birinchi tartibli differensial tenglamalar asosida materiallar qarshiligiga oid masalalarni yechish.

X. Abdurasulov, G.Qayumova, X.Chuyanov
(Qarshi muhandislik – iqtisodiyot instituti)

Anatatsiya

Matematik tadqiqot usullari hozirgi zamon fan va texnikada o'ziga xos muhim o'ringa ega. Hisoblash texnikasining rivojlanishi va uning inson faoliyatining barcha jabxalarida tadbiqining kengayishi bilan matematikaning axamoyati yanada oshdi– matematik hisoblashlar fanning turli yo'nalishlariga– texnika, iqtisodiyot, boshqaruv va shu kabi insoniyat faoliyatida matematikadan foydalanadigan sohalardan tashqari– ilgari matematikada qo'llanilmagan boshqa sohalarga ham chuqur kirib bormoqda, shu sababli matematika–fan va texnikaning tilibo'lib qoldi. Yuqorida maqolada– birinchi tartibli differensial tenglama yordamida mexanika masalalarni yechish va tuzishda–hodisa jarayonlarini to'g'ri tushunishi kabi holatlar ko'rsatilgan.

Tayanch so'zlar: Differensial tenglama, fizika, nazariy mexanika, materiallar qarshiligi, gidravlika, mashina va mexanizmlar nazariyasi, elektrotexnika, kimyo, biologiya, ishlab chiqarish texnologiyasi, geometriya, tabiatshunoslik.

I. Matematik tadqiqot usullari hozirgi zamon fan va texnikasida o'ziga xos muhim o'rniga ega. Hisoblash texnikasining rivojlanishi va uni inson faoliyatining barcha jabhalarida tatbiqining kengayishi bilan matematikaning ahamiyati yanada oshdi.

Ko'plab hodisalarni o'rganish jarayonlari differensial tenglamalarni tuzishga olib keladi. Hozirgi davrda oliy texnika o'quv yurtlarida amaliy va texnik masalalarning shartlaridan foydalanib, differensial tenglamalarni tuzish va uni yechish talab etiladi. Texnikaviy ta'limning taraqqiy etishi bilan–bu talab yana ahamiyatga ega bo'layapti.

Matematikaning – texnik masalalarga tatbig'ida differensial tenglamalar-fizika, nazariy mexanika, materiallar qarshiligi, gidravlika, mashina va mexanizmlar nazariyasi, elektrotexnika, kimyo, biologiya, ishlab chiqarish texnologiyalari va boshqa fanlar bilan bog'liq masalalarni echishga imkon beradi.

Bunday masalalarni echish-albatta differensial tenglamalarni tuzishga olib keladi. Shuning uchun, har xil fizik-matematik va maxsus fanlarning elementar qonunlarini – yaxshi bilish kerak bo‘ladi. Tabiatda ro‘y berayotgan hodisa va jarayonlarni o‘rganish, xossalarni tavsiflash, kattaliklarning o‘zgarish qonunlarini o‘rganishda matematika – fani boshqa fanlarning ma’lumotlarini o‘z ichiga oladi. Bu fanlarning mavjudligida – matematika asoslarining qo‘llamasligi mumkin emas.

Differensial tenglamalar matematikani fizikaning turli qismlari, astronomiya, ximiya, bilologiya va boshqa tabiiy-ilmiy fanlar bilan tarixiy bog‘laydi.

Fizika, texnika, geometriya, tabiatshunoslik, ximiya, biologiya va boshqa shunga o‘xshash fanlardagi masalalarni echish ko‘pgina differensial tenglamalarni tuzish va uni yechishga olib keladi.

Lekin differensial tenglamalarni tuzish har doim oson bo‘lavermaydi: qaysi fanga tatbiq etilsa, o‘sha fanning elementar qonunlarini bilish kerak bo‘ladi. Har hil amaliy masalalarni echishda- ularning shartlaridan foydalanib differensial tenglamalar tuzishda ko‘pincha quyidagi uch holdan biriga keladi:

1. Differensiallar ishtirok etgan differensial tenglamalar
2. Hosilalar ishtirok etgan differensial tenglamalar.
3. Keyinchalik–differensial tenglamalarga almashtiriladigan eng sodda integral tenglamalar.

