$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad \tau = \gamma G$$

выражением, или (7.2). Коэффициент пропорциональности G называется модулем сдвига (или модулем упругости второго рода). Он как и модуль продольной упругости E измеряется в паскалях (Па) или в мегапаскалях (МПа).

2. Чистым сдвигом напряжённого состояния.

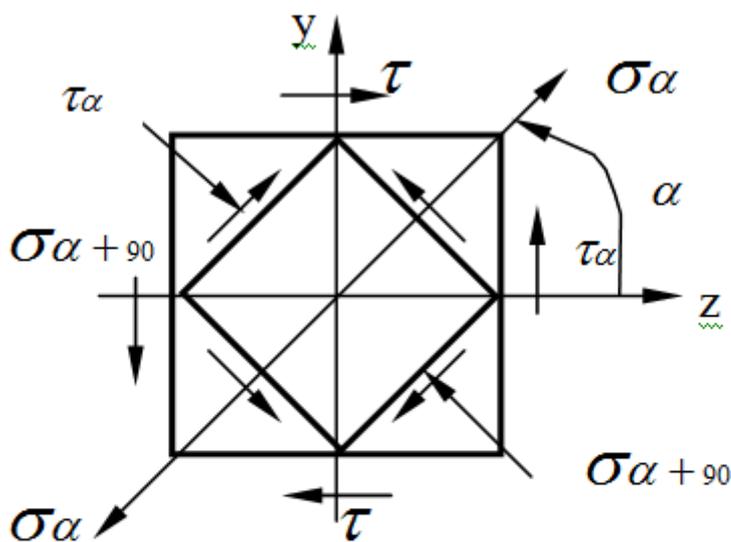
Чистым сдвигом называется такой вид напряжённого состояния, при котором

на двух взаимно перпендикулярных площадках действуют **ТОЛЬКО касательные напряжения**.



Чистый сдвиг

При чистом сдвиге прямоугольный элемент, выделенный в окрестности некоторой точки, испытывает **только деформации сдвига**, а **удлинения его сторон отсутствуют**. Определим **напряжения**, действующие по любым наклонным площадкам в условиях чистого сдвига. При **повороте** площадки на угол α будут действовать **нормальные напряжения** σ_α и **тангенциальные** τ_α .



Напряжения по наклонным площадкам

Из известных формул:

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau \sin 2\alpha,$$

$$\tau_{\alpha} = -\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau \cos 2\alpha$$

или

$$\sigma_{\alpha} = \tau \cdot \sin 2\alpha,$$

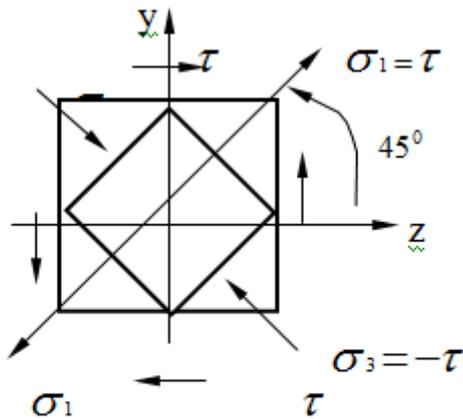
$$\tau_{\alpha} = \tau \cdot \cos 2\alpha,$$

$$\sigma_{\alpha} = 0 \text{ при } \alpha = 0, \tau_{\alpha} = 0 \text{ при } \alpha = 45^{\circ},$$

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_{\max} = \sigma_1 \text{ при } \alpha = 45^{\circ} = \tau,$$

$$\text{при } \alpha \neq 90^{\circ} \sigma_3 = -\tau.$$

При чистом сдвиге главные напряжения — сжимающие и растягивающие равны между собой и численно равны экспериментальным касательным напряжениям. Главные площадки составляют с площадками чистого сдвига угол 45° .



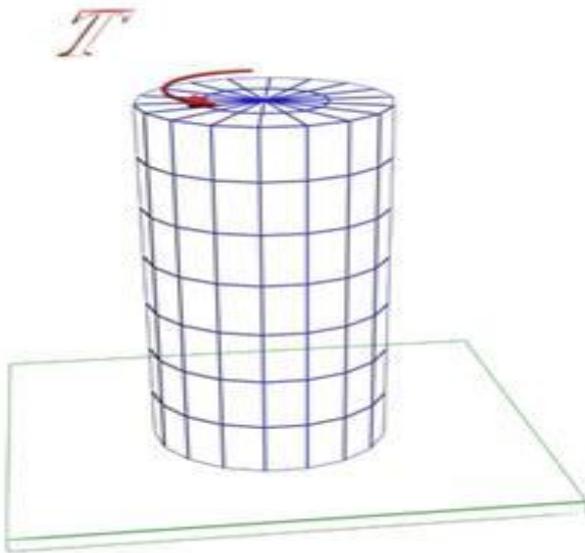
Главные площадки при сдвиге

Чистый сдвиг представляет собой единственный вид напряжённого состояния, при котором отсутствует изменение объёма материала, а выделенный элемент при чистом сдвиге изменяет только форму.

9-Лекция. Кручения.

План

1. Деформации и напряжения при кручении.
2. Напряжения и деформации при кручении бруса.
3. Расчет валов на прочность и жесткость при кручении.

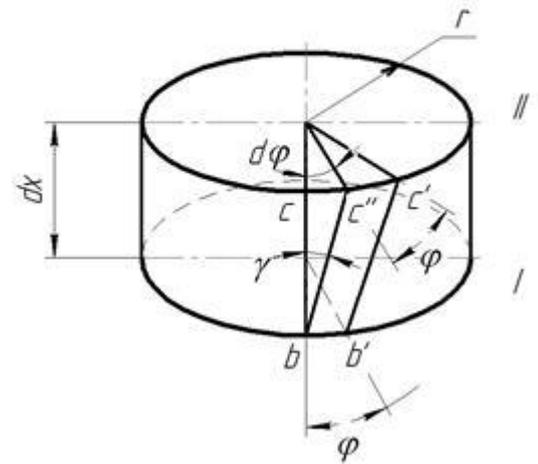
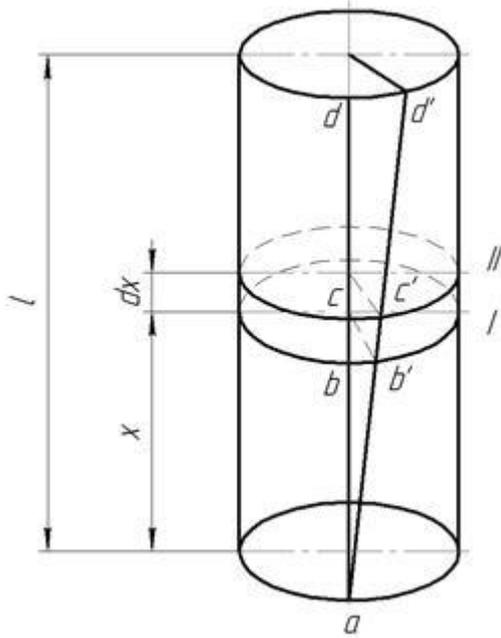


Рассмотрим цилиндр, один конец которого закреплён неподвижно, а к другому приложен крутящий момент.

Образующая ad займёт положение ad' . На расстоянии x выделим элемент dx .

И получим точки b, b', c, c' . В элементе dx сечение I повернётся относительно основания на угол φ , а сечение II на угол $\varphi + d\varphi$.

γ – угол сдвига. cc'' – абсолютный сдвиг. $cc'' = r \cdot d\varphi$

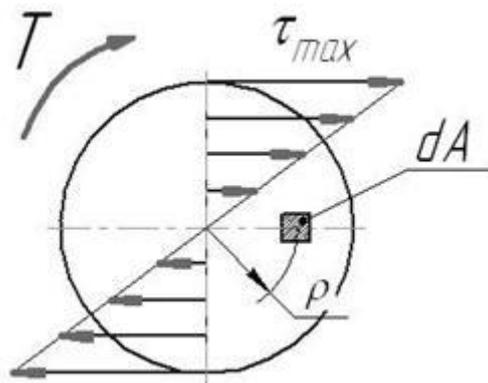


$$\gamma = \frac{cc''}{dx} = r \cdot \frac{d\varphi}{dx}$$

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} \text{ - относительный угол закручивания.}$$

$$\gamma = r \cdot \theta \text{ (1).}$$

Для цилиндров постоянного сечения и постоянно действующего крутящего момента можно утверждать, что для каждого элементарного участка dF , находящегося на радиусе r от центра сечения $\gamma_r = r \cdot \theta$



$$\tau_{\rho} = G \cdot \gamma_{\rho} - \text{1-я форма записи закона}$$

Гука.

G - модуль упругости 2-го рода.

$$\tau_{\rho} = G \cdot \rho \cdot \theta$$

Из эпюры видно, что максимальные касательные напряжения τ действуют на поверхности цилиндра, а в центре равны 0, поэтому валы, работающие на кручение, можно изготавливать полыми.

$$\varphi = \theta \cdot l = \frac{T \cdot l}{G \cdot J_p} - \text{2-я форма записи закона Гука при кручении.}$$

$$\tau_{\rho} = G \cdot \rho \cdot \frac{T}{G \cdot J_p} = \frac{\rho \cdot T}{J_p}$$

$$\rho = \rho_{\text{max}} = r \Rightarrow \tau_{\text{max}} = \frac{r \cdot T}{J_p} = \frac{T}{W_p},$$

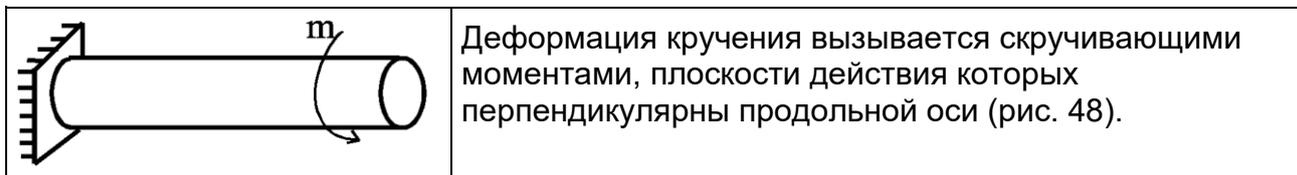
где $W_p = \frac{J_p}{r}$ - полярный момент сопротивления сечения.

$$W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \approx 0,2d^3$$

- полярный момент сопротивления сечения (для круглого сечения).

2. Напряжения и деформации при кручении бруса

круглого сечения.

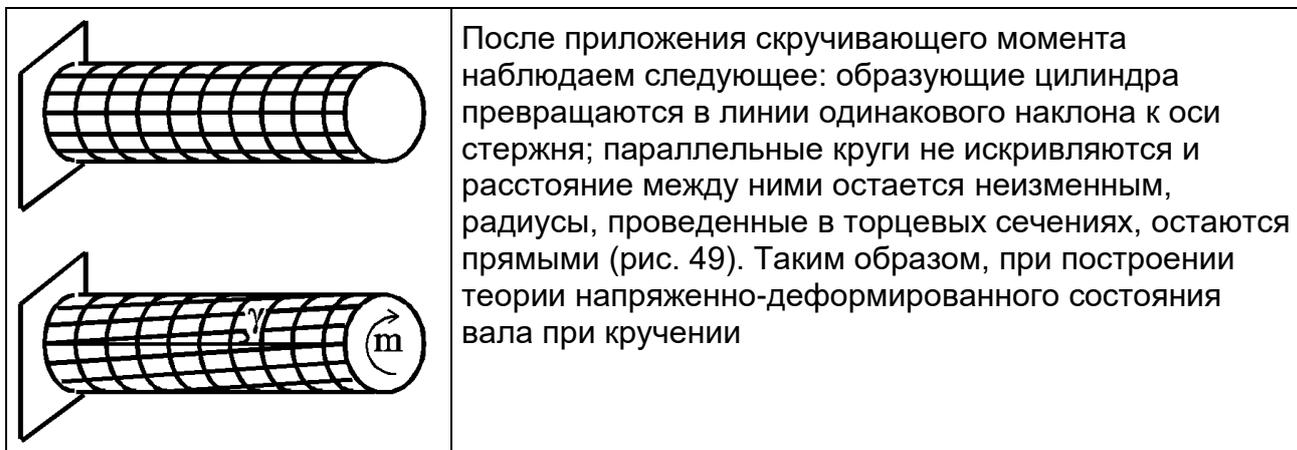


п

Рис. 48.

при кручении возникает один внутренний силовой фактор - крутящий момент M_k .

Характер распределения напряжений по сечению выясним, рассмотрев геометрическую картину деформации вала. Для этого на поверхности нанесем сетку, состоящую из линий, параллельных оси, и линий, представляющих собой параллельные круги.



п

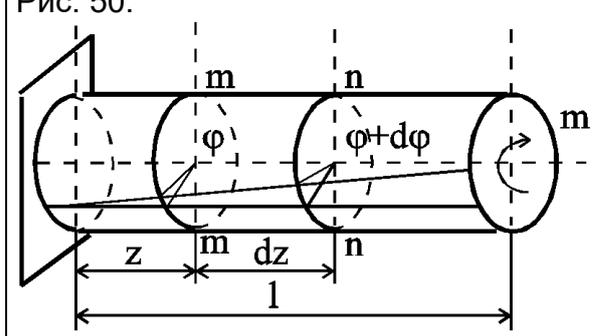
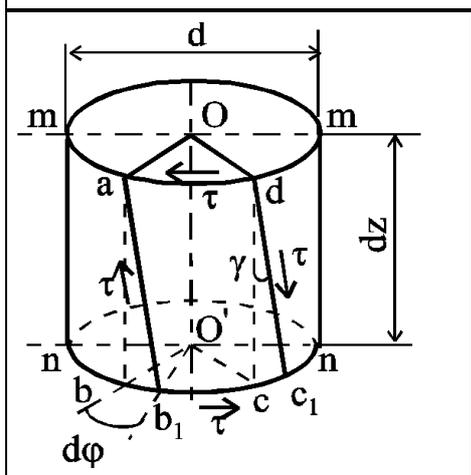
Рис. 49.

ользуются следующими гипотезами:

1. Поперечные сечения вала остаются при деформации плоскими и перпендикулярными к оси вала. Они лишь поворачиваются одно относительно другого на некоторый угол закручивания, обозначаемый ϕ . (гипотеза плоских сечений).

2. Расстояния между поперечными сечениями остаются неизменными.

3. Радиусы, проведенные в поперечных сечениях, при деформации не искривляются.

<p>Рис. 50.</p> 	<p>Рассмотрим некоторый участок вала длиной dz, выделенный из вала (рис. 50). Пусть угол поворота сечения $m - m$ относительно неподвижного будет ϕ, тогда угол поворота сечения $n - n$, расположенного на расстоянии dz, будет $\phi + d\phi$. Следовательно, угол закручивания участка вала длиной dz равен $d\phi$.</p>
	<p>Рассмотрим деформацию прямоугольного элемента $abcd$ бесконечно малой толщины, выделенного у поверхности вала (рис. 51). Так как радиусы остаются прямыми, то отрезок Ob поворачиваясь в плоскости поперечного сечения на угол закручивания $d\phi$, займет положение Ob_1. При этом образующая ab переместится в новое положение ab_1, составив с первоначальной угол γ. Аналогично образующая dc переместится в положение dc_1. Так как длины этих отрезков</p>

П Рис. 51.

практически неизменны, то деформация прямоугольного элемента $abcd$ состоит в изменении первоначально прямых углов на величину угла γ . Таким образом, рассмотренный элемент находится в условиях чистого сдвига и, следовательно, на его гранях действуют касательные напряжения τ .

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{bb_1}{ab} \approx \gamma$$

Учитывая, что $ab = dz$, а $bb_1 = r \cdot d\phi$, угол сдвига: $\gamma = r \frac{d\phi}{dz}$.

Отношение $\frac{d\phi}{dz} = \theta$ называется относительным погонным углом закручивания $\frac{1}{M}$

или $\frac{\text{рад}}{\text{м}}$.

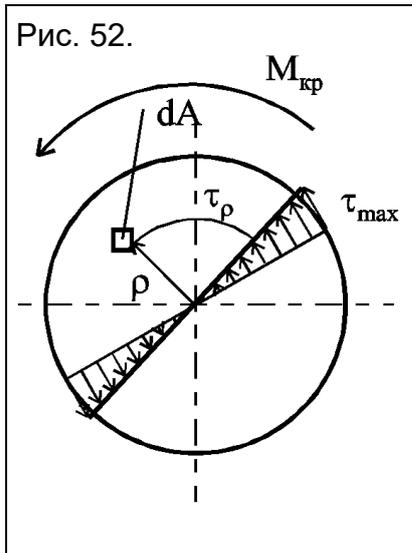
$$\gamma = \theta \cdot r$$

Если рассмотреть деформацию прямоугольного элемента, расположенного внутри вала на произвольной цилиндрической поверхности радиуса ρ , то угол сдвига $\gamma_\rho = \theta \rho$.

Найдем зависимость между напряжениями и деформациями при кручении. С учетом закона Гука при чистом сдвиге

$$\tau_\rho = G \cdot \gamma_\rho = G \cdot \theta \cdot \rho$$

Из двух последних формул следует, что углы сдвига и касательные напряжения в поперечном сечении изменяются по линейному закону прямо пропорционально расстоянию ρ точек от центра сечения.

<p>Рис. 52.</p> 	<p>Очевидно, что максимальные касательные напряжения τ_{\max} будут возникать у поверхности вала, то есть при $\rho = r$.</p> $\tau_r = \tau_{\max} = G \cdot \theta \cdot r$ <p>Выделим на расстоянии ρ от центра сечения элементарную площадку dA (рис. 52). Крутящий момент M_k:</p> $M_k = \int_A \tau_\rho \rho dA = G \cdot \theta \int_A \rho^2 dA = G \cdot \theta \cdot I_p$ <p>Отсюда погонный угол закручивания</p> $\theta = \frac{M_k}{G \cdot I_p}$
---	--

практически Выражение $G \cdot I_p$ - жесткость вала при кручении.

I_p - полярный момент инерции.

$$I_p = \frac{\pi \cdot r^4}{2} \text{ - для круглого сечения; } I_p = \frac{\pi \cdot (r_H^4 - r_B^4)}{2} \text{ - для трубчатого сечения.}$$

Взаимный угол закручивания двух сечений, расположенных на расстоянии l :

$$\phi = \int_0^l \frac{M_k}{G \cdot I_p} dz$$

Если в пределах цилиндрического участка вала длиной l крутящий момент M_k имеет постоянное значение, то

$\phi = \theta \cdot l = \frac{M_k l}{G \cdot I_p}$	<p>- закон Гука при кручении.</p>
<p>Так как $\tau = G \cdot \theta \cdot \rho$, то</p>	$\tau = \frac{M_k}{I_p} \rho$

Максимальные касательные напряжения, действующие по контуру сечения:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\kappa} r}{I_p} = \frac{M_{\kappa}}{W_p},$$

где $W_p = \frac{I_p}{r}$ - полярный момент сопротивления [ед³].

$W_p = \frac{\pi \cdot r^3}{2}$ - для круглого сечения; $W_p = \frac{\pi \cdot (r_H^4 - r_B^4)}{2 \cdot r_H}$ - для трубчатого сечения.

Из второй гипотезы следует, что нормальные напряжения σ при кручении равны нулю.

3. Расчет валов на прочность и жесткость при кручении.

Условие прочности при кручении:	$\tau_{\max} = \frac{M_{\kappa}^{\max}}{W_p} \leq [\tau]$
---------------------------------	---

$[\tau]$ - допускаемое напряжение при кручении, величина постоянная для данного материала. Отсюда полярный момент сопротивления вала:

$$W_p \geq \frac{M_{\kappa}^{\max}}{[\tau]}.$$

Помимо расчета на прочность валы рассчитывают и на жесткость, ограничивая максимальный погонный угол закручивания некоторой допускаемой величиной $[\theta]$. Условие жесткости:	$\theta_{\max} = \frac{M_{\kappa}^{\max}}{G \cdot I_p} \leq [\theta]$
---	---

Отсюда полярный момент инерции вала: $I_p \geq \frac{M_{\kappa}^{\max}}{G \cdot \theta_{\max}}$.

<https://www.youtube.com/watch?v=3Cy0w0RH9UI>

Лекция № 10. Прямой чистый изгиб стержня.

План.

1. Общие понятия.
2. Напряжения при изгибе.
3. Деформация балок при плоском изгибе.

<https://www.youtube.com/watch?v=t03eyre6LgU>

1. Общие понятия.

Деформация изгиба заключается в искривлении оси прямого стержня или в изменении начальной кривизны прямого стержня (рис. 6.1). Ознакомимся с основными понятиями, которые используются при рассмотрении деформации изгиба.

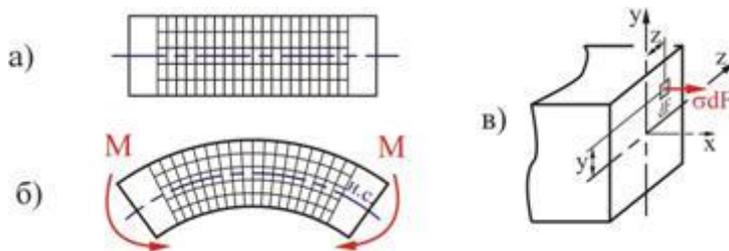


Рис. 6.1

Стержни, работающие на изгиб, называют *балками*.

Чистым называется изгиб, при котором изгибающий момент является единственным внутренним силовым фактором, возникающим в поперечном сечении балки.

Чаще, в поперечном сечении стержня наряду с изгибающим моментом возникает также и поперечная сила. Такой изгиб называют поперечным.

Плоским (прямым) называют изгиб, когда плоскость действия изгибающего момента в поперечном сечении проходит через одну из главных центральных осей поперечного сечения.

При *косом изгибе* плоскость действия изгибающего момента пересекает поперечное сечение балки по линии, не совпадающей ни с одной из главных центральных осей поперечного сечения.

Изучение деформации изгиба начнем со случая чистого плоского изгиба.

2. Нормальные напряжения при чистом изгибе.

Как уже было сказано, при чистом плоском изгибе в поперечном сечении из шести внутренних силовых факторов не равен нулю только изгибающий момент (рис. 6.1, в):

$$\left. \begin{aligned} N &= \int_F \sigma \cdot dF = 0 \\ Q &= \int_F \tau \cdot dF = 0 \\ M_y &= \int_F \sigma \cdot z \cdot dF = 0 \\ M_x &= \int_F \sigma \cdot y \cdot dF \neq 0 \end{aligned} \right\}; (6.1)$$

Опыты, поставленные на эластичных моделях, показывают, что если на поверхность модели нанести сетку линий (рис. 6.1, а), то при чистом изгибе она деформируется следующим образом (рис. 6.1, б):

а) продольные линии искривляются по длине окружности;

б) контуры поперечных сечений остаются плоскими;

в) линии контуров сечений всюду пересекаются с продольными волокнами под прямым углом.

На основании этого можно предположить, что при чистом изгибе поперечные сечения балки остаются плоскими и поворачиваются так, что остаются нормальными к изогнутой оси балки (гипотеза плоских сечений при изгибе).

Замеряя длину продольных линий (рис. 6.1, б), можно обнаружить, что верхние волокна при деформации изгиба балки удлиняются, а нижние укорачиваются.

Очевидно, что можно найти такие волокна, длина которых остается неизменной. Совокупность волокон, не меняющих своей длины при изгибе балки, называется *нейтральным слоем* (н. с.). Нейтральный слой пересекает поперечное сечение балки по прямой, которая называется *нейтральной линией* (н. л.) сечения.

Для вывода формулы, определяющей величину нормальных напряжений, возникающих в поперечном сечении, рассмотрим участок балки в деформированном и не деформированном состоянии (рис. 6.2).

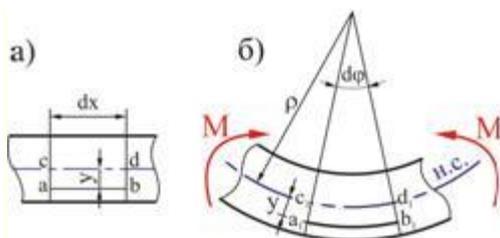


Рис. 6.2

Двумя бесконечно малыми поперечными сечениями выделим элемент длиной dx . До деформации сечения, ограничивающие элемент dx , были параллельны между собой (рис. 6.2, а), а после деформации они несколько наклонились, образуя угол $d\varphi$. Длина волокон, лежащих в нейтральном слое, при изгибе не меняется $cd = c_1 d_1$.

Обозначим радиус кривизны следа нейтрального слоя на плоскости чертежа буквой ρ . Определим линейную деформацию произвольного волокна ab , отстоящего на расстоянии y от нейтрального слоя.

Длина этого волокна после деформации (длина дуги $a_1 b_1$) равна $(\rho + y) \cdot d\varphi$. Учитывая, что до деформации все волокна имели одинаковую длину dx , получим, что абсолютное удлинение рассматриваемого волокна

$$\Delta dx = (\rho + y) \cdot d\varphi - dx$$

Его относительная деформация ε

$$\varepsilon = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{(\rho + y) \cdot d\varphi - dx}{dx}$$

Очевидно, что $dx = \rho \cdot d\varphi$, так как длина волокна, лежащего в нейтральном слое не изменилась. Тогда после подстановки dx получим

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho} \quad (6.2)$$

Следовательно, относительная продольная деформация пропорциональна расстоянию волокна от нейтральной оси.

Введем предположение, что при изгибе продольные волокна не надавливают друг на друга. При таком предположении каждое волокно деформируется изолированно, испытывая простое растяжение или сжатие, при котором $\sigma = E \cdot \varepsilon$. С учетом (6.2)

$$\sigma = E \frac{y}{\rho}, \quad (6.3)$$

т. е. нормальные напряжения прямо пропорциональны расстояниям рассматриваемых точек сечения от нейтральной оси.

Подставим зависимость (6.3) в выражение изгибающего момента M_x в поперечном сечении (6.1)

$$M_x = \int_F E \cdot \frac{y}{\rho} \cdot y \cdot dF = \frac{E}{\rho} \int_F y^2 \cdot dF$$

Вспомним, что интеграл $\int_F y^2 \cdot dF$ представляет собой момент инерции сечения относительно оси z

$$M = \frac{E}{\rho} \cdot J_z$$

Или

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ_z} \quad (6.4)$$

Зависимость (6.4) представляет собой закон Гука при изгибе, поскольку она связывает деформацию (кривизну нейтрального слоя $1/\rho$) с действующим в сечении моментом. Произведение $E \cdot J_z$ носит название жесткости сечения при изгибе, Н·м².

Подставим (6.4) в (6.3)

$$\sigma = \frac{M}{J_z} \cdot y \quad (6.5)$$

Это и есть искомая формула для определения нормальных напряжений при чистом изгибе балки в любой точке ее сечения.

Для того, чтобы установить, где в поперечном сечении находится нейтральная линия подставим значение нормальных напряжений в выражение продольной силы N и изгибающего момента M_y

$$N = \int_F \sigma \cdot dF = \frac{M_x}{J_z} \int_F y \cdot dF = 0$$

$$M_y = \int_F \sigma \cdot z \cdot dF = \frac{M_x}{J_z} \int_F y \cdot z \cdot dF = 0$$

Поскольку $\frac{M_x}{J_z} \neq 0$,

$$\int_F y \, dF = S_z ; \int_F y \cdot z \, dF = J_{yz}$$

то

$$S_z = 0 \quad (6.6)$$

$$J_{yz} = 0 \quad (6.7)$$

Равенство (6.6) указывает, что ось z – нейтральная ось сечения – проходит через центр тяжести поперечного сечения.

Равенство (6.7) показывает что y и z - главные центральные оси сечения.

Согласно (6.5) наибольшей величины напряжения достигают в волокнах наиболее удаленных от нейтральной линии

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z \cdot y_{\max}}{J_z}$$

$$\frac{J_z}{y_{\max}}$$

Отношение $\frac{J_z}{y_{\max}}$ представляет собой осевой момент сопротивления сечения W_z относительно его центральной оси z , значит

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z}$$

Значение W_z для простейших поперечных сечений следующее:

Для прямоугольного поперечного сечения

$$W_z = \frac{b \cdot h^2}{6}, \quad (6.8)$$

где h - сторона сечения перпендикулярная оси z ;

b - сторона сечения параллельная оси z ;

Для круглого поперечного сечения

$$W_z = \frac{\pi \cdot d^3}{32} \approx 0.1d^3, \quad (6.9)$$

где d - диаметр круглого поперечного сечения.

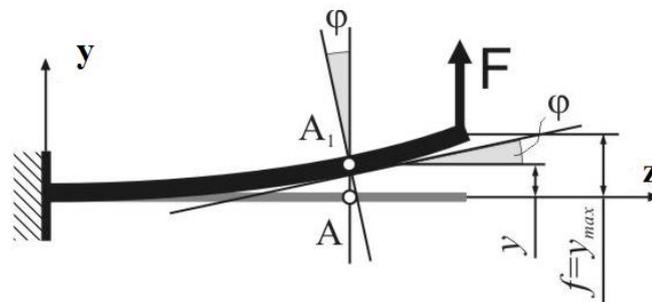
Условие прочности по нормальным напряжениям при изгибе можно записать в виде

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma] \quad (6.10)$$

Все полученные формулы получены для случая чистого изгиба прямого стержня. Действие же поперечной силы приводит к тому, что гипотезы, положенные в основу выводов, теряют свою силу. Однако практика расчетов показывает, что и при поперечном изгибе балок и рам, когда в сечении кроме изгибающего момента M_x действует еще продольная сила N и поперечная сила Q_y , можно пользоваться формулами, приведенными для чистого изгиба. Погрешность при этом получается незначительной.

3. Деформация балок при плоском изгибе

1. Основные понятия и определения



Рассмотрим деформацию балки при плоском изгибе. Ось балки под действием нагрузки искривляется в плоскости действия сил (плоскость xOy), при этом поперечные сечения поворачиваются и смещаются на некоторую величину. Искривленная ось балки при изгибе называется **изогнутой осью** или **упругой линией**.

Деформацию балок при изгибе будем описывать двумя параметрами:

1. **прогиб** (y) – смещение центра тяжести сечения балки по направлению, перпендикулярному

рис. 6.1 к ее оси.

Не путать прогиб y с координатой y точек сечения балки!

Наибольший прогиб балки называется стрелой прогиба ($f = y_{max}$);

2) **угол поворота сечения** (φ) – угол, на который сечение поворачивается относительно своего первоначального положения (или угол между касательной к упругой линии и первоначальной осью балки).

В общем случае величина прогиба балки в данной точке является функцией координаты z и может быть записана в виде следующего уравнения:

$$y = y(z)$$

Тогда угол между касательной к изогнутой оси балки и осью x будет определяться из следующего выражения:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dz} .$$

Ввиду малости углов и перемещений, можем считать, что

$$\varphi \approx \frac{dy}{dz}$$

угол поворота сечения есть первая производная от прогиба балки по абсциссе сечения.

2. Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки

Исходя из физической природы явления изгиба, можем утверждать, что изогнутая ось непрерывной балки должна быть непрерывной и гладкой (неимеющей изломов) кривой. При этом деформация того или иного участка балки определяется искривлением его упругой линии, то есть кривизной оси балки.

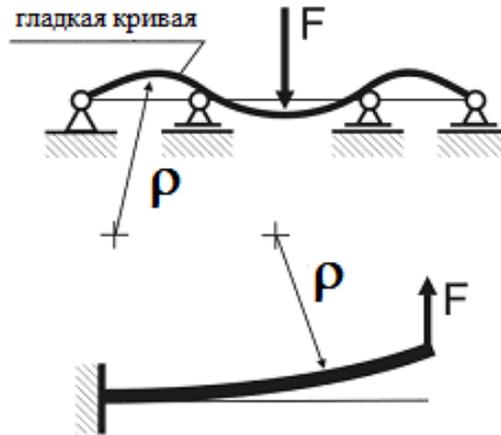


рис. 6.2

Ранее нами была получена формула для определения кривизны бруса ($1/\rho$) при изгибе

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x}.$$

С другой стороны, из курса высшей математики известно, что уравнение кривизны плоской кривой выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\pm \frac{d^2y}{dz^2}}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Приравняв правые части данных выражений, получим дифференциальное уравнение изогнутой оси балки, которое называется точным уравнением изогнутой оси бруса

$$\frac{\frac{d^2y}{dz^2}}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{M_x}{EI_x}.$$

В координатной системе прогибов zOy , когда ось y направлена вверх, знак момента определяет знак второй производной от y по z .

Интегрирование данного уравнения, очевидно, представляет некоторые трудности. Поэтому его, как правило, записывают в упрощенной форме, пренебрегая величиной в скобках по сравнению с единицей.

Тогда дифференциальное уравнение упругой линии балки будем рассматривать в виде:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{M_x}{EI_x}. \quad (6.1)$$

Решение дифференциального уравнения (6.1) найдем, интегрируя обе его части по переменной z :

$$\varphi = \frac{dy}{dz} = \int_l \frac{M_x(z)}{EI_x} dz + C_1. \quad (6.2)$$

$$y = \int_l \left(\int_l \frac{M_x(z)}{EI_x} dz \right) dz + C_1 z + D_1. \quad (6.3)$$

Постоянные интегрирования C_1, D_1 находят из граничных условий – условий закрепления балки, при этом для каждого участка балки будут определяться свои постоянные.

11-Лекция. Расчеты на прочность при изгибе

План

1. Условие прочности.

2. Основные задачи прочности

3. Условие прочности по наибольшим касательным напряжениям

При расчете изгибаемых элементов конструкций на прочность используются методы, рассмотренные в § 10. При расчете строительных конструкций применяется метод расчета по первой группе предельных состояний; в машиностроении — метод расчета по допускаемым напряжениям. В большинстве случаев решающее влияние на прочность элементов конструкций оказывают нормальные напряжения, действующие в крайних волокнах балок, и лишь в некоторых случаях — касательные напряжения, а также главные напряжения в наклонных сечениях. Во всех случаях наибольшие напряжения, возникающие в балке, не должны превышать некоторой допустимой для данного материала величины. При расчете по первой группе предельных состояний эта величина принимается равной расчетному сопротивлению R , умноженному на коэффициент условий работы $\gamma_c < 1$; при расчете по методу допускаемых напряжений — допускаемому напряжению $[a]$. В первом случае *условие прочности* записывается в виде

В таком виде записываются условия прочности для балок из пластичного материала (например, строительных сталей), одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию. Для хрупких материалов (например, чугуна), которые

работают на растяжение значительно хуже, чем на сжатие, расчетное сопротивление и допускаемые напряжения при растяжении R_p и $[\sigma_p]$ существенно меньше, чем при сжатии R_c и $[\sigma_c]$. В этом случае необходимо выполнение условий прочности по наибольшему растягивающим σ_p и наибольшему сжимающим σ_c напряжениям:

$$\sigma_p^{нб} \leq \gamma_c R_p; \quad \sigma_c^{нб} \leq \gamma_c R_c, \quad (7.45)$$

или
$$\sigma_p^{нб} \leq [\sigma_p]; \quad \sigma_c^{нб} \leq [\sigma_c]. \quad (7.46)$$

В дальнейшем мы будем главным образом пользоваться методом расчета по первой группе предельных состояний.

Для балок из пластичного материала, одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию, рационально применять симметричные относительно нейтральной оси сечения. В этом случае условие прочности (7.43) с учетом формулы (7.22) записывается в виде

$$\sigma_{нб} = \frac{M_{нб}}{W} \leq \gamma_c R. \quad (7.47)$$

Иногда по конструктивным соображениям применяются несимметричные сечения типа тавра, разнополочного двутавра и т.п. В этих случаях условие прочности (7.43) с учетом (7.20) записывается в виде

$$\sigma_{нб} = \frac{M_{нб}}{W_{нм}} \leq \gamma_c R. \quad (7.48)$$

В формулах (7.47) и (7.48) W и $W_{нм}$ — моменты сопротивления сечения относительно нейтральной оси Oz (индекс z в дальнейшем опускаем); $M_{нб}$ — наибольший по абсолютной величине изгибающий момент от действия расчетных нагрузок, определяемых по формуле (3.41). Сечение балки, в котором действует наибольший по абсолютной величине изгибающий момент, называется опасным сечением.

При расчете элементов конструкций, работающих на изгиб, с использованием условий прочности решаются следующие задачи: проверка прочности балки; подбор сечения; определение несущей способности {грузоподъемности} балки, то есть значений нагрузок, при которых наибольшие напряжения в опасном сечении балки равны $\gamma_c R$ или $[\sigma]$.

Решение первой задачи сводится к проверке выполнения условий прочности при заданных нагрузках, форме, размерах сечения и свойствах материала.

Решение второй задачи сводится к определению размеров сечения заданной формы при заданных нагрузках и свойствах материала. Вначале из условий прочности (7.47) или (7.48) определяется величина требуемого момента сопротивления:

$$W \geq \frac{M_{нб}}{\gamma_c R} \quad \text{или} \quad W_{нм} \geq \frac{M_{нб}}{\gamma_c R}, \quad (7.49)$$

а затем устанавливаются размеры сечения. Наиболее просто эта задача решается для балок прямоугольного или круглого сечения и прокатных балок.

Для прямоугольного сечения (рис. 7.30) с заданным соотношением сторон $h/b = k$ из (7.23) и (7.49) можно найти

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{h^3}{6k}; \quad h = \sqrt[3]{\frac{6kM_{нб}}{\gamma_c R}}; \quad b = \frac{h}{k}. \quad (7.50)$$

$$W = \frac{\pi D^3}{32}; \quad D = \sqrt[3]{\frac{32M_{нб}}{\pi\gamma_c R}}. \quad (7.51)$$

Для круглого сечения

Для прокатных балок (двутавры, швеллеры) по величине требуемого из условий прочности (7.47) момента сопротивления подбор сечения производится по сортаменту.

Подбор сечения более сложной формы выполняется методом последовательных приближений. При каждом приближении принимаются размеры сечения и затем проверяется выполнение условий прочности (7.47) или (7.48). Приближения выполняются до тех пор, пока напряжения $\sigma_{нб}$ станут равны $\gamma_c R$ или будут немного меньше этой величины.

При решении третьей задачи по определению грузоподъемности балки вначале по формуле (7.47) или (7.48) из условия равенства наибольших напряжений в опасном сечении величине $\gamma_c R$ находится величина наибольшего изгибающего момента

$$M_{нб} = \gamma_c R W_{нм}. \quad (7.52)$$

Затем этот момент выражается через приложенные к балке нагрузки и из полученного выражения определяются соответствующие величины нагрузок. Например, для стальной двутавровой балки 130, изображенной на рис. 7.47, при $R = 210$ МПа, $\gamma_c = 0,9$,

$$=472 \text{ см}^3$$

$$M_{нб} = \gamma_c RW = 0,9 \cdot 210 \cdot 472 \cdot 10^{-3} = 89,2 \text{ кНм.}$$

По эпюре изгибающих моментов находим

$$M_{нб} = \frac{Pl}{4} = 89,2 \text{ кНм}; \quad P = \frac{4 \cdot 89,2}{3} = 118,3 \text{ кН.}$$

Рассмотрим случаи, когда проверка прочности (7.47), (7.48) по наибольшим нормальным напряжениям, действующим в поперечных сечениях балки, оказывается недостаточной.

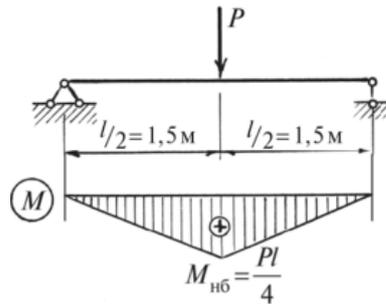


Рис. 7.47

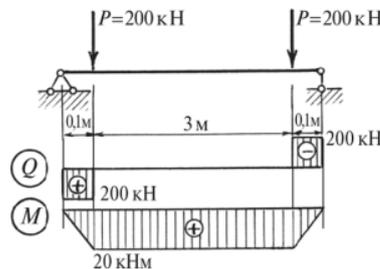


Рис. 7.48

В коротких балках ($l / h < 5$), а также в балках, нагруженных большими по величине сосредоточенными силами, близко расположенными к опорам (рис. 7.48), изгибающий момент $M_{нб}$ может оказаться сравнительно небольшим, а поперечная сила $Q_{нб}$ по абсолютной величине значительна. В этих случаях необходимо производить проверку по наибольшим касательным напряжениям $T_{нб}$, которые возникают в сечении балки, где действует $Q_{нб}$. Условие прочности по наибольшим касательным напряжениям можно записать в

$$\text{виде} \quad \tau_{нб} \leq \gamma_c R_s, \quad (7.53)$$

где R_s — расчетное сопротивление материала балки при сдвиге. Для металлов $R_s \sim 0,6R$; например, для стали марки ВСтЗ при $\gamma_c = 210$ МПа $R_s = 130$ МПа.

Касательные напряжения могут достигать значительной величины в стенке двутавровых балок, особенно в тонких стенках составных балок. Кроме того, в стенке такой балки в местах перехода к полке главные напряжения, возникающие на наклонных площадках, могут оказаться по абсолютной величине больше, чем наибольшие напряжения в поперечных сечениях. В таких случаях необходимо проверять выполнение условия прочности по наибольшим главным напряжениям для тех сечений балки, в которых M и Q одновременно велики по абсолютной величине:

$$|\sigma_{1,2}| = \left| \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} \right| \leq \gamma_c R. \quad (7.54)$$

Следует отметить, что проверка прочности по формулам (7.53) и (7.54) производится после проверки прочности или подбора сечения по формулам (7.47), (7.48), (7.49) и имеет цель при необходимости уточнить некоторые размеры сечения, например увеличить толщину стенки двутавра. Отметим также, что при наличии достаточно больших нормальных и касательных напряжений проверка прочности должна выполняться с помощью соответствующей теории прочности (см. § 12.5).

