O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

QARSHI MUHANDISLIK IQTISODIYOT INSTITUTI

«OLIY MATEMATIKA» KAFEDRASI

Neft va gaz fakulteti

NGI-110 guruh

Referat

Bajardi: talaba S.Salimov

Tekshirdi: ass. X. Chuyanov

QARSHI-2015

Mavzu: Kompleks sonlar va ularning geometrik tasviri hamda trigonometrik shakli

Reja:

1. Asosiy ta‘riflar.

2. Kompleks sonning geometrik tasviri.

3. Kompleks sonning trigonometrik shakli.

1. Asosiy ta‘riflar

Haqiqiy sonlar bilan ish ko'rilganda noldan farqli har qanday haqiqiy sonni kvadrati musbat bo'ladi deyilgan edi. Ammo kvadrati manfiy bo'lgan sonlar bilan ham ish ko'rishga to'g'ri keladi. Bunday sonlar tabiiyki haqiqiy son bo'lmaydi.

1-ta‘rif. Kvadrati -1 ga teng ifodani **mavhum birlik** deb ataladi va u i orqali belgilanadi.

Shunday qilib, $i^2=-1$ yoki $i=\sqrt{-1}$.

Mavhum birlikning ta‘rifidan $i^3=i^2\cdot i=-1\cdot i=i$, $i^4=i^2\cdot i^2=(-1)(-1)=1$, $i^5=i$ va hokazo umuman k butun son uchun $i^{4\kappa}=1$, $i^{4\kappa+1}=i$, $i^{4\kappa+2}=-1$, $i^{4\kappa+3}=-i$ ekannligi kelib chiqadi.

2-ta‘rif. z kompleks son deb

$$z=a+bi$$

ko'rinishdagi ifodaga aytiladi, bunda a va b haqiqiy sonlar.

a va b ni z kompleks sonning haqiqiy va mavhum qismlari deyiladi va

$$Rez=a, \qquad Jmz=b$$

kabi belgilanadi.

Xususiy holda, agar $a=0$ bo'lsa u holda $z=0+ib=bi$ bo'lib u **sof mavhum** son deyiladi. Agar $b=0$ bo'lsa $z=a+i0=a$ haqiqiy son hosil bo'ladi. Demak, haqiqiy va sof mavhum sonlar kompleks sonning xususiy holi.

3-ta‘rif. Ikkita $z_1=a_1+ib_1$ va $z_2=a_2+ib_2$ kompleks sonlar $a_1=a_2$ $b_1=b_2$ bo'lgandagina teng $(z_1=z_2)$ deyiladi.

Demak haqiqiy qismlari o'zaro va mavhum qismlari o'zaro teng bo'lgan kompleks sonlar teng bo'lar ekan.

4-ta‘rif. Ham haqiqiy qismi ham mavhum qismi noldan iborat kompleks son nolga teng deyiladi.

Demak, $a=0$, $b=0$ bo'lgandagina $z=0$ va aksincha $z=a+ib=0$ dan $a=0$, $b=0$ kelib chiqadi.

5-ta‘rif. Faqat mavhum qismining ishorasi bilan farq qiluvchi ikkita $z=a+ib$ va $\bar{z}=a-ib$ kompleks sonlar o'zaro **qo'shma** kompleks sonlar deyiladi.

6-ta‘rif. Haqiqiy va mavhum qismlarining ishoralari bilan farq qiluvchi ikkita

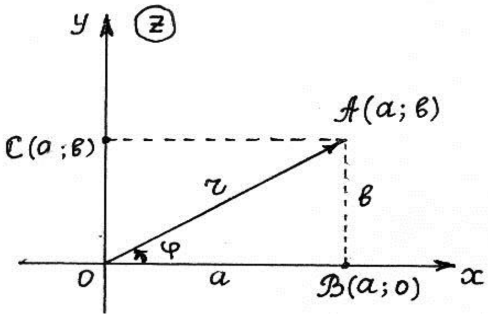
$$z_1=a+ib \quad \text{va} \quad z_2=-a-ib=-z_1$$

kompleks sonlar **qarama – qarshi** kompleks sonlar deyiladi.

