O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O’RTA MAXSUS TA‘LIM VAZIRLIGI

QARSHI MUHANDISLIK IQTISODIYOT INSTITUTI

«OLIY MATEMATIKA» KAFEDRASI

Neft va gaz fakulteti

KI-123 guruh

Referat

Mavzu: Aniq integral tushunchasi

Bajardi: talaba Sh. Botirov

Tekshirdi: k. o’qit. E.O. Tufliyev

QARSHI-2015

Mavzu: Aniq integral tushunchasi

Reja.

1. Aniq integral tushunchasiga keltiruvchi yuza haqidagi masala.

2. Aniq integralning ta‘rifi.

3. Integrallanuvchi funksiyalar sinfi.

Mavzu: Aniq integral tushunchasi

1. Aniq integral tushunchasiga keltiruvchi yuza haqidagi masala

Maktab geometriya kursida kesmalar bilan chegaralangan figuralarning yuzlarini, doira hamda uning bo'lagini yuzini topish o'rganiladi. Shuningdek, egri chiziqlar bilan chegaralangan figuraning yuzini topish ham qisman o'rganiladi.

Bu yerda ixtiyoriy yopiq egri chiziq bilan chegaralangan yassi figuraning yuzini topish masalasi bilan jiddiy shug'ullanamiz.

Avvaliga xususiy holni, ya'ni figura $o\ x\ y$ tekisligiga joylashgan bo'lib, yuqoridan uzluksiz $y=f(x)$ $(f(x)\geq 0)$ egri chiziq, quyidan $o\ x$ o'qning $[a,b]$ $(a<b)$ kesmasi va yon tomonlardan $x=a$, $x=b$ vertikal to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan holni qaraymiz. Bu figurani egri chiziqli **trapetsiya** deb ataymiz va $[a,b]$ kesmani uning **asosi** deymiz. Shu egri chiziqli trapetsiyaning yuzini topamiz.

$[a,b]$ kesmani

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$$

nuqtalar bilan n ta ixtiyoriy

$$[x_0 ,x_1], [x_1 ,x_2],\ldots [x_{n-1} ,x_n]$$

kismlarga ajratamiz. Bu nuqtalar orqali $o\ y$ ga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazib egri chiziqli trapetsiyani n ta kichik trapetsiyasalarga ajratamiz. U holda qaralayotgan egri chiziqli trapetsiyaning yuzi n ta kichik egri chiziqli trapetsiyachalarning yuzlari yig'indisiga teng bo'lishi ravshan.

Shuning uchun S orqali egri chiziqli trapetsiyaning yuzini ΔS_k orqali asosi $[x_{k-1}, x_k]$ bo'lgan kichik egri chiziqli trapetsiyaning yuzini belgilasak $S=\Delta S_1+\Delta S_2+\ldots+\Delta S_n$ bo'ladi.

Qisqacha buni $S=\sum_{k=1}^{n}\Delta S_k$ ko'rinishda yozish qabul qilingan.

$$[x_0 ,x_1], [x_1 ,x_2],\ldots [x_{n-1} ,x_n]$$

kesmalarning har birida bittadan ixtiyoriy nuqta olib ularni $z_1, z_2, \ldots, z_n$ lar orqali belgilaymiz. Bu abssissalarda egri chiziq nuqtalarining ordinatalari $f(z_1), f(z_2), \ldots, f(z_n)$ larni yasaymiz.

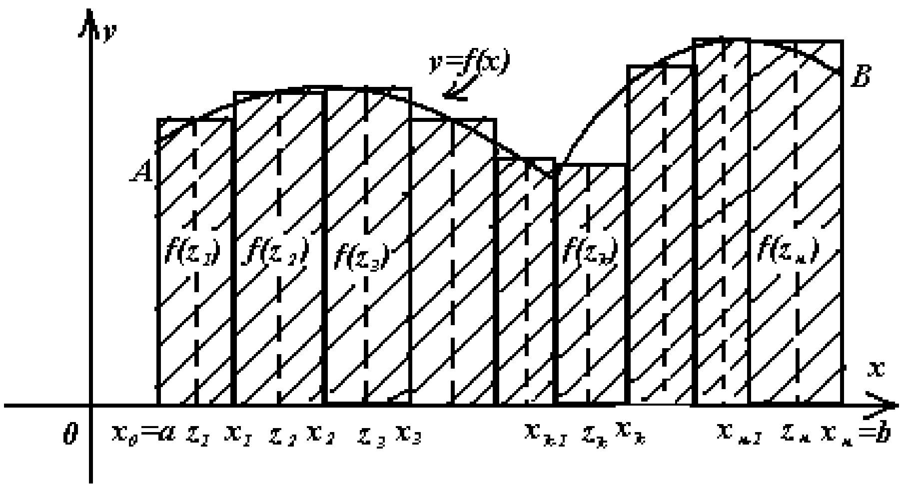
Keyin har bir asosi $[x_{k-1}, x_k]$ $(k=1,2, \ldots n)$ bo'lgan egri chiziqli trapetsiyachalar yuzini, asosi xuddi shunday, balandligi $f(z_k)$ bo'lgan to'g'ri to'rtburchakning yuzi bilan almashtiramiz. Bu to'g'ri to'rtburchakning yuzi