Расчет на прочность по касательным напряжениям может иметь решающее значение для деревянных балок, так как дерево плохо сопротивляется скалыванию вдоль волокон. Так, например, для сосны расчетное сопротивление растяжению и сжатию при изгибе $R = 13$ МПа, а при скалывании вдоль волокон $R_s = R_{ск} = 2,4$ МПа. Условие прочности по касательным напряжениям для деревянной балки прямоугольного сечения с учетом формулы (7.30) и $\gamma_c = 1$ можно записать в виде

$$\tau_{нб} = \frac{3Q_{нб}}{2F} \leq R_{ск}. \quad (7.55)$$

Лекция 12. НАПРЯЖЕНИЯ И ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ

Гипотезы при изгибе. Нейтральный слой, радиус кривизны, кривизна, распределение деформаций и нормальных напряжений по высоте поперечного сечения стержня. Касательные напряжения при плоском поперечном изгибе стержней. Расчет балок на прочность при изгибе. Перемещения при изгибе.

Перемещения при изгибе. Под расчетом на жесткость понимают оценку упругой податливости балки под действием приложенных нагрузок и подбор таких размеров поперечного сечения, при которых перемещения не будут превышать установленных нормами пределов.

Условие жесткости при изгибе

$$f_{\max} \leq [f] = \frac{l}{400 \dots 800}.$$

Перемещение центра тяжести сечения по направлению перпендикулярному к оси балки, называется прогибом. Прогиб обозначается буквой W .

Наибольший прогиб в пролете или на консоли балки, называется стрелой прогиба и обозначается буквой f .

Угол φ , на который каждое сечение поворачивается по отношению к своему первоначальному положению и есть угол поворота.

Угол поворота считается положительным, при повороте сечения против хода часовой стрелки

Угол поворота сечения равен значению производной от прогиба по координате Z в этом же сечении, то есть:

$$\frac{d\varphi}{dz} = \theta.$$

Уравнение упругой линии балки

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = \frac{M(z)}{EI_x}. \quad (16)$$

Существуют три метода решения дифференциального уравнения упругой линии балки. Это метод непосредственного интегрирования, метод Клебша и метод начальных параметров.

Метод непосредственного интегрирования. Проинтегрировав уравнение упругой линии балки первый раз, получают выражение для определения углов поворота:

$$EI_x \frac{d\varphi}{dz} = EI_x \theta(z) = \frac{M(z)}{dz} + C.$$

Интегрируя второй раз, находят выражения для определения прогибов:

$$EI_x \varphi(z) = \frac{dM(z)^2}{d^2z} + Cz + D.$$

Значения постоянных интегрирования C и D определяют из начальных условий на опорах балки

Метод Клебша. Для составления уравнений необходимо выполнить следующие основные условия:

- начало координат, для всех участков, необходимо расположить в крайнем левом конце балки;
- интегрирование дифференциального уравнения упругой линии балки проводить, не раскрывая скобок;

- при включении в уравнение внешнего сосредоточенного момента M его необходимо помножить на $(Z - a)$, где a – координата сечения, в котором приложен момент;
- в случае обрыва распределенной нагрузки ее продлевают до конца балки, а для восстановления действительных условий нагружения вводят «компенсирующую» нагрузку обратного направления

Метод начальных параметров

Для углов поворота

$$\theta = \theta_0 + \sum \frac{R_i (z - d_i)^2}{2EI_x} + \sum \frac{M_{pi} (z - d_i)}{EI_x} + \frac{1}{EI_x} \left[\sum \frac{M_i (z - a_i)}{1} + \sum \frac{F_i (z - b_i)^2}{2} + \sum \frac{q_i (z - c_i)^3}{6} \right]. \quad (17)$$

Для прогибов:

$$w = w_0 + \theta_0 z + \sum \frac{R_i (z - d_i)^3}{6EI_x} + \sum \frac{M_{pi} (z - d_i)^2}{2EI_x} + \frac{1}{EI_x} \left[\sum \frac{M_i (z - a_i)^2}{2} + \sum \frac{F_i (z - b_i)^3}{6} + \sum \frac{q_i (z - c_i)^4}{24} \right]. \quad (18)$$

где θ – угол поворота сечения; w – прогиб; θ_0 – угол поворота в начале координат; w_0 – прогиб в начале координат; d_i – расстояние от начало координат до i -й опоры балки; a_i – расстояние от начало координат до точки приложения сосредоточенного момента M_i ; b_i – расстояние от начало координат до точки приложения сосредоточенной силы F_i ; c_i – расстояние от начало координат до начала участка распределенной нагрузки q_i ; R_i и M_{pi} – реакция и реактивный момент в опорах балки.

Определение стрелы прогибов для простых случаев

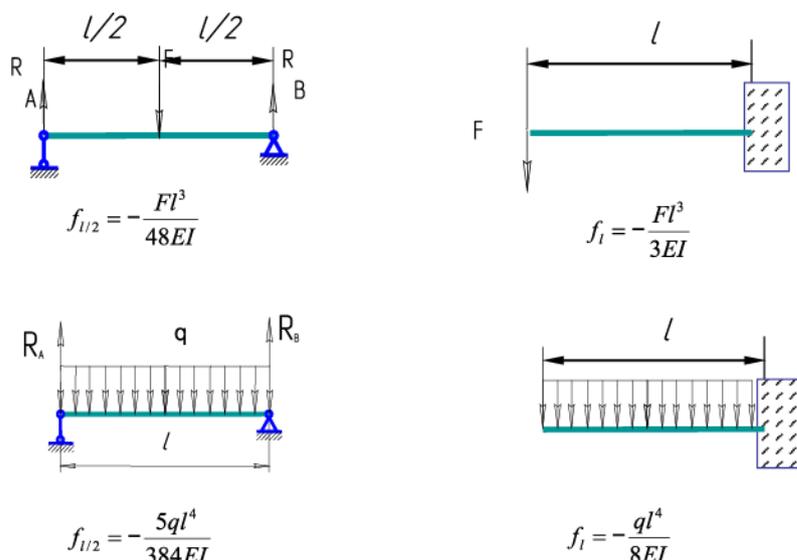
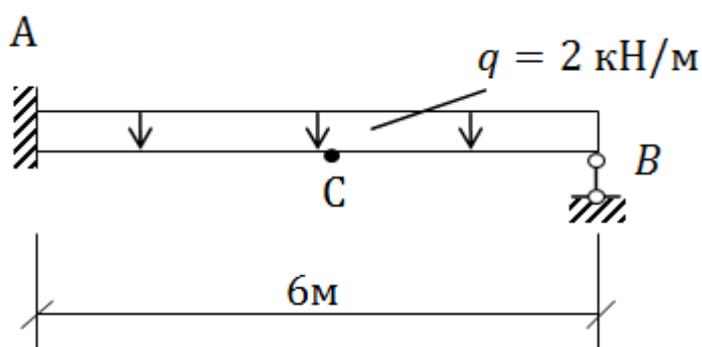


Рис. 31. Примеры нагрузок балок

13-Лекция. Расчет статически неопределимой балки

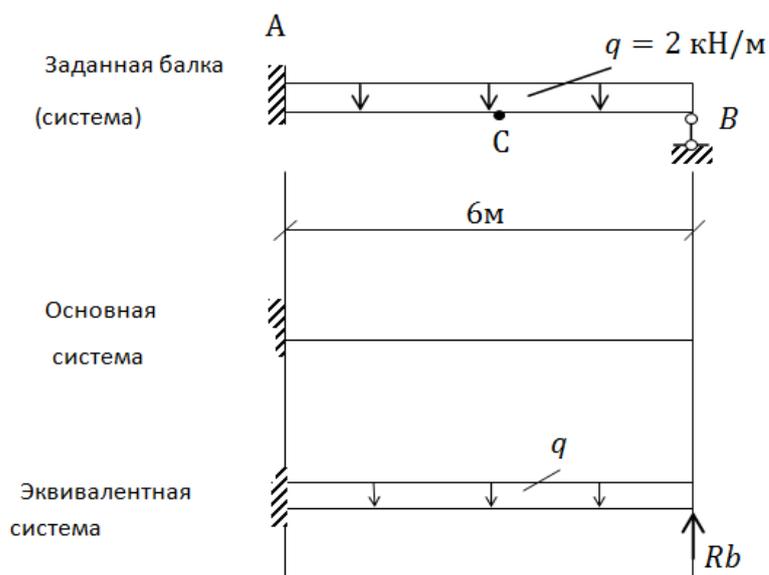
Статически неопределимая балка. Построить эпюры Q и M для статически неопределимой балки



Определим степень статической неопределимости $n = C_{оп} - Ш - 3 = 1$.

Балка 1 раз статически неопределима, значит для её решения требуется 1 дополнительное уравнение.

Одна из реакций является «лишней». Для раскрытия статической неопределимости сделаем следующее: за «лишнюю» неизвестную реакцию примем реакцию опоры В. Это реакция R_B . Выбираем основную систему (ОС) путём отбрасывания нагрузок и «лишней» связи (опоры В). Основная система – статически определимая.



Теперь основную систему нужно превратить в систему, эквивалентную (равнозначную) заданной, для этого: **1) загрузим основную систему заданной нагрузкой, 2) в точке В приложим «лишнюю» реакцию R_b** . Но этого недостаточно, поскольку в заданной системе т.В неподвижна (это опора), а в эквивалентной системе – может получать перемещения. Составим условие, по которому прогиб точки В от действия заданной нагрузки и от действия «лишней» неизвестной должен быть равен 0. Это и будет дополнительное уравнение совместности деформаций.

Обозначим прогиб от заданной нагрузки Δ_F , а прогиб от «лишней» реакции Δ_{R_b} .

$$\text{Тогда составим уравнение } \Delta_F + \Delta_{R_b} = 0 \quad (1)$$

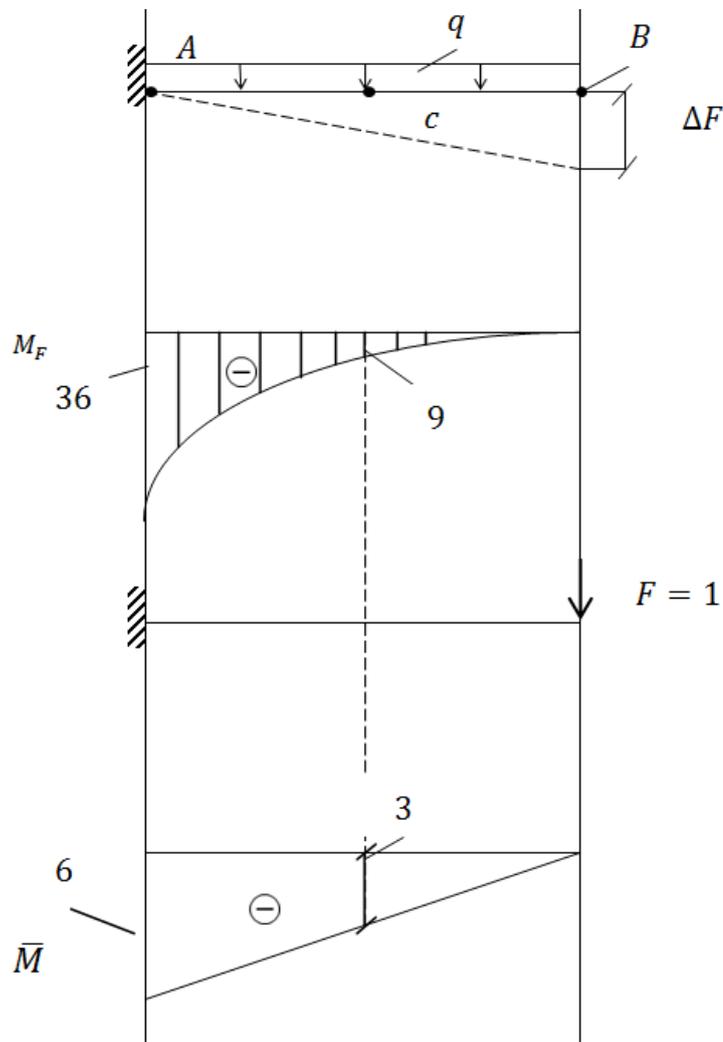
Вот теперь система стала эквивалентной заданной.

Решим уравнение (1).

Чтобы определить перемещение от заданной нагрузки Δ_F :

- 1) Загружаем основную систему заданной нагрузкой.
- 2) Строим грузовую эпюру M_F .
- 3) Снимаем все нагрузки и в точке В, где требуется определить перемещение прикладываем единичную силу. Строим эпюру единичных сил \bar{M} .

4) Опр $\Delta_F = M_F \times \bar{M}$ эмуле Симпсона перемещение от заданной нагрузки



Построение грузовой эпюры M_F :

$$M_B = 0.$$

$$M_C = -q \cdot 3 \cdot 1,5 = -9 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M_A = -q \cdot 6 \cdot 3 = -36 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

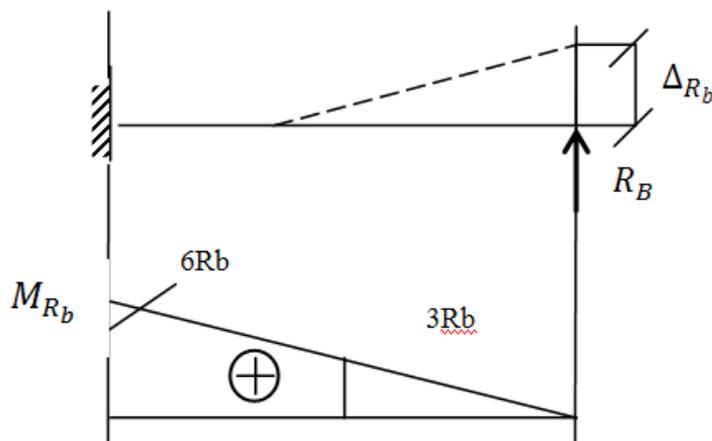
Определим

$$\Delta_F = \frac{6}{6EI} (0 \cdot 0 + 4 \cdot 9 \cdot 3 + 36 \cdot 6) = \frac{324}{EI}$$

перемещение

Чтобы определить перемещение от действия «лишней» неизвестной :

- 1) Загружаем основную систему «лишней» реакцией R_b
- 2) Строим эпюру моментов M_{R_b}



- 3) Определяем прогиб от реакции R_b по [формуле Симпсона](#),

$$\Delta_R = M_{R_b} \times \bar{M} \quad (\text{эпюра единичных моментов уже была построена ранее})$$

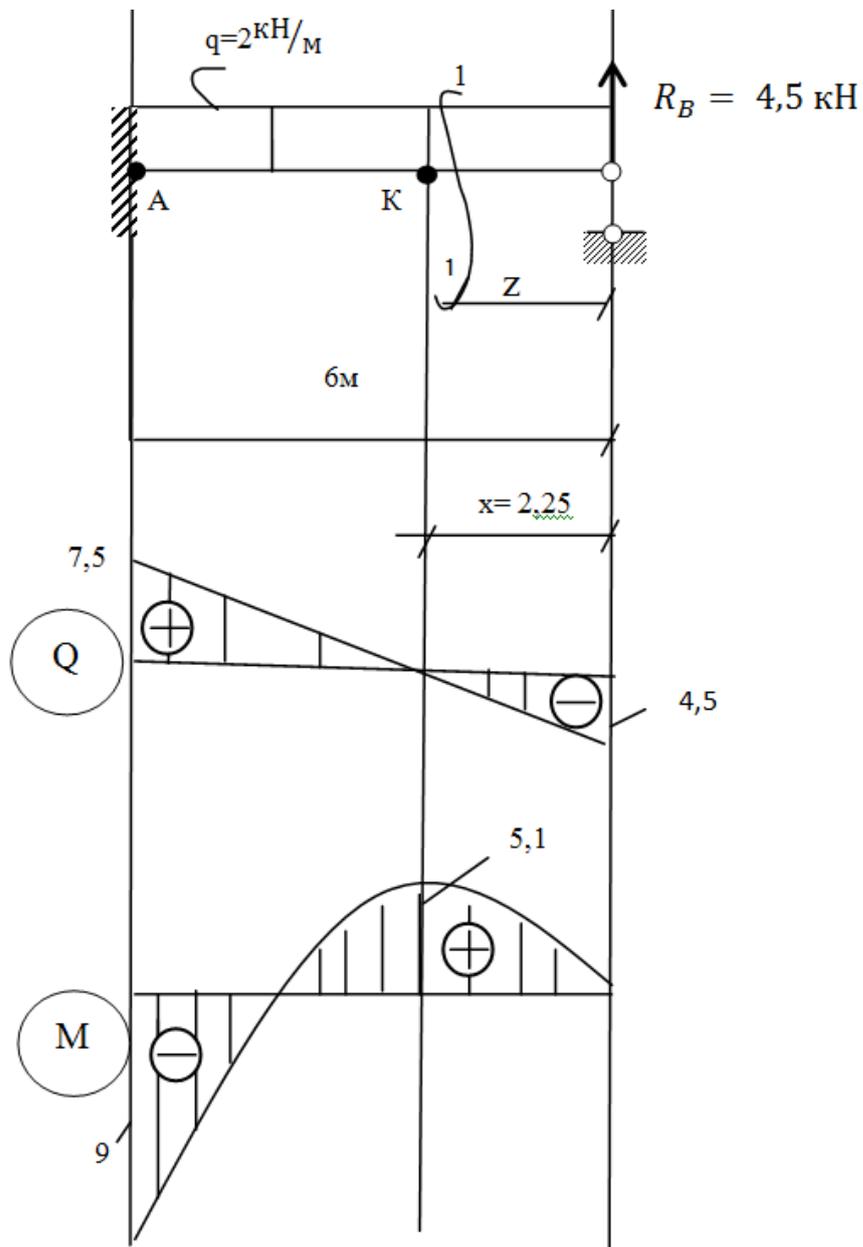
$$\Delta_{R_b} = -\frac{6}{6EI} (0 \cdot 0 + 4 \cdot 3R_b \cdot 3 + 6R_b \cdot 6) = -\frac{72R_b}{EI}$$

Решаем уравнение (1), сокращаем на EI

$$324 - 72R_b = 0$$

$$R_b = 4,5 \text{ кН}$$

Статическая неопределимость раскрыта, значение «лишней» реакции найдено. Можно приступить к построению эпюр Q и M для статически неопределимой балки... Зарисовываем заданную схему балки и указываем величину реакции R_b . В данной балке реакции в заделке можно не определять, если идти ходом справа.



Построение эюры Q для статически неопределимой балки

$$Q_1 = -R_b + q \cdot z \Big|_0^6$$

$$Z=0 \quad Q_1 = -R_b = -4,5 \text{ кН}$$

$$Z=6 \quad Q_1 = -R_b + q \cdot 6 = -4,5 + 12 = 7,5 \text{ кН}$$

Строим эюру Q .

$$M_B = 0$$

Построение эюры M $M_A = R_b \cdot 6 - q \cdot 6 \cdot 3 = 4,5 \cdot 6 - 2 \cdot 6 \cdot 3 = 27 - 36 = -9 \text{ кН} \cdot \text{м}$

Определим M в точке экстремума – в точке K . Сначала определим её положение. Обозначим расстояние до неё как неизвестное « x ». Тогда

$$-R_b + q \cdot x = 0$$

$$x = \frac{R_b}{q} = \frac{4,5}{2} = 2,25 \text{ м}$$

Тогда

$$M_k = R_b \cdot x - \frac{qx^2}{2} = 4,5 \cdot 2,25 - \frac{2 \cdot 2,25^2}{2} = 10,125 - 5,06 = 5,06 \approx 5,1 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Строим эпюру М.

Задача решена.

14-Лекция. Устойчивость сжатых стержней. Формула Эйлера.

Во всем предыдущем изложении мы определяли поперечные размеры стержней из условий *прочности*. Однако разрушение стержня может произойти не только потому, что будет нарушена прочность, но и оттого, что стержень не сохранит той формы, которая ему придана конструктором; при этом изменится и характер напряженного состояния в стержне.

Наиболее типичным примером является работа стержня, сжатого силами P . До сих пор для проверки прочности мы имели условие

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq [\sigma]$$

Это условие предполагает, что стержень все время, вплоть до разрушения работает на осевое сжатие. Уже простейший опыт показывает, что далеко не всегда возможно разрушить стержень путем доведения напряжений сжатия до предела текучести или до предела прочности материала.

Если мы подвергнем продольному сжатию тонкую деревянную линейку, то она может сломаться, изогнувшись; перед изломом сжимающие силы, при которых произойдет разрушение линейки, будут значительно меньше тех, которые вызвали бы при простом сжатии напряжение, равное пределу прочности материала. Разрушение линейки произойдет потому, что она не сможет сохранить приданную ей форму прямолинейного, сжатого стержня, а искривится, что вызовет появление изгибающих моментов от сжимающих сил P и, стало быть, добавочные напряжения от изгиба; линейка потеряет *устойчивость*.

Поэтому для надежной работы конструкции мало, чтобы она была прочна; надо, чтобы все ее элементы были *устойчивы*: они должны при действии

нагрузок деформироваться в таких пределах, чтобы характер их работы оставался неизменным. Поэтому в целом ряде случаев, в частности, для сжатых стержней, помимо проверки на прочность, необходима и проверка на устойчивость. Для осуществления этой проверки надо ближе ознакомиться с условиями, при которых устойчивость прямолинейной формы сжатого стержня нарушается.

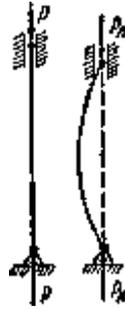


Рис.1. Расчетная схема

Возьмем достаточно длинный по сравнению с его поперечными размерами стержень, шарнирно-прикрепленный к опорам (Рис.1), и нагрузим его сверху центрально силой P , постепенно возрастающей. Мы увидим, что пока сила P сравнительно мала, стержень будет сохранять прямолинейную форму. При попытках отклонить его в сторону, например путем приложения кратковременно действующей горизонтальной силы, он будет после ряда колебаний возвращаться к первоначальной прямолинейной форме, как только будет удалена добавочная сила, вызвавшая отклонение.

При постепенном увеличении силы P стержень будет все медленнее возвращаться к первоначальному положению при проверках его устойчивости; наконец, можно довести силу P до такой величины, при которой стержень, после небольшого отклонения его в сторону, уже не выпрямится, а останется искривленным. Если мы, не удаляя силы P , выпрямим стержень, он уже, как правило, не сможет сохранить прямолинейную форму. Другими словами, при этом значении силы P , называемом *критическим* P_x , мы будем иметь такое состояние равновесия, когда исключается вероятность сохранения стержнем заданной ему прямолинейной формы).

Переход к критическому значению силы P происходит *внезапно*; стоит нам очень немного уменьшить сжимающую силу по сравнению с ее критической величиной, как прямолинейная форма равновесия вновь делается устойчивой.

С другой стороны, при очень небольшом превышении сжимающей силой P ее критического значения прямолинейная форма стержня делается крайне *неустойчивой*; достаточно при этом небольшого эксцентриситета приложенной силы, неоднородности материала по сечению, чтобы стержень

искривился, и не только не вернулся к прежней форме, а продолжал искривляться под действием все возрастающих при искривлении изгибающих моментов; процесс искривления заканчивается либо достижением совершенно новой (устойчивой) формы равновесия, либо разрушением.

Исходя из этого, мы должны практически считать критическую величину сжимающей силы $P_{кр}$ эквивалентной нагрузке, «разрушающей» сжатый стержень, выводящей его (и связанную с ним конструкцию) из условий нормальной работы. Конечно, при этом надо помнить, что «разрушение» стержня нагрузкой, превышающей критическую, может происходить при непременном условии беспрепятственного возрастания искривления стержня; поэтому если при боковом выпучивании стержень встретит боковую опору, ограничивающую его дальнейшее искривление, то разрушение может и не наступить.

Потерю устойчивости прямолинейной формы сжатого стержня иногда называют «продольным изгибом», так как она влечет за собой значительное искривление стержня под действием продольных сил. Для проверки на устойчивость сохранился и до сих пор термин «проверка на продольный изгиб», являющийся условным, так как здесь речь должна идти не о проверке на изгиб, а о проверке на устойчивость прямолинейной формы стержня.

Установив понятие о критической силе, как о «разрушающей» нагрузке, выводящей стержень из условий его нормальной работы, мы легко можем составить условие для проверки на устойчивость, аналогичное условию прочности.

Критическая сила $P_{кр}$ вызывает в сжатом стержне напряжение, называемое «критическим напряжением» и обозначаемое буквой $\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F}$. Критические напряжения являются опасными напряжениями для сжатого стержня. Поэтому, чтобы обеспечить устойчивость прямолинейной формы стержня,

сжатого силами P , необходимо к условию прочности $\left(\sigma = \frac{P}{F} \leq [\sigma] \right)$ добавить еще условие устойчивости:

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq [\sigma_y]$$

где $[\sigma_y]$ — допускаемое напряжение на устойчивость, равное критическому,

деленному на коэффициент запаса на устойчивость, т. е. $[\sigma_y] = \frac{\sigma_{кр}}{k_y}$.

Для возможности осуществить проверку на устойчивость мы должны показать, как определять σ_{*} и как выбрать коэффициент запаса k_{σ} .

Формула Эйлера для определения критической силы.

Для нахождения критических напряжений σ_{*} надо вычислить критическую силу P_{*} , т. е. наименьшую осевую сжимающую силу, способную удержать в равновесии слегка искривленный сжатый стержень.

Эту задачу впервые решил академик Петербургской Академии наук Л. Эйлер в 1744 году.

Заметим, что самая постановка задачи иная, чем во всех ранее рассмотренных отделах курса. Если раньше мы определяли деформацию стержня при заданных внешних нагрузках, то здесь ставится обратная задача: задавшись искривлением оси сжатого стержня, следует определить, при каком значении осевой сжимающей силы P такое искривление возможно.

Рассмотрим прямой стержень постоянного сечения, шарнирно опертый по концам; одна из опор допускает возможность продольного перемещения соответствующего конца стержня (рис.3). Собственным весом стержня пренебрегаем.

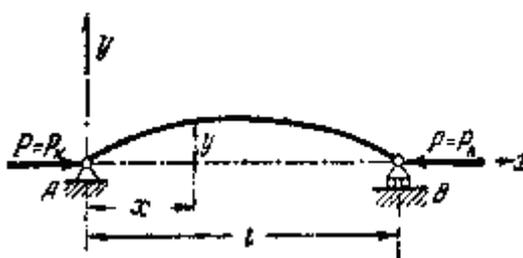


Рис.3. Расчетная схема в «задаче Эйлера»

Нагрузим стержень центрально приложенными продольными сжимающими силами $P = P_{*}$ и дадим ему весьма небольшое искривление в плоскости наименьшей жесткости; стержень удерживается в искривленном состоянии, что возможно, так как $P = P_{*}$.

Деформация изгиба стержня предположена весьма малой, поэтому для решения поставленной задачи можно воспользоваться приближенным дифференциальным уравнением изогнутой оси стержня. Выбрав начало

координат в точке A и направление координатных осей, как показано на рис.3, имеем:

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x) \quad (1)$$

Возьмем сечение на расстоянии x от начала координат; ордината изогнутой оси в этом сечении будет y , а изгибающий момент равен

$$M(x) = -Py$$

По исходной схеме изгибающий момент получается отрицательным, ординаты же при выбранном направлении оси y оказываются положительными. (Если бы стержень искривился выпуклостью книзу, то момент был бы положительным, а y — отрицательным и $M(x) = -Py$.)

Приведенное только что дифференциальное уравнение принимает вид:

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -Py$$

деля обе части уравнения на EJ и обозначая дробь $\frac{P}{EJ}$ через k^2 приводим его к виду:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = 0$$

Общий интеграл этого уравнения имеет вид:

$$y = a \sin kx + b \cos kx$$

Это решение включает в себе три неизвестных: постоянные интегрирования

a и b и значение $k = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$, так как величина критической силы нам неизвестна.

Краевые условия на концах стержня дают два уравнения:

в точке A при $x = 0$ прогиб $y = 0$,

В $x = 1$ $y = 0$.

Из первого условия следует (так как $\sin kx = 0$ и $\cos kx = 1$)

$$0 = b.$$

Таким образом, изогнутая ось является синусоидой с уравнением

$$y = a \sin kx \quad (2)$$

Применяя второе условие, подставляем в это уравнение

$$y = 0 \text{ и } x = l$$

получаем:

$$0 = a \sin kl$$

Отсюда следует, что или a или kl равны нулю.

Если a равно нулю, то из уравнения (2) следует, что прогиб в любом сечении стержня равен нулю, т. е. стержень остался прямым. Это противоречит исходным предпосылкам нашего вывода. Следовательно, $\sin kl = 0$, и величина kl может иметь следующий бесконечный ряд значений:

$$kl = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, n\pi$$

где n — любое целое число.

Отсюда $k = \frac{\pi n}{l}$, а так как $k = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$, то

$$\frac{P}{EJ} = \frac{\pi^2}{l^2} \cdot n^2 \quad \text{и} \quad P = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \cdot n^2$$

Иначе говоря, нагрузка, способная удержать слегка искривленный стержень в равновесии, теоретически может иметь целый ряд значений. Но так как отыскивается, и интересно с практической точки зрения, наименьшее значение осевой сжимающей силы, при которой становится возможным продольный изгиб, то следует принять $n = n_{\min}$.

Первый корень $n=0$ требует, чтобы P_n было равно нулю, что не отвечает исходным данным задачи; поэтому этот корень должен быть отброшен и наименьшим корнем принимается значение $n=1$. Тогда получаем выражение для критической силы:

$$P_n = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \quad (3)$$

(Здесь J —минимальный момент инерции поперечного сечения стержня.) Это — так называемая *формула Эйлера* для сжатого стержня с шарнирно-опертыми концами. Значению критической силы (3) соответствует изгиб стержня по синусоиде с одной полуволной [формула (2)]

$$y = a \sin \frac{\pi x}{l}$$

15-Лекция. Пределы применимости формулы Эйлера

Казалось бы, что полученные в предыдущих параграфах результаты решают задачу проверки сжатого стержня на устойчивость; остается выбрать лишь коэффициент запаса k_y . Однако это далеко не так. Ближайшее же изучение числовых величин, получаемых по формуле Эйлера, показывает, что она дает правильные результаты лишь в известных пределах.

На рис.1 приведена зависимость величины критических напряжений, вычисленных при различных значениях гибкости для стали 3, обычно применяемой в металлических конструкциях. Эта зависимость представляется гиперболической кривой, так называемой «гиперболой Эйлера»: $\sigma_x = f(\lambda)$

При пользовании этой кривой надо вспомнить, что представляемая ею формула $\sigma_x = \pi^2 E \lambda^{-2}$ получена при помощи интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси, т. е. в предположении, что напряжения в стержне в момент потери устойчивости не превосходят предела пропорциональности.

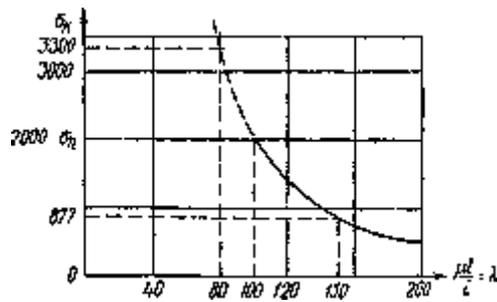


Рис.1. Гиперболическая зависимость критического напряжения от гибкости стержня

Следовательно, мы не имеем права пользоваться величинами критических напряжений, вычисленных по формуле Эйлера, если они получаются выше этого предела для данного материала. Иначе говоря, формула Эйлера применима лишь при соблюдении условия:

$$\sigma_k \leq \sigma_{II} \text{ или } \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{II}$$

Если из этого неравенства выразить гибкость λ , то условие применимости формул Эйлера получит иной вид:

$$\lambda_{II} \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{II}}}$$

Подставляя соответствующие значения модуля упругости и предела пропорциональности для данного материала, находим наименьшее значение гибкости, при которой еще можно пользоваться формулой Эйлера. Для стали 3 предел пропорциональности может быть принят равным $\sigma_{II} = 200 \text{ МПа}$, поэтому, для стержней из этого материала можно пользоваться формулой Эйлера лишь при гибкости

$$\lambda_{II} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{200}} \approx 100$$

т. е. большей, чем 100 %

Для стали 5 при $\sigma_{II} = 300 \text{ МПа}$ формула Эйлера применима при гибкости $\lambda \geq 85$; для чугуна — при $\lambda \geq 80$, для сосны — при $\lambda \geq 100$ и т. д. Если мы на Рис.1 проведем горизонтальную линию с ординатой, равной $\sigma_{II} = 200 \text{ МПа}$, то она рассекает гиперболу Эйлера на две части; пользоваться можно лишь нижней частью графика, относящейся к сравнительно тонким и длинным стержням, потеря устойчивости которых происходит при напряжениях, лежащих не выше предела пропорциональности.

Теоретическое решение, полученное Эйлером, оказалось применимым на практике лишь для очень ограниченной категории стержней, а именно, тонких и длинных, с большой гибкостью. Между тем, в конструкциях очень часто встречаются стержни с малой гибкостью. Попытки использовать формулу Эйлера для вычисления критических напряжений и проверки устойчивости при малых гибкостях вели иногда к весьма серьезным катастрофам, да и опыты над сжатием стержней показывают, что при критических напряжениях,

больших пределах пропорциональности, действительные критические силы значительно ниже определенных по формуле Эйлера.

Таким образом, надо найти способ вычисления критических напряжений и для тех случаев, когда они превышают предел пропорциональности материалов, например, для стержней из мягкой стали при гибкостях от 0 до 100.

Необходимо сразу же отметить, что в настоящее время важнейшим источником для установления критических напряжений за пределом пропорциональности, т. е. при малых и средних гибкостях, являются результаты экспериментов. Имеются попытки и теоретического решения этой задачи, но они скорее указывают путь к дальнейшим исследованиям, чем дают основания для практических расчетов.

Прежде всего надо выделить стержни с малой гибкостью, от 0 примерно до 30—40; у них длина сравнительно невелика по отношению к размерам поперечного сечения. Например, для стержня круглого сечения гибкости 20 соответствует отношение длины к диаметру, равное 5. Для таких стержней трудно говорить о явлении потери устойчивости прямолинейной формы всего стержня в целом в том смысле, как это имеет место для тонких и длинных стержней.

Эти короткие стержни будут выходить из строя главным образом за счет того, что напряжения сжатия в них будут достигать предела текучести σ_T (при пластичном материале) или предела прочности σ_B (при хрупких материалах). Поэтому для коротких стержней, до гибкости примерно 30÷40, критические напряжения «будут равны, или немного ниже (за счет наблюдающегося все же некоторого искривления оси стержня), соответственно или σ_T (сталь), или σ_B (чугун, дерево).

Таким образом, мы имеем два предельных случая работы сжатых стержней: короткие стержни, которые теряют грузоподъемность в основном за счет разрушения материала от сжатия, и длинные, для которых потеря грузоподъемности вызывается нарушением устойчивости прямолинейной формы стержня. Количественное изменение соотношения длины и поперечных размеров стержня меняет и весь характер явления разрушения. Общим остается лишь внезапность наступления критического состояния в смысле внезапного резкого возрастания деформаций.

В сжатых стержнях большой гибкости, для которых применима формула Эйлера, после достижения силой P критического значения обычно наблюдается резкий рост деформаций. До этого момента прогибы, как правило, растут с ростом нагрузки, но остаются незначительными. Теоретически можно было бы ожидать, что до критической силы стержень будет оставаться прямым; однако ряд неизбежных на практике обстоятельств — начальная кривизна стержня, некоторый эксцентриситет приложения нагрузки, местные перенапряжения, неоднородность материала — вызывают небольшие прогибы и при сжимающих силах, меньших критических.

Подобный же характер имеет и зависимость укорочений от напряжения при сжатии коротких стержней; мы имеем ту же внезапность роста деформаций при определенной величине напряжений (когда $\sigma = \sigma_T$).

Экспериментальное определение критических сил для сжатых стержней производилось неоднократно как у нас, так и за границей. Особенно обширный опытный материал собрал проф. Ф. Ясинский, составивший таблицу критических («ломающих») напряжений в зависимости от гибкости для целого ряда материалов и положивший начало современным методам расчета сжатых стержней на устойчивость.

На основании полученного опытного материала можно считать, что при критических напряжениях, меньших предела пропорциональности, все эксперименты подтверждают формулу Эйлера для любого материала.

Для стержней средней и малой гибкости были предложены различные эмпирические формулы, показывающие, что критические напряжения при таких гибкостях меняются по закону, близкому к линейному:

$$\sigma_x = a - b\lambda$$

где a и b — коэффициенты, зависящие от материала, а $\lambda = \frac{l}{i}$ — гибкость стержня. Для литого железа Ясинский получил: $a = 338,7 \text{ МПа}$, $b = 1,483 \text{ МПа}$. Для стали 3 при гибкостях от $\lambda = 40$ до $\lambda = 100$ коэффициенты a и b могут быть приняты: $a = 336 \text{ МПа}$; $b = 1,47 \text{ МПа}$. Для дерева (сосна): $a = 29,3 \text{ МПа}$; $b = 0,194 \text{ МПа}$.

Иногда удобны эмпирические формулы, дающие для неупругой области изменение критических напряжений по закону квадратной параболы; к ним относится формула

$$\sigma_x = \sigma_0 - a\lambda^2$$

Здесь при $\lambda = 0$ считают $\sigma_x = \sigma_0 = \sigma_T$ для пластичного и $\sigma_x = \sigma_0 = \sigma_B$ для хрупкого материала; коэффициент a , подобранный из условия плавного сопряжения с гиперболой Эйлера, имеет значение:

для стали с пределом текучести $\sigma_T = 280 \text{ МПа}$ $a = 0,009 \text{ МПа}$

- сосны прочности $\sigma_B = 30$; $a = 0,0008$ »
- чугуна $\sigma_B = 420$; $a = 0,044$ »

При наличии приведенных здесь данных может быть построен полный график критических напряжений (в зависимости от гибкости) для любого материала. На Рис.2 приведен такой график для строительной стали с пределом текучести $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$ и пределом пропорциональности $\sigma_H = 240 \text{ МПа}$.

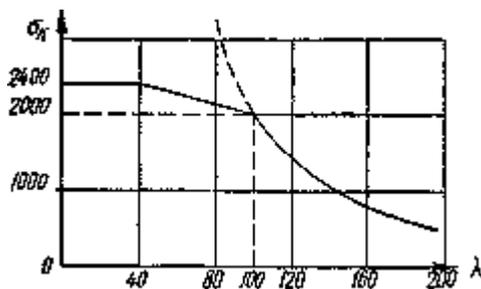


Рис.2. Полный график критических напряжений для строительной стали.

График состоит из трех частей: гиперболы Эйлера при $\lambda > 100$, наклонной прямой при $100 > \lambda > 40$ и горизонтальной, или слабо наклонной, прямой при $\lambda < 40$. Подобные же графики можно построить, комбинируя формулу Эйлера с результатами экспериментов, и для других материалов.

Таким образом, можно считать, что задача определения критических напряжений для стержней любой гибкости решена с достаточной для практических целей точностью.

Проверка сжатых стержней на устойчивость.

Ранее было отмечено, что для сжатых стержней должны быть произведены две проверки:

на прочность

$$\sigma = \frac{P}{F_{\text{ннг}}} \leq [\sigma],$$

на устойчивость

$$\sigma = \frac{P}{F_{\text{бу}}} \leq [\sigma_y], \quad \text{где} \quad [\sigma_y] = \frac{\sigma_k}{k_y},$$

Для установления допускаемого напряжения на устойчивость нам остается теперь выбрать только коэффициент запаса k .

На практике этот коэффициент колеблется для стали в пределах от 1,8 до 3,0. Коэффициент запаса на устойчивость выбирается выше коэффициента запаса на прочность, равного для стали 1,5 — 1,6.

Это объясняется наличием ряда обстоятельств, неизбежных на практике (начальная кривизна, эксцентриситет действия, нагрузки, неоднородность

материала и т. д.) и почти не отражающихся на работе конструкции при других видах деформации (кручение, изгиб, растяжение).

Для сжатых же стержней, ввиду возможности потери устойчивости, эти обстоятельства могут сильно снизить грузоподъемность стержня. Для чугуна коэффициент запаса колеблется от 5,0 до 5,5, для дерева — от 2,8 до 3,2.

Чтобы установить связь между допускаемым напряжением на устойчивость $[\sigma_y]$ и допускаемым напряжением на прочность $[\sigma]$, возьмем их отношение:

$$\frac{[\sigma_y]}{[\sigma]} = \frac{\sigma_x k_0}{k_y \sigma_0} \quad \text{или} < \quad [\sigma_y] = \frac{\sigma_x}{\sigma_0} \cdot \frac{k_0}{k_y} [\sigma]$$

Обозначая

$$\varphi = \frac{\sigma_x}{\sigma_0} \cdot \frac{k_0}{k_y}$$

получим:

$$[\sigma_y] = \varphi [\sigma]$$

здесь φ — коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения для сжатых стержней.

Имея график зависимости σ_x от λ для данного материала, зная $\sigma_0 = \sigma_T$ или $\sigma_0 = \sigma_B$ и выбрав коэффициенты запаса на прочность k_0 и на устойчивость k_y , можно составить таблицы значений коэффициента φ в функции от гибкости. Такие данные приводятся в наших технических условиях на проектирование сооружений; они сведены в таблицу.