2. Kompleks sonning geometrik tasviri

Har qanday $z=a+ib$ kompleks sonni $0xy$ tekislikda koordinatalari a va b bo'lgan $A(a,b)$ nuqta shaklida tasvirlash mumkin. Aksincha, $0xy$ tekislikdagi har qanday $A(a,b)$ nuqtaga $z=a+ib$ kompleks son mos keladi.

Kompleks sonlar tasvirlanadigan tekislik z kompleks o'zgaruvchining tekisligi deyiladi va tekislikka doiracha ichiga z qo'yiladi. (134-chizma)



1-chizma

Shunday qilib kompleks sonning geometrik tasviri Ⓩ tekislikning nuqtasidan iborat ekan. Bunda $0x$ o'qda yotuvchi nuqtalar $z=a$ haqiqiy sonlarni $(b=0)$, $0y$ o'qda yotuvchi nuqtalar esa $z=bi$ sof mavhum sonlarni tasvirlaydi $(a=o)$. Shuning uchun kompleks sonlarni z kompleks o'zgaruvchining tekisligi Ⓩ da tasvirlanganda $0x$ o'q **haqiqiy o'q**, 0y o'q **mavhum o'q** deb ataladi. Umuman aytganda, kompleks sonlar to'plami bilan Ⓩ tekislikdagi barcha nuqtalar to'plami orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud.

$A(a,b)$ nuqtani koordinatalar boshi bilan tutashtirib $\overrightarrow{0A}$ vektorni hosil qilamiz. Ba‘zi hollarda $z=a+ib$ kompleks sonni $\overrightarrow{0A}$ vektor ko'rinishda tasvirlash ma‘qul bo'ladi. Bu ham kompleks sonning geometrik tasviri deyiladi.

Shunday qilib, kompleks sonning geometrik tasviri Ⓩ tekislikdagi nuqtadan yoki vektordan iborat ekan.

3. Kompleks sonning trigonometrik shakli

Koordinatalar boshini qutb, $0x$ o'qning musbat yo'nalishini qutb o'qi deb z kompleks tekislikda qutb koordinatalar sistemasini kiritamiz. φ va r $A(a,b)$ nuqtaning qutb koordinatalari bo'lsin.

A nuqtaning qutb radiusi r, ya'ni A nuqtadan qutbgacha bo'lgan masofa $z=a+bi$ kompleks sonning **moduli** deyiladi va $|z|$ *kabi belgilanadi.*

Pifagor teoremasiga binoan 1-chizmadagi to'g'ri burchakli OAB uchburchakdan $r=\sqrt{a^2+b^2}$ kelib chiqadi. Masalan, $z_1=-3+4i$ sonning moduli $r_1=|z_1|=|-3+4i|=\sqrt{3^2+4^2}=5$ ga teng. Noldan farqli har qanday kompleks sonning moduli musbat haqiqiy sondir.

A nuqtaning qutb burchagi φ ni z kompleks sonning **argumenti** deyiladi va $Argz$ kabi belgilanadi. Argument bir qiymatli aniqlanmay, balki $2\pi k$ qo'shiluvchi qadar aniqlikda aniqlanadi, bunda k-butun son. Argumentning hamma qiymatlari orasida $0\leq\varphi<2\pi$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi bittasini tanlaymiz. Bu qiymat **bosh qiymat** deyiladi va $\varphi=argz$ kabi belgilanadi.

Dekart va qutb koordinatalari orasidagi bog'lanish $a=r\cos\varphi$, $b=r\sin\varphi$ ni hisobga olib $z=a+bi=r\cos\varphi+ir\sin\varphi$ yoki

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi) \qquad (1)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Bu tenglikning o'ng tomonidagi ifoda $z=a+bi$ kompleks sonning **trigonometrik shakldagi yozuvi** deb ataladi.

Qutb burchagi $\varphi=arctg\frac{b}{a}$ kabi topilishi ma'lum.