Berilgan masalalar uchun differensial tenglamalar tuzish va ularni echish quyidagilardan iborat:

a) masalaning shartini chuqur tushunish va uning mohiyatini bilish talab etiladi;

b) qaralayotgan jarayonning differensial tenglamasini tuzish;

v) tuzilgan differensial tenglamaning umumiy echimini topish;

g)berilgan boshlang‘ich va chegaraviy shartdan foydalanib, xususiy yechimini topish;

d) berilgan qo‘shimcha shartlardan foydalanib yordamchi parametrlarni topish (masalan-proporsionallik koeffitsienti va boshqalar);

e) qaralayotgan jarayonning umumiy qonuni va izlanayotgan miqdorlarning son qiymatini topish;

j) javobni tahlil qilish va masalaning avvalgi holatini tekshirish.

II. Hozir esa material qarshiligiga oid masalalarni differensial tenglamalar tuzish – berilgan boshlang‘ich shartlardan foydalanib – xususiy yechimni topish va qo‘shimcha shartlardan foydalanib yordamchi – parametrlarni topish (proporsionallik koeffitsienti va boshqalar) larni kuramiz.

Masala1. Uzunligi L bo’lgan po’lat simning bir uchi maxkamlangan va o’zining og’irligi ta’sirida muozanat holatiga turibdi. Simning uzayishini toping (po’latning hajm og’irligi $\gamma = w/м^2$).

Yechish. T taranglik miqdorikesmning joyiga qarab o’zgaradi. Bu taranglik simning pastki qismida og’irligiga teng. Shuning uchun, simning har xil qismi har xil cho’ziladi. Simning maxkamlangan joyida x masofadagi no’qtada dx uchun T tarangligi ushbu proporsiya bilan aniiqlanadi: $\frac{T}{P} = \frac{L-x}{L}$, ($P$ –simning og’irlik hajmi)(1)

1- rasm (1) dan $T = \frac{P}{L}(L-x)$ hosil bo’ladi. Po’lat simning cho’zilish ko’chi T ta’sirida $\Delta l(м)$ uzayish ushbu ifodaga teng:

$$\Delta l = k\frac{P}{S}L, \qquad (2)$$

bu yerda k –uzayish koefsenti, S –ko’ndalang kesm yuzi $(sм^2)dx$ cho’zilishi uchun qo’yidagini yozamiz: $dl = \frac{T}{S}dx,$ yoki $dl = \frac{kP}{LS}(L-x)dx.$

Lekin $P = \frac{\gamma LS}{1000}(kГ)$ bo’lgani uchun qo’yidagini yozamiz: $P = \frac{\gamma LS}{1000}(kГ)$

Bu tenglamani integrallaymiz: $l = \frac{k\gamma}{1000}\int(L-x)dx = \frac{k\gamma}{2000}L^2.$ po’lat simning o’zayishi qo’yidagiga teng bo’ladi: $l = \frac{k\gamma}{2000}L^2$.

Masala2. Guk qonuniga asosan l uzunlik elastik snur cho’zuvchi ko’ch ta’sirida klF ga teng bo’lgan uzunlik ortirmasini oladi. Bu yerda k –cho’zilish koefsenti. Uch metr uzunlikdagi shnur bir uchidan osilgan. Agar shnurning og’irligi 2 kg bo’lsa, u qancha uzayadi.

Yechish. Argument sifatida shnurning olingan no’qtasida biror M no’qtagacha x uzunligini, izlanayotgan funksiya sifatida esa shnurning ushbu qismining uzayishi

$y = f(x)dx$ ni qabul qilamiz (9-rasm) dx uzunligi istalgan bo'lagining $(3-x)(м)$ uzunligidagi shnur qismiga P og'irlik ko'chi ta'sir qiladi. 1 metr shnurning o'g'irligi $2/3$ kg bo'lsa $p = \frac{2}{3}(3-x)$ bo'ladi, 2-rasm dx bo'lakdagi P og'irlik ko'chini o'zgarmas deb, Guk qonuni asosida dx bo'lakdagi shnur uzunligining ortishini qo'yidagi tenglama bilan aniqlaymiz: $dy = \frac{2}{3}k(3-x)dx.$ Tenglamadan, uningumumiy yechimini topamiz: $y + \frac{k}{3}(3-x)^2 = C$

Boshlang'ich $x = 0,\ y = 0$ shartlar asosida $C = 3k$ shunday qilib, shnurning uzayishi: $y = 3k - \frac{(3-x)^2}{3}k$ qoida bo'yicha aniqlanadi. Bu ifodadan shnurning uzunligi $x = 3$ m bo'lganda, uning uzayishi $y = 3k$ miqdorga teng bo'lishi kelib chiqadi.