Пользуясь этой таблицей, можно произвести подбор сечения сжатого стержня. Так как величина площади сечения зависит от $[\sigma_y]$, а это напряжение в свою очередь через коэффициент φ связано с гибкостью стержня λ , т. е. с формой и размерами его сечения, то подбор приходится осуществлять путем последовательных приближений в таком, например, порядке.

Выбираем форму сечения и задаемся его размерами; вычисляем наименьший радиус инерции и гибкость; находим по таблице коэффициент φ и вычисляем допускаемое напряжение на устойчивость $[\sigma_y] = \varphi [\sigma]$; сравниваем

действительное напряжение $\sigma = \frac{P}{F_{бп}}$ с величиной $[\sigma_y]$; если условие устойчивости

$$\sigma = \frac{P}{F_{\text{бр}}} \leq [\sigma]$$

не удовлетворено, или удовлетворено с большим запасом, меняем размеры сечения и повторяем расчет. Конечно, окончательно выбранное сечение должно удовлетворять и условию прочности

$$\sigma = \frac{P}{F_{\text{нст}}} \leq [\sigma]$$

В практических расчетах условие устойчивости иногда записывается так:

$$\sigma_{\text{у}} = \frac{P}{\varphi F_{\text{бр}}} \leq [\sigma]$$

В левой части $\sigma_{\text{у}}$ представляет собой расчетное (условное

2. Практическое занятие

Практические занятия -1

Введение и основные понятия. Задачи курса сопротивление материалов. Решение задачи

Брус – это тело, у которого два размера малы по сравнению с третьим. Брус с прямолинейной осью называют *стержнем*. *Ось бруса* – это линия, которая соединяет центры тяжести его поперечных сечений.

Под действием приложенных сил тело деформируется. Изменение линейных размеров тела называется *линейной деформацией*, а изменение угловых размеров – *угловой деформацией*. *Удлинение* – это увеличение линейных размеров тела, а *укорочение* – уменьшение линейных размеров тела.

Пусть прямой брус длиной l заделан одним концом, а на другом конце приложена внешняя сосредоточенная сила F . Под действием этой силы брус удлинится на величину Δl , которая называется *полным (абсолютным) удлинением*, тогда

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \quad (1.1)$$

где ε – *относительная продольная деформация*.

Перемещение точки – расстояние между первоначальным положением точки (до приложения внешних нагрузок) и ее положением после деформации, взятое в определенном направлении, например, вдоль оси стержня.

Центральное растяжение (сжатие) – это такой случай напряженного состояния, когда в поперечных сечениях стержня возникают только *нормальные силы N* .

На основании гипотезы плоских сечений все продольные волокна стержня испытывают одинаковые удлинения или укорочения. Следовательно, при

растяжении и сжатии *нормальные напряжения* σ распределены равномерно по поперечному сечению стержня, поэтому

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad (1.2)$$

где A – площадь поперечного сечения стержня.

Зависимость между нормальным напряжением σ и относительной деформацией ε в пределах упругости при растяжении и сжатии имеет вид (*закон Гука*):

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (1.3)$$

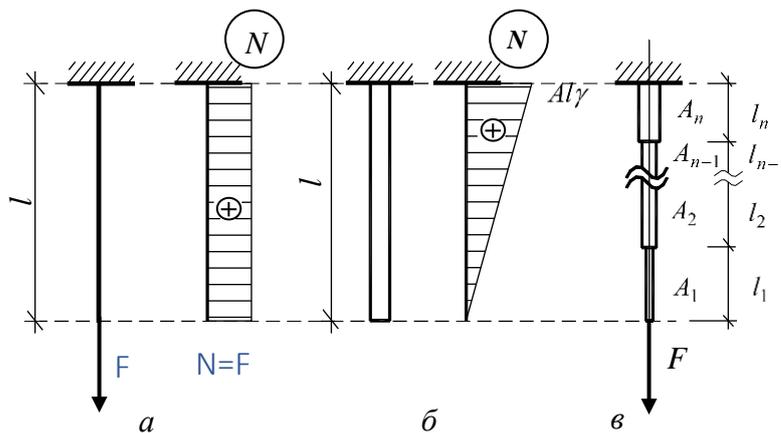
где E – *модуль продольной упругости (модуль Юнга)*.

Пользуясь законом Гука (1.3), можно вычислить абсолютное удлинение Δl стержня при действии нормальной силы N (рис. 1.1, а):

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}, \quad (1.4)$$

при учете только действия собственного веса стержня (рис. 1.1, б):

$$\Delta l = \frac{\gamma l^2}{2E}, \quad (1.5)$$



где γ – объемный вес материала стержня.

Рис. 1.1

Если по длине стержня l нормальная сила $N(x)$ и площадь сечения $A(x)$ переменны и изменяются по какому-либо непрерывному закону, то удлинение Δl определяется по формуле

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N(x)dx}{EA(x)}. \quad (1.6)$$

Для стержня со ступенчатым изменением площади A_i (рис. 1.1, в) и нормальной силы N_i удлинения Δl_i вычисляются на каждом участке с постоянными N_i и A_i , а результаты алгебраически суммируются:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \Delta l_i = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{E_i A_i}, \quad (1.7)$$

где n – число участков; i – номер участка ($i = 1; 2; 3; \dots; n$).

Существует экспериментально установленная зависимость:

$$\varepsilon_t = -\nu\varepsilon,$$

где ε_t – относительная поперечная деформация, ν – коэффициент Пуассона (коэффициент поперечной деформации). Коэффициент Пуассона ν вместе с модулем продольной упругости E характеризует упругие свойства материалов.

Расчет на прочность стальных элементов, подверженных центральному растяжению или сжатию, следует выполнять по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A_n} \leq R_y \gamma_c, \quad (1.8)$$

где γ_c – коэффициент условий работы, принимаемый по СНиП (см. табл.1.1) или другим нормам.

Таблица 1.1

Элементы конструкции	γ_c
Колонны общественных зданий и опор водонапорных башен	0,95
Элементы стержневых конструкций покрытий и перекрытий:	0,95
а) сжатых при расчетах на устойчивость	0,95
б) растянутых в сварных конструкциях	1,1
Сплошные составные балки, колонны, несущие статическую нагрузку и выполненные с помощью болтовых соединений, при расчетах на прочность	1,1
Сечения прокатных и сварных элементов, несущих статическую нагрузку, при расчетах на прочность	0,75
Сжатые элементы из одиночных уголков, прикрепляемые одной полкой	

Примечание: В случаях, не оговоренных в настоящих нормах, в формулах следует

принимать $\gamma_c = 1$.

Для хрупких материалов условия прочности принимают вид:

при растяжении: $\sigma_t \leq \sigma_{adm,t}$, $\sigma_{adm,t} = \sigma_{ut} / n_t$;

при сжатии: $\sigma_- \leq \sigma_{adm,-}$, $\sigma_{adm,-} = \sigma_{u-} / n_-$, (1.9)

где $\sigma_{adm,t}$ и $\sigma_{adm,c}$ – допускаемые напряжения при растяжении и сжатии; n_t и n_c – нормативные коэффициенты запаса прочности по отношению к пределу прочности ($n_b, n_c > 1$).

Для центрально сжатых бетонных элементов формула (1.9) записывается в виде:

$$\sigma_c = \frac{N}{A_b} \leq \alpha R_b, \quad (1.10)$$

где α – коэффициент, принимаемый для бетона тяжелого, мелкозернистого и легкого равным 1,00; для ячеистого автоклавного – 0,85; для ячеистого неавтоклавного – 0,75.

Практические занятия -2,3

Растяжение и сжатие прямого стержня. Решение задачи

Задача 1.1.1. Построить эпюры нормальных сил и нормальных напряжений для бруса, изображенного на рис. 1.1.1. Собственный вес бруса в расчете не учитывать.

Решение. Для определения внутренних усилий разбиваем прямолинейный брус на участки. Границами участков являются точки продольной оси, соответствующие изменению площади поперечного сечения и точкам приложения сосредоточенных сил. Из рассмотрения рис. 1.1.1, а определяем, что брус необходимо разбить на четыре участка.

Проводим сечение I – I. Отбросим верхнюю часть бруса, ее действие заменим нормальной силой N_1 (рис. 1.1.1, б). Запишем уравнение равновесия, проектируя силы на ось бруса:

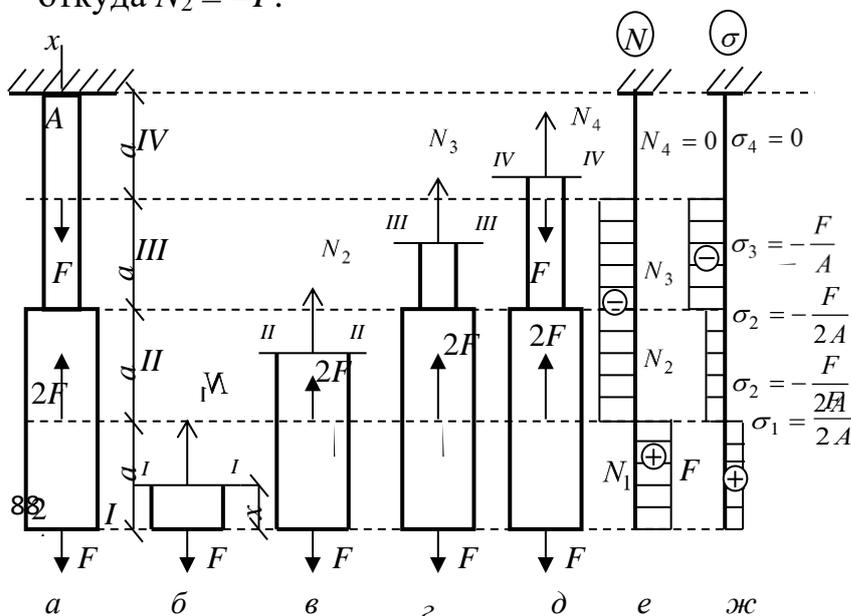
$$\sum x = N_1 - F = 0, \text{ откуда } N_1 = F.$$

Очевидно, что на всем первом участке ($0 \leq x \leq a$) нормальная сила N_1 постоянна по величине. Откладываем в масштабе значение нормальной силы $N_1 = F$ в пределах участка I – I (рис. 1.1.1, е).

Проводим сечение II – II и, отбрасывая верхнюю часть бруса, заменяем ее действие нормальной силой N_2 (рис. 1.1.1, в). Проектируем все силы на ось бруса:

$$\sum x = N_2 + 2F - F = 0,$$

$$\text{откуда } N_2 = -F.$$



Аналогично находим нормальные силы в сечении $III - III$ (рис. 1.1.1, z):

$$\sum x = N_3 + 2F - F = 0, \quad \text{откуда } N_3 = -F$$

и в сечении $IV - IV$ (рис. 1.1.1, $д$):

$$\sum x = N_4 - F + 2F - F = 0, \quad \text{откуда } N_4 = 0.$$

Откладывая в масштабе значения нормальных сил N_2, N_3, N_4 в пределах соответствующих участков, получаем эпюру нормальных сил (рис.1.1.1, e). Полученную таким путем эпюру принято штриховать прямыми линиями, перпендикулярными к оси бруса. Каждая такая линия в принятом масштабе дает величину нормальной силы в соответствующем поперечном сечении бруса. Знак «плюс» показывает, что в пределах данного участка – растяжение, а знак «минус» – сжатие.

Для построения эпюры нормальных напряжений σ воспользуемся формулой (1.2) для каждого участка:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{2A} = \frac{F}{2A}; \sigma_2 = \frac{N_2}{2A} = -\frac{F}{2A}; \sigma_3 = \frac{N_3}{A} = -\frac{F}{A}; \sigma_4 = 0.$$

Эпюра нормальных напряжений (рис. 1.1.1, $ж$) показывает, что наибольшего значения нормальные напряжения достигают в пределах третьего участка (участок III).

Задача 1.2.1. Определить перемещение нижнего конца стержня, изображенного на рис. 1.1.1, a . Задачу решить без учета собственного веса материала бруса. Принять $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $a = 0,5$ м; $A = 10$ см²; сосредоточенная сила $F = 10$ кН.

Решение. Для рассматриваемого случая эпюра нормальных сил представлена на рис. 1.1.1, e . Для стержня со ступенчатым изменением площади и нормальных сил перемещения поперечных сечений вычисляются по формуле (1.7). Рассматривая рис. 1.1.1, a и рис. 1.1.1, e , запишем формулу (1.7) для определения перемещения нижнего конца стержня в виде:

$$\Delta l = \Delta l_I + \Delta l_{II} + \Delta l_{III} + \Delta l_{IV} = \frac{N_1 a}{E2A} + \frac{N_2 a}{E2A} + \frac{N_3 a}{EA} + \frac{N_4 a}{EA} =$$

$$= \frac{Fa}{E2A} - \frac{Fa}{E2A} - \frac{Fa}{EA} + 0 = -\frac{Fa}{EA} = -\frac{10 \cdot 10^{-3} \cdot 0,5}{2 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = -0,25 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -0,025 \text{ мм}.$$

«минус» в ответе показывает, что общая длина стержня уменьшится, т.е. нижний конец стержня переместится вверх вдоль его оси на величину $\Delta l = -0,025$ мм.

Задача 1.1.2. Построить эпюры нормальных сил и нормальных напряжений для бруса, изображенного на рис.1.1.2, a . Принять $a = 0,4$ м; площадь поперечного сечения бруса на участках III и IV $A = 20$ см²; сосредоточенная сила $F = 0,5$ кН, собственный вес $\gamma = 0,0078$ кг/см³ = 76,44 кН/м³.

Решение. Для определения внутренних усилий разбиваем брус с прямолинейной осью на четыре участка. Проводим сечение $I - I$ (рис. 1.1.2, a) и отбрасываем верхнюю часть бруса, заменяя действие отброшенной части

нормальной силой N_1 (рис. 1.1.2, б). Так как сечение $I-I$ может быть проведено в любом месте участка I , то длина оставшейся части участка будет переменной величиной, и поэтому обозначим ее через x (рис. 1.1.2, б), причем $0 \leq x \leq a$. Запишем уравнение равновесия, проектируя силы, действующие на оставшуюся часть бруса, на направление оси бруса:

$$\sum x = N_1 - G_1 - F = 0, \text{ откуда } N_1 = F + G_1 = F + 2Ax.$$

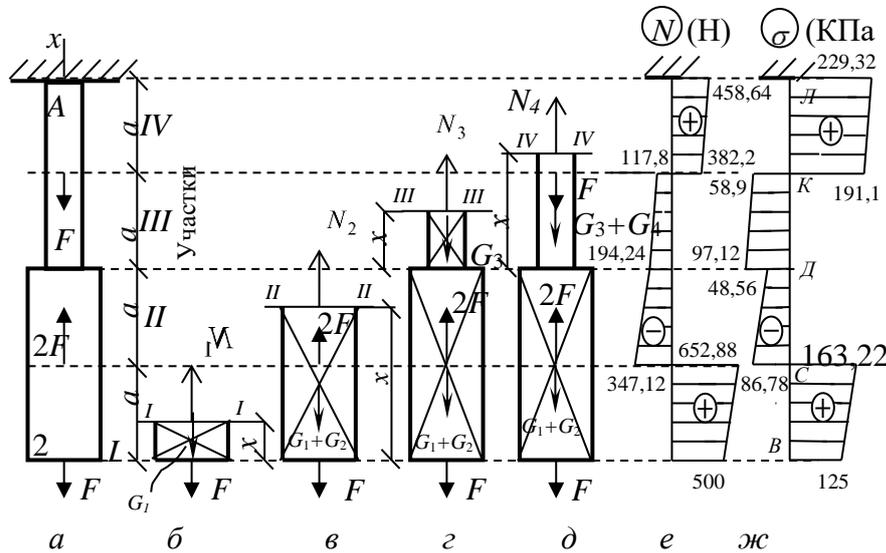


Рис. 1.1.2

Через $G_1 = 2Ax\gamma$ обозначен собственный вес оставшейся части бруса первого участка, в пределах которого площадь поперечного сечения равна $2A$, а длина оставшейся части обозначена через x . Подставим численные значения в полученную формулу:

$$N_1 = F + 2Ax\gamma = 500 + 2 \cdot 20 \cdot 10^{-4} x \cdot 76440 = 500 + 305,76x \text{ [Н]}.$$

Записанное выражение показывает, что эпюра нормальных сил в пределах первого участка представляет собой наклонную прямую линию. Для построения этой прямой определим значение нормальной силы N_1 в начале первого участка ($x = 0$): $N_1(x = 0) = 500$ Н и в конце первого участка ($x = a = 0,5$ м): $N_1(x = 0,5 \text{ м}) = 500 + 305,76 \cdot 0,5 = 652,88$ Н.

Полученные значения откладываем в масштабе в соответствующих точках эпюры нормальных сил (рис. 1.1.2, е). Найденные точки соединяем прямой линией, затем штрихуем первый участок эпюры прямыми линиями, перпендикулярными к оси бруса.

Проводим сечение $II-II$ и повторяем порядок расчета, описанный выше для сечения $I-I$. Переменная величина x участка $II-II$ будет изменяться в пределах $a \leq x \leq 2a$. Составим уравнение равновесия (рис. 1.1.2, в)

$$\sum x = N_2 + 2F - (G_1 + G_2) - F = 0, \text{ откуда } N_2 = (G_1 + G_2) - F,$$

где $G_1 + G_2 = 2Ax\gamma$ — собственный вес части бруса, расположенного ниже сечения $II-II$. Окончательно имеем

$$N_2 = 2Ax\gamma - F = 2 \cdot 20 \cdot 10^{-4} x \cdot 76440 - 500 = 305,76x - 500.$$

Определяем значение нормальной силы N_2 в начале второго участка ($x = 0,5$ м): $N_2(x = 0,5 \text{ м}) = 305,76 \cdot 0,5 - 500 = -347,12$ Н и в конце этого же участка ($x = x_{\max} = 1$ м): $N_2(x = 1 \text{ м}) = 305,76 \cdot 1 - 500 = -194,24$ Н.

Полученные значения N_2 откладываем в масштабе в начале и в конце второго участка (рис. 1.1.2, е).

Проводим сечение III – III и для оставшейся части бруса составляем уравнение равновесия (рис. 1.1.2, з)

$$\sum x = N_3 - G_3 + 2F - (G_1 + G_2) - F = 0,$$

откуда $N_3 = -F + G_3 + (G_1 + G_2)$, где $G_3 = Ax$ – собственный вес оставшейся части бруса третьего участка; $G_1 + G_2 = 2A \cdot 2a \cdot \gamma$ – собственный вес первого и второго участков.

Тогда для участка $0 \leq x \leq a$

$$\begin{aligned} N_3 &= -F + G_3 + G_1 + G_2 = \\ &= -500 + 20 \cdot 10^{-4} x 76440 + 2 \cdot 20 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 0,5 \cdot 76440 = -194,24 + 152,88x, \end{aligned}$$

где нормальная сила N_3 в начале третьего участка будет $N_3(x=0) = -194,2$ Н; а в конце третьего участка получаем $N_3(x = a = 0,5 \text{ м}) = -117,8$ Н. Найденные значения N_3 переносим на эпюру нормальных сил.

И наконец, рассматривая равновесие оставшейся части бруса, после проведения сечения IV – IV получаем (рис. 1.1.2, д)

$$\sum x = N_4 - (G_3 + G_4) - F + 2F - (G_1 + G_2) - F = 0,$$

откуда $N_4 = (G_3 + G_4) + (G_1 + G_2)$, $a \leq x \leq 2a$, где $G_1 + G_2 = 2A \cdot 2a \cdot \gamma = 305,76$ Н – собственный вес участков I – I и II – II, $G_3 + G_4 = Ax\gamma = 152,88x$ – собственный вес третьего и оставшейся части четвертого участков.

В этом случае имеем

$$N_4 = 152,88x + 305,76,$$

т.е. в начале четвертого участка $N_4(x = 0,5 \text{ м}) = 382,2$ Н, а в конце этого же участка $N_4(x = 1 \text{ м}) = 458,64$ Н. Вычисленные значения N_4 откладываем в масштабе на эпюре нормальных сил (рис. 1.1.2, е).

Эпюра нормальных сил показывает, что первый и четвертый участок подвержены растяжению, а второй и третий – сжатию.

Для вычисления значений нормальных напряжений σ и построения эпюры нормальных напряжений используем формулу (1.2):

$$\sigma_B = \frac{N_B}{2A} = \frac{500}{2 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} = 125000 \text{ Па} = 125 \text{ кПа}; \quad \sigma_C^I = \frac{652,88 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} = 163,22 \text{ кПа};$$

$$\sigma_C^{II} = \frac{N_C^{II}}{2A} = -\frac{347,12 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} = -86,78 \text{ кПа}; \quad \sigma_D^{II} = -\frac{194,24 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} = -48,56 \text{ кПа};$$

$$\sigma_D^{III} = -\frac{194,24 \cdot 10^{-3}}{20 \cdot 10^{-4}} = -97,12 \text{ кПа}; \quad \sigma_K^{III} = -\frac{117,8 \cdot 10^{-3}}{20 \cdot 10^{-4}} = -58,9 \text{ кПа};$$

$$\sigma_K^{IV} = \frac{382,2 \cdot 10^{-3}}{20 \cdot 10^{-4}} = 191,1 \text{ кПа}; \quad \sigma_L^{IV} = \frac{458,64 \cdot 10^{-3}}{20 \cdot 10^{-4}} = 229,32 \text{ кПа}.$$

Эпюра нормальных напряжений показывает, что самое большое нормальное напряжение возникает в сечении, проходящем через точку L четвертого участка (рис. 1.1.2, $Ж$), т.е. на опоре.

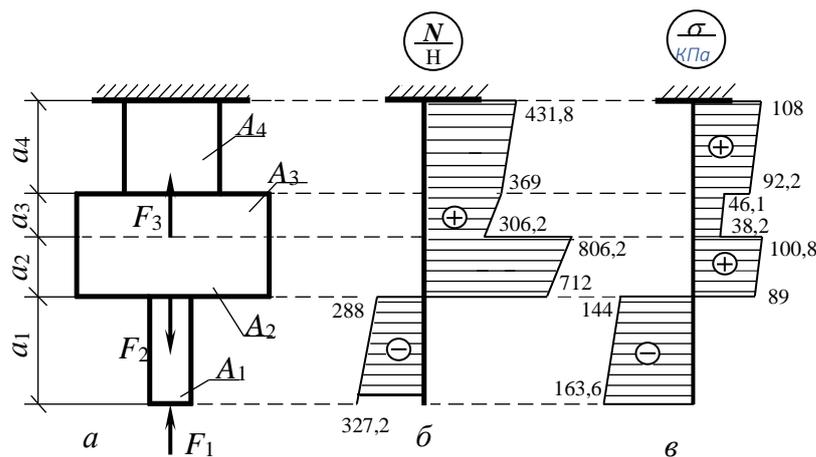


Рис. 1.1.3

1.4. Построение эпюр нормальных сил и напряжений для брусев в статически неопределимых задачах

Статически неопределимыми системами называются системы, для которых реакции связей и внутренние усилия не могут быть определены только из уравнений равновесия. Поэтому при их расчете необходимо составлять дополнительные уравнения перемещений, учитывающие характер деформации системы. Число дополнительных уравнений, необходимых для расчета системы, характеризует *степень ее статической неопределимости*. Способы составления уравнений перемещений будут рассмотрены на примерах решения различных задач.

Задача 1.4.1. Задан стальной стержень, заделанный обоими концами и нагруженный силой $F = 1000$ Н (рис.1.4.1, a). Удельный вес материала стержня $\gamma = 78,5$ кН/м³, модуль упругости — $E = 2,06 \cdot 10^5$ МПа.

Требуется построить эпюры нормальных сил и напряжений, а также определить перемещение сечения $I - I$.

Решение. Выбираем основную систему, которая должна представлять собой статически определимую неизменяемую систему. Основная система получается из заданной системы путем отбрасывания лишних связей и замены

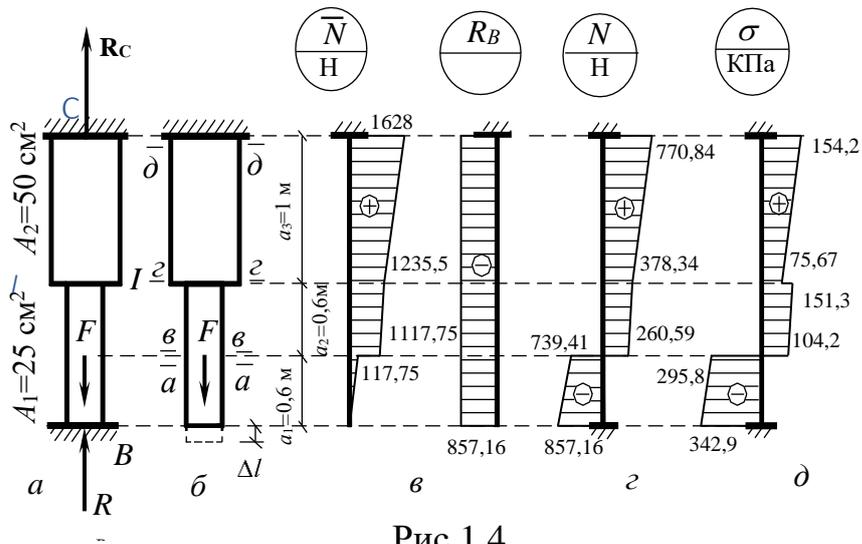


Рис.1.4

их действия неизвестными реакциями. Принятая основная система показана на рис. 1.4.1, б.

Строим эпюру нормальных сил \bar{N} для основной системы, для чего определяем нормальные силы в соответствующих сечениях (рис. 1.4.1, б):

$$\bar{N}_{a-a} = A_1 a_1 \gamma = 25 \cdot 10^{-4} \cdot 0,6 \cdot 78500 = 117,75 \text{ Н};$$

$$\bar{N}_{в-в} = \bar{N}_{a-a} + F = 117,75 + 1000 = 1117,75 \text{ Н};$$

$$\bar{N}_{z-z} = \bar{N}_{в-в} + A_1 a_2 \gamma = 1117,75 + 25 \cdot 10^{-4} \cdot 0,6 \cdot 78500 = 1235,5 \text{ Н};$$

$$\bar{N}_{\partial-\partial} = \bar{N}_{z-z} + A_2 a_3 \gamma = 1235,5 + 50 \cdot 10^{-4} \cdot 1 \cdot 78500 = 1628 \text{ Н}.$$

Определяем перемещение нижнего конца стального стержня основной системы:

$$\Delta l = \frac{\gamma a_1^2}{2E} + \frac{1117,75 a_2}{EA_1} + \frac{\gamma a_2^2}{2E} + \frac{1235,5 a_3}{EA_2} + \frac{\gamma a_3^2}{2E} = \frac{582870}{E}.$$

Таким образом, если в статически неопределимом брусе (рис. 1.4.1, а) убрать одну нижнюю опору, то нижнее опорное сечение переместится вниз на величину Δl , но этого в реальном брусе не может быть, следовательно, на опоре B должна действовать опорная реакция R_B , от которой будет возникать линейная деформация Δl_B , равная по величине Δl , но противоположная по знаку:

$$\Delta l_B = -\frac{a_1 + a_2}{EA_1} R_B - \frac{a_3 R_B}{EA_2} = -\frac{R_B}{E} \left(\frac{0,6 + 0,6}{25 \cdot 10^{-4}} + \frac{1}{50 \cdot 10^{-4}} \right) = -\frac{680 R_B}{E}.$$

Уравнение перемещений будет иметь вид:

$$\Delta l + \Delta l_B = 0 \text{ или } \frac{582870}{E} - \frac{680 R_B}{E} = 0, \text{ откуда находим } R_B = 857,16 \text{ Н}.$$

Опорная реакция R_B вызывает в брусе сжатие, следовательно, эпюра нормальных сил от действия только опорной реакции R_B будет иметь вид прямоугольника (рис. 1.4.1, в).

Для получения эпюры нормальных сил для статически неопределимого бруса (рис. 1.4.1, *a*) следует сложить две эпюры: эпюру нормальных сил в основной системе (рис. 1.4.1, *б*) и эпюру нормальных сил от действия опорной реакции R_B (рис. 1.4.1, *в*). Сложение эпюр проводим, складывая значения нормальных сил двух эпюр в соответствующих точках (рис. 1.4.1, *г*). После чего строится эпюра нормальных напряжений по формуле (1.2).

Эпюра нормальных напряжений σ показывает, что самое большое сжимающее нормальное напряжение будет в нижнем опорном сечении ($\sigma_{c,\max} = -342,9$ КПа), а самое большое растягивающее напряжение – в верхнем опорном сечении ($\sigma_{t,\max} = 154,2$ КПа). По эпюре нормальных сил находим опорную реакцию в верхней заделке – $R_C = 770,84$ Н.

Критерием правильности вычислений является равенство нулю площади эпюры нормальных напряжений, т.е. $A_{\sigma+} - A_{\sigma-} = 0$ или $A_{\sigma+} = A_{\sigma-}$, где $A_{\sigma+}$ – площадь части эпюры нормальных напряжений со знаком «плюс» (рис. 1.4.1, *д*):

$$A_{\sigma+} = \frac{75,67 + 154,2}{2} \cdot 1 + \frac{104,2 + 151,3}{2} \cdot 0,6 = 191,6;$$

$A_{\sigma-}$ – площадь части эпюры нормальных напряжений со знаком «минус»:

$$A_{\sigma-} = \frac{295,8 + 342,9}{2} \cdot 0,6 = 191,6.$$

В нашем случае $A_{\sigma-} = A_{\sigma+} = 191,6$, следовательно, расчет выполнен правильно.

Определим перемещение сечения $I - I$ (рис. 1.4.1, *a*), для чего применим метод сечений. Проведем сечение $I - I$ на эпюре нормальных сил (рис. 1.4.1, *г*) и отбросим нижнюю часть эпюры, тогда по оставшейся части эпюры определяем

$$\delta_{I-I} = \frac{378,34 \cdot 1}{EA_2} + \frac{\gamma \cdot 1^2}{2E} = \frac{114918}{E} = 0,558 \cdot 10^{-6} \text{ м.}$$

Перемещение δ_{I-I} можно вычислить, если отбросить верхнюю часть эпюры нормальных сил:

$\delta_{I-I} = \frac{260,59 \cdot 0,6}{EA_1} + \frac{\gamma \cdot 0,6^2}{2E} - \frac{739,41 \cdot 0,6}{EA_1} - \frac{\gamma \cdot 0,6^2}{2E} = -\frac{114917}{E} = -0,558 \cdot 10^{-6} \text{ м.}$ Получили одно и то же значение перемещений, но с разными знаками, что естественно, так как сечение $I - I$ переместилось вниз, следовательно, верхняя часть бруса увеличила линейные размеры вдоль оси, а нижняя, наоборот уменьшила.

Практические занятия -4

Механические свойства материалов при растяжении и сжатии. Решение задачи

Задача 1.4.1. Абсолютно жесткий брус BC ($E_{BC} = \infty$) прикреплен в точке C к неподвижному шарниру (рис. 1.4.1), а в точке B поддерживается стальной тягой AB . В точке B приложена вертикальная сила $F = 20$ кН.

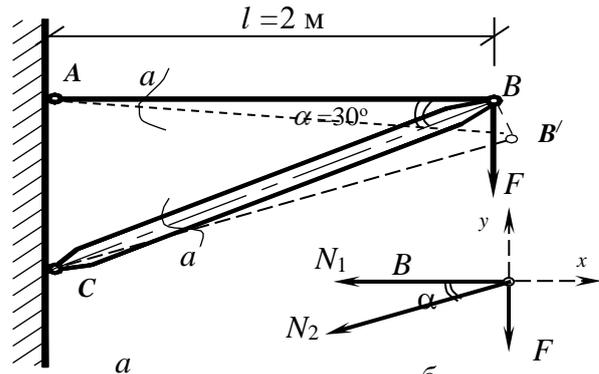


Рис. 1.4.1 б

Подобрать сечение тяги AB и показать перемещение точки B . Расчетное сопротивление стали растяжению $R_y = 240$ МПа,

коэффициент условий работы $\gamma_c = 1$, а модуль упругости стали тяги AB — $E_{AB} = 2,06 \cdot 10^5$ МПа.

Решение. Вырежем мысленно узел B (рис. 1.4.1, б) и составим для него уравнения равновесия:

$$\sum y = -F - N_2 \sin \alpha = 0, \text{ откуда находим } N_2 = -F / \sin \alpha = -20 / 0,5 = -40 \text{ кН};$$

$$\sum x = -N_1 - N_2 \cos \alpha = 0, \text{ откуда } N_1 = -N_2 \cos \alpha = 40 \cos 30^\circ = 34,64 \text{ кН}.$$

Окончательно имеем $N_1 = 34,64$ кН; $N_2 = -40$ кН. Следовательно, брус BC сжат силой N_2 , а элемент AB растянут силой N_1 .

Подбор сечения тяги AB проводим по формуле (1.8), откуда определяем

$$A_n = \frac{N_1}{R_y \gamma_c} = \frac{34,64}{240000 \cdot 1} = 1,44 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 1,44 \text{ см}^2.$$

Предположим, что тяга AB имеет круглое поперечное сечение, тогда $A_n = 1,44 \text{ см}^2 = \pi r^2$, откуда находим $r = 0,677$ см и $d = 1,35$ см.

Определим удлинения стержней AB и CB :

$$\Delta l_{AB} = \frac{N_1 l}{A_n E_{AB}} = \frac{34,64 \cdot 2}{1,44 \cdot 10^{-4} \cdot 2,06 \cdot 10^5 \cdot 10^3} = 0,0023 \text{ м} = 0,23 \text{ см};$$

$$\Delta l_{CB} = \frac{N_2 l_{BC}}{A_{BC} E_{BC}} = -\frac{40 l}{A_{BC} \cos 30^\circ E_{BC}} = 0.$$

Таким образом, точка B переместится в точку B' по дуге окружности радиусом $\overline{BC} = l / \cos 30^\circ$, причем расстояние между точками A и B' будет равно $\overline{AB'} = l + \Delta l_{AB} = 2 + 0,0023 = 2,0023$ м.

Задача 1.4.2. Определить перемещение нижнего конца стержня, изображенного на рис. 1.2.1, а. Принять $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, объемный вес материала стержня $\gamma = 76440$ Н/м³.

Решение. Для рассматриваемого случая эпюра нормальных сил представлена на рис. 1.4.1, б. Порядок построения эпюры нормальных сил рассмотрен в примере 1.4.2 (см. рис. 1.4.2).

Эпюра нормальных сил построена с учетом сосредоточенных внешних сил и с учетом собственного веса материала бруса. Выделим на эпюре нормальных сил (рис. 1.4.1, б) ее постоянные нормальные составляющие и треугольные участки эпюры, учитывающие собственный вес соответствующего участка

(рис. 1.1, а и рис. 1.1, б). Разделение составляющих эпюры нормальных сил на рис. 1.4.1, б произведено пунктирными линиями.

Теперь перемещение поперечного сечения от постоянной составляющей эпюры нормальных сил будет определяться по формуле (1.4), а перемещение от действия собственного веса – по формуле (1.5).

Для рассматриваемого случая формула для определения перемещения нижнего конца стержня будет иметь вид

$$\begin{aligned} \Delta l &= \Delta l_I + \Delta l_{II} + \Delta l_{III} + \Delta l_{IV} = \\ &= \left(\frac{500 \cdot 0,4}{EA_I} + \frac{0,4^2}{2E} \gamma \right) + \left(-\frac{347,12 \cdot 0,4}{EA_{II}} + \frac{0,4^2}{2E} \gamma \right) + \left(-\frac{194,24 \cdot 0,4}{EA_{III}} + \frac{0,4^2}{2E} \gamma \right) + \\ &+ \left(\frac{382,2 \cdot 0,4}{EA_{IV}} + \frac{0,4^2}{2E} \gamma \right) = \frac{77341}{E} = \frac{77341}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6} = 0,387 \cdot 10^{-6} \text{ м.} \end{aligned}$$

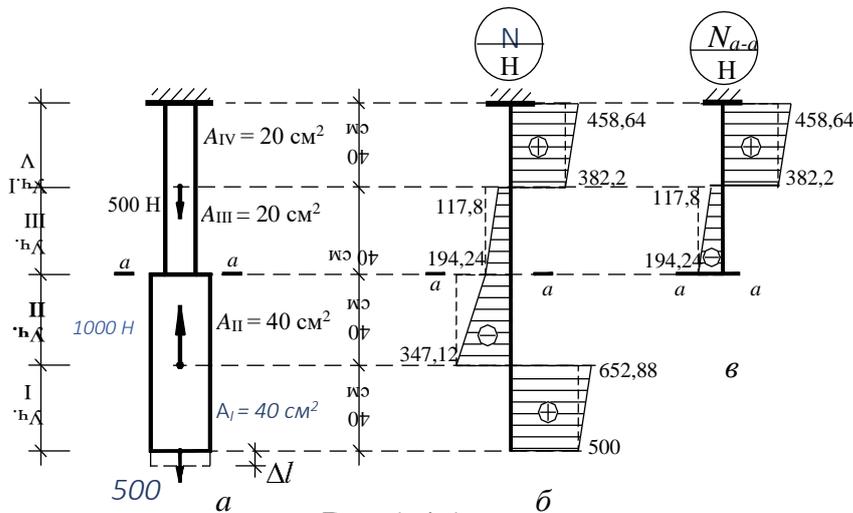


Рис.1.4.1

Знак «+» показывает, что общая длина стержня увеличится, т.е. нижний конец стержня переместится вниз вдоль его оси на величину $\Delta l = 0,387 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ (рис. 1.4.1, а).

Определим перемещение сечения $a - a$ (рис. 1.2.1, а). Для этого мысленно разрежем эпюру нормальных сил в соответствующем сечении $a - a$ и отбросим нижнюю часть эпюры. На основании оставшейся части эпюры нормальных сил (рис. 1.4.1, б) определяем перемещение сечения $a - a$, используя формулы (1.4) и (1.5):

$$\begin{aligned} \delta_{a-a} &= \Delta l_{III} + \Delta l_{IV} = \left(-\frac{194,24 \cdot 0,4}{EA_{III}} + \frac{0,4^2}{2E} \gamma \right) + \left(\frac{382,2 \cdot 0,4}{EA_{IV}} + \frac{0,4^2}{2E} \gamma \right) = \\ &= \frac{0,4(-194,24 + 382,2)}{E \cdot 20 \cdot 10^{-4}} + 2 \frac{76440 \cdot 0,4^2}{2E} = \frac{49822}{E} = 0,249 \cdot 10^{-6} \text{ м.} \end{aligned}$$

Полученный ответ показывает, что поперечное сечение $a - a$ переместится вниз вдоль оси стержня.

Практические занятия -5,6,7

Теории напряженного состояние. Расчеты на прочность и жесткость при растяжении и сжатии. Решение задачи

Для металлической детали дано напряженное состояние в некоторой точке и механические характеристики стали и чугуна. Необходимо:

1. Записать величины нормальных и касательных напряжений в осях x , y , z и вычислить инварианты напряженного состояния в этих осях.

2. Определить величины главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и сделать эскиз пространственного напряженного состояния в осях 1, 2, 3. Вычислить наибольшие касательные напряжения и сделать эскиз плоского напряженного состояния в той плоскости, в которой они действуют.

3. Считая деталь стальной, записать обобщенный закон Гука в осях x , y , z и вычислить величины угловых, линейных относительных деформаций и величину объемной относительной деформации в осях x , y , z .

4. Записать обобщенный закон Гука в осях 1, 2, 3 и вычислить величины линейных относительных деформаций и величину объемной относительной деформации в этих осях.

5. Вычислить эквивалентные напряжения по III и IV теориям прочности и найти действительные коэффициенты запаса прочности по текучести по этим теориям.

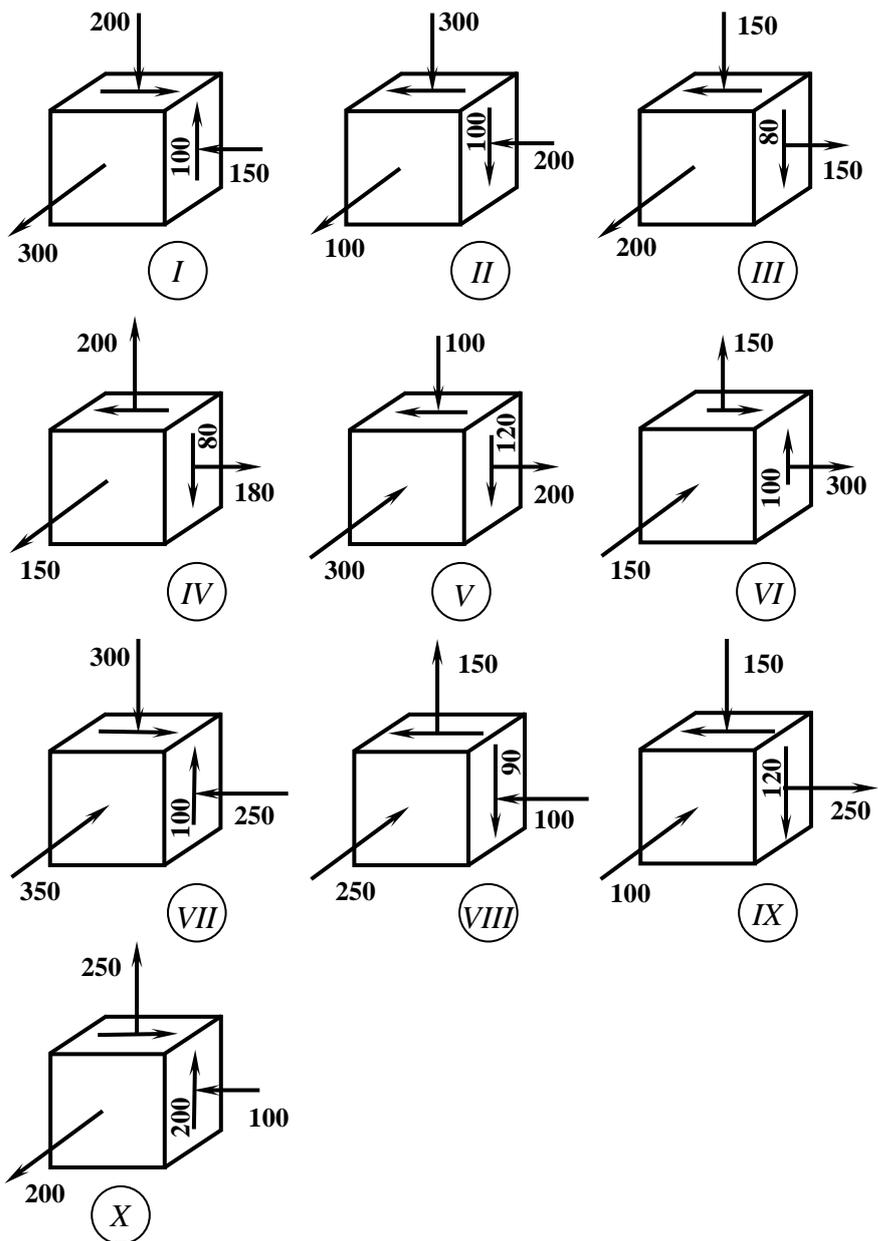
6. Считая деталь чугунной, найти действительный коэффициент запаса прочности по теории прочности Мора (V теория прочности).