Shunday qilib, z kompleks sonning moduli deb uni tasvirlovchi vektorning uzunligiga, argumenti deb shu vektorning $0x$ o'qning musbat yo'nalishi bilan tashkil etgan burchagiga aytilar ekan.

$\varphi=arctg\frac{b}{a}$ argumentni hisoblashda z kompleks sonning koordinatalar tekisligining qaysi choragida yotishini hisobga olish kerak, chunki $arctg\frac{b}{a}$ qiymatga φ argumentning ikkita qiymatlari mos keladi. Shuning uchun

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} arctg\dfrac{b}{a}, \ agar \quad a>0, \ \ b>0 \ \ bo'lsa, \\ \pi + arctg\dfrac{b}{a}, \ agar \quad a<0, \ b \ \ istalgan \ \ son \ \ bo'lsa, \\ 2\pi + arctg\dfrac{b}{a}, \ \ agar \quad a>0, \ \ b<0 \ \ bo'lsa. \end{cases}$$

tenglikdan foydalanish kerak. Masalan,

$arg(1+i)= arctg1=\frac{\pi}{4}$, chunki $a=1>0$, $b=1>0$, $arg(-1+i)=$

$=\pi+ arctg(-1)= \pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$, chunki $a=-1<0$, $b=1>0$, $arg(-1-i)=\pi+ arctg1=\frac{5\pi}{4}$, chunki $a=-1<0$, $b=-1<0$, $arg(1-i)= 2\pi+ arctg(-1)=2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}$, chunki $a=1>0$, $b=-1<0$.

Kompleks sonning $z=a+bi$ ko'rinishdagi yozuvi kompleks sonning **algebraik** shakli deyiladi.

Kompleks son vektor shaklida tasvirlanganda haqiqiy songa $0x$ o'qda yotuvchi vektor, sof mavhum songa $0y$ o'qda yotuvchi vektor mos keladi.

1-misol. $z=a+bi$ va $\bar{z}=a-ib$ qo'shma kompleks sonlar bir xil modullarga ega va argumentlarining absolyut qiymatlari teng, ishoralari qarama-qarshi ekanligini ko'rsating.

Yechish. 135-chizmadan

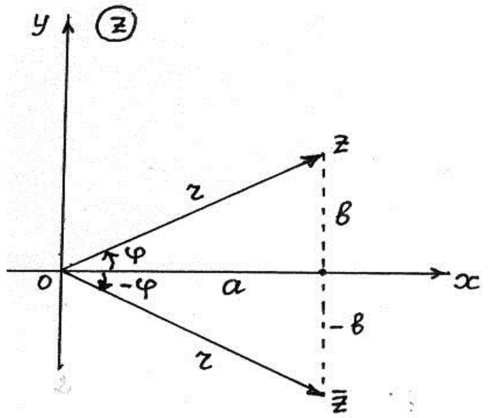
$$|z|=r=\sqrt{a^2+b^2} \quad \text{va} \quad |\bar{z}|=r=\sqrt{a^2+b^2}$$

ekani, ya'ni $|z|=|\bar{z}|$ va $argz= -arg\,\bar{z}$ ekani kelib chiqadi.

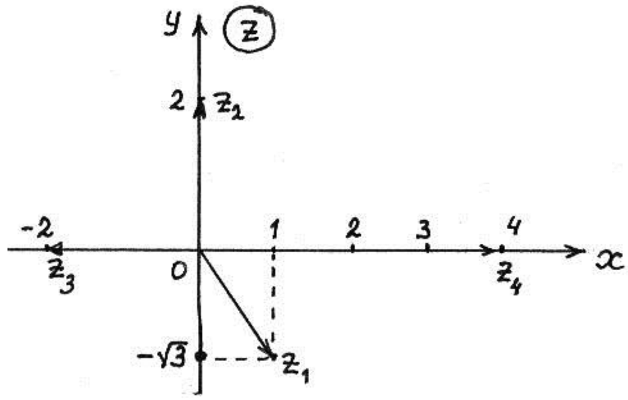
Izoh: Har qanday haqiqiy A sonni ham trigonometrik shaklda yozish mumkin, ya'ni $A>0$ bo'lsa, $A=A(cos0+isin0)$,

$A<0$ bo'lsa, $A=|A|(cos\,\pi+isin\,\pi)$

tengliklar o'rinlidir.