$$f(z_k)\,\Delta x_k$$

bo'lishi ravshan, bunda $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ $[x_{k-1}, x_k]$ kesmaning uzunligi (Δx_k -asos, $f(z_k)$ -balandlik).

Bu yuzani mos egri chiziqli tarpetsiyaning yuzini taqribiy qiymati deb qabul qilsak $\Delta S_k \approx f(z_k)\,\Delta x_k$ va $S \approx f(z_1)\,\Delta x_1 + f(z_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(z_n)\,\Delta x_n$ yoki qisqacha

$$S = \sum_{k=1}^{n} f(z_k)\Delta x_k \quad (1)$$ bo'ladi.



1-chizma.

Agar λ orqali Δx_1, Δx_2, $\ldots, \Delta x_n$ larning eng kattasini beligalasak λ kichrayganda (1) formulaning aniqlik darajasi ortadi. Shuning uchun (1) ning o'ng tomonidagi ifodaning $\lambda \to 0$ dagi limitini S ning **aniq qiymati** deb qabul qilish mumkin, ya'ni

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(z_k)\Delta x_k\,. \quad (2)$$

Shunday qilib, egri chiziqli trapetsiyaning yuzini topish masalasi (2) ko'rinishdagi yig'indining limitini topishga olib keldi.

Ixtiyoriy yopiq egri chiziq bilan chegaralangan yassi figuraning yuzini topish masalasi ham egri chiziqli trapetsiyaning yuzini topish masalasiga keltirilishini ta‘kidlab o’tamiz.

Yuzadan tashqari ko’pgina masalalarning yechimi ham (2) ko’rinishdagi limitni topishga kelishini ta‘kidlab o’tamiz. Shuning uchun $\sum_{k=1}^{n} f(z_k)\Delta x_k$ ko’rinishdagi yig’indi mazmunan nimani anglatishidan qat‘iy nazar uning limintini o’rganamiz.

2. Aniq integralning ta‘rifi. Integrallanuvchi funksiyalar sinfi

Aniq integral oliy matematikaning eng muhim tushunchalaridan biridir. Yuzlarni, yoylarning uzunliklarini, hajmlarni, ishni, inersiya va statik momentlarni, og’irlik markazi koordinatalarini, yo’lni, bosimni va hokazolarni uning yordamida hisoblash mumkin.

$[a,b]$ kesmada aniqlangan $y=f(x)$ funksiya berilgan bo’lsin. Quyidagi amallarni bajaramiz:

1) $[a,b]$ kesmani

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{k-1}<x_k<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$$

bo’luvchi nuqtalar yordamida n ta «kichik»

$$[x_0,x_1],\ [x_1,x_2],\ldots,\ [x_{k-1},x_k],\ldots,\ [x_{n-1},x_n]$$

kesmalarga ajratib ularning uzunliklarini mos ravishda Δx_1 , Δx_2 ,…, Δx_n lar orqali belgialymiz.

2) Har bir $[x_{k-1},x_k]$ $(k=1,2,\ldots,n)$ kesmada bittadan ixtiyoriy nuqta tanlab olib ularni mos ravishda $z_1, z_2,\ldots,z_n$ lar orqali belgilaymiz.

3) Tanlangan nuqtalarda funksiyaning

$f(z_1), f(z_2),\ldots, f(z_n)$

qiymatlarini hisoblaymiz.

4) Funksiyaning hisoblangan qiymatini tegishli $[x_{k-1}, x_k]$ kesmachaning uzunligi Δx_k ga ko’paytirib $f(z_1)\ \Delta x_1$, $f(z_2)\ \Delta x_2,\ldots,$ $f(z_k)\Delta x_k,\ldots,$ $f(z_n)\Delta x_n$ ko’paytmalarni tuzamiz.