Таблица 1

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Схема	I	II	III	IV	V	VI	VI I	VI II	IX	X

Таблица 2

№ строк и	Механические характеристики				
	стали			чугуна	
	ν	E , МПа	σ_y , МПа	$\sigma_{ш}$, МПа	$\sigma_{ис}$, МПа
1	0,30	$2,00 \cdot 10^5$	325	135	600
2	0,25	$2,05 \cdot 10^5$	330	140	610
3	0,28	$2,05 \cdot 10^5$	335	145	620
4	0,30	$2,05 \cdot 10^5$	340	150	640
5	0,30	$2,10 \cdot 10^5$	345	155	660
6	0,25	$2,10 \cdot 10^5$	350	160	680
7	0,28	$2,10 \cdot 10^5$	355	165	700
8	0,30	$2,15 \cdot 10^5$	360	170	720
9	0,25	$2,15 \cdot 10^5$	365	175	740
0	0,30	$2,15 \cdot 10^5$	370	180	760



Практические занятия-8

Геометрические характеристики поперечных сечений. Решение задачи

Геометрическими характеристиками плоских сечений являются площадь, статические моменты плоских сечений, положение центра тяжести, моменты инерции и моменты сопротивления.

1. Статические моменты сечений и определение центра тяжести плоских сечений

Площадь является простейшей геометрической характеристикой поперечного сечения:

$$A = \int_A dA. \quad (1.1)$$

Статическим моментом плоского сечения относительно некоторой оси называется, взятая по всей его площади A , сумма произведений площадей элементарных площадок dA на их расстояния от этой оси (рис. 1.1):

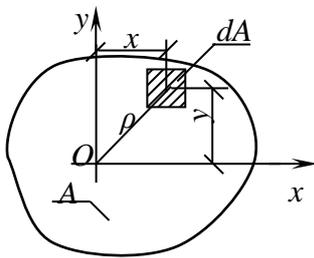


Рис. 2.1.1

$$S_x = \int_A y dA, \quad S_y = \int_A x dA; \quad (1.2)$$

$$S_x = \iint_A y dx dy, \quad S_y = \iint_A x dx dy; \quad (1.3)$$

$$S_x = Ay_c, \quad S_y = Ax_c, \quad (1.4)$$

где y_c – расстояние от центра тяжести всего плоского сечения до оси x ; x_c – расстояние от центра тяжести всего сечения до оси y .

Статический момент сложного сечения относительно некоторой оси равен сумме статических моментов всех частей этого сечения относительно той же оси:

$$S_x = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n = \sum_{i=1}^n A_i y_i;$$

$$S_y = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n = \sum_{i=1}^n A_i x_i. \quad (1.5)$$

В формулах (1.5) введены обозначения: A_1, A_2, \dots, A_n – площади простых элементов, составляющих плоское сложное сечение; $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \dots, x_n, y_n$ – координаты центров тяжести простых составляющих сложного плоского сечения относительно выбранных осей x и y .

Из выражений (1.4) можно определить координаты центра тяжести плоского сечения:

$$x_c = \frac{S_y}{A}; \quad y_c = \frac{S_x}{A}. \quad (1.6)$$

Для сложного поперечного сечения формулы (6.1.6) можно представить в следующем виде

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n};$$

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n}. \quad (1.7)$$

Зависимости между статическими моментами одного и того же сечения относительно двух параллельных друг другу осей x и x_1 , а также y и y_1 имеют вид:

$$S_{x_1} = S_x - aA; \quad S_{y_1} = S_y - bA,$$

(1.8)

где параметры a , b показаны на рис. 2.1.2.

У к а з а н и я.

1. Изменение положительного направления оси y вызывает изменение знака статического момента S_x . Аналогично, изменение положительного направления оси x вызывает изменение знака статического момента S_y .

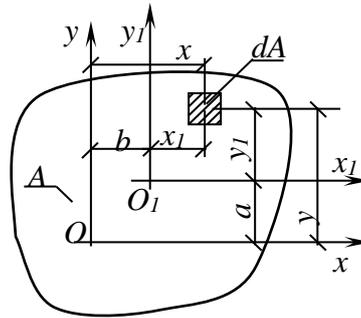


Рис. 2.1.2

2. Статический момент сечения равен нулю относительно любой оси, проходящей через центр тяжести этого сечения.

3. Если плоское сечение имеет ось симметрии, то эта ось всегда проходит через центр тяжести плоского сечения, а поэтому, согласно п.2, статический момент сечения относительно оси симметрии всегда равен нулю.

4. Если плоское сечение имеет две оси симметрии, то центр тяжести сечения лежит на пересечении этих осей симметрии.

Задача 1.1. Определить центр тяжести треугольного поперечного сечения, показанного на рис. 1.3.

Решение. Поперечное сечение представляет собой равнобедренный треугольник, а следовательно, ось y – ось симметрии и центр тяжести рассматриваемого поперечного сечения лежит на этой оси.

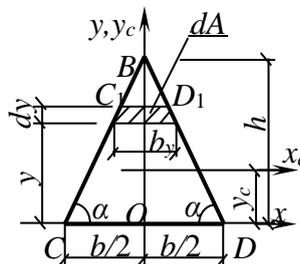


Рис. 2.1.3

Для нахождения центра тяжести используем вторую из формул (1.6). Запишем

$$A = bh/2, \quad S_x = \int_A y dA = \int_0^h y b_y dy. \quad (a)$$

Из подобия треугольников $\triangle BC_1D_1$ и $\triangle BCD$ находим

$$\frac{C_1D_1}{CD} = \frac{h-y}{h} \quad \text{или} \quad \frac{b_y}{b} = \frac{h-y}{h}, \quad \text{откуда} \quad b_y = \frac{b(h-y)}{h}.$$

Найденное значение b_y подставляем в формулу (а) для вычисления статического момента S_x :

$$S_x = \int_0^h y \frac{b(h-y)}{h} dy = b \int_0^h y dy - \frac{b}{h} \int_0^h y^2 dy = \frac{bh^2}{2} - \frac{bh^2}{3} = \frac{bh^2}{6}.$$

В этом случае вторая из формул (1.6) дает

$$y_c = S_x / A = \frac{bh^2 / 6}{bh/2} = h/3.$$

На рис. 1.3 проводим линию $y = y_c = h/3$. Центр тяжести треугольного поперечного сечения будет лежать на пересечении проведенной линии и оси y .

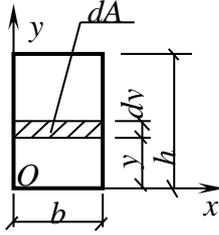


Рис. 2.1.4

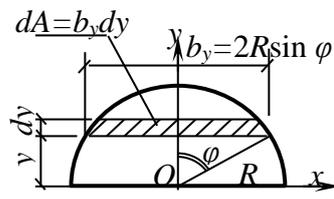


Рис. 2.1.5

Координаты центра тяжести этого сечения: $x = 0, y = h/3$.

Задача 1.2. Определить статические моменты плоского прямоугольного сечения относительно осей x и y (см. рис. 1.4).

Ответ: $S_x = bh^2/2;$
 $S_y = hb^2/2.$

Задача 1.3. Определить координаты центра тяжести плоского сечения в форме половины круга радиусом R (рис. 1.5).

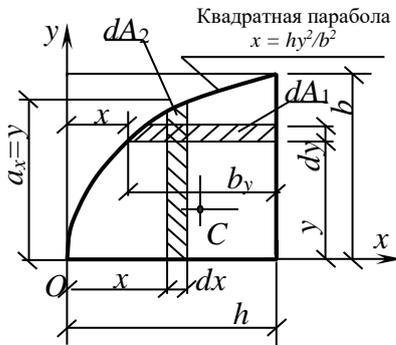


Рис. 2.1.6

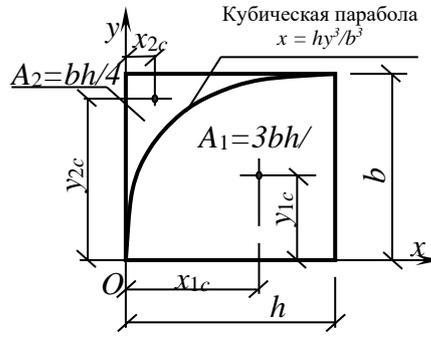


Рис. 2.1.7

Ответ: $x_c = 0, y_c = 4R/(3\pi).$

Задача 1.4. Определить координаты центра тяжести плоского сечения, ограниченного осью x , квадратной параболой $x = hy^2/b^2$ и прямой линией $x = h$ (рис. 2.1.6).

Решение. Для нахождения центра тяжести воспользуемся формулами (1.6). В первую очередь по формуле (1.1) определяем площадь поперечного сечения

$$A = \int_0^b b_y dy = \int_0^b (h-x) dy = \int_0^b \left(h - \frac{hy^2}{b^2} \right) dy = \frac{2}{3} bh.$$

Затем по формулам (1.2) находим статические моменты сечения:

$$S_x = \int_0^b y b_y dy = \int_0^b y \left(h - \frac{hy^2}{b^2} \right) dy = \frac{hb^2}{4};$$

$$S_y = \int_A x dA_2 = \int_0^h x a_x dx = \int_0^h xy dx = \int_0^h x \sqrt{\frac{xb^2}{h}} dx = \frac{2h^2b}{5}.$$

И, окончательно, по формулам (2.1.6) определяем

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{3}{8}b = 0,375b; \quad x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{3}{5}h = 0,6h.$$

Задача 1.5. Определить координаты центра тяжести плоского сечения, ограниченного осью x , кубической параболой $x = hy^3/b^3$ и прямой линией $x = h$ (рис. 1.7).

Ответ: $x_{1c} = 4h/7$; $y_{1c} = 0,4b$.

Задача 1.6. Определить координаты центра тяжести плоского сечения, ограниченного осью y , кубической параболой $x = hy^3/b^3$ и прямой линией $y = b$ (рис. 1.7).

Ответ: $x_{2c} = 2h/7$; $y_{2c} = 0,8b$.

Задача 1.7. Проверить правильность ответов в примерах (1.5) и (1.6) при помощи формул (1.5), рассматривая плоское прямоугольное сечение $h \times b$ как составное, состоящее из площадей $A_1 = 3bh/4$ и $A_2 = bh/4$ (рис. 1.7).

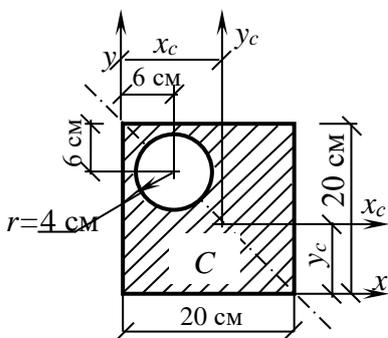


Рис. 2.1.8

Задача 1.8. Определить центр тяжести поперечного сечения, изображенного на рис.1.8.

Ответ: $x_c = 10,57$ см; $y_c = 9,43$ см.

(Центр тяжести C поперечного сечения должен лежать на оси симметрии поперечного сечения).

Задача 1.9. Определить центр тяжести поперечного сечения, показанного на рис. 2.1.9.

У к а з а н и я. Для определения положения центра тяжести сложного сечения рекомендуется следующий порядок действий:

1. Сложное сечение разбивается на части, имеющие вид простых фигур.
2. Определяются площади и положения центров тяжести каждой простой фигуры.

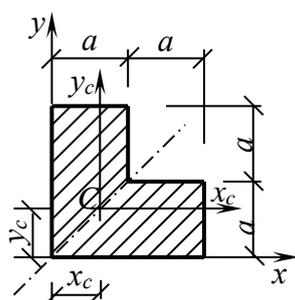


Рис. 2.1.9

3. Выбираются случайные (произвольные) координатные оси x и y . Случайные оси желательно выбирать так, чтобы все точки плоского поперечного сечения имели положительные координаты.

4. По формулам (2.1.5), которые можно записать как

$$S_x = \sum_{i=1}^n S_{xi} = \sum_{i=1}^n y_{ic} A_i; \quad (1.9)$$

$$S_y = \sum_{i=1}^n S_{yi} = \sum_{i=1}^n x_{ic} A_i,$$

вычисляются статические моменты S_x и S_y всего плоского сечения как суммы статических моментов S_{xi} , S_{yi} каждой фигуры относительно осей x , y .

5. По формулам (1.6) вычисляются координаты центра тяжести всего сечения.

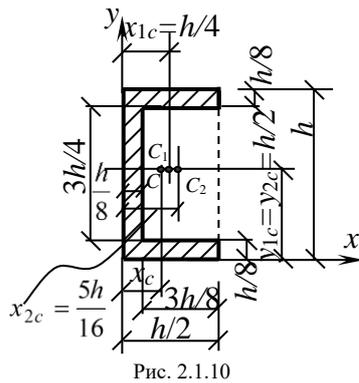


Рис. 2.1.10

Ответ: $x_c = 5a/6$; $y_c = 5a/6$ (Центр тяжести C должен лежать на оси симметрии поперечного сечения).

Задача 1.10. Определить статические моменты S_x и S_y сложного поперечного сечения (рис.1.10). Найти координаты его центра тяжести.

Решение. Следуя предложенному в примере 2.1.9 порядку расчета, разбиваем сложное поперечное сечение на две простые фигуры: прямоугольное сечение с размерами $h \times h/2$ и площадью $A_1 = h^2/2$, координаты центра тяжести (C_1) которого $y_{1c} = h/2$, $x_{1c} = h/4$ и прямоугольное сечение $3h/4 \times 3h/8$ с центром тяжести C_2 ($y_{2c} = h/2$, $x_{2c} = 5h/16$) и площадью $A_2 = 9h^2/32$.

По формулам (1.9) вычисляем статические моменты всего сечения:

$$S_x = A_1 y_{1c} - A_2 y_{2c} = h^3/4 - 9h^3/64 = 7h^3/64;$$

$$S_y = A_1 x_{1c} - A_2 x_{2c} = h^3/8 - 45h^3/512 = 19h^3/512.$$

Площадь поперечного сечения всей конструкции A находим как разность площадей A_1 и A_2 : $A = A_1 - A_2 = 7h^2/32$. Подставляя полученные значения в формулы (1.6), находим координаты центра тяжести C всего сечения:

$$y_c = S_x/A = h/2; \quad x_c = S_y/A = 19h/112.$$

Практические занятия-9

Главные оси и главные моменты инерции сечения. Определение положения главных центральных осей и вычисление главных моментов инерции различных сечений. Решение задачи

Осевым моментом инерции плоского сечения относительно некоторой оси называется взятая по всей его площади A сумма произведений элементарных площадок dA на квадраты их расстояний от этой оси, т.е.

$$I_y = \int_A x^2 dA, \quad I_x = \int_A y^2 dA, \quad (1.1)$$

где x – расстояние от элементарной площадки dA до оси y ; y – расстояние от элементарной площадки dA до оси x (рис.1.1).

Полярным моментом инерции плоского сечения относительно некоторой точки (полюса) O называется взятая по всей его площади A сумма произведений элементарных площадок dA на квадраты их расстояний от этой точки, т.е.

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA. \quad (1.2)$$

Сумма осевых моментов инерции плоского сечения относительно двух взаимно перпендикулярных осей равна полярному моменту инерции этого сечения относительно точки пересечения указанных осей:

$$I_x + I_y = I_\rho. \quad (1.3)$$

Центробежным моментом инерции плоского сечения относительно некоторых двух взаимно перпендикулярных осей x и y называется взятая по всей его площади A сумма произведений элементарных площадок dA на их расстояния от этих осей, т.е.

$$I_{xy} = \int_A xy dA. \quad (1.4)$$

Центробежный момент инерции плоского поперечного сечения относительно осей, из которых одна или обе совпадают с его осями симметрии, равен нулю.

Осевые и центробежные моменты инерции плоского сечения относительно произвольных осей x_1 и y_1 , параллельных центральным осям x и y , определяют по формулам:

$$I_{x_1} = I_x + a^2 A, \quad I_{y_1} = I_y + b^2 A; \quad (1.5)$$

$$I_{x_1 y_1} = I_{xy} + (-a)(-b)A, \quad (1.6)$$

где a , b – расстояния между осями x и x_1 , y и y_1 показаны на рис. 1.2. Принимается, что x , y – центральные оси, т.е. оси, проходящие через центр тяжести O плоского сечения.

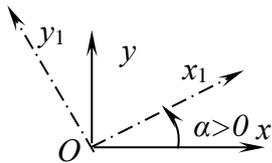


Рис. 2.2.1

При повороте центральных осей x , y на угол α моменты инерции можно определить из выражений

$$I_{x_1} = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha;$$

$$I_{y_1} = I_y \cos^2 \alpha + I_x \sin^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha; \quad (1.7)$$

$$I_{x_1 y_1} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha, \quad (1.8)$$

где положительное направление угла α показано на рис. 2.1.

Сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей сохраняет постоянную величину при повороте осей на любой угол α (рис. 2.2.1), т.е.

$$I_x + I_y = I_{x_1} + I_{y_1}. \quad (1.9)$$

Максимальные и минимальные значения осевых моментов инерции поперечного сечения называются *главными моментами инерции*. Оси, относительно которых осевые моменты инерции имеют экстремальные значения, называются *главными осями инерции*. Главные оси инерции взаимно перпендикулярны и, следовательно, из формулы (1.9) имеем

$$I_x + I_y = I_{\max} + I_{\min}. \quad (1.10)$$

Величину главных моментов инерции определяют по формуле:

$$I_{\max}^{\min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}, \quad (1.11)$$

а главные оси инерции можно построить, повернув центральные оси x , y на угол α (рис. 2.2.1):

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}. \quad (1.12)$$

У к а з а н и я

1. Ось максимум всегда составляет меньший угол с той из осей (y или x), относительно которой осевой момент инерции имеет большее значение.

2. Относительно главных осей инерции центробежный момент инерции равен нулю.

3. Взаимно перпендикулярные центральные оси, из которых одна или обе совпадают с осями симметрии, всегда являются главными осями инерции.

4. Для фигур, имеющих более двух осей симметрии, осевые моменты инерции относительно всех центральных осей равны между собой. К таким фигурам относятся равносторонний треугольник, квадрат, круг и т.д.

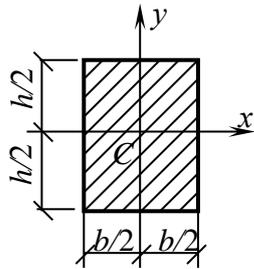


Рис. 2.2.2

Задача 2.2.1. Определить осевые моменты инерции прямоугольника высотой h и шириной b относительно осей x и y (рис. 2.1.4).

Решение. Согласно рис. 2.1.4, имеем $dA = bdy$. Площадь элементарной площадки подставляем в формулу (2.2.1):

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_0^h by^2 dy = b \frac{y^3}{3} \Big|_0^h = \frac{bh^3}{3}.$$

Аналогичным путем можно вычислить $I_y = hb^3/3$.

Задача 2.2.2. Определить осевые моменты инерции прямоугольника высотой h и шириной b относительно осей x и y , являющихся его осями симметрии (рис. 2.2.2).

Ответ: $I_x = bh^3/12$; $I_y = hb^3/12$.

Задача 2.2.3. Определить полярный момент инерции круглого поперечного сечения (рис. 2.2.3) относительно точки C .

Решение. За элементарную площадку выберем кольцевую область вокруг центра C с внутренним радиусом ρ и шириной $d\rho$. Определим площадь элементарной площадки $dA = 2\pi\rho d\rho$. Затем результат подставляем в формулу (2.2.2):

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA = \int_0^r \rho^2 2\pi\rho d\rho = 2\pi \int_0^r \rho^3 d\rho = \frac{\pi r^4}{2}.$$

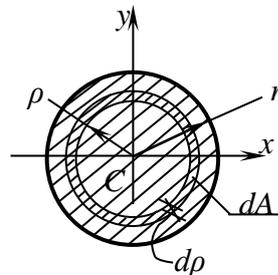


Рис. 2.2.3

Задача 2.2.4. Определить осевые моменты инерции круглого сплошного поперечного сечения относительно произвольных центральных осей x , y (рис. 2.2.3).

Решение. В примере 2.2.3 найдено, что $I_\rho = \pi r^4 / 2$. Однако для круглого сплошного сечения $I_x = I_y$, поэтому формула (2.2.3) для этого сечения принимает вид: $2I_x = I_\rho$, откуда находим

$$I_x = I_y = I_{\min} = I_{\max} = I_\rho / 2 = \pi r^4 / 4. \quad (2.2.13)$$

Задача 2.2.5. Определить осевые моменты инерции I_x , I_y для квадратного поперечного сечения (рис. 2.2.4).

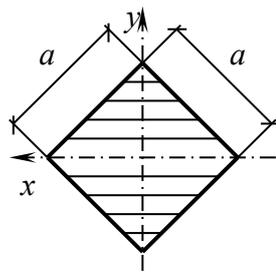


Рис. 2.2.4

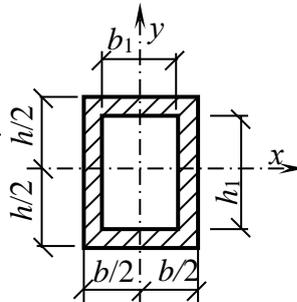


Рис. 2.2.5

Указание. Для расчета можно использовать рис. 2.1.3 при условии, что $\alpha = 45^\circ$, $h = b/2 = a \cos 45^\circ$, $dA = b_y dy$, а значение b_y взять из примера 2.1.1.

Ответ: $I_x = I_y =$

$a^4/12$.

Задача 2.2.6. Определить осевые моменты инерции I_x , I_y для поперечного сечения, показанного на рис. 2.2.5.

Ответ: $I_x = (bh^3 - b_1h_1^3)/12$; $I_y = (hb^3 - h_1b_1^3)/12$.

Задача 2.2.7. Определить осевые моменты инерции I_{x_c} , I_{y_c} и центробежный момент инерции $I_{x_c y_c}$ относительно центральных осей x_c , y_c для сечения, изображенного на рис. 2.1.9. Вычислить значения главных моментов инерции и определить расположение главных осей инерции. Центр тяжести поперечного сечения находится в точке C .

Ответ: $I_{x_c} = \frac{11a^4}{12} = I_{y_c}$; $I_{x_c y_c} = -\frac{a^4}{3}$; $I_{\max} = \frac{5a^4}{4}$; $I_{\min} = \frac{7a^4}{12}$;
 $\alpha = -45^\circ$.

Осевые моменты инерции плоских составных сечений

Для сложных составных поперечных сечений, не содержащих осей симметрии, предлагается следующий порядок расчета.

Сначала вычерчивается поперечное сечение. Случайные оси x , y ставим так, чтобы все точки поперечного сечения находились в 1-м квадранте (рис. 2.3.1). Каждому прокатному профилю присваивается порядковый номер. Наносим местные оси координат x_i , y_i , проходящие через известные центры тяжести i -го профиля. Оси x_i , y_i параллельны случайным осям x , y соответственно.

Наносим на рисунок известные размеры сечения, взятые из задания или из соответствующих таблиц сортамента прокатной стали (см. приложение в конце книги).

Вводим обозначения: x_i , y_i – абсцисса и ордината центра тяжести соответственно i -го профиля относительно случайных осей x , y ; A_i – площадь сечения i -го профиля, $A = \sum_{i=1}^n A_i$ – площадь поперечного сечения всего составного сечения; I_{x_i} , I_{y_i} , $I_{x_i y_i}$ – осевые и центробежные моменты инерции i -го профиля относительно местных осей x_i , y_i .

Следуя предложенной методике, выпишем геометрические характеристики для поперечного сечения, изображенного на рис. 2.3.1:

$$A_1 = 50 \times 1,6 = 80 \text{ см}^2; A_2 = 30,6 \text{ см}^2; A_3 = 42,19 \text{ см}^2; A_4 = 30,04 \text{ см}^2;$$

$$x_1 = 25 \text{ см}; x_2 = 43,42 \text{ см}; x_3 = 36,11 \text{ см}; x_4 = 5,32 \text{ см};$$

$$y_1 = 24,8 \text{ см}; y_2 = 12 \text{ см}; y_3 = 4,89 \text{ см}; y_4 = 21,64 \text{ см}; I_{x_1} = 50 \cdot 1,6^3 / 12 = 17,07 \text{ см}^4;$$

$$I_{x_2} = 2900 \text{ см}^4;$$

$$I_{x_3} = 1316,62 \text{ см}^4; I_{x_4} = 238,75 \text{ см}^4; I_{y_1} = 1,6 \cdot 50^3 / 12 = 16666,7 \text{ см}^4; I_{y_2} = 208 \text{ см}^4; I_{y_3} = I_{x_3};$$

$$I_{y_4} = 784,22 \text{ см}^4.$$

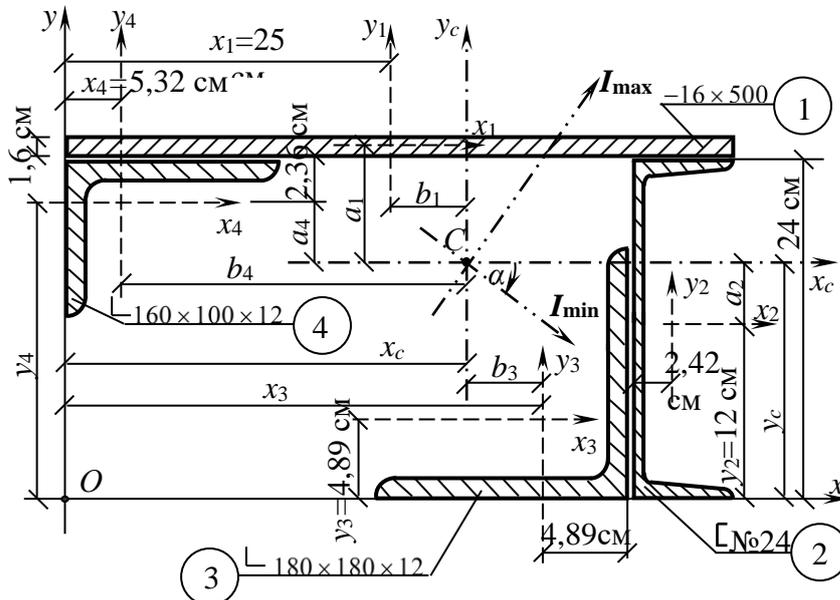


Рис. 2.3.1

С помощью формул (2.1.7) находим координаты центра тяжести всего поперечного сечения:

$$x_c = \frac{80 \cdot 25 + 30,6 \cdot 43,42 + 42,19 \cdot 36,11 + 30 \cdot 5,32}{80 + 30,6 + 42,19 + 30} = \frac{5012,1}{182,8} = 27,4 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{80 \cdot 24,8 + 30,6 \cdot 12 + 42,19 \cdot 4,89 + 30 \cdot 21,64}{80 + 30,6 + 42,19 + 30} = \frac{3206,8}{182,8} = 17,5 \text{ см}.$$

Наносим оси x_c , y_c , которые проходят через центр тяжести C всего составного поперечного сечения и определяем расстояния между осями x_c и x_i , а также между осями y_c и y_i :

$$a_1 = y_1 - y_c = 24,8 - 17,5 = 7,3 \text{ см}; \quad b_1 = x_1 - x_c = 25 - 27,4 = -2,4 \text{ см};$$

$$a_2 = y_2 - y_c = 12 - 17,5 = -5,5 \text{ см}; \quad b_2 = x_2 - x_c = 43,42 - 27,4 = 16,02 \text{ см};$$

$$a_3 = y_3 - y_c = 4,89 - 17,5 = -12,61 \text{ см}; \quad b_3 = x_3 - x_c = 36,11 - 27,4 = 8,71 \text{ см};$$

$$a_4 = y_4 - y_c = 21,64 - 17,5 = 4,14 \text{ см}; \quad b_4 = x_4 - x_c = 5,32 - 27,4 = -22,08 \text{ см}.$$

Используя формулы (2.2.5), получаем выражения для вычисления осевых моментов инерции относительно центральных осей x_c и y_c всего поперечного сечения:

$$I_{x_c} = I_{x_1} + a_1^2 A_1 + I_{x_2} + a_2^2 A_2 + I_{x_3} + a_3^2 A_3 + I_{x_4} + a_4^2 A_4;$$

$$I_{y_c} = I_{y_1} + b_1^2 A_1 + I_{y_2} + b_2^2 A_2 + I_{y_3} + b_3^2 A_3 + I_{y_4} + b_4^2 A_4$$

или окончательно:

$$I_{x_c} = 17,07 + 7,3^2 \cdot 80 + 2900 + 5,5^2 \cdot 30,6 + 1316,62 +$$

$$+ 12,61^2 \cdot 42,19 + 238,75 + 4,14^2 \cdot 30 = 16885 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_c} = 16666,7 + 2,4^2 \cdot 80 + 208 + 16,02^2 \cdot 30,6 + 1316,62 + 8,71^2 \cdot 42,19 + 784,22 + 22,08^2 \cdot 30 = 45135 \text{ см}^4.$$

По формуле (2.2.6) находим значение центробежного момента инерции относительно осей x_c, y_c :

$$I_{x_c y_c} = I_{x_1 y_1} + a_1 b_1 A_1 + I_{x_2 y_2} + a_2 b_2 A_2 + I_{x_3 y_3} + a_3 b_3 A_3 + I_{x_4 y_4} + a_4 b_4 A_4,$$

где, согласно рис. 2.3.1, имеем $I_{x_1 y_1} = I_{x_2 y_2} = 0$, так как швеллер и полоса имеют оси симметрии x_2 и x_1, y_1 соответственно.

Для вычисления $I_{x_3 y_3}$ для равнополочного уголка предварительно выпишем из таблицы сортамента «Уголки стальные горячекатаные равнополочные» $I_{x_0} = 2093 \text{ см}^4, I_{y_0} = 540 \text{ см}^4, \alpha = 45^\circ, I_{x_0 y_0} = 0$ (рис. 2.3.2, а). Тогда формула (2.2.8) принимает вид:

$$I_{x_3 y_3} = \frac{I_{x_0} - I_{y_0}}{2} \sin 90^\circ + I_{x_0 y_0} \cos 90^\circ = \frac{I_{x_0} - I_{y_0}}{2} = 776,5 \text{ см}^4.$$

Для вычисления $I_{x_4 y_4}$ для неравнополочного уголка (рис. 2.3.2, б) предварительно выпишем из таблицы сортамента (Раздел IV)

$$I_{x_4} = 238,75 \text{ см}^4, I_{y_4} = 784,22 \text{ см}^4, I_{uv} = 0, I_u = 142 \text{ см}^4, \text{tg} \alpha = 0,388$$

и затем, согласно формуле (2.2.10), получаем:

$$I_v = I_{x_4} + I_{y_4} - I_u = 238,75 + 784,22 - 142 = 880,97 \text{ см}^4.$$

Таким образом, формула (2.2.8) для рассматриваемого случая принимает вид:

$$I_{x_4 y_4} = \frac{I_u - I_v}{2} \sin 2\alpha + I_{uv} \cos 2\alpha = \frac{I_u - I_v}{2} \sin 2\alpha,$$

где $\text{tg} \alpha = 0,388; \alpha = -21^\circ 12'$ (рис. 2.3.2, б), тогда

$$I_{x_4 y_4} = \frac{142 - 880,97}{2} \sin(-2 \cdot 21^\circ 12') = 369,5 \sin 42^\circ 24' = 249,2 \text{ см}^4.$$

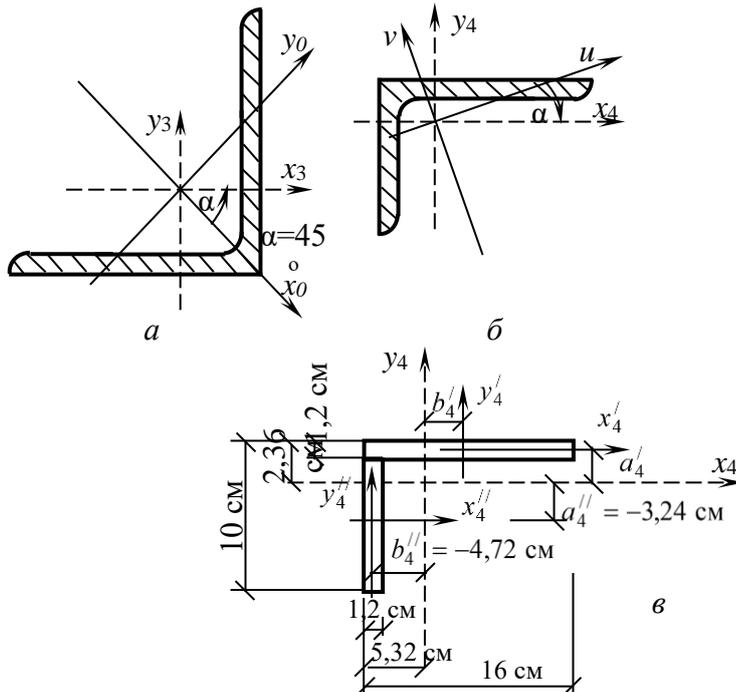


Рис. 2.3.2

Значение центробежного момента $I_{x_4 y_4}$ можно вычислить, используя формулу (2.2.6). Для этого рассмотрим рис. 2.3.2, в. Разобьем

уголок на два прямоугольника с

$$A_4' = 16 \times 1,2 \text{ см И}$$

$$A_4'' = 8,8 \times 1,2 \text{ см.}$$

В этом случае по формуле (2.2.6) получаем

$$I_{x_4 y_4} = a_4' b_4' A_4' + a_4'' b_4'' A_4'' = 1,76 \cdot 2,68(16 \cdot 1,2) + (-3,24)(-4,72)(8,8 \cdot 1,2) = 252 \text{ см}^4.$$

Как видно, результаты очень близки по значениям. Знак у центробежного момента относительно центральных осей уголка можно контролировать по рис. 2.2.7.

Теперь можно приступить к определению центробежного момента всего составного сечения относительно осей x_c, y_c :

$$I_{x_c y_c} = 7,3(-2,4) \cdot 80 + (-5,5) \cdot 16,02 \cdot 30,6 + 776,5 + (-12,61) \cdot 8,71 \cdot 42,19 + \\ + 249,2 + 4,14(-22,08) \cdot 30 = -10452 \text{ см}^4.$$

Главные оси инерции можно построить, повернув центральные оси x_c, y_c на угол α (рис. 2.3.1):

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{x_c y_c}}{I_{y_c} - I_{x_c}} = \frac{-2 \cdot 10452}{45135 - 16885} = -0,7404; \alpha = -18^\circ 15'.$$

Величины главных моментов инерции определяем по формуле (2.2.11)

$$I_{\max}^{\min} = \frac{I_{x_c} + I_{y_c}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_{x_c} - I_{y_c})^2 + 4I_{x_c y_c}^2} = \\ = \frac{16885 + 45135}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(16885 - 45135)^2 + 4 \cdot 10452^2} = 31010 \pm 17572 \text{ см}^4.$$

Окончательно получаем, что $I_{\max} = 48582 \text{ см}^4, I_{\min} = 13438 \text{ см}^4$. Полученные значения удовлетворяют условию (2.2.10):

$$I_{x_c} + I_{y_c} = I_{\max} + I_{\min} = 62020 \text{ см}^4.$$

Таким образом, определены все геометрические характеристики сложного составного поперечного сечения, показанного на рис.2.3.1.

Практические занятия-10

Чистый сдвиг. Исследование чистого сдвига путем испытания на кручение тонкостенной трубки. Закон Гука и механические характеристики материала при чистом сдвиге

Сдвигом называют деформацию, представляющую собой искажение первоначально прямого угла малого элемента бруса (рис.3.1.1) под действием касательных напряжений τ . Развитие этой деформации приводит к разрушению, называемому *срезом* или, применительно к древесине, *скалыванием*.

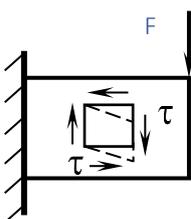


Рис. 3.1.1

Деформация сдвига оценивается взаимным смещением Δ граней 1 – 1 и 2 – 2 малого элемента (рис. 3.1.2), называемым *абсолютным сдвигом* и более полно – *относительным сдвигом*

γ

$$\frac{\Delta}{a} = \operatorname{tg} \gamma \approx \gamma, \quad (3.1.1)$$

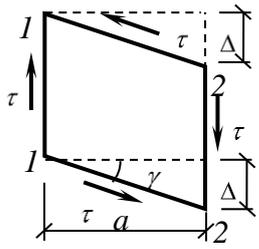


Рис. 3.1.2

являющимся безразмерной величиной.

В предположении равномерного распределения касательных напряжений по сечению площадью A , они определяются по формуле

$$\tau = \frac{Q}{A}, \quad (3.1.2)$$

где Q – поперечная сила в данном сечении.

В пределах упругости касательное напряжение прямо пропорционально

относительному сдвигу

$$\tau = G\gamma \quad (3.1.3)$$

– это закон Гука при сдвиге; G – модуль сдвига, Н/м^2 , характеризующий жесткость материала при сдвиге.

Модуль сдвига G , модуль продольной упругости E и коэффициент Пуассона ν материала связаны зависимостью

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Удельная потенциальная энергия деформации сдвига равна

$$u = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{\tau\gamma}{2}.$$

На практике чаще всего теория сдвига применяется к расчету болтов, заклепок, шпонок, сварных швов и других элементов соединений.

3.1.1. Расчет болтовых и заклепочных соединений

В зависимости от числа срезов одного болта или одной заклепки их называют *односрезными*, *двухсрезными* и т.д. (рис. 3.1.3, а, б).

Они должны удовлетворять, во-первых, условию прочности на срез

$$\tau = \frac{Q}{An_s n} \leq R_{bs} \gamma_b, \quad (3.1.4)$$

где Q – поперечная сила, равная внешней силе F , действующей на соединение; R_{bs} – расчетное сопротивление на срез; $A = \pi d^2/4$ – расчетная площадь сечения болта или заклепки; d – диаметр заклепки или наружный диаметр болта; n_s – число срезов одного болта или заклепки; γ_b – коэффициент условий работы

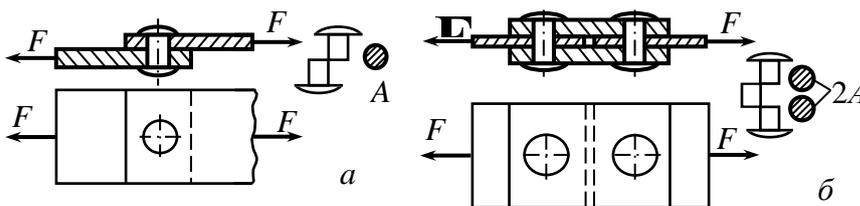


Рис. 3.1.3

соединения, имеющий значения в интервале $0,75 \leq \gamma_b \leq 1,0$; n – число болтов или заклепок.

Если величины F , R_{bs} , γ_b , n_s известны, то задаваясь числом заклепок или болтов n , можно найти необходимый для обеспечения прочности на срез диаметр

$$d \geq \sqrt{\frac{4F}{\pi n_s n R_{bs} \gamma_b}}. \quad (3.1.5)$$

А зная d , F , R_{bs} , γ_b , n_s , можно определить потребное число заклепок или болтов

$$n \geq \frac{4F}{\pi d^2 n_s R_{bs} \gamma_b}. \quad (3.1.6)$$

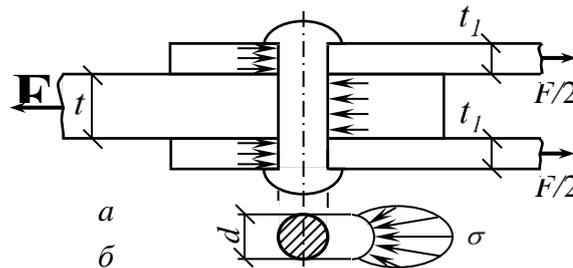


Рис. 3.1.4

Во-вторых, заклепки или болты должны отвечать условию прочности на *смятие*. Под смятием понимают пластическую деформацию, возникающую в соединениях на поверхностях контакта (рис. 3.1.4, а). Возникающие при этом напряжения являются нормальными, закон распределения которых по поверхности контакта достаточно сложен (рис. 3.1.4, б).