2- rasm



3-rasm

2-misol. $z_1=1-\sqrt{3}\cdot i$, $z_2=2i$, $z_3=-2$, $z_4=4$ kompleks sonlar trigonometrik shaklda yozilsin.

Yechish. 1) $z_1=1-\sqrt{3}\cdot i$ son uchun $a=1$, $b=-\sqrt{3}$, $r=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=2$,

$$tg\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{1}=-\sqrt{3},\quad \varphi=2\pi-arctg\sqrt{3}=2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}.$$

Shunday qilib, $z_1=1-\sqrt{3}\cdot i=2\,(cos\,\frac{5\pi}{3}+isin\,\frac{5\pi}{3})$.

2) $z_2=2i$-sof mavhum son. $a=0$, $b=2$, $r=\sqrt{0^2+2^2}=2$,

$\varphi=\frac{\pi}{2}$, $z_2=2i=2(cos\frac{\pi}{2}+isin\frac{\pi}{2})$.

3) $z=-2$- manfiy haqiqiy son. Shuning uchun (28.2) formulaning ikkinchi tenglamasiga binoan

$z_3=-2=|-2|(cos\,\pi+isin\,\pi)$ bo'ladi.

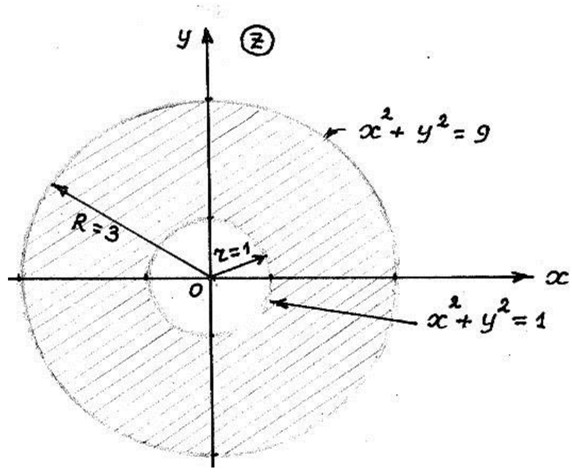
4) $z_4=4$- musbat haqiqiy son bo'lgani uchun (28.2) formulaning birinchi tenglamasiga binoan $z_4=4=4(coso+isino)$ bo'ladi.

3-misol. $|z|\le 3$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi kompleks sonlarga mos (z)-kompleks tekisligi nuqtalarining to'plami topilsin.

Yechish. $z=x+iy$ desak $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ bo'lib, berilgan tengsizlik $\sqrt{x^2+y^2}\le 3$ yoki $x^2+y^2\le 9$ ko'rinishga ega bo'ladi. $x^2+y^2=9$ tenglik markazi koordinatalar boshida bo'lib radiusi 3 ga teng aylanani ifodalaydi. Demak, $x^2+y^2\le 9$-markazi koordinatalar boshida bo'lib, radiusi 3 ga teng doiraning nuqtalari. Bunda $x^2+y^2=9$ aylananing nuqtalari ham to'plamga tegishli.

4-misol. $1\leq|z|<3$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi z kompleks sonlariga mos Z- kompleks tekisligi nuqtalarining to'plami topilsin.

Yechish. 3-misolning natijasidan foydalanib $1\leq x^2+y^2<9$ tengsizliklarga ega bo'lamiz. $x^2+y^2\geq 1$ tengsizlik Z tekislikdagi markazi koordiatalar boshida bo'lib radiusi 1 ga teng aylanada va undan tashqarida yotgan nuqtalar to'plamini ifodalaydi. $x^2+y^2<9$ tengsizlik esa Z tekislikdagi markazi koordinatalar boshida bo'lib radiusi 3 ga teng aylananing ichida yotgan nuqtalar to'plamini ifodalaydi. Demak berilgan tengsizliklar Z tekislikdagi markazi koordinatalar boshida bo'lgan va radiuslari 1 ga va 3 ga teng konsentrik aylanalar orasidagi halqani ifodalar ekan. Bunda radiusi 1 ga teng aylananing nuqtalari ham halqaga tegishli.