5) Tuzilgan ko'paytmalarni qo'shamiz va yig'indini $\boldsymbol{\sigma_n}$ bilan belgilaymiz:

$$\sigma_n = f(z_1)\,\Delta x_1 + f(z_2)\,\Delta x_2, + \ldots + f(z_k)\Delta x_k + \ldots + f(z_n)\Delta x_n$$

yoki qisqacha $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(z_k)\Delta x_k$.

$\boldsymbol{\sigma_n}$ yig'indi $f(x)$ funksiya uchun $[a,b]$ kesmada tuzilgan **integral yig'indi** deb ataladi.

6) $[x_{k-1}, x_k]$ kesmalarning uzunliklaridan eng kattasini λ orqali belgilab uni **bo'linish odimi** deb ataymiz.

Endi bo'linishlar soni n ni orttira boramiz $(n\to\infty)$ va bunda $\lambda\to 0$di deb faraz qilamiz.

1-ta'rif. Agar $\lambda \to 0$ da σ_n integral yig'indisi $[a,b]$ kesmani qismiy $[x_{k-1}, x_k]$ kesmalarga ajratish usuliga va ularning har biridan z_k nuqtani tanlash usuliga bog'liq bo'lmaydigan chekli songa intilsa, u holda shu son $[a,b]$ kesmada $f(x)$ funksiyadan olingan **aniq integral** deyiladi va $\int_a^b f(x)dx$ kabi belgilanadi.

Bu yerda $f(x)$-integral ostidagi funksiya $[a,b]$-kesma integrallash oralig'i, a va b sonlar integrallashning quyi va yuqori chegarasi. x-integrallash o'zgaruvchisi deyiladi.

Shunday qilib, aniq integralning ta'rifidan $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(z_k)\Delta x_k$ kelib chiqadi.

Aniq integralning ta'rifidan aniq integral mavjud bo'lishi uchun $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmada chegeralangan bo'lishi zarur.

2-ta'rif. Agar chekli $\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(z_k)\Delta x_k$ mavjud bo'lsa $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada **integrallashuvchi** deyiladi.

1-teorema (funksiya integrallashuvchi bo'lishining zaruriy sharti). Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada integrallashuvchi bo'lsa, u shu kesmada chegaralangandir.

Isboti. Teskarisini faraz qilamiz, ya'ni $[a,b]$ da integrallashuvchi $f(x)$ funksiya shu kesmada chegaralanmagan bo'lsin. U holda σ_n integral yig'indini z_1, z_2,

$z_3,..,z_n$ nuqtalarni tanlash hisobiga istalgancha katta qilish mumkinligini, ya‘ni $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma_n$ limit mavjud bo’lmasligini ko’rsatamiz.

Bu holda $[a,b]$ kesmani istalgan $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$, $[x_2,x_3]$, …, $[x_{n-1},x_n]$ kesmalarga ajratilishini qaramaylik $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada chegaralanmaganligi sababli u shu kesmalarning kamida bittasi, masalan $[x_0,x_1]$da chegaralanmagan bo’ladi. Qolgan $[x_1,x_2]$, $[x_2,x_3]$, …, $[x_{n-1},x_n]$ kesmalarda bittadan ixtiyoriy nuqtalarni olib ularni mos ravishda $z_2, z_3,..,z_n$ lar orqali belgilaymiz va $f(z_2)\,\Delta x_2 + f(z_3)\Delta x_3 + \ldots + f(z_n)\Delta x_n = \delta_n'$

deb olamiz. $f(x)$ funksiya $[x_0,x_1]$ kesmada chegarlanmaganligi uchun istalgan katta $M>0$ sonni olmaylik $[x_0,x_1]$ kesmada Shunday z_1 nuqta mavjud bo’lib,

$$|f(z_1)| \geq \frac{|\sigma_n'| + M}{\Delta x_1} \quad \text{yoki} \quad |f(z_1)|\Delta x_1 \geq |\sigma_n'| + M$$

bo’ladi. Ikkinchi tomondan

$$\sigma_n = f(z_1)\,\Delta x_1 + f(z_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(z_k)\Delta x_k + \ldots + f(z_n)\Delta x_n = f(z_1)\,\Delta x_1 + \sigma_n'$$

bo’lgani uchun $|\sigma_n| = |\ f(z_1)\ \Delta x_1 + \ \sigma_n'\ | \geq |\ f(z_1)|\ \Delta x_1 - |\ \sigma_n'| \geq |\ \sigma_n'| + M - |\sigma_n'| = M$

kelib chiqadi. $|\sigma_n| \geq M$ tengsizlik $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma_n$ ning mavjud emasligini, ya‘ni $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi emasligini ko’rsatadi. Bu teoremaning shartiga zid. Bu ziddiyatga $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi $f(x)$ funksiya shu kesmada chegaralanmagan deb qabul qilgan noto’g’ri farazimiz oqibatida keldik.