Упрощая расчет, площадь, подвергающуюся смятию, принимают равной

$$A_p = d \sum t n,$$

где d – диаметр заклепки (болта); n – их число; $\sum t$ – наименьшая суммарная толщина элементов, сминаемых в одном направлении. Сминающей будет та же сила F , которая производит и срез. Таким образом, условие прочности на смятие имеет вид:

$$\sigma_{bp} = \frac{F}{d \sum t n} \leq R_{bp} \gamma_b, \quad (3.1.7)$$

где R_{bp} – расчетное сопротивление на смятие.

Из условия (3.1.7) можно найти либо необходимый диаметр d по известным величинам F , t , n , R_{bp} , γ_b :

$$d \geq \frac{F}{\sum t \cdot n R_{bp} \gamma_b}, \quad (3.1.8)$$

либо определить потребное число заклепок n

$$n \geq \frac{F}{\sum t \cdot d R_{bp} \gamma_b} . \quad (3.1.9)$$

Из двух значений диаметров, рассчитанных по формулам (3.1.5) и (3.1.8), берут больший, округляя его до стандартного значения. Точно так же из двух значений n , рассчитанных по формулам (3.1.6) и (3.1.9), выбирают большее число, естественно, округленное до большего целого.

У к а з а н и я

1. В заклепочных и болтовых соединениях при действии поперечной силы Q , проходящей через центр тяжести соединения, распределение этой силы между заклепками или болтами принимают равномерным.

2. При действии на соединение момента, вызывающего сдвиг соединяемых элементов, распределение усилий на болты или заклепки следует принимать пропорционально расстояниям от центра тяжести соединения до рассматриваемого болта или заклепки.

3. Болты или заклепки, работающие одновременно на срез и растяжение, следует проверять отдельно на срез и на растяжение.

Задача 3.1.1. Рассчитать количество заклепок диаметром $d = 4$ мм, необходимое для соединения двух листов двумя накладками (рис. 3.1.5). Материалом для листов и заклепок служит дюралюминий, для которого $R_{bs} = 110$ МПа, $R_{bp} = 310$ МПа. Сила $F = 35$ кН, коэффициент условий работы соединения $\gamma_b = 0,9$; толщина листов и накладок $t = 2$ мм.

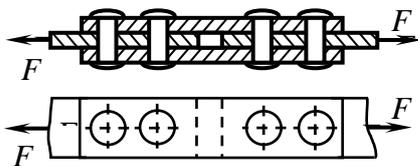


Рис. 3.1.5

Решение. Используя формулы (3.1.6) и (3.1.9), рассчитываем требуемое количество заклепок:

из условия прочности на срез

$$n = \frac{4F}{\pi d^2 n_s R_{bs} \gamma_b} = \frac{4 \cdot 35 \cdot 10^3}{\pi \cdot 0,004^2 \cdot 2 \cdot 110 \cdot 10^6 \cdot 0,9} = 14;$$

из условия прочности на смятие

$$n = \frac{F}{\sum t \cdot d \cdot R_{bp} \gamma_b} = \frac{35 \cdot 10^3}{0,002 \cdot 0,004 \cdot 310 \cdot 10^6 \cdot 0,9} = 16.$$

Из полученных результатов видно, что в данном случае решающим явилось условие прочности на смятие. Таким образом, следует взять 16 заклепок.

Практические занятия-11

Кручение прямого стержня круглого поперечного сечения; механизм деформирования - закон плоских сечений. Определение напряжений в поперечном сечении и углов поворота сечений; жесткость стержня при кручении. Решение задачи

Кручением называют деформацию, возникающую при действии на стержень пары сил, расположенной в плоскости, перпендикулярной к его оси (рис. 3.2.1, *а*). Стержни круглого или кольцевого сечения, работающие на кручение, называют *валами*. При расчете валов обычно бывает известна мощность, передаваемая на вал, а величины внешних скручивающих моментов, подлежат определению. Из теоретической механики известна зависимость между скручивающим моментом M , Н·м, мощностью (секундной работой) U , Н·м·с⁻¹, и числом n оборотов в минуту для вала

$$M = \frac{30}{n\pi} U.$$

(3.2.1)

Если мощность задана в киловаттах, то величина скручивающего момента определяется по формуле

$$M = \frac{30570}{\pi} U. \quad (3.2.2)$$

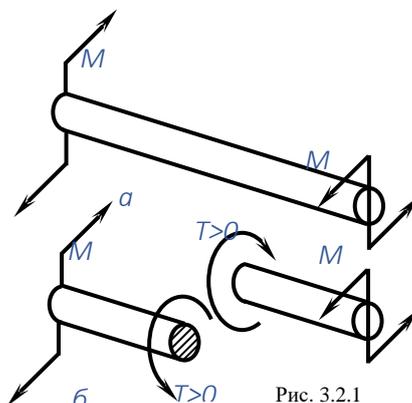


Рис. 3.2.1

3.2.1. Крутящие моменты и их эпюры

В поперечных сечениях скручиваемого вала возникают внутренние *крутящие моменты* T . Они устанавливаются на основе метода сечений: внутренний крутящий момент равен алгебраической сумме односторонних внешних моментов. При построении эпюр крутящих моментов принимают следующее правило знаков: если при взгляде в торец отсеченной части вала действующий в этом сечении момент оказывается направленным против хода часовой стрелки, то он считается положительным (рис. 3.2.1, *б*), а если по ходу часовой стрелки – отрицательным.

Задача 3.2.1. На вал, делающий $n = 100$ об/мин, передается через ведущий шкив мощность $U_0 = 10$ кВт. С двух ведомых шкивов снимаются мощности $U_1 = 6$ кВт и $U_2 = 4$ кВт (рис. 3.2.2.)

Построить эпюру крутящих моментов T для этого вала.

Решение. Определяются величины внешних скручивающих моментов по формуле (3.2.2.):

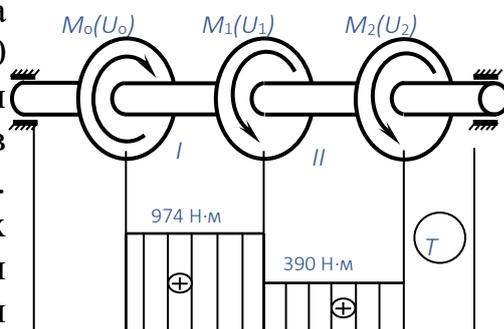


Рис. 3.2.2

$$M_0 = \frac{30570}{3,14 \cdot 100} 10 = 974 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad M_1 = \frac{30570}{3,14 \cdot 100} 6 = 584 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_2 = \frac{30570}{3,14 \cdot 100} 4 = 390 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Вал разбивается на два участка, границами которых являются сечения, где приложены внешние моменты. Применяя метод сечений на первом и втором участках, и пользуясь указанным выше правилом для расчета крутящего момента T , получим

$$T_1 = M_0 = 974 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad T_2 = M_0 - M_1 = 974 - 584 = 390 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

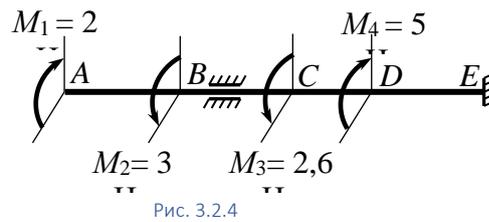
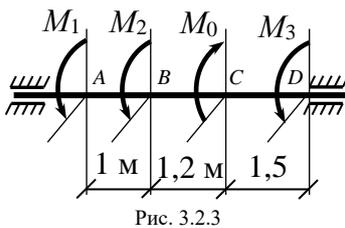
Эпюра крутящих моментов представлена на рис. 3.2.2.

Задача 3.2.2. Для условий задачи 3.2.1. построить эпюру T , поменяв местами моменты M_0 и M_1 .

Ответ: $T_1 = -584 \text{ Н} \cdot \text{м}; T_2 = 390 \text{ Н} \cdot \text{м}.$

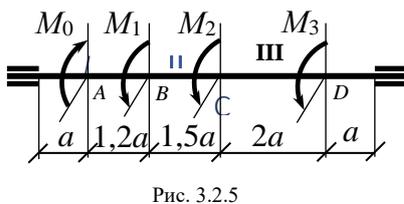
Задача 3.2.3. Для стального вала круглого поперечного сечения, нагруженного четырьмя внешними скручивающими моментами $M_1=0,3 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_2 = 0,6 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_3 = 1,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_0 = 2,4 \text{ кН} \cdot \text{м}$ (рис. 3.2.3.), построить эпюру крутящих моментов.

Ответ: $T_1 = -0,3 \text{ кН} \cdot \text{м}$ (на участке AB); $T_2 = -0,9 \text{ кН} \cdot \text{м}$ (на участке BC);
 $T_3 = 1,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$ (на участке CD).



Задача 3.2.4. Построить эпюру крутящих моментов для вала, показанного на рис. 3.2.4.

Ответ: $T_1 = 2000 \text{ Н} \cdot \text{м}$ (на участке AB); $T_2 = -1000 \text{ Н} \cdot \text{м}$ (на участке BC);
 $T_3 = -3600 \text{ Н} \cdot \text{м}$ (на участке CD);
 $T_4 = 1400 \text{ Н} \cdot \text{м}$ (на участке DE).



Задача 3.2.5. Найти наиболее рациональное расположение четырех крутящих моментов на валу (рис. 3.2.5):

$$M_1 = 2 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad M_2 = 3 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3 = 1 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad M_0 = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

У к а з а н и я

1. Наиболее выгодным расположением моментов на валу является то, при котором максимальный момент T_{\max} будет наименьшим среди T_{\max} при других расположениях внешних моментов.

2. В задаче следует рассмотреть 3–4 варианта размещения моментов и выбрать из них оптимальный вариант.

3. Длины участков вала остаются неизменными.

Ответ: $T_1 = -3000 \text{ Н} \cdot \text{м}$ (на участке AB); $T_2 = 3000 \text{ Н} \cdot \text{м}$ (на участке BC);
 $T_3 = 1000 \text{ Н} \cdot \text{м}$ (на участке CD).

3.2.2 Расчет напряжений и деформаций валов

В поперечных сечениях вала при кручении действуют только касательные напряжения, которые вычисляются по формуле:

$$\tau = \frac{T}{I_\rho} \rho, \quad (3.2.3)$$

где ρ – текущий радиус точек сечения; I_ρ – полярный момент инерции сечения.

Из формулы (3.2.3) следует, что при $\rho = 0$ имеем $\tau = 0$, а при $\rho = \rho_{\max} = R$ получим

$$\tau_{\max} = \frac{T}{I_\rho} \rho_{\max} = \frac{T}{I_\rho} R = \frac{T}{W_\rho}, \quad (3.2.4)$$

где $W_\rho = I_\rho / \rho_{\max} = I_\rho / R$ – полярный момент сопротивления сечения.

Деформация кручения характеризуется углом закручивания φ , который в общем случае определяется по формуле

$$\varphi = \int_0^l \frac{T(x)}{GI_\rho} dx,$$

а в частном случае при $GI_\rho = \text{const}$, $T = \text{const}$ – по формуле

$$\varphi = \frac{T \cdot l}{GI_\rho}. \quad (3.2.5)$$

В этих формулах l – расстояние между закручиваемыми сечениями вала. В расчетах часто используется так называемый *относительный угол закручивания* $\theta = \varphi / l$. Из формулы (3.2.5) следует, что

$$\theta = \frac{T}{GI_\rho}. \quad (3.2.6)$$

Поскольку кручение представляет собой по существу неравномерный сдвиг, то закон Гука и выражение для потенциальной энергии имеют вид аналогичных соотношений из п. 3.1.

Закон Гука при кручении имеет вид

$$\tau = G\gamma = G\theta\rho. \quad (3.2.7)$$

Удельная потенциальная энергия рассчитывается по формуле

$$u = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{\tau\gamma}{2},$$

а полная энергия находится из выражения

$$U = \int_0^l \frac{T^2(x) dx}{2GI_\rho}.$$

В частном случае $GI_\rho = \text{const}$, $T = \text{const}$ выражение для потенциальной энергии имеет вид

$$U = \frac{T^2 l}{2GI_\rho}. \quad (3.2.8)$$

Задача 3.2.6. Стальной коленчатый вал *ОВС* (рис. 3.2.6) принимает на плечо *ВС* усилие $F = 100$ Н. Найти наибольшее касательное напряжение и угол

закручивания плеча OB , имеющего диаметр $d = 8$ мм и длину $l = 25$ мм. Модуль упругости $G = 8 \cdot 10^4$ МПа, плечо a силы F равно 20 мм.

Решение. Определим величину внешнего момента:

$$M = Fa = 100 \cdot 0,02 = 2 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Поскольку к элементу OB больше никаких внешних сил не приложено, то, очевидно, что внутренний крутящий момент равен $T = M = 2 \text{ Н} \cdot \text{м} = 200 \text{ Н} \cdot \text{см}$.

Для вычисления касательных напряжений и угла закручивания необходимо найти геометрические характеристики поперечного сечения элемента OB . Полярный момент сопротивления равен

$$W_\rho = \pi R^3 / 2 = 3,14 \cdot 0,4^3 / 2 = 0,1 \text{ см}^3.$$

Полярный момент инерции равен

$$I_\rho = \pi R^4 / 2 = 3,14 \cdot 0,4^4 / 2 = 0,04 \text{ см}^4.$$

Наибольшее касательное напряжение определим по формуле (3.2.4)

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_\rho} = \frac{200}{0,1} = 2000 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = 20 \text{ МПа}.$$

Найдем угол закручивания сечения 2 – 2 относительно сечения 1 – 1. Как видно из рис. 3.2.6, на этот же угол повернется плечо BC . Согласно формуле (3.2.5), получим

$$\varphi = \frac{T \cdot l}{GI_\rho} = \frac{2 \cdot 2,5 \cdot 10^{-2}}{8 \cdot 10^{10} \cdot 0,04 \cdot 10^{-8}} = 1,57 \cdot 10^{-3} \text{ рад} = 0,09 \text{ град}.$$

Три вида задач при кручении: определение напряжений и углов закручивания, подбор сечений и вычисление допускаемого крутящего момента по прочности и жесткости. Решение задачи

При расчете валов требуют, чтобы они удовлетворяли условиям прочности и жесткости. Условие прочности требует, чтобы максимальное касательное напряжение, вычисленное по формуле (3.2.4), было меньше или в предельном случае равно расчетному сопротивлению на срез R_s для материала вала, т.е.

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_\rho} \leq R_s. \quad (3.2.9)$$

Условие жесткости требует, чтобы максимальный относительный угол закручивания θ_{\max} , вычисленный по формуле (3.2.5), был меньше или в предельном случае равен допускаемому углу закручивания единицы длины вала, т.е.

$$\theta = \frac{T}{GI_\rho} \leq \theta_{\text{adm}}, \left[\frac{\text{рад}}{\text{м}} \right]. \quad (3.2.10)$$

Из формулы (3.2.9) можно найти необходимый для обеспечения прочности полярный момент сопротивления сечения, а по нему и диаметр вала:

$W_p = T / R_s$, но $W_p = 0,2d^3$, поэтому

$$d_{np} = \sqrt[3]{\frac{5T}{R_s}}. \quad (3.2.11)$$

Из формулы (3.2.10) можно найти необходимый полярный момент инерции сечения, а по нему и диаметр вала

$$I_p = \frac{T}{G\theta_{adm}}.$$

В этой формуле допускаемый относительный угол закручивания θ_{adm} должен быть выражен в радианах; если этот угол дан в градусах, то соотношение для определения I_p будет выглядеть следующим образом:

$$I_p = \frac{T}{G\theta_{adm}^{\circ}} \cdot \frac{180}{\pi},$$

но $I_p = 0,1d^4$, поэтому

$$d_{жест.} = \sqrt[4]{\frac{10T}{G\theta_{adm}^{\circ}} \cdot \frac{180}{\pi}}. \quad (3.2.12)$$

Из двух диаметров, рассчитанных по формулам (3.2.11) и (3.2.12), в качестве окончательного диаметра выбирается больший, который обычно округляется до целых миллиметров.

В случае расчета размеров вала кольцевого поперечного сечения при заданном соотношении внутреннего $d_{вн}$ и наружного диаметров d , т.е. при заданном параметре $k = d_{вн}/d$, формулы (3.2.11) и (3.2.12) принимают вид:

$$d_{np} = \sqrt[3]{\frac{5T}{(1-k^4)R_s}}; \quad (3.2.13)$$

$$d_{жестк.} = \sqrt[4]{\frac{10T}{G\theta_{adm}^{\circ}} \cdot \frac{180}{(1-k^4)\pi}}. \quad (3.2.14)$$

Задача 3.2.15. Для вала, показанного на рис.3.2.3, сплошного круглого поперечного сечения найти необходимые диаметры по участкам. Материал вала – сталь, модуль сдвига $G = 8 \cdot 10^4$ МПа, расчетное сопротивление на срез $R_s = 30$ МПа, допускаемый угол закручивания $\theta_{adm}^{\circ} = 0,3$ град / м .

Решение. Прежде всего строится эпюра крутящих моментов. Значения крутящих моментов по участкам следующие:

$$T_1 = -M_1 = -0,3 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad T_2 = -M_1 - M_2 = -0,9 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\ T_3 = -M_1 - M_2 + M_0 = 1,5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Далее производится расчет диаметров по участкам вала из условия

прочности, т.е. с использованием формулы (3.2.11):

$$d_{1,\text{пр}} = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot 0,3}{30 \cdot 10^3}} = 0,03684 \text{ м}; \quad d_{2,\text{пр}} = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot 0,9}{30 \cdot 10^3}} = 0,05313 \text{ м};$$

$$d_{3,\text{пр}} = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot 1,5}{30 \cdot 10^3}} = 0,063 \text{ м}.$$

Затем рассчитываются диаметры по участкам вала из условия жесткости, т.е. с использованием формулы (3.2.12):

$$d_{1,\text{жестк.}} = \sqrt[4]{\frac{10 \cdot 0,3 \cdot 180}{8 \cdot 10^7 \cdot 0,3 \cdot 3,14}} = 0,052 \text{ м};$$

$$d_{2,\text{жестк.}} = \sqrt[4]{\frac{10 \cdot 0,9 \cdot 180}{8 \cdot 10^7 \cdot 0,3 \cdot 3,14}} = 0,0686 \text{ м};$$

$$d_{3,\text{жестк.}} = \sqrt[4]{\frac{10 \cdot 1,5 \cdot 180}{8 \cdot 10^7 \cdot 0,3 \cdot 3,14}} = 0,0778 \text{ м}.$$

В качестве окончательных следует выбрать значения диаметров, рассчитанные из условия жесткости. Таким образом, окончательные размеры диаметров вала таковы: $d_1 = 52 \text{ мм}$, $d_2 = 69 \text{ мм}$, $d_3 = 78 \text{ мм}$.

Задача 3.2.16. Для вала, представленного в предыдущей задаче (рис. 3.2.3), рассчитать по участкам диаметры кольцевого сечения при отношении диаметров $k = d_{\text{вн}}/d = 0,8$.

Решение. Подставляя в формулы (3.2.13) и (3.2.14) известные значения T_i , R_s , G , $\theta_{\text{adm}}^{\circ} = 0,3 \text{ град / м}$ и k найдем

$$d_{1,\text{пр}} = 4,44 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \quad d_{2,\text{пр}} = 6,36 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \quad d_{3,\text{пр}} = 7,56 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \\ d_{1,\text{жестк.}} = 5,94 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \quad d_{2,\text{жестк.}} = 7,84 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \quad d_{3,\text{жестк.}} = 8,88 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

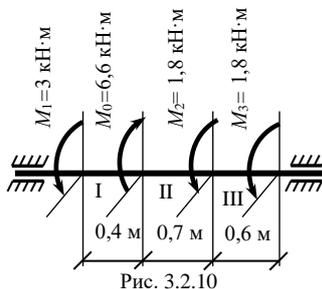
Таким образом, за наружные размеры диаметров участков полого вала

следует взять те, которые были рассчитаны из условия жесткости. Итак,

$d_1 = 60 \text{ мм}$, $d_2 = 79 \text{ мм}$, $d_3 = 89 \text{ мм}$. Внутренние расчетные диаметры будут

равны $d_{1,\text{вн}} = 0,8 \cdot 60 = 48 \text{ мм}$, $d_{2,\text{вн}} = 63 \text{ мм}$, $d_{3,\text{вн}} = 71 \text{ мм}$.

Примечание. Обычно внутренний канал полого вала делается постоянного диаметра, за который принимают наименьший из рассчитанных, т.е. в нашей задаче $d_{вн} = d_{1,вн} = 48$ мм, хотя при этом на некоторых участках соотношение диаметров k будет несколько отличаться от заданного.



Задача 3.2.17. Для вала, показанного на рис. 3.2.10, построить эпюру крутящих моментов, подобрать сплошное круглое и кольцевое сечения по участкам из условий прочности и жесткости. Сравнить массы полого и сплошного валов. Дано: $k = d_{вн}/d = 0,7$; $R_s = 22$ МПа, $\theta_{adm}^{\circ} = 0,5$ град/м; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа, число оборотов вала $n = 195$ об/мин.

Ответ: диаметры сплошного вала $d_1 = 88$ мм, $d_2 = 94$ мм, $d_3 = 76$ мм; отношение массы полого вала к массе сплошного равно 0,7.

Задача 3.2.18. На вал, делающий $n = 200$ об/мин, передается через ведущий шкив на ведомый мощность $U = 425$ кВт. Рассчитать диаметр d сплошного круглого вала, если принять $R_s = 100$ МПа, $\theta_{adm}^{\circ} = 0,25$ град/м, модуль сдвига материала вала $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

Ответ: $d = 145$ мм.

Практические занятия-12

Изгиб прямого стержня. Классификация видов изгиба: чистый - поперечный, прямой - косой, плоский - пространственный. Решение задачи

Изгиб представляет собой такую деформацию, при которой происходит искривление оси прямого бруса или изменение кривизны кривого бруса. Изгиб называют *чистым*, если изгибающий момент является единственным внутренним усилием, возникающим в поперечном сечении бруса (балки). Изгиб называют *поперечным*, если в поперечных сечениях бруса наряду с изгибающими моментами возникают также и поперечные силы. Если плоскость действия изгибающего момента проходит через одну из главных центральных осей поперечного сечения, то изгиб носит название *плоского* или *прямого*.

4.1. Построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил

Поперечная сила в сечении балки $a - a$ считается *положительной*, если равнодействующая внешних сил слева от рассматриваемого сечения направлена снизу вверх, а справа - сверху вниз (рис. 4.1.1, *a*), и

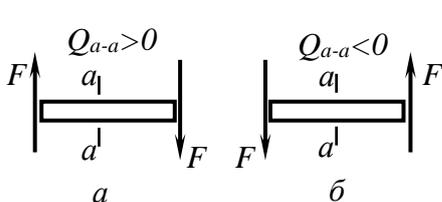


Рис. 4.1.1

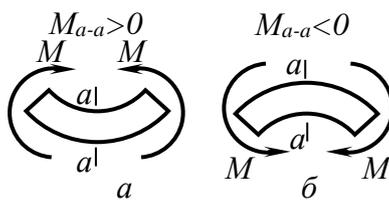


Рис. 4.1.2

отрицательной – в противоположном случае (рис. 4.1.1, б). Иногда пользуются следующим правилом: положительная поперечная сила стремится повернуть балку вокруг рассматриваемого сечения по часовой стрелке, а отрицательная – против часовой стрелки.

Ординаты эпюр поперечных сил, соответствующие положительным значениям, будем откладывать вверх от осей эпюр, а отрицательным – вниз (ось эпюры должна быть направлена параллельно оси балки).

Изгибающий момент в сечении балки *a-a* считается *положительным*, если равнодействующий момент внешних сил слева от сечения направлен по часовой стрелке, а справа – против часовой стрелки (рис. 4.1.2, а), и *отрицательным* – в противоположном случае (рис. 4.1.2, б).

Ординаты эпюр изгибающих моментов, соответствующие положительным значениям, будем откладывать вниз от осей этих эпюр, а отрицательным – вверх (ось эпюры должна быть направлена параллельно оси балки).

Таким образом, устанавливая откладывать положительные ординаты эпюры изгибающих моментов вниз от оси балки, мы получим, что эпюра оказывается построенной *со стороны растянутых волокон* балки.

Теорема Журавского (теорема Шведлера). Производная от изгибающего момента *M* по длине балки равна поперечной силе *Q*:

$$\frac{dM}{dx} = Q. \quad (4.1.1)$$

Производная от поперечной силы *Q* по длине балки равна распределенной нагрузке *q*:

$$\frac{dQ}{dx} = q. \quad (4.1.2)$$

У к а з а н и я

1. Если в рассматриваемом сечении приложена сосредоточенная сила *F*, перпендикулярная к оси балки, то значение поперечной силы *Q* в этом сечении изменяется скачкообразно на величину приложенной силы *F*.

2. Если в рассматриваемом сечении к балке приложен сосредоточенный внешний момент *m*, то значение изгибающего момента *M* в этом сечении изменяется скачкообразно на величину приложенного момента *m*.

3. Тангенс угла между касательной к линии, ограничивающей эпюру изгибающего момента *M* и осью эпюры, равен поперечной силе *Q*.

4. Чем больше по абсолютной величине значение поперечной силы *Q* тем круче линия, ограничивающая эпюру *M*.

5. На участке балки, на котором поперечная сила имеет постоянное значение, эпюра изгибающих моментов *M* будет ограничена прямой наклонной линией.

6. Изгибающий момент достигает максимума или минимума в тех сечениях балки, в которых поперечная сила равна нулю; касательная к линии, ограничивающей эпюру *M*, в этом сечении параллельна оси эпюры.

7. На участках балки, на которых распределенная нагрузка q отсутствует, поперечные силы Q постоянны, а изгибающие моменты M меняются по линейному закону.

Задача 4.1.1. Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для балки, изображенной на рис. 4.1.3.

Решение. Определим вертикальные опорные реакции R_A и R_B балки. Отметим, что левая опора – шарнирно неподвижная опора, поэтому в ней возникает вертикальная опорная реакция R_A , препятствующая вертикальному смещению, и горизонтальная опорная реакция H , исключаяющая горизонтальное смещение закрепленного сечения балки. Однако при заданной вертикальной нагрузке имеем:

$$\sum X = H = 0, \text{ следовательно, } H = 0.$$

откуда $t = \sqrt[3]{1,45 / (10^3 \cdot 240)} = 0,0182 \text{ м} = 1,82 \text{ см}.$

Построим эпюру касательных напряжений τ . С точки зрения касательных напряжений наиболее опасными являются участки I и IV с $Q = Q_{\max} = 8 \text{ кН}$. Величины касательных напряжений τ в поперечных сечениях балки определяются по формуле (4.2.6), которая для нашего случая принимает вид

$$\tau = \frac{8000 \cdot S_z' \cdot 24}{661t^4 t_{ef}} 10^{-6} = \frac{0,3 \cdot 10^{-3}}{t^4} \cdot \frac{S_z'}{t_{ef}} \text{ МПа.}$$

Для точки 1 имеем $S_{z(1)}' = 0$, $t_{ef(1)} = b = 3t$, $\tau(1) = 0$. Далее определяем эти же параметры для точки 2:

$$S_{z(2)}' = bt_f (h_c - t_f / 2) = 3t^2 (2,375t - t / 2) = 5,625t^3; \quad t_{ef(2)} = b = 3t;$$

$$\tau(2) = \frac{0,3 \cdot 10^{-3}}{t^4} \cdot \frac{5,625t^3}{3t} = \frac{0,56 \cdot 10^{-3}}{t^2} \text{ МПа.}$$

Аналогично определяем статический момент относительно нейтральной оси z отсеченной части поперечного сечения для точки 3:

$$S'_{z(3)} = S'_{z(2)} = 5,625t^3; t_{ef(3)} = t, \tau(3) = \frac{0,3 \cdot 10^{-3}}{t^4} \frac{5,625t^3}{t} = \frac{1,68 \cdot 10^{-3}}{t^2} \text{ МПа.}$$

Для точки 4 находим

$$S'_{z(4)} = bt_f(h_c - t_f/2) + (h_c - t_f)t(h_c - t_f)/2 = 6,565t^3; t_{ef(4)} = t;$$

$$\tau(4) = \frac{0,3 \cdot 10^{-3}}{t^4} \cdot \frac{6,565t^3}{t} = \frac{1,97 \cdot 10^{-3}}{t^2} \text{ МПа.}$$

В точке 5 получаем $S'_{z(5)} = 0$ – статический момент сечения равен нулю относительно оси, проходящей через центр тяжести этого сечения; $t_{ef(5)} = t$, тогда $\tau(5) = 0$.

По полученным значениям $\tau(i)$ строим эпюру касательных напряжений в поперечных сечениях балки на участке I или IV (рис. 4.2.2, б).

Определим минимальный размер t при выполнении условия (4.2.8), которое для рассматриваемого случая принимает вид:

$$\tau_{\max} = \tau(4) = 1,97 \cdot 10^{-3} / t^2 \leq 0,58R_y = 0,58 \cdot 240 \text{ МПа,}$$

откуда находим $t = \sqrt{1,97 \cdot 10^{-3} / (0,58 \cdot 240)} = 0,0038 \text{ м} = 0,38 \text{ см.}$

Таким образом, имеем два значения t : $t = 1,82 \text{ см}$ – при расчете по максимальному нормальному напряжению $\sigma_{x,\max}$ и $t = 0,38 \text{ см}$ – при расчете по максимальному касательному напряжению τ_{\max} . Окончательно принимаем

максимальное значение $t = 1,82 \text{ см.}$

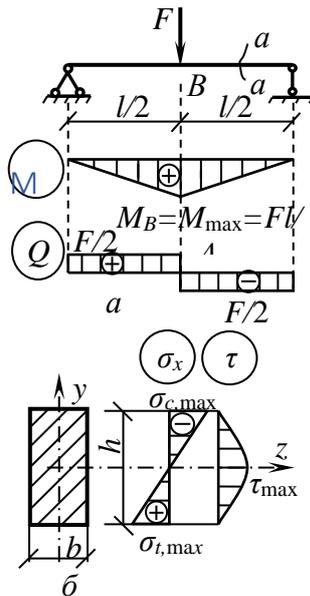


Рис. 4.2.3

Задача 4.2.2. Определить максимальное нормальное напряжение σ_x и максимальное касательное напряжение τ , возникающие в поперечных сечениях балки, представленной на рис. 4.2.3. Принять $h = 10 \text{ см}$, $b = 6 \text{ см}$, $l = 4 \text{ м}$, $F = 8 \text{ кН}$.

Решение. Из эпюры изгибающих моментов M определяем, что $M_{\max} = Fl/4 = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Осевой момент сопротивления W_z для прямоугольного сечения определяется по формуле

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{6 \cdot 10^2}{6} = 100 \text{ см}^3 = 1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3.$$

Используя формулу (4.2.5), находим

$$\sigma_{x,\max} = \sigma_{t,\max} = |\sigma_{c,\max}| = \pm \frac{M_z}{W_z} = \frac{8 \cdot 10^{-3}}{10^{-4}} = 80 \text{ МПа.}$$

На рис. 4.2.3, б показана эпюра нормальных напряжений σ_x .

Из эпюры поперечных сил (рис. 4.2.3, а) находим $Q_{\max} = F/2 = 4 \text{ кН}$. Далее определяем осевой момент инерции для прямоугольного сечения

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{6 \cdot 10^3}{12} = 500 \text{ см}^4 = 5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3,$$

и статический момент отсеченной части поперечного сечения (рис.4.2.3, б)

$$S'_z = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right) \left(\frac{h}{4} + \frac{y}{2}\right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right).$$

По формуле (4.2.6) находим

$$\tau = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{0,06 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} \frac{0,06}{2} \left(\frac{0,1^2}{4} - y^2 \right) = 400 \left(\frac{0,01}{4} - y^2 \right).$$

Последняя формула показывает, максимальное значение касательного напряжения будет в точках поперечного сечения, расположенных на оси z , т.е. $\tau_{\max} = \tau(y = 0) = 1$ МПа. На рис. 4.2.3, б показана эпюра касательных напряжений τ .

Практические занятия-13

Чистый изгиб в одной из главных плоскостей стержня; механизм деформирования - закон плоских сечений; зависимость между изгибающим моментом и кривизной изогнутого стержня. Решение задачи

Изгиб представляет собой такую деформацию, при которой происходит искривление оси прямого бруса или изменение кривизны кривого бруса. Изгиб называют *чистым*, если изгибающий момент является единственным внутренним усилием, возникающим в поперечном сечении бруса (балки). Изгиб называют *поперечным*, если в поперечных сечениях бруса наряду с изгибающими моментами возникают также и поперечные силы. Если плоскость действия изгибающего момента проходит через одну из главных центральных осей поперечного сечения, то изгиб носит название *плоского* или *прямого*.

4.1. Построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил

Поперечная сила в сечении балки $a - a$ считается *положительной*, если равнодействующая внешних сил слева от рассматриваемого сечения направлена снизу вверх, а справа – сверху вниз (рис. 4.1.1, а), и *отрицательной* – в противоположном случае (рис. 4.1.1, б). Иногда пользуются следующим правилом: положительная поперечная сила стремится

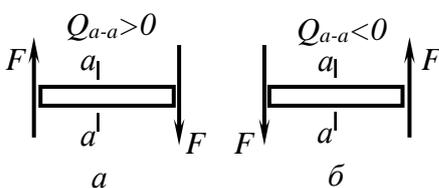


Рис. 4.1.1

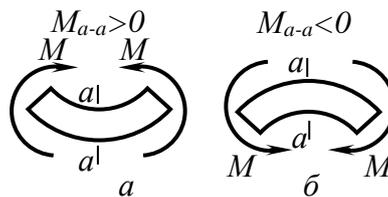


Рис. 4.1.2

повернуть балку вокруг рассматриваемого сечения по часовой стрелке, а отрицательная – против часовой стрелки.

Ординаты эпюр поперечных сил, соответствующие положительным значениям, будем откладывать вверх от осей эпюр, а отрицательным – вниз (ось эпюры должна быть направлена параллельно оси балки).

Изгибающий момент в сечении балки $a-a$ считается *положительным*, если равнодействующий момент внешних сил слева от сечения направлен по

часовой стрелке, а справа – против часовой стрелки (рис. 4.1.2, а), и *отрицательным* – в противоположном случае (рис. 4.1.2, б).

Ординаты эпюр изгибающих моментов, соответствующие положительным значениям, будем откладывать вниз от осей этих эпюр, а отрицательным – вверх (ось эпюры должна быть направлена параллельно оси балки).

Таким образом, устанавливая откладывать положительные ординаты эпюры изгибающих моментов вниз от оси балки, мы получим, что эпюра оказывается построенной *со стороны растянутых волокон* балки.

Теорема Журавского (теорема Шведлера). Производная от изгибающего момента M по длине балки равна поперечной силе Q :

$$\frac{dM}{dx} = Q. \quad (4.1.1)$$

Производная от поперечной силы Q по длине балки равна распределенной нагрузке q :

$$\frac{dQ}{dx} = q. \quad (4.1.2)$$

У к а з а н и я

1. Если в рассматриваемом сечении приложена сосредоточенная сила F , перпендикулярная к оси балки, то значение поперечной силы Q в этом сечении изменяется скачкообразно на величину приложенной силы F .

2. Если в рассматриваемом сечении к балке приложен сосредоточенный внешний момент m , то значение изгибающего момента M в этом сечении изменяется скачкообразно на величину приложенного момента m .

3. Тангенс угла между касательной к линии, ограничивающей эпюру изгибающего момента M и осью эпюры, равен поперечной силе Q .

4. Чем больше по абсолютной величине значение поперечной силы Q тем круче линия, ограничивающая эпюру M .

5. На участке балки, на котором поперечная сила имеет постоянное значение, эпюра изгибающих моментов M будет ограничена прямой наклонной линией.

6. Изгибающий момент достигает максимума или минимума в тех сечениях балки, в которых поперечная сила равна нулю; касательная к линии, ограничивающей эпюру M , в этом сечении параллельна оси эпюры.

7. На участках балки, на которых распределенная нагрузка q отсутствует, поперечные силы Q постоянны, а изгибающие моменты M меняются по линейному закону.

Задача 4.1.1. Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для балки, изображенной на рис. 4.1.3.

Решение. Определим вертикальные опорные реакции R_A и R_B балки. Отметим, что левая опора – *шарнирно неподвижная опора*, поэтому в ней возникает вертикальная опорная реакция R_A , препятствующая вертикальному смещению, и горизонтальная опорная реакция H , исключаящая

горизонтальное смещение закрепленного сечения балки. Однако при заданной вертикальной нагрузке имеем:

$$\sum X = H = 0, \text{ следовательно, } H = 0.$$

откуда $t = \sqrt[3]{1,45 / (10^3 \cdot 240)} = 0,0182 \text{ м} = 1,82 \text{ см}.$

Построим эпюру касательных напряжений τ . С точки зрения касательных напряжений наиболее опасными являются участки *I* и *IV* с $Q = Q_{\max} = 8 \text{ кН}$. Величины касательных напряжений τ в поперечных сечениях балки определяются по формуле (4.2.6), которая для нашего случая принимает вид

$$\tau = \frac{8000 \cdot S'_z \cdot 24}{661t^4 t_{ef}} 10^{-6} = \frac{0,3 \cdot 10^{-3}}{t^4} \cdot \frac{S'_z}{t_{ef}} \text{ МПа}.$$

Для точки 1 имеем $S'_{z(1)} = 0$, $t_{ef(1)} = b = 3t$, $\tau(1) = 0$. Далее определяем эти же параметры для точки 2:

$$S'_{z(2)} = bt_f(h_c - t_f / 2) = 3t^2(2,375t - t / 2) = 5,625t^3; \quad t_{ef(2)} = b = 3t;$$

$$\tau(2) = \frac{0,3 \cdot 10^{-3}}{t^4} \cdot \frac{5,625t^3}{3t} = \frac{0,56 \cdot 10^{-3}}{t^2} \text{ МПа}.$$

Аналогично определяем статический момент относительно нейтральной оси z отсеченной части поперечного сечения для точки 3:

$$S'_{z(3)} = S'_{z(2)} = 5,625t^3; \quad t_{ef(3)} = t, \quad \tau(3) = \frac{0,3 \cdot 10^{-3}}{t^4} \cdot \frac{5,625t^3}{t} = \frac{1,68 \cdot 10^{-3}}{t^2} \text{ МПа}.$$

Для точки 4 находим

$$S'_{z(4)} = bt_f(h_c - t_f / 2) + (h_c - t_f)t(h_c - t_f) / 2 = 6,565t^3; \quad t_{ef(4)} = t;$$

$$\tau(4) = \frac{0,3 \cdot 10^{-3}}{t^4} \cdot \frac{6,565t^3}{t} = \frac{1,97 \cdot 10^{-3}}{t^2} \text{ МПа}.$$

В точке 5 получаем $S'_{z(5)} = 0$ – статический момент сечения равен нулю относительно оси, проходящей через центр тяжести этого сечения; $t_{ef(5)} = t$, тогда $\tau(5) = 0$.

По полученным значениям $\tau(i)$ строим эпюру касательных напряжений в поперечных сечениях балки на участке *I* или *IV* (рис. 4.2.2, б).

Определим минимальный размер t при выполнении условия (4.2.8), которое для рассматриваемого случая принимает вид:

$$\tau_{\max} = \tau(4) = 1,97 \cdot 10^{-3} / t^2 \leq 0,58 R_y = 0,58 \cdot 240 \text{ МПа},$$

откуда находим $t = \sqrt{1,97 \cdot 10^{-3} / (0,58 \cdot 240)} = 0,0038 \text{ м} = 0,38 \text{ см}$.

Таким образом, имеем два значения t : $t = 1,82 \text{ см}$ – при расчете по максимальному нормальному напряжению $\sigma_{x,\max}$ и $t = 0,38 \text{ см}$ – при расчете по максимальному касательному напряжению τ_{\max} . Окончательно принимаем максимальное значение $t = 1,82 \text{ см}$.

Задача 4.2.2. Определить максимальное нормальное напряжение σ_x и максимальное касательное напряжение τ , возникающие в поперечных сечениях балки, представленной на рис. 4.2.3. Принять $h = 10 \text{ см}$, $b = 6 \text{ см}$, $l = 4 \text{ м}$, $F = 8 \text{ кН}$.

Решение. Из эпюры изгибающих моментов M определяем, что $M_{\max} = Fl/4 = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Осевой момент сопротивления W_z для прямоугольного сечения определяется по формуле

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{6 \cdot 10^2}{6} = 100 \text{ см}^3 = 1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3.$$

Используя формулу (4.2.5), находим

$$\sigma_{x,\max} = \sigma_{t,\max} = |\sigma_{c,\max}| = \pm \frac{M_z}{W_z} = \frac{8 \cdot 10^{-3}}{10^{-4}} = 80 \text{ МПа}.$$

На рис. 4.2.3, б показана эпюра нормальных напряжений σ_x .