(4-chizma).

5-misol. $|z+2-i|=|z+4i|$ (α)tenglikni qanoatlantiruvchi z kompleks sonlar to'plami Z kompleks tekisligida nimani ifodalaydi?

Yechish. $z=x+iy$ desak (α) tenglikni $|x+iy+2-i|=|x+iy+4i|$ yoki $|x+2+i(y-1)|=|x+i(y+4)|$ ko'rinishda yozish mumkin. Oxirgi tenglikni kompleks sonni modulini topish formulasiga asoslanib

$$\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}=\sqrt{x^2+(y+4)^2} \qquad (\beta)$$

kabi yozamiz. Bu yerdagi $\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}$ ifoda $z=x+iy$ kompleks songa mos keluvchi *A(x,y)* nuqtadan *M(-2;1)* nuqtagacha masofani, $\sqrt{(x^2+(y+4)^2}$ esa shu *A(x,y)* nuqtadan *N(0;-4)* nuqtagacha masofani ifodalaydi. Demak, *(β)* tenglik *A(x,y)* nuqtadan *M(-2;1)* va *N(0;-4)* nuqtalargacha masofalar teng ekanligini ko'rsatadi. Kesmaning o'rta perpendikulyari uning uchlaridan bir xil masofada yotishini hisobga olsak berilgan tenglamadagi kompleks sonlariga Ⓩ kompleks tekislikdagi *MN* kesmani o'rta perpendikulyarini ifodalovchi to'g'ri chiziqning nuqtalari to'plami mos kelishi ayon bo'ladi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Kompleks son deb nimaga aytiladi?
2. Qanday kompleks sonlar teng deyiladi?
3. Qanday kompleks sonlar o'zaro qo'shma deyiladi?
4. Qanday kompleks sonlar qarama-qarshi kompleks sonlar deyiladi?
5. Kompleks sonning geometrik tasviri nimadan iborat?
6. Kompleks sonning moduli nima?
7. Kompleks sonning argumenti deb nimaga aytiladi?
8. Kompleks sonning trigonometrik shaklini yozing?
9. Kompleks sonning algebraik shakli bilan trigonometrik shakli orasida qanday bog'lanish mavjud?
10. Kompleks sonlar orasida katta va kichik tushunchalari mavjudmi?

Mustaqil yechish uchun mashqlar.

1. *a) z=3, b) z=2i, d) z=-2, e) z=-3i* kompleks sonlar Ⓩ tekisligida vektor ko'rinishida tasvirlansin hamda ularning modullari va argumentlari aniqlansin.

2. Ushbu ifodalar trigonometrik shaklga keltirilsin:

a) 1+i Javob: $\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

b) 1-i Javob: $\sqrt{2}\left(cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$.

d) $-1+i$ Javob: $\sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

e) $-1-i$. Javob: $\sqrt{2}\left(cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.

f) *3.* Javob: *3(coso+isino).*

g) *–4.* Javob: *4(cosπ+isinπ).*

3. $|i-1+2z|\geq 9$ ni qanoatlantiruvchi *z* kompleks sonlar to'plami Z kompleks tekisligida nimani ifodalaydi? Javob: Markazi $0_1\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ nuqtada va radiusi $R=4,5$ bo'lgan aylanada va undan tashqarida yotgan nuqtalar to'plamini ifodalaydi.

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. В.П.Минорский. Сборник задач по высшей математике. Москва, «Наука”, 2000.
2. Ё.У.Соатов-Олий математика 1-жилд.Тошкент, «Ўқитувчи», 1992й.
3. Э.Холмуродов,З.Узоқов-Экстремумлар назариясининг амалий масалалар ечишга тадбиқи,Қарши,1991й.
4. Г.Худайберганов, А.Ворисов, Х.Мансуров. Математик анализ. 1-қисм. Қарши, «Насаф», 2003й.