Masala3. Suv oqib chiqadigan truba devoridan l uzunligida tashqariga chiqqan. Trubaning ichki deametri $d = 16$ sm. Truba devorining qalinligi 2 sm. Trubaning oxiri $h = 0{,}5$ ga egilishi uchun l qanday uzunlikda bo'lishini toping. Po'latning solishtirma og'irligi $\gamma = 7{,}8$. Egiluvchanlikning moduli $E = 2 \cdot 10 кг/см^2$

Yechish. Trubani konsol tusin deb qarash mumkin. (konsol tashqariga chiqqan qismi). Bu tusin tekis taqsimlangan q yuk bilan yuklangan. Trubaning $d\xi$ elementiga $qd\xi$ elementar yuk ta'sir etadi. Buning $M(x, y)$ no'qtaga nisbatan moment $q(\xi - x)d\xi$ ga teng bo'ladi. Bundan egiluvchan moment: $M = \int_x^l q(\xi - x)d\xi = \frac{q(l-x)^2}{2}.$ (1)

Egiluvchan chiziqning differensial tenglamasi: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EG}$ (2) M – no'qtaga nisbatan moment, E – egiluvchanlik moduli, G – enersiya moment. (1) va (2) – dan $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q}{2EG}(q-x)^2.$ (3).

(3) – tenglama $y = f(x)$ - ko'rinishdagi tenglamaga keladi. va uni ikki marta integrallab qo'yidagi umumiy yechimni olamiz: $y = \frac{q}{24EG}(l-x)^2 + C_1x + C_2$ (4)

To’sinning oxirgi no’qtasida $y|_{x=0}=0,\ y'|_{x=0}=0$ shartlardan $C_1=\frac{ql^3}{6EG}\ va\ C_2=\frac{ql^4}{24EG}$ (5). (4) va (5) dan $y=\frac{q}{24EG}(6e^2x^2-4lx^3+x^2)$ (6)

(6) – izlanayotgan egiluvchan chiziqning tenglamasidir. To’sinning oxirida egilishida $x=l-$bo’lganda $h=\frac{qe^4}{8EG}$ (7) $h=\frac{q}{24EG}$ (6) va (7) – dan $l=\sqrt{\frac{8EGh}{q}}$ (8) hozir esa q – yukni va G – inersiya momentni aniqlaymiz:

q_1-1sm uzunlikdagi trubaning og’irligi.

q_2-1sm uzunlikdagi truba ichidagi suvning og’irligi

Bu holda umumiy yuk (nagruzka): $q=q_1+q_2$

$q_1=\frac{\pi}{4}(d_2^2-d_1^2)\cdot\gamma=\frac{\pi}{4}(20_2-16^2)\cdot 7{,}8=0{,}882$ kg/sm

$q_2=\frac{\pi}{4}d_1^2\cdot l=\frac{\pi}{4}16^2=201kg/sm=0{,}201$kg/sm (l=1sm)

$q=0{,}882$kg/sm+ 0,201kg/sm=1,083 kg/sm (9)

D–diametrga nisbatan doiraning enersiya moment $G=\frac{\pi d^4}{64}$ u holda $G=\frac{\pi}{64}(20^4-16^4)=4710\,\text{sm}^4$ (10) masalada berilgan va G,q qiymatlarini (8) ga quysak, l ning aniq qiymqtinitopamiz: $l=\sqrt{\frac{8\cdot 2\cdot 10^6\cdot 4710\cdot 0{,}5}{1{,}083}}=431\,\text{sm}.$

Masala4. Tik prujinaga osilgan P yuk prujinani l uzunlikka uzaytiriladi. Prujinaning og’irligi hisobga olinmagan holda, uning harakat qonunini toping.

Yechish. Xususiy o’qni tik pastga yunaltiramiz va analitik holatdagi joyini O bosh no’qta deb olamiz. $A(x)-$no’qtaga har qanday holatda ikkita kuch ta’sir etadi: $P=mg-$og;irlik va $F-$prujinaga tiklanuvchi kuchlar. Guk qonuni bo’yicha deformatsiya natijasida egiluvchi kuchlar mos ravishda – shu deformatsiyalarga proporsional bo’ldi. Ono’qtada egiluvchan kuch P_0-og’irlikka teng, unga mos deformatsiya l.