Из эпюры поперечных сил (рис. 4.2.3, а) находим $Q_{\max} = F/2 = 4 \text{ кН}$. Далее определяем осевой момент инерции для прямоугольного сечения

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{6 \cdot 10^3}{12} = 500 \text{ см}^4 = 5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3,$$

и статический момент отсеченной части поперечного сечения (рис.4.2.3, б)

$$S'_z = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right) \left(\frac{h}{4} + \frac{y}{2}\right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right).$$

По формуле (4.2.6) находим

$$\tau = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{0,06 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} \frac{0,06}{2} \left(\frac{0,1^2}{4} - y^2\right) = 400 \left(\frac{0,01}{4} - y^2\right).$$

Последняя формула показывает, максимальное значение касательного напряжения будет в точках поперечного сечения, расположенных на оси z , т.е. $\tau_{\max} = \tau(y = 0) = 1 \text{ МПа}$. На рис. 4.2.3, б показана эпюра касательных напряжений τ .

Задача 4.2.3. Определить необходимую ширину b балки прямоугольного поперечного сечения $b \times h$ (рис. 4.2.3, а), причем $h = 3b$. Длина балки $l = 4 \text{ м}$, $F = 6 \text{ кН}$. Материал балки – сталь с $R_y = 240 \text{ МПа}$, $\gamma_c = 1$.

Решение. Согласно условию задачи, имеем $M_{\max} = Fl/4 = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}$ в сечении В. Вычисляем для прямоугольного поперечного сечения $b \times h$ (рис. 4.2.3): $W_z = b(3b)^2/6 = 1,5b^3$, тогда из формулы (4.2.7) получаем

$$W_{zn,\min} = M_{z,\max} / (R_y \gamma_c) = 0,006 / 240 = 0,000025 \text{ м}^3 = 25 \text{ см}^3, \text{ но } W_z = 1,5b^3.$$

Приравнивая $W_{zn,\min} = W_z$, определяем $b = 2,55 \text{ см}$.

Задача 4.2.4. Определить минимальную высоту h балки прямоугольного поперечного сечения (рис. 4.2.3). Принять $b = h/3$; $l = 4 \text{ м}$, $F = 6 \text{ кН}$, материал балки – сталь с $R_y = 240 \text{ МПа}$, $\gamma_c = 1$.

Ответ: $h = 0,0765 \text{ м}$.

Задача 4.2.5. Определить допускаемый минимальный диаметр d консольной балки (рис. 4.2.4) из стали с $R_y = 240 \text{ МПа}$. Принять, что $F = 1 \text{ кН}$, $l = 1 \text{ м}$, $\gamma_c = 1$. Собственный вес балки не учитывать.

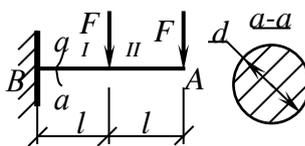


Рис. 4.2.4

Решение. Для сплошного круглого поперечного сечения имеем $W_z = \pi r^3 / 4$, где r – радиус поперечного сечения балки. Максимальный изгибающий момент будет в заделке B: $M_{\max} = M_B = F2l + Fl = 3Fl = 3 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Из формулы (4.2.7) находим момент сопротивления сечения

$$W_{zn,\min} = M_{\max} / (R_y \gamma_c) = 3 \cdot 10^{-3} / 240 = 1,25 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3.$$

Приравнивая $W_{zn,\min} = W_z$, находим $r = 0,025 \text{ м} = 2,5 \text{ см}$ или $d = 5 \text{ см}$.

Жесткость стержня при изгибе. Нормальные напряжения при чистом изгибе.

Формула Д.И. Журавского. Условия прочности стержня при прямом изгибе. Решение задачи

Задача . Подобрать сечение прокатной двутавровой балки, изображенной на рис. 4.1.17. Материал однопролетной балки – сталь С255, $\gamma_c = 1$. Принять $l = 3 \text{ м}$, $F = 16 \text{ кН}$.

Решение. Для стали С255 имеем $R_y = 240 \text{ МПа}$ (см. табл.3). Расчет на прочность заключается в определении $W_{zn,\min}$ из формулы (4.2.7):

$$W_{zn,\min} = \frac{M_z}{R_y \gamma_c}.$$

Для рассматриваемого случая, согласно рис. 4.1.17, имеем $M_z = M_{\max} = Fl = 48 \text{ кН} \cdot \text{м}$, следовательно

$$W_{zn,\min} = \frac{48000}{240 \cdot 10^6} = \frac{2}{10^4} \text{ м}^3 = 200 \text{ см}^3.$$

В зависимости от $W_{zn,\min} = 200 \text{ см}^3$ в сортаменте стальных прокатных профилей «Двутавры стальные горячекатанные» (табл. III, а) находим соответствующий номер профиля: два двутавра № 16 с моментом сопротивления одного двутавра 109 см^3 или для двух двутавров

$$W_{zn} = 109 \cdot 2 = 218 \text{ см}^3.$$

В этом случае прочность назначенного сечения будет

$$\sigma_{x,\max} = \frac{M_z}{W_{zn}} = \frac{48000 \cdot 10^{-6}}{218 \cdot 10^{-6}} = 220 \text{ МПа} < R_y \gamma_c.$$

Недонапряжение составляет

$$\frac{240 - 220}{240} \cdot 100\% = 8\%.$$

Сечение считается подобраным удовлетворительно, если недонапряжение составляет 5 – 7%.

Задача . Построить эпюры главных напряжений σ_{\max} , σ_{\min} и эпюру максимальных касательных напряжений τ_{\max} в наиболее опасном с точки зрения главных напряжений поперечном сечении балки, изображенной на рис. 4.1.16. При расчете принять $q = 10 \text{ кН/м}$, $l = 6 \text{ м}$, материал балки – сталь с $R_y = 240 \text{ МПа}$, $\gamma_c = 1$.

Решение. Из эпюр изгибающего момента M и поперечных сил Q очевидно, что наиболее опасное поперечное сечение на опоре (в заделке), где $M_{z,\max} = 2ql^2 = 720 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $Q_{\max} = 2ql = 120 \text{ кН}$. Подберем сечение в виде прокатного двутаврового профиля, для чего из формулы (4.2.7) находим

$$W_{zn,\min} = \frac{M_{z,\max}}{R_y \gamma_c} = \frac{720 \cdot 10^{-3}}{240 \cdot 1} \cdot 10^6 = 3000 \text{ см}^3.$$

Принимаем двутавр № 70Б1 ($W_z = 3645 \text{ см}^3$, $I_z = 125930 \text{ см}^4$) – двутавр стальной горячекатаный с параллельными гранями полок по ГОСТ 26020-83. Поперечное сечение с соответствующими размерами показано на рис. 4.3.1. Кроме того, из таблицы выписываем площадь поперечного сечения $A = 164,7 \text{ см}^2$, статический момент половины поперечного сечения $S_z' = 2095 \text{ см}^3$.

Построим эпюру нормальных напряжений σ_x , для чего определяем

$$\sigma_{x(1)} = \sigma_{x,\max} = \frac{M_{z,\max}}{W_z} = \frac{720 \cdot 10^{-3}}{3645 \cdot 10^{-6}} = 198 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{x(2)} = \sigma_{x(3)} = \frac{M_{z,\max}}{I_z} y_2 = \frac{720 \cdot 10^{-3} \cdot 0,33}{125930 \cdot 10^{-8}} = 188,7 \text{ МПа.}$$

Полученные данные занесем в табл. 4.3.1.

Определяем статические моменты S'_z (относительно оси z) части площади, расположенной выше продольного сечения, проходящего через соответствующие точки. Например, S'_z части площади, расположенной выше

продольного сечения, проходящего через точку 2, находим по формуле

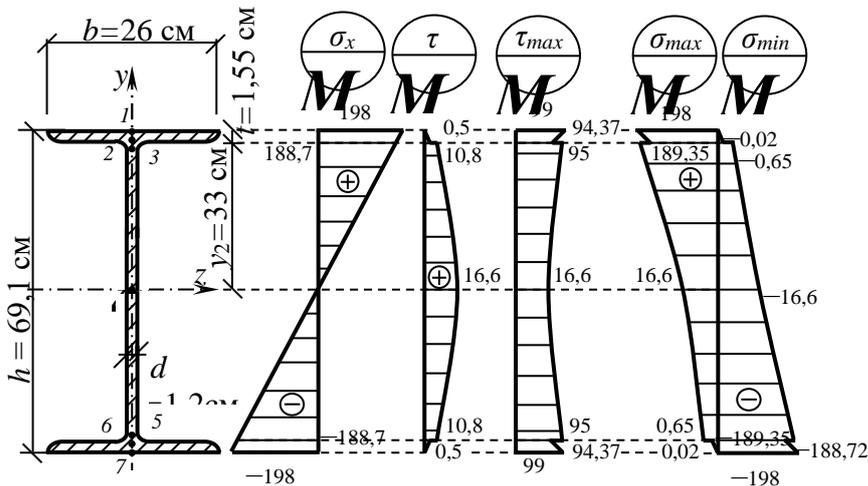


Рис. 4.3.1

$S'_{z(2)} = 1,55 \cdot 26(33 + 1,55/2) = 1361 \text{ см}^3$, а затем определяем касательное напряжение $\tau = \tau_{xy}$ по формуле (4.2.6) при условии, что τ распределены по ширине поперечного сечения равномерно:

$$\tau_{(2)} = \frac{Q_{\max} S'_{z(2)}}{I_z b} = \frac{120 \cdot 10^{-3} \cdot 1361 \cdot 10^{-6}}{125930 \cdot 10^{-8} \cdot 0,26} = 0,5 \text{ МПа.}$$

Далее находим $S'_{z(3)} = S'_{z(2)}$, а затем и касательное напряжение

$$\tau_{(3)} = \frac{Q_{\max} S'_{z(3)}}{I_z b_{(3)}} = \frac{120 \cdot 10^{-3} \cdot 1361 \cdot 10^{-6}}{125930 \cdot 10^{-8} \cdot 0,012} = 10,8 \text{ МПа.}$$

13-Перемещения при плоском изгибе. Расчет балок на жесткость

При расчете строительных и машиностроительных конструкций на жесткость (в большинстве случаев по прогибам, по углам поворота) должно соблюдаться условие

$$\frac{f}{l} \leq \left[\frac{1}{n_o} \right], \quad (4.5.1)$$

т.е. относительный прогиб f/l , подсчитанный при действии нормативных нагрузок, не должен превышать установленный нормами предельный прогиб $1/n_o$ для данного вида конструкции (табл. 4.5.1).

Для обеспечения нормальной работы подшипников скольжения и роликовых подшипников качения иногда ставится дополнительное условие жесткости – ограничение угла поворота φ опорных сечений:

$$\varphi_{\max} \leq \varphi_{adm} \cdot \quad (4.5.2)$$

Допускаемый угол поворота φ_{adm} берется из соответствующих справочников. В среднем φ_{adm} составляет 0,001 рад.

Задача 4.5.1. Провести расчет по второй группе предельных состояний (по прогибам) главной двутавровой балки рабочей площадки производственного здания при отсутствии рельсовых путей (рис. 4.4.5). Нормативная нагрузка $q = 8$ кН/м, длина консоли $l = 2$ м.

Решение. Максимальный прогиб будет на конце консоли в точке B :

$$y_{\max} = \frac{ql^4}{8EI}.$$

С учетом примечания к табл. 4.5.1 принимаем $[1/n_o] = 1/400$ и формулу (4.5.1) можно записать в следующем виде

Таблица 4.5.1

Предельные относительные прогибы изгибаемых элементов металлических конструкций

Элементы конструкций	$f_{\max}/l \leq [1/n_o]$	
	стальные Х	алюминие ВЫХ
Балки и фермы крановых путей под краны: легкого режима работы (ручные краны, тельферы, тали)	1/400	—
при электрических кранах	1/500	—
режима работы среднего	1/600	—
то же, тяжелого		
Балки рабочих площадок производственных зданий:		
при отсутствии рельсовых путей:	1/400	—
главные	1/250	—
прочие	1/400	—
при наличии путей:	1/600	—
узкоколейных		
ширококолейных	1/400	—
Балки междуэтажных перекрытий:	1/250	—
главные		
прочие		
Балки и фермы покрытий и чердачных перекрытий:	1/400	1/400
несущие подвесное и	1/250	1/250

технологическое оборудование	1/150 1/200	1/150 1/200
не несущие подвесное оборудование профилированный	1/300 1/200	1/200 1/200
настил, обрешетки	–	1/300
прогоны	–	1/200
Элементы фахверка: ригели, стойки	– –	1/200 1/125
прогоны остекления	–	1/150
Покрытия, в том числе большепролетные без подвесного транспорта	–	1/150
Стеновые панели: остекленные неостекленные		
Кровельные панели и подвесные потолки		

Примечание: Для консолей пролет l равен удвоенному вылету консоли.

$$\frac{y_{\max}}{2l} \leq \frac{1}{400} \text{ или } \frac{ql^4}{2l \cdot 8EI} \leq \frac{1}{400}.$$

Из полученного соотношения определяем

$$I = \frac{400ql^3}{16E} = \frac{400 \cdot 8000 \cdot 2^3}{16 \cdot 2,06 \cdot 10^5 \cdot 10^6} \cdot 10^8 = 777 \text{ см}^4.$$

По сортаменту прокатных профилей «Двутавры стальные горячекатаные» (табл. III, а) принимаем двутавр № 16 ($I_z = 873 \text{ см}^4$, $W_z = 109 \text{ см}^3$).

Проверим прочность балки из двутавра № 16. Согласно рис. 4.4.5, имеем $M_{\max} = ql^2/2 = 16000 \text{ Н} \cdot \text{м}$ и тогда из формулы (4.2.7) находим для стали С255:

$$W_{zn} = \frac{M_{z,\max}}{R_y \gamma_c} = \frac{16000}{240 \cdot 10^6 \cdot 1} \cdot 10^6 = 67 \text{ см}^3.$$

По сортаменту прокатных профилей «Двутавры стальные горячекатаные» (табл. III, а) принимаем двутавр № 14 с $W_z = 81,7 \text{ см}^3$, $I_z = 572 \text{ см}^4$.

Следовательно, согласно расчету на прочность можно использовать в качестве балки рабочей площадки двутавр № 14. Однако в этом случае конструкция будет непригодна к нормальной эксплуатации из-за появления недопустимых перемещений (прогибов). Окончательно принимаем двутавр № 16, который необходим из расчета на жесткость.

Задача 4.5.2. Подобрать из расчета на прочность главную балку междуэтажного перекрытия двутаврового поперечного сечения и проверить условие жесткости для нее (рис. 4.4.12). Принять $F = 30 \text{ кН}$, $l = 6 \text{ м}$. Материал балки – сталь С255, $\gamma_c = 1,1$ (см. табл. 1.1 в главе 1).

Решение. Определяем опорные реакции в рассматриваемой однопролетной балке $R_A = R_B = F = 30$ кН. Максимальный изгибающий момент будет в середине пролета:

$$M_{\max} = R_A l/2 - F(l/2 - l/3) = 60 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

следовательно, согласно условия (4.2.7):

$$W_z = \frac{M_z}{R_y \gamma_c} = \frac{60 \cdot 10^3}{240 \cdot 10^6 \cdot 1,1} \cdot 10^6 = 227 \text{ см}^3.$$

По сортаменту прокатных профилей «Двутавры стальные горячекатаные» (табл. III, а) принимаем двутавр № 22 ($W_z = 232 \text{ см}^3$, $I_z = 2550 \text{ см}^4$).

Максимальный прогиб будет также в середине пролета балки. Составим дифференциальное уравнение изгиба оси балки для первого участка:

$$y_I'' = \frac{30x}{EI}; \quad y_I' = \frac{15x^2}{EI} + C; \quad y_I = \frac{5x^3}{EI} + Cx + D.$$

Поставим граничное условие: $y_I = 0$ при $x = 0$ и находим $D = 0$. Далее запишем

$$y_{II}'' = 30 \frac{x - (x-2)}{EI}; \quad y_{II}' = 15 \frac{x^2 - (x-2)^2}{EI} + C; \quad y_{II} = 5 \frac{x^3 - (x-2)^3}{EI} + Cx$$

при $2 \leq x \leq 4$, а также для третьего участка ($4 \leq x \leq 6$):

$$y_{III}'' = 30 \frac{x - (x-2) - (x-4)}{EI}; \quad y_{III}' = 15 \frac{x^2 - (x-2)^2 - (x-4)^2}{EI} + C;$$

$$y_{III} = 5 \frac{x^3 - (x-2)^3 - (x-4)^3}{EI} + Cx.$$

Граничное условие для третьего участка примет вид: $y_{III} = 0$ при $x = 6$ м, откуда найдем $C = -120/(EI)$.

Максимальный прогиб будет в середине пролета балки на втором участке при $x = 3$ м:

$$y_{\max} = y_{II}(x=3) = 5(27-1)/(EI) - 120 \cdot 3/(EI) = -230/(EI).$$

Для принятого по расчету двутавра № 22 выписываем $I = 2550 \text{ см}^4$. В этом случае условие жесткости (4.5.1) принимает вид

$$\frac{y_{\max}}{l} = \frac{230}{2,06 \cdot 10^5 \cdot 10^3 \cdot 2550 \cdot 10^{-8} \cdot 6} = \frac{1}{140} > \frac{1}{400}.$$

Таким образом, главная балка междуэтажного перекрытия из двутавра № 22 будет непригодна к нормальной эксплуатации, вследствие появления недопустимо больших прогибов.

Проведем расчет на жесткость. Формулу (4.5.1) представим в виде

$$\frac{230}{EI} = \frac{1}{400}, \quad \text{откуда} \quad I = \frac{230 \cdot 400 \cdot 10^8}{E \cdot 6} = 7450 \text{ см}^4,$$

где принято $E = 2,06 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2,06 \cdot 10^8 \text{ кН/м}^2$.

Окончательно принимаем из условия проверки жесткости балки двутавр № 33 ($I_z = 9840 \text{ см}^4$, $W_z = 597 \text{ см}^3$). Максимальное нормальное напряжение в этом случае будет

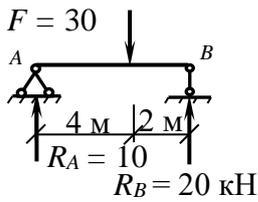


Рис. 4.5.1

$$\sigma_{x,\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{60 \cdot 10^{-3}}{597 \cdot 10^{-6}} = 100 \text{ МПа} < 240 \text{ МПа}.$$

14-Совместное действие изгиба и кручения

Для выявления опасного сечения при совместном действии изгиба и кручения строятся эпюры крутящих и изгибающих моментов по правилам глав 3 и 4. Вопрос о прочности стержня в этом случае решается с помощью тех или иных критериев прочности. Условия прочности имеют вид:

по критерию наибольших нормальных напряжений:

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{\sigma_{\text{И}}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{\text{И}}^2 + 4\tau_{\text{К}}^2} \leq R_{\text{adm}};$$

по критерию наибольших относительных деформаций:

$$\sigma_{\text{экв}} = (1-\nu) \frac{\sigma_{\text{И}}}{2} + \frac{(1+\nu)}{2} \sqrt{\sigma_{\text{И}}^2 + 4\tau_{\text{К}}^2} \leq R_{\text{adm}};$$

по критерию наибольших касательных напряжений:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_{\text{И}}^2 + 4\tau_{\text{К}}^2} \leq R_{\text{adm}};$$

по критерию удельной потенциальной энергии формоизменения:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_{\text{И}}^2 + 3\tau_{\text{К}}^2} \leq R_{\text{adm}}.$$

На основе приведенных соотношений могут быть выведены формулы для расчета, например, диаметров валов круглого сечения. Так, формулы для расчетных диаметров имеют вид:

по критерию наибольших касательных напряжений:

$$d = \sqrt[3]{\frac{10\sqrt{M^2 + T^2}}{R_{\text{adm}}}}; \quad (5.3.1)$$

по критерию удельной потенциальной энергии формоизменения:

$$d = \sqrt[3]{\frac{10\sqrt{M^2 + 0,75T^2}}{R_{\text{adm}}}}. \quad (5.3.2)$$

Задача 5.3.1. Рассчитать радиус круглого цилиндрического вала с прямой осью, несущего два шкива, весом каждый по 1 кН и с одинаковыми диаметрами $D = 0,5$ м. Длина вала $l = 0,5$ м (рис. 5.3.1). Натяжение в ведущих ремнях $P_1 = 0,8$ кН, в ведомых $P_2 = 0,2$ кН.

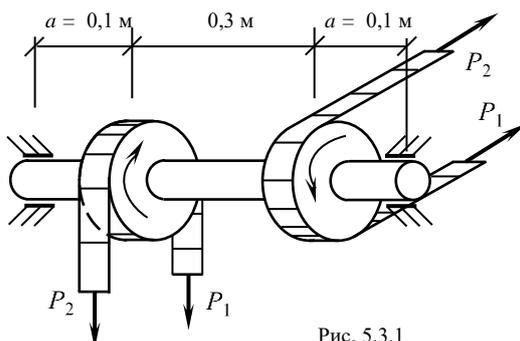


Рис. 5.3.1

Ремни левого шкива расположены вертикально, правого – горизонтально, $R_{\text{adm}} = 65$ МПа. Собственным весом вала пренебречь. Использовать критерии прочности наибольших касательных напряжений и удельной потенциальной энергии формоизменения.

Решение. Определяем величину внешних усилий (моментов пар сил и сосредоточенных сил), передаваемых на вал со стороны шкивов. Величина внешних скручивающих моментов M_I и M_{II} определится разностью натяжений в ремнях:

$$M_I = 800 \cdot 0,25 - 200 \cdot 0,25 = 150 \text{ Н}\cdot\text{м}; \quad M_{II} = 200 \cdot 0,25 - 800 \cdot 0,25 = -150 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Кроме кручения вал испытывает изгиб в вертикальной плоскости от веса шкивов $G_1 = G_2 = 1 \text{ кН}$ и от суммарной силы натяжения в ремнях левого шкива $P_I = 0,8 + 0,2 = 1 \text{ кН}$, а также изгиб в горизонтальной плоскости от суммарной силы натяжения в ремнях правого шкива $P_{II} = 0,8 + 0,2 = 1 \text{ кН}$. Схема

загрузки вала в вертикальной и горизонтальной плоскостях, а также эпюры крутящего момента T и изгибающих моментов M_g и M_z показаны на рис. 5.3.2. Самым напряженным является сечение, где расположен левый шкив и в котором

$$T = 150 \text{ Н}\cdot\text{м}, \quad M_g = 180 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$M_z = 20 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Для расчета диаметра вала воспользуемся формулами (5.3.1) и (5.3.2), имея в виду, что в них

$$M = \sqrt{M_g^2 + M_z^2}. \text{ В результате получим}$$

по критерию наибольших касательных напряжений:

$$d = \sqrt[3]{\frac{10\sqrt{180^2 + 20^2 + 150^2}}{65 \cdot 10^6}} = 0,0342 \text{ м} = 3,42 \text{ см};$$

по критерию удельной потенциальной энергии формоизменения:

$$d = \sqrt[3]{\frac{10\sqrt{180^2 + 20^2 + 0,75 \cdot 150^2}}{65 \cdot 10^6}} = 0,0324 \text{ м} = 3,24 \text{ см}.$$

Вал, рассчитанный по критерию удельной потенциальной энергии формоизменения, более экономичен.

Задача 5.3.2. Схема нагружения вала рулевой машины представлена на рис. 5.3.3. Требуется подобрать диаметр вала, используя критерий наибольших касательных напряжений (d_I) и критерий удельной потенциальной энергии формоизменения (d_{II}), и считая $R_{adm} = 30 \text{ МПа}$.

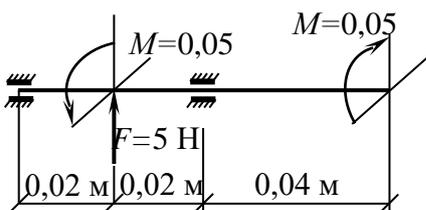


Рис. 5.3.3

Ответ: $d_I = 0,266 \text{ см}; \quad d_{II} = 0,26 \text{ см}.$

Глоссарий

наука об инженерных методах расчета на прочность, жесткость и устойчивость элементов машин и сооружений. Ее часто кратко называют — *сопромат*

Прочность

способность конструкции, ее частей и деталей выдерживать определенную нагрузку, *не разрушаясь* и без проявления *остаточных деформаций, нарушающих работоспособность конструкции*.

Жесткость

способность конструкции и ее элементов противостоять внешним нагрузкам в отношении деформаций (изменение формы и размеров). При заданных нагрузках деформации не должны превышать определенных величин, устанавливаемых в соответствии с требованиями к конструкции.

Устойчивость

способность конструкции и ее элементов сохранять определенную начальную форму упругого равновесия.

Упругие деформации

деформации тела, которые исчезают после снятия внешних сил.

Пластические (остаточные) деформации

деформации тела, которые не исчезают после снятия воздействия внешних сил.

Напряжение

это мера внутренних сил, возникающих в деформируемом теле под влиянием внешних воздействий. Напряжение в точке тела измеряется отношением внутренней силы, возникающей в теле при деформации, к площади малого элемента сечения, перпендикулярного к этой силе. Единицы измерения: Па=Н/м², МПа = 10⁶ Н/м², кгс/см²=98 066 Па ≈ 10⁵ Па, тс/м²

Эпюра

это схематический чертёж или график. Эпюра показывает распределение величины (усилия, напряжения, деформации) при нагрузке на конструкцию. Происходит это слово от французского *epure* — *чертеж*.

Изгиб

англ. bending, flexure) вид деформации, при котором происходит искривление осей прямых брусьев (балок) или изменение кривизны осей кривых брусьев. Изгиб связан с возникновением в поперечных сечениях бруса изгибающих моментов.

- Брус — тело, у которого один из размеров много больше двух других (длинное, тонкое, в общем случае криволинейное тело). Геометрически брус может быть образован путем перемещения плоской фигуры вдоль некоторой кривой. Брус может иметь как постоянное, так и переменное поперечное сечение.
- Стержень — прямолинейный брус.
- Балка — стержень, работающий на изгиб.

- Оболочка— тело, у которого один из размеров во много раз меньше двух других измерений.
- Пластина— частный случай оболочки, у которой срединная поверхность является плоскостью.
- Массивное тело – тело, у которого все три измерения имеют один порядок.

8

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA‘LIM VAZIRLIGI

TOSHKENT TO‘QIMACHILIK VA YENGIL SANOAT INSTITUTI



«KELISHILDI»

Oliy va o‘rta maxsus ta‘lim vazirligi

(OTM rektori)

2020 yil 8 « 27 » 10

2020 yil « 7 » 10

Ro‘yxatga olindi: № BD 5320300-2.02

2020 yil « 30 » 10

TEXNIK MEXANIKA

FAN DASTURI

- Bilim sohasi:** 300 000– Ishlab chiqarish texnik soha
- Ta‘lim sohasi:** 320 000 – Ishlab chiqarish texnologiyasi
- Talim yo‘nalishi:** 5320300–Texnologik mashinalar va jihozlar
(to‘qimachilik, engil va paxta sanoati)

Fan/modul kodi TMM30014	O'quv yili 2021-2022	Semestr 3,4	ECTS-kreditlar 14	
Fan/modul turi Majburiy	Ta'lim tili O'zbek, rus		Haftadagi dars soatlari 4,4	
1.	Fanning nomi	Auditoriya mashg'ulotlari (soat)	Mustaqil ta'lim (soat)	Jami yuklama (soat)
	Texnik mexanika	120	300	420
2.	<p>I.Fanning mazmuni:</p> <p>Fanning o'qitilishidan maqsad – talabalarga amaliy mexanika fani mashinasozlikni va qurilish sanoatini rivojlanishida muhim o'rin tutib, materiallar qarshiligi va mashina detallari faniga asoslanib, jismlarni kuchlar ta'siriga chidamliligini aniqlash, usullarini o'rgatish va amaliy ko'nikmalar hosil qilishdir.</p> <p>Fanning vazifasi – talabani ushbu fan bo'yicha olgan nazariy va amaliy bilimlari asosida, materiallarning xossalarini yaxshi bilgan xolda ularga ta'sir etayotgan kuch va momentlarni aniqlash hamda mashina detallarini mustahkamligi va ishga layoqatligini aniqlash masalalari bo'yicha zaruriy bilim va ko'nikmalar hosil qilishdir.</p> <p>II. Asosiy nazariy qism (ma'ruza mashg'ulotlari):</p> <p>II.I. Fan tarkibiga quyidagi mavzular kiradi</p> <p>1-mavzu. Materiallar qarshiligi fani haqida asosiy tushunchalar</p> <p>Qurilmalarning qismlarini hisoblash chizmasi. Tashqi kuchlarni tasniflash. Ichki kuchlar. Kesish usuli. Kuchlanishlar. Asosiy gipoteza va farazlar. Deformatsiyalar va ko'chish. Ichki kuch omillari.</p> <p>2-mavzu. Cho'zilish va siqilish</p> <p>Bruslarni (g'o'lalarni) ko'ndalang kesimida hosil bo'ladigan ichki kuchlar va kuchlanishlar. Cho'zilish va siqilishda bo'ylama va ko'ndalang deformatsiya. Guk qonuni. Elastiklik moduli. Bikirlik.</p> <p>3-mavzu. Cho'zilish va siqilish</p> <p>Bo'ylama va ko'ndalang nisbiy deformatsiya. Puasson koeffitsiyenti. Cho'zilgan-siqilgan sterjenlarni mustahkamlikka hisoblash. Mustahkamlik sharti. Ruxsat etilgan normal kuchlanish. Cho'zilish(siqilishdagi)</p>			

deformatsiyani potensial energiyasi. Cho'zilish va siqilishda statik aniqlama sistemalari hisobi.

4-mavzu. Zo'riqqan holat diagrammasi

Chiziqli zo'riqish holatida qiya yuzalar bo'yicha kuchlanishlar. Tekis kuchlanganlik holatida qiya tekisliklar bo'yicha kuchlanishlar. Yupqa devorli silindrsimon qozonni hisoblash. Asosiy yuzachalarning vaziyatini va asosiy kuchlanishni aniqlash. Hajmiy zo'riqish holatidagi qiya yuzachalar bo'yicha kuchlanishlar. Hajmiy va tekis zo'riqish holatidagi deformatsiyalar va kuchlanishlar orasidagi bog'liqlik. Hajmiy zo'riqish holatida hajmning o'zgarishi va solishtirma potensial energiya.

5-mavzu. Mustahkamlik nazariyalari

Eng katta normal kuchlanishlar nazariyasi (birinchi mustahkamlik nazariyasi). Eng katta chiziqli deformatsiyalar nazariyasi (ikkinchi mustahkamlik nazariyasi). Eng katta urinma kuchlanishlar nazariyasi (uchinchi mustahkamlik nazariyasi). Shakl o'zgarish energiyasining nazariyasi (to'rtinchi mustahkamlik nazariyasi). Chegaraviy zo'riqqanlik holati nazariyasi (beshinchi mustahkamlik nazariyasi).

6-mavzu. Yassi kesimlarning geometrik xarakteristikalar

Yassi shakllarning statik momentlari. Yassi shakllarning inersiya momentlari. O'qlar parallel ko'chirilganda inersiya momentlarining o'zgarishi.

7-mavzu. Oddiy kesimlarning geometrik xarakteristikalar

Oddiy shakllarning inersiya momentlari. O'qlarni burganda inersiya momentlarining o'zgarishi. Asosiy o'qlar va asosiy inersiya momentlari. Oddiy shakllarning qarshilik momentlari. Inersiya ellipsi.

8-mavzu. Sof siljish

Kuchlanishlar va deformatsiya. Sof siljishdagi Guk qonuni. Siljishdagi hisoblash tenglamalari. Siljishdagi potensial energiya. Siljish va ezilishga oid amaliy hisoblar.

9-mavzu. Buralish

Dumaloq g'ochaning buralishidagi kuchlanishlarni aniqlash. Buralishdagi mustahkamlik sharti. Buralishda g'ochaning deformatsiyalanishi. Burovchi momentlarni hisoblash.

10-mavzu. Egilish

Umumiy tushunchalar. Eguvchi moment va kesuvchi kuch. Sof egilish va normal kuchlanishni aniqlash. To'sinlarning normal kuchlanish bo'yicha mustahkamligini tekshirish. Ko'ndalang egilishdagi urinma kuchlanishni aniqlash.

11-mavzu. Tekis egilishda kuchlanishlar (Egilish)

Tayanchlar va to'sinlarning tayanch reaksiyalari. Ko'ndalang kuch va eguvchi moment. To'sinlarning mustahkamligini urinma kuchlanishga nisbatan tekshirish. Bosh kuchlanishlar. To'sinlarning mustahkamligini bosh kuchlanishlar bo'yicha tekshirish. Egilishdagi potensial energiya. Taqsimlangan yuk jadalligi, ko'ndalang kuch va eguvchi moment orasidagi differensial bog'liqliklar.

12-mavzu. Tekis egilishda elastik ko'chishlar (Egilishdagi deformatsiya)

Elastik chiziqning differensial tenglamasi. To'sin elastik chizig'ining universal tenglam. To'sinlarning salqiligi va kesimlarning og'ish burchagi. Egilgan o'qning taqribiy differensial tenglamasi.

13-mavzu. Statik aniqlanmaydigan to'sinlar

Statik aniqmas to'sinlar. Universal tenglama yordamida statik aniqlanmaslikni yechish. Mor usulida statik aniqlanmaslikni yechish. Ko'p tayanchli balkalarni hisoblash

14-mavzu. Siqilgan sterjenlarning ustuvorligi

Siqilgan sterjenlarning ustuvorligi tog'risida umumiy mulohazalar. Kritik kuchni aniqlashning Eyler formulasi. Sterjen uchlarini mahkamlash usularining kritik kuchga ta'siri. Kritik kuchlanish va egiluvchanlik.

15-mavzu. Mashina detallari fani haqida asosiy tushunchalar

Mashina detallarining ahamiyati. detallarning ishga layoqatliligi. Ruxsat etilgan kuchlanish. Xavfsizlik koeffisienti. Mashinasozlikda ishlatiladigan materiallar.

16-mavzu. Mexanik uzatmalar. Tishli uzatmalarni kinematikasi va geometrik o'lchamlari

Mashinasozlikda ishlatiladigan uzatmalar. Mexanik uzatmalar. Umumiy

tushunchalar. Turlari. Asosiy xarakteristikasi. Tishli g'ildiraklar geometriyasi va elementlari. Tishli uzatmalarni kinematikasi.

17-mavzu. Ilashish va ishqalanish yordamida xarakatni uzatuvchi uzatmalar

Ilashish hisobiga ishlaydigan uzatmalar (tishli,cher-vyakli,zanjirli). Ishqalanish hisobiga ishlaydigan uzatmalar (friksion,tasma, vintli). Shartli belgilari.

18-mavzu. To'g'ri, qiya va shevron tishli silindrsimon g'ildiraklarni ilashishida hosil bo'ladigan kuchlar

Ilashishda xosil bo'lgan kuchlar. Tishli g'ildiraklar uchun ishlatiladigan aniqlik darajasi. Yuklanish koeffitsienti.

19-mavzu. Silindrsimon tishli uzatmalar. Kontakt va eguvchi kuchlanish bo'yicha mustaxkamligini tekshirish

To'g'ri, qiya va shevron tishli silindrsimon uzatmalar To'g'ri tishli silindrsimon g'ildiraklarni kontakt kuchlanish bo'yicha hisoblash. Qiya tishli silindrsimon g'ildirakli uzatmalarni kontak kuchlanish bo'yicha hisoblash.

20-mavzu. Konussimon tishli uzatmalar

To'g'ri, qiya va aylanasimon tishli konussimon uzatmalar, islatilish sohalari. Konussimon g'ildirakli tishlarni geometrik o'lchamlari. Konussimon uzatmalar kinematikasi. Konussimon uzatmalarni ilashishida hosil bo'ladigan kuchlar. Konussimon uzatmalarni kontakt kuchlanish bo'yicha mustahkamligini tekshirish. Ilashish modulini aniqlash.

21-mavzu. Chervyakli uzatmalar

Umumiy tushunchalar. Xarakteristikasi, qo'llanish sohalari. Turlari. Kinematikasi. Chervyak va chervyakli g'ildiraklarni geometrik o'lchamlari. Arximed, evolventa, konvolyuta chervyaklari. Chervyakli uzatma ilashishda hosil bo'ladigan kuchlar. Chervyakli uzatmalar uchun ishlatiladigan materiallar. Kontakt va eguvchi kuchlanish bo'yicha mustahkamligini tekshirish.

22-mavzu. Tasmali uzatmalar

Umumiy ma'lumotlar. Xarakteristikasi, qo'llanilish sohalari. Turlari. Tasmali uzatmalar mexanikasi. Uzatmalarning giometirik o'lchamlari. Tasmalarni tayyorlash uchun ishlatiladigan materiallar. Tasmali uzatmalarni

taraflash usullari. Tasma tarmoqdagi kuch va ular o'rtasidagi bog'lanishlar.

23-mavzu. Friksion uzatmalar

Friksion uzatmalar turlari. Ishlatilishi. Afzallik va kamchiliklari. Variatorlar va ularning turlari. Uzatmaning mexanikasi. Uzatmalarning ishlash layoqatliligi va hisobi.

24-mavzu. Zanjirli uzatmalar

Zanjirli uzatmalar turlari. Ishlatilishi. Afzallik va kamchiliklari. Uzatmaning mexanikasi. Uzatmaning asosiy o'lchamlari. Zanjir uzatmani hisoblash. Uzatmalarni moylash.

25-mavzu. Vallar va o'qlar

Tuzilishi. Materiali. Val va o'qlar vazifasi. Tayyorlash uchun ishlatiladigan materiallar. Val hisobi.

26-mavzu. Sirpanuvchi podshipniklar

Afzallik va kamchiliklari. Sirpanish podshipniklarini tanlash. Asosiy xarakteristikalar. O'ziga xos xususiyatlari. Hisobi.

27-mavzu. Dumalash podshipniklari

Turlari va ularning xarakteristikalar. Afzallik va kamchiliklari. Shartli belgilari. Podshipniklar tayyorash uchun materiallar. Podshipnik ishlash muddatini hisoblash asoslari.

28-mavzu. Muftalar.

Turlari va muftalarni tanlash. Ishlatilishi. Doimiy biriktiriladigan muftalar. Ularda ishlatiladigan rezinalarning turlari.

29-mavzu. Ajraluvchi birikmalar.

Turlari. Rezbali birikmalar. Shponkali, shlitsali va profilli (shponkasiz) birikmalar.

30-mavzu. Ajralmas birikmalar.

Turlari. Payvand birikmalar. Parchin mixli birikmalar.

III. Amaliy mashg'ulotlar bo'yicha ko'rsatma va tavsiyalar:

Amaliy mashg'ulotlar uchun quyidagi mavzular tavsiya etiladi:

(Materiallar qarshiligi qismidan)

1. Ichki zo'riqishlarni aniqlash hamda ularning epyuralarini qurishga doir masalalar yechish.
2. Cho'zilish-siqilishdagi statik aniq masalalarni hisobi va ularga doir masalalar yechish.
3. Cho'zilish-siqilishdagi statik aniqmas masalalarni hisobi va ularga doir masalalar yechish.
4. Siljishni hisoblashga doir masalalar yechish.
5. Chizikli kuchlanish holatini hisoblashga doir masalalar yechish.
6. Tekis kuchlanish holatini hisoblashga doir masalalar yechish.
7. Hajmiy kuchlanish holatini hisoblashga doir masalalar yechish.
8. Tekis kesim yuzalarining geometrik xarakteristikalarini hisoblash va ularga doir masalalar yechish.
9. Oddiy kesim yuzalarining geometrik xarakteristikalarini hisoblash va ularga doir masalalar yechish.
10. Siljishni hisoblashga doir masalalar yechish.
11. Buralish. Ichki kuchlarni, kuchlanishlarni topish va mustahkamlikka hisoblash va ularga doir masalalar yechish.
12. Egilish. Ichki kuchlarni aniqlash va ularni epyuralarini chizish. Tashqi kuchlar ta'sirida to'sinning ko'ndalang kuch va eguvchi moment ta'sirida egilishini hisoblash.
13. To'sinlarning tayanch reaksiya kuchlarini aniqlash va to'sinlarning statik aniq masalalarni hisoblashga doir masalalar yechish.
14. To'sinlarning statik aniqmas masalalarni hisoblashga doir masalalar yechish.

(Mashina detallari qismidan)

15. Yuritma uchun elektrodvigatel tanlash va kinematik hisobi.
16. Ochiq silindrsimon uzatmalarni hisoblash va uzatmani loyihalash.
17. Yopiq silindrsimon uzatmalarni hisoblash va uzatmani loyihalash.
18. Ochiq konussimon uzatmalarni hisoblash va uzatmani loyihalash.
19. Yopiq konussimon uzaytmalarni hisoblash va uzatmani loyihalash.
20. Ochiq chervyakli uzaytmalarni hisoblash va uzatmani loyihalash.
21. Yopiq chervyakli uzaytmalarni hisoblash va uzatmani loyihalash.
22. Ponasimon tasmali uzaytmalarni hisoblash va uzatmani loyihalash.
23. Yassi tasmali uzaytmalarni hisoblash va uzatmani loyihalash.
24. Rolikli, tishli zanjirli uzatmalarni hisobi.
25. Vallarni taxminiy hisobi.
26. Vallarni aniqlangan hisobi.
27. Sirpanish podshipniklarni hisoblash va tanlash.
28. Dumalash podshipniklarni hisoblash va tanlash.

29. Muftalarni hisoblash va tanlash.

30. Birikmalarni hisoblash.

Amaliy mashg'ulotlarni tashkil etish bo'yicha kafedra professor-o'qituvchilari tomonidan ko'rsatma va tavsiyalar ishlab chiqiladi. Unda talabalar asosiy mavzular bo'yicha olgan bilim va ko'nikmalarini amaliy misollar orqali yanada boyitadilar. Shuningdek, darslik va o'quv qo'llanmalar asosida talabalar bilimlarini mustahkamlashga erishish, tarqatma materiallardan foydalanish orqali talabalar bilimini oshirish nazarda tutilgan. Mashg'ulotlar faol va interaktiv usullar yordamida o'tilishi, mos ravishda munosib pedagogik va axborot texnologiyalar qo'llanishi maqsadga muvofiq.