Keltirilgan teorema faqatgina zaruriy shartdan iborat bo’lib, u yetarli emas, ya‘ni funksiyaning chegaralanganligidan uning integrallanuvchiligi kelib chiqmaydi.

Masalan, Dirixle funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} 1, & agar \quad x \quad ratsional \quad bo'lsa, \\ 0, & agar \quad x \quad irratsional \quad bo'lsa \end{cases}$$

ni $[0,1]$ kesmada qarasak u shu kesmada chegarlangan$(|f(x)\ | \leq 1)$. Ammo bu funksiya $[0,1]$ kesmada integrallanuvchi emas.

Haqiqatan, agar *[0,1]* kesmani kichik kismlarga ajratilganda $z_1, z_2, z_3,..,z_n$ nuqtalar sifatida ratsional sonlar olinsa integral yig'indi

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(z_k)\Delta x_k = .\sum_{k=1}^{n} 1\cdot\Delta x_k = \Delta x_1 + \Delta x_2 + ... + \Delta x_n = 1$$

bo'ladi va $z_1, z_2, z_3,..,z_n$ lar sifatida irratsional sonlar olinsa integral yig'indi

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(z_k)\Delta x_k = .\sum_{k=1}^{n} 0\cdot\Delta x_k = 0$$

bo'ladi. Bu tengliklardan σ_n integral yig'indi $\lambda \to 0$ da limitga ega emasligi, ya'ni Dirixle funksiyasi *[0,1]* kesmada integrallanuvchi emasligi kelib chiqadi.

Bu misol shuni ko'rsatadiki, hatto chegaralangan funksiyalarning ham aniq integrallari mavjud bo'lmasligi mumkin ekan. Qanaqa funksiyalarning aniq integrallari har doim mavjud bo'ladi degan savolga quyidagi teoremalar javob beradi. Biz ularni isbotsiz keltiramiz.

2-teorema. Agar funksiya *[a,b]* kesmada uzluksiz bo'lsa, u shu kesmada integrallanuvchidir.

3 teorema. Agar funksiya *[a,b]* kesmada chegaralangan va shu kesmaning chekli sondagi nuqtalarida uzilishga ega bo'lib, qolgan barcha nuqtalarda uzluksiz bo'lsa, funksiya *[a,b]* da integrallanuvchidir.

Natija. *[a,b]* kesmaning chekli sondagi nuqtalaridagina teng bo'lmagan ikkita $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalardan biri shu kesmada integrallanuvchi bo'lsa, u holda ikkinchisi ham integrallanuvchi bo'lib ularning integrallari teng bo'ladi.

4-teorema. Agar $f(x)$ funksiya *[a,b]* kesmada chegaralangan va monoton bo'lsa, u shu kesmada integrallanuvchidir.

[a,b] kesmaning cheksiz ko'p nuqtalarda uzilishga ega bo'lgan chegarlangan funksiyalar orasida integrallanuvchi bo'lganlari ham bo'lmaganligi ham mavjud. Integrallanuvchi bo'lmaganiga Dirixlefunksiyani misol keltirish mumkin.

Chegarlangan va cheksiz ko'p nuqtalarda uzilishga ega bo'lib integrallanuvchi funksiyaga

$$f(x)=\begin{cases} 1, agar\ \dfrac{1}{2n}<x\leq\dfrac{1}{2n-1}\ bo'lsa, \\ -1, agar\ \dfrac{1}{2n+1}<x\leq\dfrac{1}{2n}\ bo'lsa, n=1,2,3,... \\ 0, agar \qquad x=0 \quad bo'lsa \end{cases}$$

funksiyani misol keltirish mumkin. Bu funksiya *[a,b]* kesmada chegaralangan va barcha $x_n=\frac{1}{n}, n=1,2,3,...$ nuqtalarda birinchi tur uzilishga ega.

Endi aniq integralning ta‘rifidan bevosita kelib chiqadigan xossalarini keltiramiz.

1-izoh. Aniq integralning qiymati integrallash o’zgaruvchisining qanday harf bilan belgilanishiga bog’liq emas. Masalan: $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(z)dz.$

2-izoh. Aniq integralning chegaralari almashtirilsa, integralning ishorasi o’zgaradi.