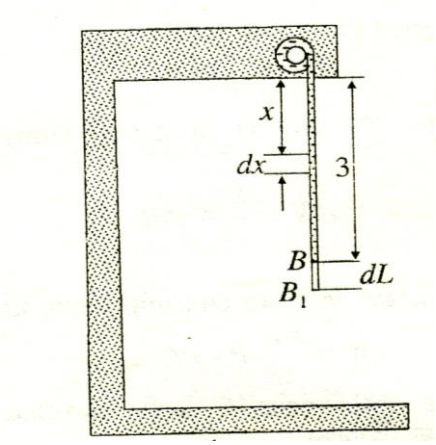
$$|P|=kl \qquad (1)$$

A no'qtadagi egiluvchan kuch F, unga mos deformatsiya $l+x$: $|F| = k(l+x)$ (2) ni (1) ga bo'lamiz: $\left|\frac{F}{P}\right| = \frac{l+x}{l}$ (3) va $|F| = P + \frac{P}{l}x.$(4) $F-$kuch manfiy yo'nalishga ega bo'lgani uchun: $F = -P - \frac{P}{l}x$ (5) Bu kuchlarning teng ta'sir etuvchisi: $R = \frac{mg}{l}x$ va Nyutonning ikkinchi qonuniga asosan $m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{mg}{l}x$ yoki $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l}x$ (6)

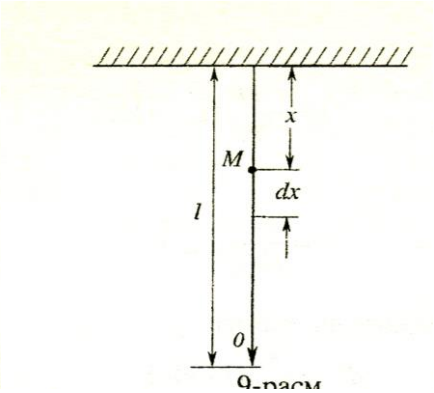
(6) – chi Differensial tenglamani ikki marta integrallab, uning quyidagi umumiy yechimini:

$$x = C_1 \sin\sqrt{\frac{g}{l}}t + C_2 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}t \qquad (7).$$

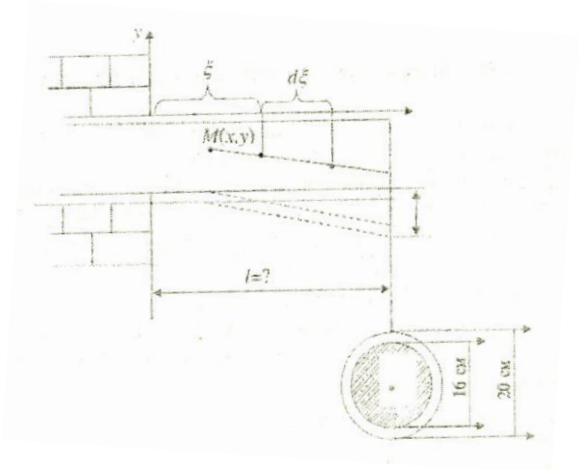
$x\Big|_{t=0} = a;\ \frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = 0-$boshlang'ich shartlardan foydalanib $C_1 = 0,\ C_2 = a$ ekanligidan kelib chiqadi va hususiy yechim $x = a\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t$ va uning davri $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$



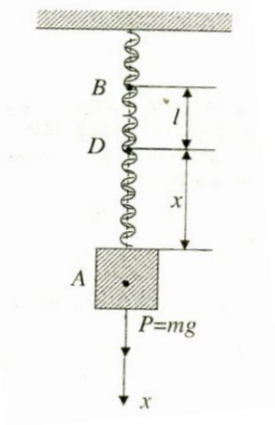
1- rasm



2- rasm



3- rasm



4-rasm

Xulosa: Bu maqolada Birinchi va ikkinchi tartibli differensial tenglama yordamida materiallar qarshiligiga doir masalalarni yechishning ayrimlari ko’rsatilgan, masala shartini to’g’ri tushunish qaralayotgan jarayonning umumiy qonunlarini bilish, bu masalani yechish uchun differensial tuzish usullarini bilish ko’rsatilgan.

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. *Гудышенко Ф.С. Павллюк, Волкова сборник задача по дифференциальным уравнениям. Киев: Вища школа, 1972 г.*
2. *Киселев А.И. Краснов М.А., Макаренко сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М. Высшая школа, 1965г.*
3. *Матвеев Н.М. сборник задач и уравнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Минск: Вышейшая школа, 1970 г.*