IV. Laboratoriya mashg'ulotlar bo'yicha ko'rsatma va tavsiyalar

Laboratoriya ishlarini uchun tavsiya etiladigan mavzular:

(Texnik mexanikadan)

1. Yuritmaning kinematik sxemasini tuzish va ularning tarkibiy qismlarini aniqlash.
2. Tishli g'ildiraklarning o'lchamlarini aniqlash va ishchi chizmasini chizish.
3. Bir pog'onali tsilindrik reduktorni tuzilishini o'rganish va asosiy parametrlarini aniqlash.
4. Uzatmalar etakchi va etaklanuvchi detallarini o'rganish (Oddiy uzatmalar).
5. Uzatmalar etakchi va etaklanuvchi detallarini o'rganish (Pog'onali uzatmalar).
6. Sirpanish podshipniklarini va dumalash podshipniklarini o'rganish.
7. Uzatma, val va reduktorlarni muvofiqlashtirish.
8. Silindrik tishli uzatma va chervyakli uzatmalarni mexanik foydali ish koeffitsientini (FIK) aniqlash.

Laboratoriya ishlari laboratoriya jixozlari bilan jixozlangan bir auditoriyada bir akademik guruxga bir o'qituvchi tomonidan o'tkazilishi lozim. Mashg'ulotlar faol va interaktiv usullar yordamida o'tkazilishi, mos ravishda munosib pedagogik va axborot texnologiyalar qo'llanilishi maqsadga muvofiq.

V. Mustaqil ta'lim va mustaqil ishlar:

Mustaqil ta'lim uchun tavsiya etiladigan mavzular:

(Materiallar qarshiligi qismidan)

1. Ichki kuchlar va ularni kesish usulida aniqlash.
2. Cho'zilish-siqilishga oid masalalar yechishda xususiy og'irlikni inobatga olish.
3. Harorat va montaj (yig'ish) kuchlanishlar.
4. Sterjenlarni mustahkamlikka hisoblash.
5. Chiziqli, tekis va hajmiy kuchlanish holatlari.
6. Og'ma yuzalardagi kuchlanishlar. Umumlashgan Guk qonuni.
7. Cho'zilish-siqilishda statik aniqmas masalalar va ularni yechish usullari.
8. Tekis shakllarning asosiy geometrik tavsiflari haqida tushunchalar.
9. Oddiy shakllarning inersiya momentlari va qarshilik momentlarini aniqlash..
10. O'qlar parallel ko'chganda va ma'lum burchakka burilganda inersiya momentlarining o'zgarishi
11. Sof siljish. Sof siljishda Guk qonuni.
12. Elastiklik modullari va Puasson koeffitsiyenti orasidagi munosabat.
13. Buralishda Guk qonuni. Doiraviy kesimli vallarni mustahkamlik va bikrlikka hisoblash.
14. Tekis egilish. Eguvchi moment, kesuvchi kuch va yoyilgan kuch intensivligi orasidagi differensial bog'lanishlar hamda ular asosida ichki zo'riqish epyuralarini tekshirish.
15. Tekis egilishda normal va urunma kuchlanishlarni aniqlash.
16. To'sinlarni normal kuchlanish bo'yicha mustahkamlikka tekshirish.
17. Tekis egilishdagi elastik ko'chishlar – salqilik va aylanish burchaklari haqida umumiy mulohazalar.
18. Mor integrali yordamida to'sinlarda paydo bo'luvchi elastik ko'chishlarni aniqlash.
19. Statik aniqmas to'sinlarni hisoblash.
20. Dinamik (zarbiy) va o'zgaruvchan yuklarning konstruksiya elementlariga ta'siri.

(Mashina detallari qismidan)

21. Texnologik mashina yuritmalarni kinematik xisoblari, geometrik o'lchamlari.
22. Yuritmani umumiy uzatish sonini aniqlash hamda uzatmalarga taqsimlash.
23. Silindrsimon tishli g'ildiraklarning eskiz chizmasi.
24. Konussimon tishli g'ildiraklarni geometrik o'lchamlarini aniqlash.
25. Chervyak va chervyakli g'ildirakning geometrik o'lchamlarini aniqlash.
26. Tasmali uzatmalarning xisobi

	<p>- mashina va inshootlar hamda ularning qismlarini mustahkamlikka hisoblash orqali materiallarni o'lchamlarini aniqlashni;</p> <p>- cho'zilish va siqilishda materiallarning mexanik xossalarini;</p> <p>- mashinasozlik materiallariga qo'yilgan talablarni;</p> <p>- mexanik uzatmalarni loyihalash uslublarini <i>bilishi va ulardan foydalana olishi</i>;</p> <p>- materiallarning mustahkamligi, bikrligi va ustuvorligini hisobga olgan holda mashina va qurilmalardan foydalanish;</p> <p>- mashina va detallarning turli parametrlarini xisoblash, loyixalash va ishchanlik qobiliyatini boxolash;</p> <p>mashina detallari va uzellarini zamonaviy loyihalash vositalardan foydalanish <i>ko'nikmalariga ega bo'lishi kerak</i>.</p> <p>- mashina va inshootlar qurishda (mustahkamligi, bikrligi va ustuvorligini hisoblashda) amaliy mexanika fanining zaruriy hisoblashlarini amalga oshirish va to'g'ri tanlash;</p> <p>- mashina detallarning turli parametrlarini hisoblash, loyixalash va ishchanlik qobiliyatini baholagan holda unga o'z fikrini bildirib olishi;</p> <p>- mashina detallari va uzellarini zamonaviy loyihalanganligini hisobga olib ulardan foydalanish <i>malakalariga ega bo'lishi kerak</i></p>
4.	<p>VIII. Ta'lim texnologiyalari va metodlari:</p> <ul style="list-style-type: none"> • ma'ruzalar; • interfaol keys-stadilar; • seminarlar (mantiqiy fikrlash, tezkor savol-javoblar); • guruhlarda ishlash; • taqdimotlar qilish; • individual loyihalar; • jamoa bo'lib ishlash va himoya qilish uchun loyihalar.
5.	<p>IX. Kreditlarni olish uchun talablar:</p> <p>Fanga oid nazariy va uslubiy tushunchalarni to'la o'zlashtirish, tahlil natijalarini to'g'ri aks ettira olish, o'rganilayotgan jarayonlar haqida mustaqil mushohada yuritish va joriy, oraliq nazorat shakllarida berilgan vazifa va topshiriqlarni bajarish, yakuniy nazorat bo'yicha yozma ish yozish.</p>
6.	<p>Asosiy adabiyotlar:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. I.G.Shin, Z.A.Shodmonqulov, K.I.Axmedov va b. Texnik mexanika. Darslik. "Adabiyot uchunlari" nashriyoti., Toshkent-2018y. -647 bet. 2. Nabiyev A.N. "Materiallar qarshiligi", darslik, "Yangi asr avlodi" nashriyoti, 2-qayta nashr. Toshkent. 2008, 380 bet. 3. Qoraboyev B.K., Leksashev Yu. "Materiallar qarshiligi", darslik, "Fan va texnologiya", Toshkent, 2007, 192 bet.

	<p>4. Hobitov B.A., Tuychiev N.J. “Materiallar qarshiligi”, darslik, Toshkent, «Uzbekiston faylasuflari milliy jamiyati», 2008, -400 bet</p> <p>Qo’shimcha adabiyotlar:</p> <p>5. 2017-2021 yillarda O‘zbekiston Respublikasini rivojlantirishning beshta ustuvor yo‘nalishi bo‘yicha Harakatlar strategiyasi. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevraldagi PF-4947 sonli Farmoni.</p> <p>6. Ergashov M. “Materiallar qarshiligi hisoblash – loyihalash ishlari”, o‘quv qo‘llanma, Toshkent, « Uzbekiston », 2003, – 193 bet.</p> <p>7. Xasanov S.M. , Nabiyeu A. N. “Materiallar qarshiligi masalalar yechish”, o‘quv qo‘llanma, Toshkent, « Uzbekiston », 2006, – 288 bet.</p> <p>8. Tojiboev R.N., Juraev A.J. «Mashina detallari», darslik, T.: O‘qituvchi, 2002 y. 268 bet</p> <p>9. М.Н.Иванов. Детали машин. М.: Высш. школа, 2000. - 383 с.</p> <p>10. П.Ф.Дунаев. О.П.Леликов. Конструирование узлов и деталей машин. М., 2008. -496 с.</p> <p>11. Дремова Н.В., Эшоноу М.С. Сопротивление материалов. Расчет статически неопределимых балок при изгибе с применением математической программы «Mathcad» ТИТЛП, 2014г.</p> <p>12. Дремова Н.В. Сопротивление материалов. Методическое указание к решению тестовых задач. ТИТЛП, 2018г.</p> <p>13. Дремова Н.В. Практикум по сопротивлению материалов. Методическое пособие к решению практических задач с применением программного продукта «Mathcad» Ташкент, ТИТЛП, 2019. 261 с.</p> <p>Axborot manbalai</p> <p>14. http://ziyonet.uz – (ta’lim portali)</p> <p>15. http://titli.uz – (Toshkent to‘qimachilik va engil sanoat instituti sayti)</p> <p>16. www.lex.uz – (O‘zbekiston Respublikasi qonun xujjatlari ma’lumotlari milliy bazasi)</p> <p>17. www.gov.uz – (O‘zbekiston Respublikasi xukumat portali)</p> <p>18. http://k-a-t\detali mashin\5-dm\index.shtml</p>
7.	<p>Fan dasturi Oliy va o‘rta maxsus, professional ta’limi yo‘nalishlari boyicha O‘quv-uslubiy birlashmalar faoliyatini Muvofiqlashtiruvchi Kengashning 2020 yil “30” 10 dagi “6”-sonli bayonnomasi bilan maqullangan.</p> <p>O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligining 2020 yil “4” 12 dagi “648”-sonli buyrug‘i bilan ma’qullangan fan dasturlarini tayanch oliy ta’lim muassasi tomonidan tasdiqlashga rozilik</p>

O'zbekiston Respublikasi oliy va o'rta ta'lim vazirligi
Namangan muxandislik-texnologiya instituti

“Tasdiqlayman”
O'quv ishlari bo'yicha prorektor
_____ U.X.Melibayev
“ _____ ” _____ 2021 yil

TEXNIK MEXANIKA

FANINING ISHCHI O'QUV DASTURI

Bilim sohasi:	300000- Ishlab chiqarish-texnik soha
Ta'lim sohasi: texnologiyalari	320000-Ishlab chiqarish
Ta'lim yo'nalishi: jixozlar	5320300-Texnologik mashilar va (to'qimachilik, yengil va paxta sanoati)

Umumiy o'quv soati -420 soat

Shu jumladan:

Ma'ruza -60 soat (3 semestr -30 soat, 4-semestr -30 soat)

Amaliy mashg'ulot -45 soat (3 semestr -30 soat, 4-semestr -15 soat)

Tajriba mashg'ulotlat -15 soat (4-semestr -15 soat)

Mustaqil ta'lim soati -300 (3 semestr -200 soat, 4 semestr -100 soat)

Namangan -2021 y.

Fan dasturi O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligining 2020 yil "7" dekabrda № 648 –sonli buyrug'i bilan tasdiqlangan "Texnik mexanika" fani dasturi asosida tayyorlangan.

Fanning ishchi o'quv dasturi Namangan-muhandislik texnologiya instituti Kengashining 2021-yil "___" avgustdagi № ___ -sonli bayoni bilan tasdiqlangan

Tuzuvchilar

- X.Isaxanov -NamMTI, "Umumtexnika fanlari" kafedra dotsenti , texnika fanlari nomzodi.
Z.Abduqahhorov -NamMTI, "Umumtexnika fanlari" kafedra dotsenti, texnika fanlari nomzodi.
Sh.Imomqulov -NamMTI, "Umumtexnika fanlari" kafedra assistenti.
M.Azambayev -NamMTI, "Umumtexnika fanlari" kafedra assistenti.

Taqrizchilar

- A.Burxonov -NamMTI, "TMJ" kafedra dotsenti, texnika fanlari nomzodi.

Fanning ishchi o'quv dasturi "Umumtexnika fanlari" kafedrasining 2021 yil "___" dagi "___"-sonli yig'ilishida muhokamadan o'tgan va fakultet kengashida muhokama qilish uchun tavsiya etilgan.

Kafedra mudiri:

B.Aliyev

Fanning ishchi o'quv dasturi "Muhandislik texnologiya" fakulteti kengashida muhokamadan o'tgan va institut kengashida tasdiqlash uchun tavsiya etilgan ("___" _____ dagi "___"-sonli bayonnoma).

Fakultet dekani

A.Obidov

1. O'quv fani o'qitilishi bo'yicha uslubiy ko'rsatmalar.

“Texnik mexanika” fani talabalarni nazariy bilimlar, amaliy ko'nikmalalar, mexanik hodisa va jarayonlarga uslubiy yondashuv hamda ilmiy dunyo qarashini shakllantirish vazifalarini bajaradi.

Fan bo'yicha talabalarning bilim, ko'nikma va malakalariga quyidagi talablar qo'yiladi. **Talaba:**

- mashina va mexanizmlarning turlari;
- tishli, zanjirli va tasmali uzatmalar;
- xozirgi zamon mashinalarini loyihalashda yangi yo'nalishlar;
- mashinalarning detallari va uzellari, birikmalari, uzatmalari, vallari, podshipniklari, muftalari **haqida tasavvurga ega bo'lishi**;
- mexanizmlarning kinematik sxemalarini;
- mexanizm tarkibidagi bo'g'in, kinematik juft va kinematik zanjirlar turlarini;
- mashinasozlik materiallariga qo'yilgan talablarni;
- mexanik uzatmalarni loyihalash uslublarini **bilishi va ulardan foydalana olishi**;
- kinematik tahlil qilish;
- mashina va detallarning turli parametrlarini xisoblash, loyixalash va ishchanlik qobiliyatini boxolash;

mashina detallari va uzellarini zamonaviy loyihalash vositalardan foydalanish **ko'nikmalariga ega bo'lishi kerak.**

Texnik mexanika fanining zaruriy hisoblashlarini amalga oshirish va to'g'ri tanlash;

- mashina mexanizmlari va mashina detallarning turli parametrlarini hisoblash, loyixalash va ishchanlik qobiliyatini baholagan holda unga o'z fikrini bildira olishi;
- mashina detallari va uzellarini zamonaviy loyihalanganligini hisobga olib ulardan foydalanish **malakalariga ega bo'lishi kerak**

Fanning mazmuni:

Fanning o'qitilishidan maqsad - talabalarga amaliy mexanika fani mashinasozlikni va qurilish sanoatini rivojlanishida muhim o'rin tutib, materiallar qarshiligi va mashina detallari faniga asoslanib, jismlarni kuchlar ta'siriga chidamliligini aniqlash, usullarini o'rgatish va amaliy ko'nikmalar hosil qilishdir.

Fanning vazifasi - talabani ushbu fan bo'yicha olgan nazariy va amaliy bilimlari asosida, materiallarning xossalari yaxshi bilgan xolda ularga ta'sir etayotgan kuch va momentlarni aniqlash hamda mashina detallarini mustahkamligi va ishga layoqatligini aniqlash masalalari bo'yicha zaruriy bilim va ko'nikmalar hosil qilishdir.

2. Ma'ruza mashg'ulotlari

1- jadval

No	Ma'ruzalar mavzulari	Dars soatlari hajmi
3-semestr		
1- modul.«Materiallar qarshiligi» umumiy asoslari		

1	Введение и основные понятия. Задачи курса сопротивление материалов.	2
2	Растяжение и сжатие .	2
3	Растяжение и сжатие.	2
4	Механические свойства материалов при растяжении и сжатии. Диаграммы напряженного состояние.	2
5	Теории прочности .	2
6	Геометрические характеристики поперечных сечений и вычисление главных моментов инерции плоских сечений.	2
7	Геометрические характеристики моментов инерции простых сечений.	2
8	Чистый сдвиг.	2
9	Кручение прямого стержня круглого поперечного сечения.	2
10	Изгиб.	2
11	Напряжения при плоском изгибе.	2
12	Перемещения при плоском изгибе.	2
13	Статически неопределимые балки.	2
14	Устойчивость сжатых стержней.	2
15	Устойчивость сжатых стержней.	2
	Jami	30

Jami: 30 soat Ma'ruza mashg'ulotlari multimedia qurilmalari bilan jihozlangan auditoriyada akademik guruhlar oqimi uchun o'tiladi.

3. Amaliy mashg'ulotlar

2- jadval

№	Amaliy mashg'ulotlar mavzular nomi	Dars soatlari hajmi
3-semestr		
1	Определение внутренних силовых факторов и построение их эпюры. Решение задачи.	2
2	Статические определимые задачи при растяжение и сжатие прямого стержня. Решение задачи.	2
3	Статические статически неопределимые задачи при растяжение и сжатие прямого стержня. Решение задачи.	2
4	Задачи на сдвиг. Решение задачи.	2
5	Линейное напряженное состояние. Решение задачи.	2
6	Плоское напряженное состояние. Решение задачи.	2
7	Объёмное напряженное состояние. Решение задачи.	2
8	Геометрические характеристики плоских сечений. Решение задачи.	2
9	Геометрические характеристики плоских простых сечений. Решение задачи.	2
10	Задачи на сдвиг. Решение задачи.	2

11	Кручение. Определение напряжений и углов закручивания, подбор сечений и вычисление допускаемого крутящего момента по прочности и жесткости. Решение задачи.	4
12	Изгиб прямого стержня. Классификация видов изгиба: чистый - поперечный, прямой - косой, плоский - пространственный. Решение задачи.	2
13	Определение опорных реакции статически определимые балки и построение их эпюры. Решение задачи.	2
14	Определение опорных реакции статически неопределимые балки и построение их эпюры. Решение задачи.	2
	Jami	30

Amaliy mashg'ulotlar multimedia qurilmalari bilan jihozlangan auditoriyada har bir akadem. guruhga alohida o'tiladi. Mashg'ulotlar faol va interfaol usullar yordamida o'tiladi, "Keys-stadi" texnologiyasi ishlatiladi, keyslar mazmuni o'qituvchi tomonidan belgilanadi. Ko'rgazmali materiallar va axborotlar multimedia qurilmalari yordamida uzatiladi.

4. Mustaqil ta'lim

3-jadval

№	Mustaqil ta'lim mavzulari	Dars soatlari hajmi
3-semestr		
1	Ichki kuchlar va ularni kesish usulida aniqlash.	10
2	Cho'zilish-siqilishga oid masalalar yechishda xususiy og'irlikni inobatga olish.	10
3	Harorat va montaj (yig'ish) kuchlanishlar.	10
4	Sterjenlarni mustahkamlikka hisoblash.	10
5	Chiziqli, tekis va hajmiy kuchlanish holatlari.	10
6	Og'ma yuzalardagi kuchlanishlar. Umumlashgan Guk qonuni.	10
7	Cho'zilish-siqilishda statik aniqmas masalalar va ularni yechish usullari.	10
8	Tekis shakllarning asosiy geometrik tavsiflari haqida tushunchalar.	10
9	Oddiy shakllarning inersiya momentlari va qarshilik momentlarini aniqlash.	10
10	O'qlar parallel ko'chganda va ma'lum burchakka burilganda inersiya momentlarining o'zgarishi	10
11	Sof siljish. Sof siljishda Guk qonuni.	10
12	Elastiklik modullari va Puasson koeffitsiyenti orasidagi munosabat.	10
13	Buralishda Guk qonuni. Doiraviy kesimli vallarni mustahkamlik va bikrlikka hisoblash.	10

14	Tekis egilish. Eguvchi moment, kesuvchi kuch va yoyilgan kuch intensivligi orasidagi differensial bog'lanishlar hamda ular asosida ichki zo'riqish epyuralarini tekshirish.	10
15	Tekis egilishda normal va urunma kuchlanishlarni aniqlash.	10
16	To'sinlarni normal kuchlanish bo'yicha mustahkamlikka tekshirish.	10
17	Tekis egilishdagi elastik ko'chishlar - salqilik va aylanish burchaklari haqida umumiy mulohazalar.	10
18	Mor integrali yordamida to'sinlarda paydo bo'luvchi elastik ko'chishlarni aniqlash.	10
19	Statik aniqmas to'sinlarni hisoblash.	10
20	Dinamik (zarbiy) va o'zgaruvchan yuklarning konstruksiya elementlariga ta'siri.	10
	Jami	200

Jami 200 soat

Mustaqil o'zlashtiriladigan mavzular bo'yicha talabalar tomonidan referatlar tayyorlanadi va uni taqdimoti tashkil qilinadi.

5. Fan bo'yicha talabalar bilimni baholash va nazorat qilish mezonlari

Baholash usullari	Testlar, yozma ishlar, grafik ishlar
Baholash mezonlari	<p>5 ball «a'lo»</p> <ul style="list-style-type: none"> - Materiallar qarshiligi fani haqida tushuncha ; - Ichki zo'riqish va ichki kuchlanishlarni aniqlashni bilish; -Cho'zilish va siqilishdagi mustahkamlikka hisoblashni bilish; -Mashina detallari fanining mohiyati, yuritmalarni hisoblash va tanlashni bilish; -Tishli uzatmalarni turlarini, parametrlarini hisoblashni bilish; -Zanjirli, tasmali uzatmalarni loyihalashni bilish; - mashg'ulotlarga faol qatnashish. <p>4 ball «yaxshi»</p> <ul style="list-style-type: none"> -Materiallar qarshiligi fani haqida tushunchaga ega bo'lishi; -Cho'zilish-siqilish, buralishdagi kuchlanish va tekis egilishdagi hisoblashlarni bilishi; -Mashina detallari fanining mohiyati, yuritmalarni hisoblash va tanlashni bilish;; -Tishli uzatmalarni turlarini, parametrlarini hisoblashni bilish; <p>3 ball «qoniqarli»</p> <ul style="list-style-type: none"> -Materiallar qarshiligi fani haqida tushunchaga ega bo'lishi;

	<p>- Mashina detallari fanining mohiyati, yuritmalarni hisoblash va tanlashni bilish;;</p> <p>- Tishli uzatmalarni turlarini, parametrlarini hisoblashni bilish;</p> <p>2 ball «qoniqarsiz»</p> <p>- Materiallar qarshiligi fani haqida tushunchaga ega bo'lmaslik;</p> <p>- Mashina detallari fanining mohiyati tushunmaslik;</p> <p>- Tishli uzatmalarni turlarini, parametrlarini hisoblashni bilish bilmaslik;</p> <p>- Zanjirli, tasmali uzatmalarni loyihalashni bilish.</p> <p>- muntazam mashg'ulotlarni sababsiz qoldirish.</p>
--	---

Baholash turlari	Maksimal ball	O'tkazish vaqti
Joriy nazorat:	5	
Darslarga qatnashganlik va o'zlashtirishi darajasi. Amaliy mashg'ulotlardagi faolligi, amaliy mashg'ulot daftarlarining yuritilishi va holati, Tajriba mashg'ulot daftarlarining yuritilishi va topshirganligi Mustaqil ta'lim topshiriqlarining o'z vaqtida va sifatli bajarilishi. Mavzular bo'yicha grafik ishlarini bajarilish va o'zlashtirishi darajasi.	5	Semestr davomida
Oraliq nazorat:	5	
k darajasi. Ma'ruza darslaridagi faolligi, konspekt daftarlarining yuritilishi va to'liqligi. ta'lim topshiriqlarini o'z vaqtida va sifatli bajarishi va o'zlashtirish. va boshqa nazorat turlari natijalari bo'yicha	5	7 va 15 hafta
Yakuniy nazorat:	5	15 va 30 hafta

6. Asosiy va qo'shimcha o'quv adabiyotlar hamda axborot manbaalari Asosiy adabiyotlar

1. I.G.Shin, Z.A.Shodmonqulov, K.I.Axmedov va b. Texnik mexanika. Darslik. "Adabiyot uchunlari" nashriyoti., Toshkent-2018y. -647 bet.
2. Nabiyev A.N. "Materiallar qarshiligi", darslik, "Yangi asr avlodi" nashriyoti, 2-qayta nashr. Toshkent. 2008, 380 bet.
3. Qoraboyev B.K., Leksashev Yu. "Materiallar qarshiligi", darslik, "Fan va texnologiya", Toshkent, 2007, 192 bet.

4. Hobilov B.A., Tuychiev N.J. “Materiallar qarshiligi”, darslik, Toshkent, «Uzbekiston faylasuflari milliy jamiyati», 2008, -400 bet

Qo’shimcha adabiyotlar:

5. 2017-2021 yillarda O`zbekiston Respublikasini rivojlantirishning beshta ustuvor yo`nalishi bo`yicha Harakatlar strategiyasi. O`zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevraldagi PF-4947 sonli Farmoni.

6. Ergashov M. “Materiallar qarshiligi hisoblash – loyihalash ishlari”, o`quv qo`llanma, Toshkent, « Uzbekiston », 2003, – 193 bet.

7. Xasanov S.M. , Nabiyev A. N. “Materiallar qarshiligi masalalar yechish”, o`quv qo`llanma, Toshkent, « Uzbekiston », 2006, – 288 bet.

8. Tojiboev R.N., Juraev A.J. «Mashina detallari», darslik, T.: O`qituvchi, 2002 y. 268 bet

9. М.Н.Иванов. Детали машин. М.: Высш. школа, 2000. - 383 с.

10. П.Ф.Дунаев. О.П.Леликов. Конструирование узлов и деталей машин. М., 2008. -496 с.

11. Дремова Н.В., Эшонов М.С. Сопротивление материалов. Расчет статически неопределимых балок при изгибе с применением математической программы «Mathcad» ТИТЛП, 2014г.

12. Дремова Н.В. Сопротивление материалов. Методическое указание к решению тестовых задач. ТИТЛП, 2018г.

13. Дремова Н.В. Практикум по сопротивлению материалов. Методическое пособие к решению практических задач с применением программного продукта «Mathcad» Ташкент, ТИТЛП, 2019. 261 с.

Axborot manbalari

14. <http://ziyonet.uz> – (ta’lim portali)

15. <http://titli.uz> – (Toshkent to`qimachilik va engil sanoat instituti sayti)

16. www.lex.uz – (O`zbekiston Respublikasi qonun xujjatlari ma’lumotlari milliy bazasi)

17. www.gov.uz – (O`zbekiston Respublikasi xukumat portali)

18. <http://k-a-t\detali mashin\5-dm\index.shtml>

ТЕСТЫ.**№1.**

Раздел – 16. Глава – 2. Уровень сложности – 3

Какие напряжение являются главным?
Когда касательное напряжение отсутствует
Когда нормальное напряжение отсутствует
Когда касательное напряжение в движение
Когда нормальное напряжение в движение

№ 2.

Укажите пары касательное напряжение
$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\alpha$
$\tau_{\alpha} = \sigma$
$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma}{2}$
$\tau_{\alpha} = -\tau_{\alpha + \frac{3\pi}{2}}$

№3.

Каких формулу указано положение инерция моментов главных осей?
$\operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{J_Y - J_Z}{2J_{YZ}}$
$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{J_Y - J_Z}{2J_{YZ}}$
$\operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{2 \cdot J_{YZ}}{J_Y - J_Z}$
$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{2 \cdot J_{YZ}}{J_Y - J_Z}$

№ 4.

Каких формулой определяется главных инерция моментов сечение?
$J_{\min}^{\max} = \frac{J_Y + J_Z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_Y + J_Z)^2 + 4 \cdot (J_{YZ})^2}$
$J_{\min}^{\max} = \frac{J_Y - J_Z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_Y + J_Z)^2 + 4 \cdot (J_{YZ})^2}$
$J_{\min}^{\max} = \frac{J_Y + J_Z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_Y - J_Z)^2 - 4 \cdot (J_{YZ})^2}$
$J_{\min}^{\max} = \frac{J_Y + J_Z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_Y - J_Z)^2 + 4 \cdot (J_{YZ})^2}$

№ 5.

Какие силы возникает поперечных сечениях бруса при поперечном изгибе?
Q, M_u
M_u
N, M_u
Q

№6.

Какие силы возникает поперечных сечениях бруса при изгибе?
N, M_u
M_u
Q
Q, M_u

№7.

Какие зависимость имеет между распределенных и срезающих сил?
$q = \frac{dQ}{dx}$
$q = \frac{dN}{dx}$
$Q = \frac{dM_u}{dx}$
$q = \frac{d^2M}{dx^2}$

№ 8.

Какие зависимость имеет между изгибающих моментов и поперечных сил?
$q = \frac{dQ}{dx}$
$q = \frac{d^2M}{dx^2}$
$Q = \frac{dM_u}{dx}$
$q = \frac{dN}{dx}$

№9.

К чему равно срезающих сил, когда изгибающих момент равняются максимальным?
0
1
2
3

№ 10.

Какие силы возникает поперечных сечениях балки при растяжение (сжатие)?
Q
M_z
M_x
N

№ 11.

Как выражается условия прочности по теории Мора?
$\sigma_{экр} = \sigma_1 - \mu \cdot \sigma_3 \leq [\sigma]$
$\sigma_{экр} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$
$\sigma_{экр} = \sqrt{(\sigma_1)^2 + (\sigma_2)^2 + (\sigma_3)^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} \leq \{\sigma\}$
$\sigma_{экр} = \sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]$

№12

Для каких расчетов используется полярный момент инерции?
При расчетах на прочность .
При расчетах на кручение.
При расчетах на жесткость
При расчетах на устойчивость.

№13

Какая из геометрических характеристик может быть отрицательной.
J_ρ ;
J_x ;
J_y ;
J_{xy} ;

№14

В стержне постоянного сечения возникает продольная сила 20 кН. Расчетное сопротивление $R_p = 120 \text{ МПа}$. Исходя из прочности, определить площадь поперечного сечения $A [\text{см}^2]$
3
2
2.2.
1.67

№15

В стержне постоянного сечения возникает продольная сила $N = 10 \text{ кН}$. Расчетное сопротивление $R_p = 120 \text{ МПа}$. Исходя из прочности, определить площадь поперечного сечения $A [\text{см}^2]$
2
0.95
1.2.
0.83

№16

По какой из формул определяются максимальные напряжения с учетом собственного веса при растяжении или сжатии
$\frac{\tau}{W_\rho} + \gamma l$;
$\frac{M}{W} + \gamma l$;
$\frac{F}{A} + \gamma l$;
$\frac{M}{2W} + \gamma l$;

№17

Какой модуль упругости используется при расчете стержня на кручение

К
Е
G
N

№18

Какой модуль упругости используется при расчете стержня на сдвиг
G
Е
К
N

№19

Какой модуль упругости используется при расчете стержня на растяжение или сжатие
G
Е
К
N

№20

В балке с поперечным сечением $b \times h (0 \leq x \leq b, -h/2 \leq y \leq h/2)$ увеличили размер b в 2 раза. Как изменится J_x ?
2
3
4
5

№21

В балке с поперечным сечением $b \times h (0 \leq x \leq b, -h/2 \leq y \leq h/2)$ увеличили размер b в 2 раза. Как изменится W_x ?
5
3
4
2

№22

Покажите правильную запись формулы Эйлера
$F = \frac{\pi E I}{(l)^2};$
$F = \frac{\pi E W}{(\mu l)};$
$F = \frac{\pi^2 E J}{(\mu l)^2};$
$F = \frac{E \lambda}{(\mu l)^2};$

№23

Какая сила называется критической?
Наибольшая сжимающая нагрузка, соответствующая криволинейному состоянию равновесия.
Наибольшая сжимающая сила соответствующая опасному состоянию тела

Сжимающая нагрузка, соответствующая прямолинейному состоянию равновесия.
Наибольшая сжимающая нагрузка, соответствующая криволинейному состоянию равновесия. Нагрузка, превышение которой вызывает потерю устойчивости первоначальной формы тела

№24

Определите динамический коэффициент, если тело весом Q поднимается с ускорением a
$k_g = 1 + \frac{a}{g}$
$k_g = 2 + \frac{a}{g}$
$k_g = 3 + \frac{a}{g}$
$k_g = 4 + \frac{a}{g}$

Методические указания для решения задач и выполнение расчетно-графических работ по теме “Растяжение и сжатие, геометрических характеристических плоских сечении ”

РАСТЯЖЕНИЕ, СЖАТИЕ

В этой главе, в основном, будет рассматриваться *брус*. Брус – это тело, у которого два размера малы по сравнению с третьим. Брус с прямолинейной осью называют *стержнем*. *Ось бруса* – это линия, которая соединяет центры тяжести его поперечных сечений.

Под действием приложенных сил тело деформируется. Изменение линейных размеров тела называется *линейной деформацией*, а изменение угловых размеров – *угловой деформацией*. *Удлинение* – это увеличение линейных размеров тела, а *укорочение* – уменьшение линейных размеров тела.

Пусть прямой брус длиной l заделан одним концом, а на другом конце приложена внешняя сосредоточенная сила F . Под действием этой силы брус удлинится на величину Δl , которая называется *полным (абсолютным) удлинением*, тогда

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \quad (1.1)$$

где ε – *относительная продольная деформация*.

Перемещение точки – расстояние между первоначальным положением точки (до приложения внешних нагрузок) и ее положением после деформации, взятое в определенном направлении, например, вдоль оси стержня.

Центральное растяжение (сжатие) – это такой случай напряженного состояния, когда в поперечных сечениях стержня возникают только *нормальные силы* N .

На основании гипотезы плоских сечений все продольные волокна стержня испытывают одинаковые удлинения или укорочения. Следовательно, при растяжении и сжатии *нормальные напряжения* σ распределены равномерно по поперечному сечению стержня, поэтому

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad (1.2)$$

где A – площадь поперечного сечения стержня.

Зависимость между нормальным напряжением σ и относительной деформацией ε в пределах упругости при растяжении и сжатии имеет вид (*закон Гука*):

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (1.3)$$

где E – *модуль продольной упругости (модуль Юнга)*.

Пользуясь законом Гука (1.3), можно вычислить абсолютное удлинение Δl стержня при действии нормальной силы N (рис. 1.1, а):

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}, \quad (1.4)$$

при учете только действия собственного веса стержня (рис. 1.1, б):

$$\Delta l = \frac{\gamma l^2}{2E}, \quad (1.5)$$

где γ – *объемный вес материала стержня*.

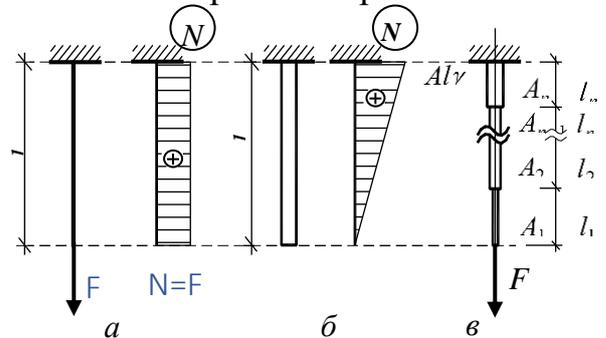


Рис. 1.1

Если по длине стержня l нормальная сила $N(x)$ и площадь сечения $A(x)$ переменны и изменяются по какому-либо непрерывному закону, то удлинение Δl определяется по формуле

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N(x)dx}{EA(x)}. \quad (1.6)$$

Для стержня со ступенчатым изменением площади A_i (рис. 1.1, в) и нормальной силы N_i удлинения Δl_i вычисляются на каждом участке с постоянными N_i и A_i , а результаты алгебраически суммируются:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \Delta l_i = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{E_i A_i}, \quad (1.7)$$

где n – число участков; i – номер участка ($i = 1; 2; 3; \dots; n$).

Существует экспериментально установленная зависимость:

$$\varepsilon_t = -\nu\varepsilon,$$

где ε_t – относительная поперечная деформация, ν – коэффициент Пуассона (коэффициент поперечной деформации). Коэффициент Пуассона ν вместе с модулем продольной упругости E характеризует упругие свойства материалов.

Расчет на прочность стальных элементов, подверженных центральному растяжению или сжатию, следует выполнять по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A_n} \leq R_y \gamma_c, \quad (1.8)$$

где γ_c – коэффициент условий работы, принимаемый по СНиП (см. табл.1.1) или другим нормам.

Таблица 1.1

Элементы конструкции	γ_c
Колонны общественных зданий и опор водонапорных башен	0,95
Элементы стержневых конструкций покрытий и перекрытий:	
а) сжатых при расчетах на устойчивость	0,95
б) растянутых в сварных конструкциях	0,95
Сплошные составные балки, колонны, несущие статическую нагрузку и выполненные с помощью болтовых соединений, при расчетах на прочность	1,1
Сечения прокатных и сварных элементов, несущих статическую нагрузку, при расчетах на прочность	1,1
Сжатые элементы из одиночных уголков, прикрепляемые одной полкой	0,75

Примечание: В случаях, не оговоренных в настоящих нормах, в формулах следует

принимать $\gamma_c = 1$.

Для хрупких материалов условия прочности принимают вид:

$$\begin{aligned} \text{при растяжении: } \sigma_t &\leq \sigma_{adm,t}, \quad \sigma_{adm,t} = \sigma_{ut} / n_t; \\ \text{при сжатии: } \sigma_c &\leq \sigma_{adm,c}, \quad \sigma_{adm,c} = \sigma_{uc} / n_c, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где $\sigma_{adm,t}$ и $\sigma_{adm,c}$ – допускаемые напряжения при растяжении и сжатии; n_t и n_c – нормативные коэффициенты запаса прочности по отношению к пределу прочности ($n_b, n_c > 1$).

Для центрально сжатых бетонных элементов формула (1.9) записывается в виде:

$$\sigma_c = \frac{N}{A_b} \leq \alpha R_b, \quad (1.10)$$

где α – коэффициент, принимаемый для бетона тяжелого, мелкозернистого и легкого равным 1,00; для ячеистого автоклавного – 0,85; для ячеистого неавтоклавного – 0,75.

У к а з а н и я

1. В том случае, когда направление нормальной силы заранее неизвестно, ее направляют от сечения. Если из условия равновесия нормальная сила получится со знаком «плюс», то брус испытывает растяжение, со знаком «минус» – сжатие.

2. Если в рассматриваемом сечении приложена сосредоточенная сила F , направленная вдоль оси стержня, то значение нормальной силы на эпюре нормальных сил N в этом сечении изменяется скачкообразно на величину приложенной силы.

1.1. Построение эпюр нормальных сил и напряжений для брусьев в статически определимых задачах

Задача 1.1.1. Построить эпюры нормальных сил и нормальных напряжений для бруса, изображенного на рис. 1.1.1. Собственный вес бруса в расчете не учитывать.

Решение. Для определения внутренних усилий разбиваем прямолинейный брус на участки. Границами участков являются точки продольной оси, соответствующие изменению площади поперечного сечения и точкам приложения сосредоточенных сил. Из рассмотрения рис. 1.1.1, а определяем, что брус необходимо разбить на четыре участка.

Проводим сечение $I - I$. Отбросим верхнюю часть бруса, ее действие заменим нормальной силой N_1 (рис. 1.1.1, б). Запишем уравнение равновесия, проектируя силы на ось бруса:

$$\sum x = N_1 - F = 0, \text{ откуда } N_1 = F.$$

Очевидно, что на всем первом участке ($0 \leq x \leq a$) нормальная сила N_1 постоянна по величине. Откладываем в масштабе значение нормальной силы $N_1 = F$ в пределах участка $I - I$ (рис. 1.1.1, е).

Проводим сечение $II - II$ и, отбрасывая верхнюю часть бруса, заменяем ее действиенормальной силой N_2 (рис. 1.1.1, в). Проектируем все силы на ось бруса:

$$\sum x = N_2 + 2F - F = 0, \text{ откуда } N_2 = -F.$$

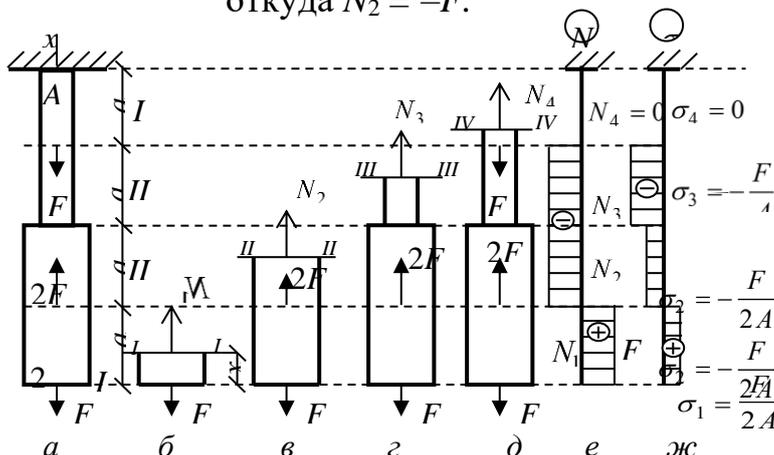


Рис.1.1.1

Аналогично находим нормальные силы в сечении $III - III$ (рис. 1.1.1, z):

$$\sum x = N_3 + 2F - F = 0, \text{ откуда } N_3 = -F$$

и в сечении $IV - IV$ (рис. 1.1.1, d):

$$\sum x = N_4 - F + 2F - F = 0, \text{ откуда } N_4 = 0.$$

Откладывая в масштабе значения нормальных сил N_2, N_3, N_4 в пределах соответствующих участков, получаем эпюру нормальных сил (рис.1.1.1, e). Полученную таким путем эпюру принято штриховать прямыми линиями, перпендикулярными к оси бруса. Каждая такая линия в принятом масштабе дает величину нормальной силы в соответствующем поперечном сечении бруса. Знак «плюс» показывает, что в пределах данного участка – растяжение, а знак «минус» – сжатие. Для построения эпюры нормальных напряжений σ воспользуемся формулой (1.2) для каждого участка:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{2A} = \frac{F}{2A}; \sigma_2 = \frac{N_2}{2A} = -\frac{F}{2A}; \sigma_3 = \frac{N_3}{A} = -\frac{F}{A}; \sigma_4 = 0.$$

Эпюра нормальных напряжений (рис. 1.1.1, $ж$) показывает, что наибольшего значения нормальные напряжения достигают в пределах третьего участка (участок III).