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx.$$

3-izoh. Chegaralari teng bo’lgan aniq integralning qiymati *0* ga teng. $\int_a^a f(x)dx=0.$

Aniq integralning ta‘rifidan foydalanib egri chiziqli trapetsiyaning yuzini ifodalovchi (38.2) tenglikni $S=\int_a^b f(x)dx$

ko’rinishda yozish mumkin. Boshqacha so’z bilan aytganda $\int_a^b f(x)dx$ aniq integralning **geometrik ma‘nosi** egri chiziqli trapetsiyaning **yuzini** ifodalar ekan.

O’z-o’zini tekshirish uchun savollar

1. Egri chiziqli trapetsiya nima?
2. Egri chiziqli trapetsiyaning yuzi nimaga teng?
3. Integral yig’indi nima?

4. Integrallash odimi nima?

5. Aniq integralni ta‘riflang.

6. Aniq integralni geometrik ma‘nosi nimani ifodalaydi?

7. Funksiya integrallanuvchi bo’lishining zaruriy shartini ayting.

8. Integrallanuvchi funksiyalarning sinflarini ayting.

9. Chegaralangan va cheksiz ko’p nuqtalarda uzilishga ega bo’lgan integrallanuvchi funksiyalarga misol keltiring.

10. Aniq integral qaerlarda qo’llaniladi?

11. Chegaralangan, ammo integrallanuvchi bo’lmagan funksiyaga misol keltiring.

Mustaqil yechish uchun mashqlar

Funksiyalarning hosilasini toping.

1. $F(x) = \int\limits_2^x e^{-3t}dt, x > 2$. Javob: ℓ^{-3x}.

2. $F(x) = \int\limits_{x^2}^0 \sin 2t dt$; $x>0$ Javob: $-3x^2 \sin 2x^3$.

3. $f(x)=3-2\sin x$ funksiyaning $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ kesmadagi o’rtacha qiymatini toping. Javob: 3.

Integrallar baholansin.

4. $I=\int\limits_0^2 \sqrt{8-x^2}dx$. Javob: $4<I<4\sqrt{2}$.

5. $I = \int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{5-3\cos x}$. Javob: $\frac{\pi}{8} < I < \frac{\pi}{2}$.

Integrallarni Nyuton-Leybnis formulasidan foydalanib hisoblang.

6. $\int\limits_{-1}^1 (6x^2 - 2x - 5)dx$ Javob: -6.

7. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(5-3x)^3}$. Javob: $\frac{7}{200}$.

8. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \cos 3x dx.$ Javob: *0.*

9. $\int_{3}^{4} \frac{dx}{25-x^2}.$ Javob: $\frac{1}{5}\ell n\frac{3}{2}$

10. $\int_{3}^{4} \frac{dx}{x^2-2x+10}.$ Javob: $\frac{\pi}{12}.$

Integrallarni o'zgaruvchini almashtirib hisoblang.

11. $\int_{3}^{8} \frac{dx}{5-\sqrt{x+1}}.$ Javob: $10\ell n\frac{3}{2}-2.$

12. $\int_{3}^{8} \frac{dx}{\sqrt{(16+x^2)^3}}.$ Javob: $\frac{3}{80}.$

13. $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx.$ Javob: $1-\frac{\pi}{4}.$

14. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5+4\cos x}.$ Javob: $\frac{2}{3}arctg\frac{1}{3}.$

Integrallarni bo'laklab integrallang.

15. $\int_{0}^{2} \frac{xdx}{e^{2x}}.$ Javob: $\frac{e^4-5}{4e^4}.$

16. $\int_{0}^{\pi} x\sin\frac{x}{2}dx.$ Javob: *4.*

17. $\int_{1}^{\sqrt{e}} x\ell nxdx..$ Javob: $\frac{e+1}{4}.$

18. $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\cos^2 x}.$ Javob: $\frac{\pi}{3}-\ell n2.$

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. В.П.Минорский. Сборник задач по высшей математике. Москва, «Наука", 2000.
2. Ё.У.Соатов-Олий математика 1-жилд.Тошкент, «Ўқитувчи», 1992й.

3. Э.Холмуродов,З.Узоқов-Экстремумлар назариясининг амалий масалалар ечишга тадбиқи,Қарши,1991й.

4. Г.Худайберганов, А.Ворисов, Х.Мансуров. Математик анализ. 1-қисм. Қарши, «Насаф», 2003й.