Задача 1.1.2. Построить эпюры нормальных сил и нормальных напряжений для бруса, изображенного на рис.1.1.2, a . Принять $a = 0,4$ м; площадь поперечного сечения бруса на участках III и IV $A = 20$ см²; сосредоточенная сила $F = 0,5$ кН, собственный вес $\gamma = 0,0078$ кг/см³ = 76,44 кН/м³.

Решение. Для определения внутренних усилий разбиваем брус с прямолинейной осью на четыре участка. Проводим сечение $I - I$ (рис. 1.1.2, a) и отбрасываем верхнюю часть бруса, заменяя действие отброшенной части нормальной силой N_1 (рис. 1.1.2, b). Так как сечение $I - I$ может быть проведено в любом месте участка I , то длина оставшейся части участка будет переменной величиной, и поэтому обозначим ее через x (рис. 1.1.2, b), причем $0 \leq x \leq a$. Запишем уравнение равновесия, проектируя силы, действующие на

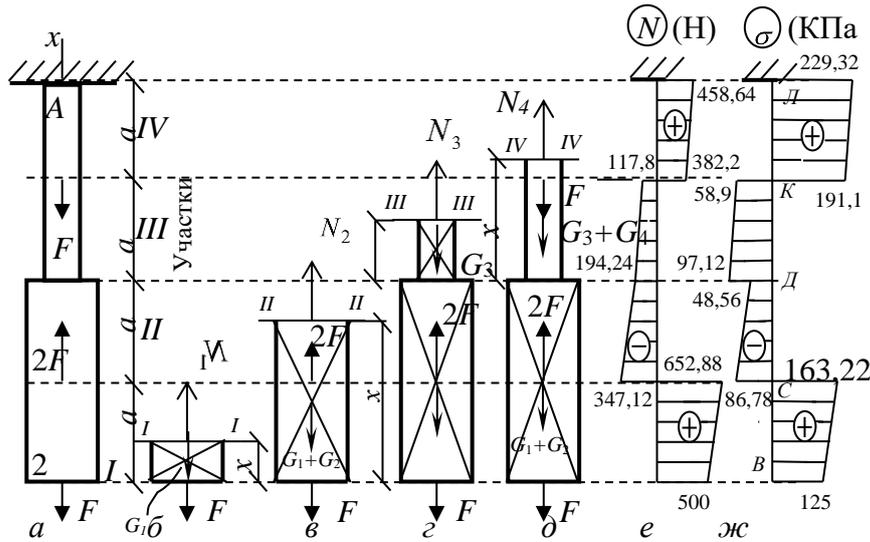


Рис. 1.1.2

ставшуюся часть бруса, на направление оси

$$N_1 = F + G_1 = F + 2Ax\gamma.$$

Через $G_1 = 2Ax\gamma$ обозначен собственный вес оставшейся части бруса первого участка, в пределах которого площадь поперечного сечения равна $2A$, а длина оставшейся части обозначена через x . Подставим численные значения в полученную формулу:

$$N_1 = F + 2Ax\gamma = 500 + 2 \cdot 20 \cdot 10^{-4} \cdot x \cdot 76440 = 500 + 305,76x \text{ [Н]}.$$

Записанное выражение показывает, что эпюра нормальных сил в пределах первого участка представляет собой наклонную прямую линию. Для построения этой прямой определим значение нормальной силы N_1 в начале первого участка ($x = 0$): $N_1(x=0) = 500$ Н и в конце первого участка ($x = a = 0,5$ м): $N_1(x = 0,5 \text{ м}) = 500 + 305,76 \cdot 0,5 = 652,88$ Н.

Полученные значения откладываем в масштабе в соответствующих точках эпюры нормальных сил (рис. 1.1.2, e). Найденные точки соединяем прямой линией, затем штрихуем первый участок эпюры прямыми линиями, перпендикулярными к оси бруса.

Проводим сечение II – II и повторяем порядок расчета, описанный выше для сечения I – I. Переменная величина x участка II – II будет изменяться в пределах $a \leq x \leq 2a$. Составим уравнение равновесия (рис. 1.1.2, в)

$$\sum_{x=0}^x N_2 + 2F - (G_1 + G_2) - F = 0, \text{ откуда } N_2 = (G_1 + G_2) - F,$$

где $G_1 + G_2 = 2Ax\gamma$ – собственный вес части бруса, расположенного ниже сечения II – II. Окончательно имеем

$$N_2 = 2Ax\gamma - F = 2 \cdot 20 \cdot 10^{-4} \cdot x \cdot 76440 - 500 = 305,76x - 500.$$

Определяем значение нормальной силы N_2 в начале второго участка ($x = 0,5$ м): $N_2(x = 0,5 \text{ м}) = 305,76 \cdot 0,5 - 500 = -347,12$ Н и в конце этого же участка ($x = x_{\max} = 1$ м): $N_2(x = 1 \text{ м}) = 305,76 \cdot 1 - 500 = -194,24$ Н.

Полученные значения N_2 откладываем в масштабе в начале и в конце второго участка (рис. 1.1.2, е).

Проводим сечение III – III и для оставшейся части бруса составляем уравнение равновесия (рис. 1.1.2, з)

$$\sum x = N_3 - G_3 + 2F - (G_1 + G_2) - F = 0,$$

откуда $N_3 = -F + G_3 + (G_1 + G_2)$, где $G_3 = Ax$ – собственный вес оставшейся части бруса третьего участка; $G_1 + G_2 = 2A \cdot 2a \cdot \gamma$ – собственный вес первого и второго участков.

Тогда для участка $0 \leq x \leq a$

$$N_3 = -F + G_3 + G_1 + G_2 =$$

$$= -500 + 20 \cdot 10^{-4} x 76440 + 2 \cdot 20 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 0,5 \cdot 76440 = -194,24 + 152,88x,$$

где нормальная сила N_3 в начале третьего участка будет $N_3(x=0) = -194,2$ Н; а в конце третьего участка получаем $N_3(x = a = 0,5 \text{ м}) = -117,8$ Н. Найденные значения N_3 переносим на эпюру нормальных сил.

И наконец, рассматривая равновесие оставшейся части бруса, после проведения сечения IV – IV получаем (рис. 1.1.2, д)

$$\sum x = N_4 - (G_3 + G_4) - F + 2F - (G_1 + G_2) - F = 0,$$

откуда $N_4 = (G_3 + G_4) + (G_1 + G_2)$, $a \leq x \leq 2a$, где $G_1 + G_2 = 2A \cdot 2a \cdot \gamma = 305,76$ Н – собственный вес участков I – I и II – II, $G_3 + G_4 = Ax\gamma = 152,88x$ – собственный вес третьего и оставшейся части четвертого участков.

В этом случае имеем

$$N_4 = 152,88x + 305,76,$$

т.е. в начале четвертого участка $N_4(x = 0,5 \text{ м}) = 382,2$ Н, а в конце этого же участка $N_4(x = 1 \text{ м}) = 458,64$ Н. Вычисленные значения N_4 откладываем в масштабе на эпюре нормальных сил (рис. 1.1.2, е).

Эпюра нормальных сил показывает, что первый и четвертый участок подвержены растяжению, а второй и третий – сжатию.

Для вычисления значений нормальных напряжений σ и построения эпюры нормальных напряжений используем формулу (1.2):

$$\sigma_B = \frac{N_B}{2A} = \frac{500}{2 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} = 125000 \text{ Па} = 125 \text{ кПа}; \quad \sigma_C^I = \frac{652,88 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} = 163,22 \text{ кПа};$$

$$\sigma_C^{II} = \frac{N_C^{II}}{2A} = -\frac{347,12 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} = -86,78 \text{ кПа}; \quad \sigma_D^{II} = -\frac{194,24 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} = -48,56 \text{ кПа};$$

$$\sigma_D^{III} = -\frac{194,24 \cdot 10^{-3}}{20 \cdot 10^{-4}} = -97,12 \text{ кПа}; \quad \sigma_K^{III} = -\frac{117,8 \cdot 10^{-3}}{20 \cdot 10^{-4}} = -58,9 \text{ кПа};$$

$$\sigma_K^{IV} = \frac{382,2 \cdot 10^{-3}}{20 \cdot 10^{-4}} = 191,1 \text{ кПа}; \quad \sigma_L^{IV} = \frac{458,64 \cdot 10^{-3}}{20 \cdot 10^{-4}} = 229,32 \text{ кПа}.$$

Эпюра нормальных напряжений показывает, что самое большое

нормальное напряжение возникает в сечении, проходящем через точку *Л* четвертого участка (рис. 1.1.2, *Ж*), т.е. на опоре.

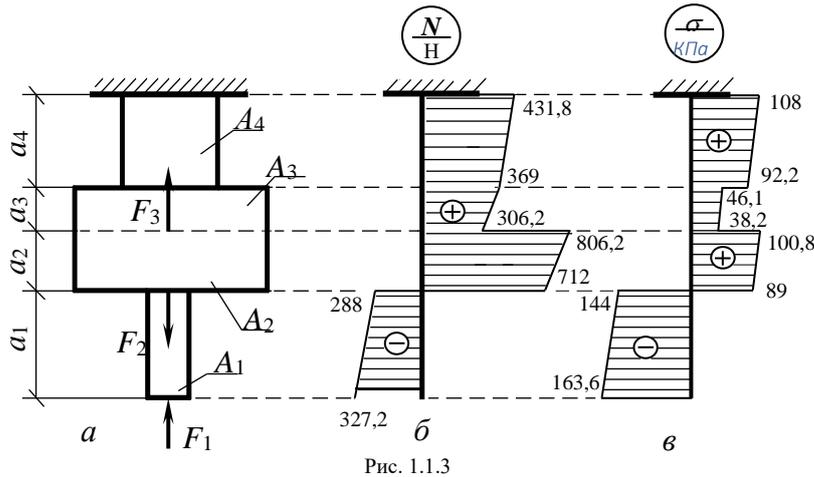


Рис. 1.1.3

1.3. Расчеты на растяжение и сжатие статически определимых стержневых систем

Задача 1.3.1. Абсолютно жесткий брус *BC* ($E_{BC} = \infty$) прикреплен в точке *C* к неподвижному шарниру (рис. 1.3.1), а в точке *B* поддерживается стальной тягой *AB*. В точке *B* приложена вертикальная сила $F = 20$ кН.

Подобрать сечение тяги *AB* и показать перемещение точки *B*. Расчетное сопротивление стали растяжению $R_y = 240$ МПа,

коэффициент условий работы $\gamma_c = 1$, а модуль упругости стали тяги *AB* – $E_{AB} = 2,06 \cdot 10^5$ МПа.

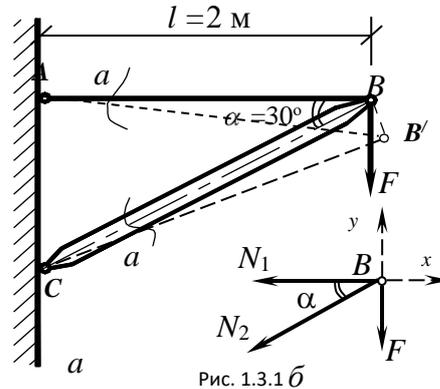


Рис. 1.3.1 б

Решение. Вырежем мысленно узел *B* (рис. 1.3.1, б) и составим для него уравнения равновесия:

$$\sum y = -F - N_2 \sin \alpha = 0, \quad \text{откуда находим } N_2 = -F / \sin \alpha = -20 / 0,5 = -40 \text{ кН};$$

$$\sum x = -N_1 - N_2 \cos \alpha = 0, \quad \text{откуда } N_1 = -N_2 \cos \alpha = 40 \cos 30^\circ = 34,64 \text{ кН}.$$

Окончательно имеем $N_1 = 34,64$ кН; $N_2 = -40$ кН. Следовательно, брус *BC* сжат силой N_2 , а элемент *AB* растянут силой N_1 .

Подбор сечения тяги *AB* проводим по формуле (1.8), откуда определяем $A_n = \frac{N_1}{R_y \gamma_c} = \frac{34,64}{240000 \cdot 1} = 1,44 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 1,44 \text{ см}^2$.

Предположим, что тяга *AB* имеет круглое поперечное сечение, тогда $A_n = 1,44 \text{ см}^2 = \pi r^2$, откуда находим $r = 0,677 \text{ см}$ и $d = 1,35 \text{ см}$.

Определим удлинения стержней *AB* и *CB*:

$$\Delta l_{AB} = \frac{N_1 l}{A_n E_{AB}} = \frac{34,64 \cdot 2}{1,44 \cdot 10^{-4} \cdot 2,06 \cdot 10^5 \cdot 10^3} = 0,0023 \text{ м} = 0,23 \text{ см};$$

$$\Delta l_{CB} = \frac{N_2 l_{BC}}{A_{BC} E_{BC}} = - \frac{40l}{A_{BC} \cos 30^\circ E_{BC}} = 0.$$

Таким образом, точка B переместится в точку B' по дуге окружности радиусом $\overline{BC} = l / \cos 30^\circ$, причем расстояние между точками A и B' будет равно $\overline{AB}' = l + \Delta l_{AB} = 2 + 0,0023 = 2,0023$ м.

Задача 1.4.1. Задан стальной стержень, заделанный обоими концами и нагруженный силой $F = 1000$ Н (рис. 1.4.1, a). Удельный вес материала стержня $\gamma = 78,5$ кН/м³, модуль упругости — $E = 2,06 \cdot 10^5$ МПа.

Требуется построить эпюры нормальных сил и напряжений, а также определить перемещение сечения $I-I$.

Решение. Выбираем основную систему, которая должна представлять собой статически определимую неизменяемую систему. Основная система получается из заданной системы путем отбрасывания лишних связей и

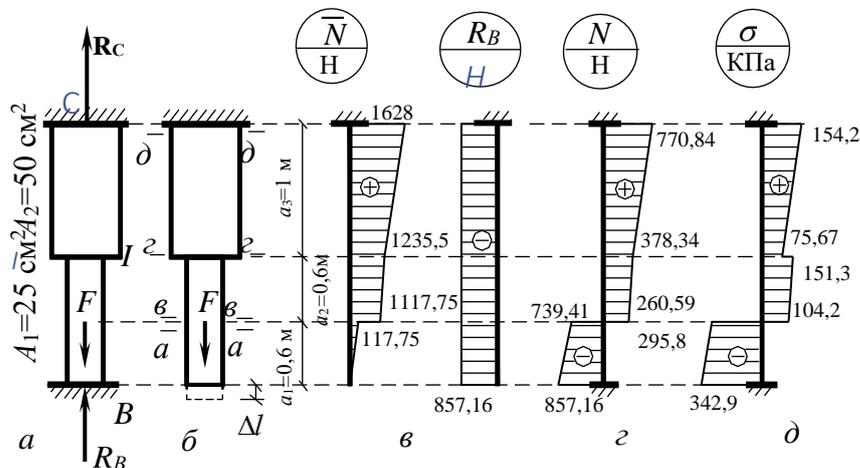


Рис. 1.4.1

замены их действия неизвестными реакциями. Принятая основная система показана на рис. 1.4.1, b .

Строим эпюру нормальных сил \overline{N} для основной системы, для чего определяем нормальные силы в соответствующих сечениях (рис. 1.4.1, b):

$$\overline{N}_{a-a} = A_1 a_1 \gamma = 25 \cdot 10^{-4} \cdot 0,6 \cdot 78500 = 117,75 \text{ Н};$$

$$\overline{N}_{\sigma-\sigma} = \overline{N}_{a-a} + F = 117,75 + 1000 = 1117,75 \text{ Н};$$

$$\overline{N}_{z-z} = \overline{N}_{\sigma-\sigma} + A_1 a_2 \gamma = 1117,75 + 25 \cdot 10^{-4} \cdot 0,6 \cdot 78500 = 1235,5 \text{ Н};$$

$$\overline{N}_{\delta-\delta} = \overline{N}_{z-z} + A_2 a_3 \gamma = 1235,5 + 50 \cdot 10^{-4} \cdot 1 \cdot 78500 = 1628 \text{ Н}.$$

Определяем перемещение нижнего конца стального стержня основной системы:

$$\Delta l = \frac{\gamma a_1^2}{2E} + \frac{1117,75 a_2}{EA_1} + \frac{\gamma a_2^2}{2E} + \frac{1235,5 a_3}{EA_2} + \frac{\gamma a_3^2}{2E} = \frac{582870}{E}.$$

Таким образом, если в статически неопределимом брус (рис. 1.4.1, a) убрать одну нижнюю опору, то нижнее опорное сечение переместится вниз на величину Δl , но этого в реальном брус не может быть, следовательно, на опоре B должна действовать опорная реакция R_B , от которой будет возникать

линейная деформация Δl_B , равная по величине Δl , но противоположная по знаку:

$$\Delta l_B = -\frac{a_1 + a_2}{EA_1} R_B - \frac{a_3 R_B}{EA_2} = -\frac{R_B}{E} \left(\frac{0,6 + 0,6}{25 \cdot 10^{-4}} + \frac{1}{50 \cdot 10^{-4}} \right) = -\frac{680 R_B}{E}.$$

Уравнение перемещений будет иметь вид:

$$\Delta l + \Delta l_B = 0 \quad \text{или} \quad \frac{582870}{E} - \frac{680 R_B}{E} = 0, \quad \text{откуда находим } R_B = 857,16 \text{ Н.}$$

Опорная реакция R_B вызывает в брус сжатие, следовательно, эпюра нормальных сил от действия только опорной реакции R_B будет иметь вид прямоугольника (рис. 1.4.1, в).

Для получения эпюры нормальных сил для статически неопределимого бруса (рис. 1.4.1, а) следует сложить две эпюры: эпюру нормальных сил в основной системе (рис. 1.4.1, б) и эпюру нормальных сил от действия опорной реакции R_B (рис. 1.4.1, в). Сложение эпюр проводим, складывая значения нормальных сил двух эпюр в соответствующих точках (рис. 1.4.1, г). После чего строится эпюра нормальных напряжений по формуле (1.2).

Эпюра нормальных напряжений σ показывает, что самое большое сжимающее нормальное напряжение будет в нижнем опорном сечении ($\sigma_{c,\max} = -342,9$ КПа), а самое большое растягивающее напряжение – в верхнем опорном сечении ($\sigma_{r,\max} = 154,2$ КПа). По эпюре нормальных сил находим опорную реакцию в верхней заделке – $R_C = 770,84$ Н.

Критерием правильности вычислений является равенство нулю площади эпюры нормальных напряжений, т.е. $A_{\sigma+} - A_{\sigma-} = 0$ или $A_{\sigma+} = A_{\sigma-}$, где $A_{\sigma+}$ – площадь части эпюры нормальных напряжений со знаком «плюс» (рис. 1.4.1, д):

$$A_{\sigma+} = \frac{75,67 + 154,2}{2} \cdot 1 + \frac{104,2 + 151,3}{2} \cdot 0,6 = 191,6;$$

$A_{\sigma-}$ – площадь части эпюры нормальных напряжений со знаком «минус»:

$$A_{\sigma-} = \frac{295,8 + 342,9}{2} \cdot 0,6 = 191,6.$$

В нашем случае $A_{\sigma-} = A_{\sigma+} = 191,6$, следовательно, расчет выполнен правильно.

Определим перемещение сечения $I-I$ (рис. 1.4.1, а), для чего применим метод сечений. Проведем сечение $I-I$ на эпюре нормальных сил (рис. 1.4.1, г) и отбросим нижнюю часть эпюры, тогда по оставшейся части эпюры определяем

$$\delta_{I-I} = \frac{378,34 \cdot 1}{EA_2} + \frac{\gamma \cdot 1^2}{2E} = \frac{114918}{E} = 0,558 \cdot 10^{-6} \text{ м.}$$

Перемещение δ_{I-I} можно вычислить, если отбросить верхнюю часть эпюры нормальных сил:

$$\delta_{I-I} = \frac{260,59 \cdot 0,6}{EA_1} + \frac{\gamma 0,6^2}{2E} - \frac{739,41 \cdot 0,6}{EA_1} - \frac{\gamma 0,6^2}{2E} = -\frac{114917}{E} = -0,558 \cdot 10^{-6} \text{ м.}$$

Получили одно и то же значение перемещений, но с разными знаками, что естественно, так как

сечение $I-I$ переместилось вниз, следовательно, верхняя часть бруса увеличила линейные размеры вдоль оси, а нижняя, наоборот уменьшила.

2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

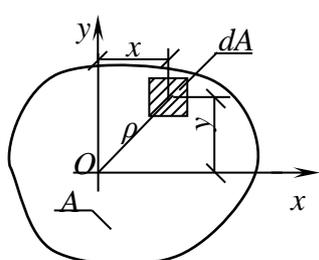
Геометрическими характеристиками плоских сечений являются площадь, статические моменты плоских сечений, положение центра тяжести, моменты инерции и моменты сопротивления.

2.1. Статические моменты сечений и определение центра тяжести плоских сечений

Площадь является простейшей геометрической характеристикой поперечного сечения:

$$A = \int_A dA. \quad (2.1.1)$$

Статическим моментом плоского сечения относительно некоторой оси называется, взятая по всей его площади A , сумма произведений площадей элементарных площадок dA на их расстояния от этой оси (рис. 2.1.1):



$$S_x = \int_A y dA, \quad S_y = \int_A x dA; \quad (2.1.2)$$

$$S_x = \iint_A y dx dy, \quad S_y = \iint_A x dx dy; \quad (2.1.3)$$

$$S_x = Ay_c, \quad S_y = Ax_c, \quad (2.1.4)$$

Рис. 2.1.1

где y_c – расстояние от центра тяжести всего плоского сечения до оси x ; x_c – расстояние от центра тяжести всего сечения до оси y .

Статический момент сложного сечения относительно некоторой оси равен сумме статических моментов всех частей этого сечения относительно той же оси:

$$S_x = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n = \sum_{i=1}^n A_i y_i;$$

$$S_y = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n = \sum_{i=1}^n A_i x_i. \quad (2.1.5)$$

В формулах (2.1.5) введены обозначения: A_1, A_2, \dots, A_n – площади простых элементов, составляющих плоское сложное сечение; $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \dots, x_n, y_n$ – координаты центров тяжести простых составляющих сложного плоского сечения относительно выбранных осей x и y .

Из выражений (2.1.4) можно определить координаты центра тяжести плоского сечения:

$$x_c = \frac{S_y}{A}; \quad y_c = \frac{S_x}{A}. \quad (2.1.6)$$

Для сложного поперечного сечения формулы (2.1.6) можно представить в следующем виде

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n};$$

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{A_1y_1 + A_2y_2 + \dots + A_ny_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n}.$$

(2.1.7)

Зависимости между статическими моментами одного и того же сечения относительно двух параллельных друг другу осей x и x_1 , а также y и y_1 имеют вид:

$$S_{x_1} = S_x - aA; \quad S_{y_1} = S_y - bA,$$

(2.1.8)

где параметры a , b показаны на рис. 2.1.2.

У к а з а н и я.

1. Изменение положительного направления оси y вызывает изменение знака статического момента S_x . Аналогично, изменение положительного направления оси x вызывает изменение знака статического момента S_y .

2. Статический момент сечения равен нулю относительно любой оси, проходящей через центр тяжести этого сечения.

3. Если плоское сечение имеет ось симметрии, то эта ось всегда проходит через центр тяжести плоского сечения, а поэтому, согласно п.2, статический момент сечения относительно оси симметрии всегда равен нулю.

4. Если плоское сечение имеет две оси симметрии, то центр тяжести сечения лежит на пересечении этих осей симметрии.

Задача 2.1.1. Определить центр тяжести треугольного поперечного сечения, показанного на рис. 2.1.3.

Решение. Поперечное сечение представляет собой равнобедренный треугольник, а следовательно, ось y – ось симметрии и центр тяжести рассматриваемого поперечного сечения лежит на этой оси.

Для нахождения центра тяжести используем вторую из формул (2.1.6). Запишем

$$A = bh/2, \quad S_x = \int_A ydA = \int_0^h yb_y dy.$$

(а)

Из подобия треугольников $\triangle BC_1D_1$ и $\triangle BCD$ находим $\frac{C_1D_1}{CD} = \frac{h-y}{h}$ или $\frac{b_y}{b} = \frac{h-y}{h}$, откуда $b_y = \frac{b(h-y)}{h}$.

Найденное значение b_y подставляем в формулу (а) для вычисления статического момента S_x :

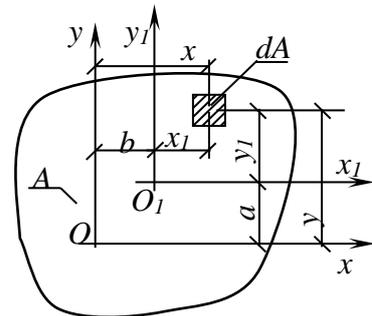


Рис. 2.1.2

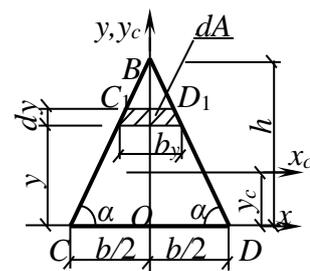


Рис. 2.1.3

$$S_x = \int_0^h y \frac{b(h-y)}{h} dy = b \int_0^h y dy - \frac{b}{h} \int_0^h y^2 dy = \frac{bh^2}{2} - \frac{bh^2}{3} = \frac{bh^2}{6}.$$

В этом случае вторая из формул (2.1.6) дает

$$y_c = S_x / A = \frac{bh^2/6}{bh/2} = h/3.$$

На рис. 2.1.3 проводим линию $y = y_c = h/3$. Центр тяжести треугольного поперечного сечения будет лежать на пересечении проведенной линии и оси

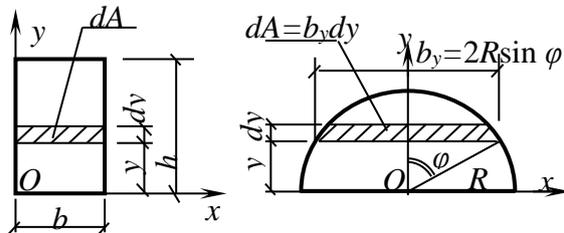


Рис. 2.1.4

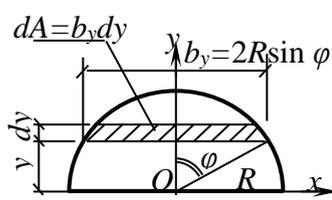


Рис. 2.1.5

у. Координаты центра тяжести этого сечения: $x = 0, y = h/3$.

Задача 2.1.2. Определить статические моменты плоского прямоугольного сечения относительно осей x и y (см. рис. 2.1.4).

Ответ: $S_x = bh^2/2;$

$S_y = hb^2/2.$

Задача 2.1.3. Определить координаты центра тяжести плоского сечения в форме половины круга радиусом R (рис. 2.1.5).

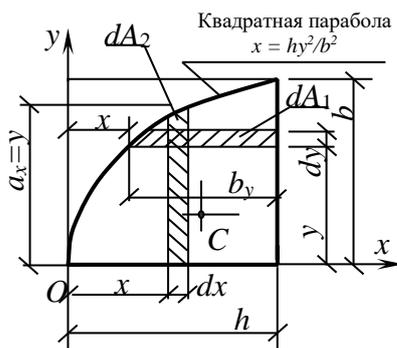


Рис. 2.1.6

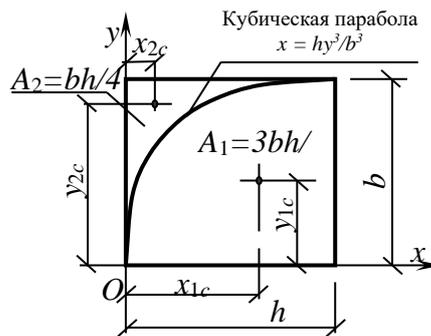


Рис. 2.1.7

Ответ: $x_c = 0, y_c = 4R/(3\pi).$

2.3. Осевые моменты инерции плоских составных сечений

Для сложных составных поперечных сечений, не содержащих осей симметрии, предлагается следующий порядок расчета.

Сначала вычерчивается поперечное сечение. Случайные оси x, y ставим так, чтобы все точки поперечного сечения находились в 1-м квадранте (рис. 2.3.1). Каждому прокатному профилю присваивается порядковый номер. Наносим местные оси координат x_i, y_i , проходящие через известные центры тяжести i -го профиля. Оси x_i, y_i параллельны случайным осям x, y соответственно.

Наносим на рисунок известные размеры сечения, взятые из задания или из соответствующих таблиц сортамента прокатной стали (см. приложение в конце книги).

Вводим обозначения: x_i, y_i – абсцисса и ордината центра тяжести соответственно i -го профиля относительно случайных осей x, y ; A_i – площадь

сечения i -го профиля, $A = \sum_{i=1}^n A_i$ – площадь поперечного сечения всего

составного сечения; $I_{x_i}, I_{y_i}, I_{x_i y_i}$ – осевые и центробежные моменты инерции i -го профиля относительно местных осей x_i, y_i .

Следуя предложенной методике, выпишем геометрические характеристики для поперечного сечения, изображенного на рис. 2.3.1:

$$A_1 = 50 \times 1,6 = 80 \text{ см}^2; A_2 = 30,6 \text{ см}^2; A_3 = 42,19 \text{ см}^2; A_4 = 30,04 \text{ см}^2;$$

$$x_1 = 25 \text{ см}; x_2 = 43,42 \text{ см}; x_3 = 36,11 \text{ см}; x_4 = 5,32 \text{ см};$$

$$y_1 = 24,8 \text{ см}; y_2 = 12 \text{ см}; y_3 = 4,89 \text{ см}; y_4 = 21,64 \text{ см}; I_{x_1} = 50 \cdot 1,6^3 / 12 = 17,07 \text{ см}^4;$$

$$I_{x_2} = 2900 \text{ см}^4;$$

$$I_{x_3} = 1316,62 \text{ см}^4; I_{x_4} = 238,75 \text{ см}^4; I_{y_1} = 1,6 \cdot 50^3 / 12 = 16666,7 \text{ см}^4; I_{y_2} = 208 \text{ см}^4; I_{y_3} = I_{x_3};$$

$$I_{y_4} = 784,22 \text{ см}^4.$$

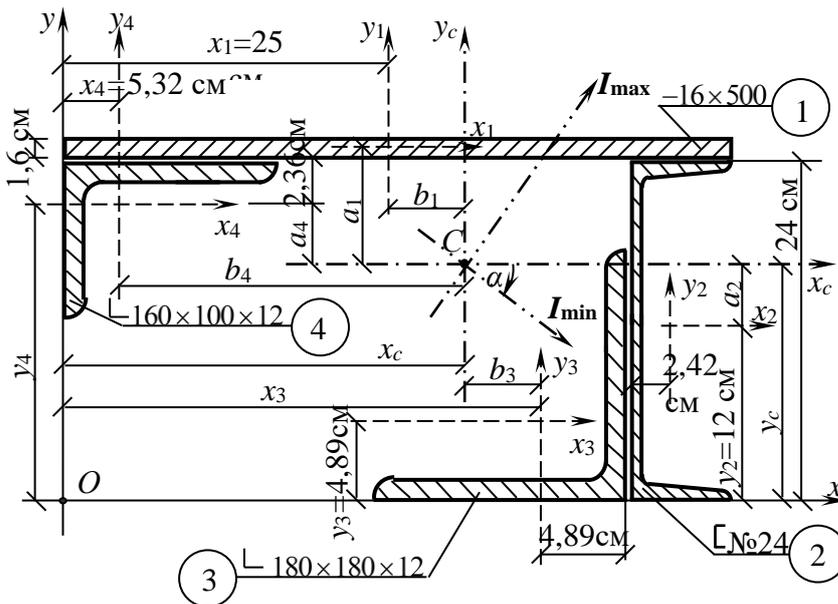


Рис. 2.3.1

С помощью формул (2.1.7) находим координаты центра тяжести всего поперечного сечения:

$$x_c = \frac{80 \cdot 25 + 30,6 \cdot 43,42 + 42,19 \cdot 36,11 + 30 \cdot 5,32}{80 + 30,6 + 42,19 + 30} = \frac{5012,1}{182,8} = 27,4 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{80 \cdot 24,8 + 30,6 \cdot 12 + 42,19 \cdot 4,89 + 30 \cdot 21,64}{80 + 30,6 + 42,19 + 30} = \frac{3206,8}{182,8} = 17,5 \text{ см}.$$

Наносим оси x_c, y_c , которые проходят через центр тяжести C всего составного поперечного сечения и определяем расстояния между осями x_c и x_i , а также между осями y_c и y_i :

$$a_1 = y_1 - y_c = 24,8 - 17,5 = 7,3 \text{ см}; \quad b_1 = x_1 - x_c = 25 - 27,4 = -2,4 \text{ см};$$

$$a_2 = y_2 - y_c = 12 - 17,5 = -5,5 \text{ см}; \quad b_2 = x_2 - x_c = 43,42 - 27,4 = 16,02 \text{ см};$$

$$a_3 = y_3 - y_c = 4,89 - 17,5 = -12,61 \text{ см}; \quad b_3 = x_3 - x_c = 36,11 - 27,4 = 8,71 \text{ см};$$

$$a_4 = y_4 - y_c = 21,64 - 17,5 = 4,14 \text{ см}; \quad b_4 = x_4 - x_c = 5,32 - 27,4 = -22,08 \text{ см}.$$

Используя формулы (2.2.5), получаем выражения для вычисления осевых моментов инерции относительно центральных осей x_c и y_c всего поперечного сечения:

$$I_{x_c} = I_{x_1} + a_1^2 A_1 + I_{x_2} + a_2^2 A_2 + I_{x_3} + a_3^2 A_3 + I_{x_4} + a_4^2 A_4;$$

$$I_{y_c} = I_{y_1} + b_1^2 A_1 + I_{y_2} + b_2^2 A_2 + I_{y_3} + b_3^2 A_3 + I_{y_4} + b_4^2 A_4$$

или окончательно:

$$I_{x_c} = 17,07 + 7,3^2 \cdot 80 + 2900 + 5,5^2 \cdot 30,6 + 1316,62 +$$

$$+ 12,61^2 \cdot 42,19 + 238,75 + 4,14^2 \cdot 30 = 16885 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_c} = 16666,7 + 2,4^2 \cdot 80 + 208 + 16,02^2 \cdot 30,6 + 1316,62 + 8,71^2 \cdot 42,19 +$$

$$+ 784,22 + 22,08^2 \cdot 30 = 45135 \text{ см}^4.$$

По формуле (2.2.6) находим значение центробежного момента инерции относительно осей x_c, y_c :

$$I_{x_c y_c} = I_{x_1 y_1} + a_1 b_1 A_1 + I_{x_2 y_2} + a_2 b_2 A_2 + I_{x_3 y_3} + a_3 b_3 A_3 + I_{x_4 y_4} + a_4 b_4 A_4,$$

где, согласно рис. 2.3.1, имеем $I_{x_1 y_1} = I_{x_2 y_2} = 0$, так как швеллер и полоса имеют оси симметрии x_2 и x_1, y_1 соответственно.

Для вычисления $I_{x_3 y_3}$ для равнополочного уголка предварительно выпишем из таблицы сортамента «Уголки стальные горячекатаные равнополочные» $I_{x_0} = 2093 \text{ см}^4, I_{y_0} = 540 \text{ см}^4, \alpha = 45^\circ, I_{x_0 y_0} = 0$ (рис. 2.3.2, а). Тогда формула (2.2.8) принимает вид:

$$I_{x_3 y_3} = \frac{I_{x_0} - I_{y_0}}{2} \sin 90^\circ + I_{x_0 y_0} \cos 90^\circ = \frac{I_{x_0} - I_{y_0}}{2} = 776,5 \text{ см}^4.$$

Для вычисления $I_{x_4 y_4}$ для неравнополочного уголка (рис. 2.3.2, б) предварительно выпишем из таблицы сортамента (Раздел IV)

$$I_{x_4} = 238,75 \text{ см}^4, I_{y_4} = 784,22 \text{ см}^4, I_{uv} = 0, I_u = 142 \text{ см}^4, \text{tg} \alpha = 0,388$$

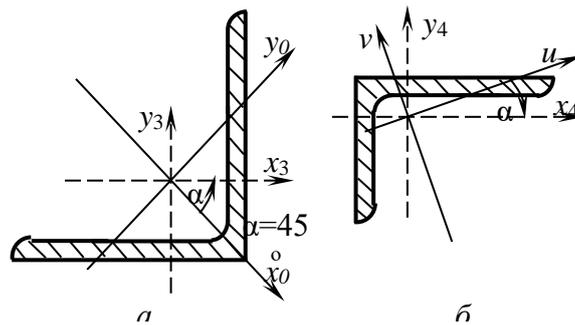
и затем, согласно формуле (2.2.10), получаем:

$$I_v = I_{x_4} + I_{y_4} - I_u = 238,75 + 784,22 - 142 = 880,97 \text{ см}^4.$$

Таким образом, формула (2.2.8) для рассматриваемого случая принимает вид:

$$I_{x_4 y_4} = \frac{I_u - I_v}{2} \sin 2\alpha + I_{uv} \cos 2\alpha = \frac{I_u - I_v}{2} \sin 2\alpha,$$

где $\text{tg} \alpha = 0,388; \alpha = -21^\circ 12'$ (рис. 2.3.2, б), тогда



$$I_{x_4 y_4} = \frac{142 - 880,97}{2} \sin(-2 \cdot 21^\circ 12') = 369,5 \sin 42^\circ 24' = 249,2 \text{ см}^4.$$

Значение центробежного момента $I_{x_4y_4}$ можно вычислить, используя формулу (2.2.6). Для этого рассмотрим рис. 2.3.2, в. Разобьем уголок на два прямоугольника с

$$A_4' = 16 \times 1,2 \text{ см} \quad \text{и}$$

$$A_4'' = 8,8 \times 1,2 \text{ см}.$$

В этом случае по формуле (2.2.6) получаем

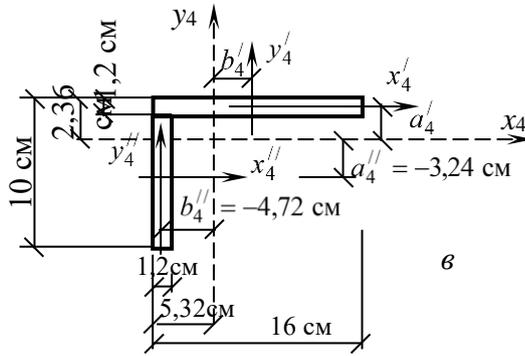


Рис. 2.3.2

$$I_{x_4y_4} = a_4'b_4'A_4' + a_4''b_4''A_4'' = 1,76 \cdot 2,68(16 \cdot 1,2) + (-3,24)(-4,72)(8,8 \cdot 1,2) = 252 \text{ см}^4.$$

Как видно, результаты очень близки по значениям. Знак у центробежного момента относительно центральных осей уголка можно контролировать по рис. 2.2.7.

Теперь можно приступить к определению центробежного момента всего составного сечения относительно осей x_c, y_c :

$$I_{x_cy_c} = 7,3(-2,4) \cdot 80 + (-5,5) \cdot 16,02 \cdot 30,6 + 776,5 + (-12,61) \cdot 8,71 \cdot 42,19 + 249,2 + 4,14(-22,08) \cdot 30 = -10452 \text{ см}^4.$$

Главные оси инерции можно построить, повернув центральные оси x_c, y_c на угол α (рис. 2.3.1):

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{x_cy_c}}{I_{y_c} - I_{x_c}} = \frac{-2 \cdot 10452}{45135 - 16885} = -0,7404; \quad \alpha = -18^\circ 15'.$$

Величины главных моментов инерции определяем по формуле (2.2.11)

$$I_{\min}^{\max} = \frac{I_{x_c} + I_{y_c}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_{x_c} - I_{y_c})^2 + 4I_{x_cy_c}^2} =$$

$$= \frac{16885 + 45135}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(16885 - 45135)^2 + 4 \cdot 10452^2} = 31010 \pm 17572 \text{ см}^4.$$

Окончательно получаем, что $I_{\max} = 48582 \text{ см}^4, I_{\min} = 13438 \text{ см}^4$.

Полученные значения удовлетворяют условию (2.2.10):

$$I_{x_c} + I_{y_c} = I_{\max} + I_{\min} = 62020 \text{ см}^4.$$

Таким образом, определены все геометрические характеристики сложного составного поперечного сечения, показанного на рис.2.3.1.

Литература основная

1. Ицкович Г.М., Минин Л.С., Винокуров А.И. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов: Учеб. пособие для вузов / Под ред. Л.С.Минина. -3-е изд., перераб. и доп. - М.: Высш. шк., 1999. - 592 с. ил.

2.Ободовский Б.А., Ханин С.Е. Сопротивление материалов в примерах и задачах: Учебное пособие для втузов. - 2-е изд., исправ. и доп. - Харьков: Изд-во Харьковского университета, 1968. - 384 с.