O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O’RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

BERDAQ NOMIDAGI QORAQALPOQ DAVLAT UNIVERSITETI
MATEMATIKA FAKULTETI
«Amaliy matematika» kafedrasi

«Amaliy matematika va informatika» bakalavr yo’nalishi
IV-kurs talabasi Xaytbayev Navruzning

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Mavzu: Nochiziqli tenglamalar va tenglamalar sistemasini yechish usullarini dasturiy amalga oshirish

Ilmiy rahbar: **dots.R.Mustafaeva**
Kafedra mudiri: **dots.M.Berdimuratov**

Nukus_2019

Mundarija

K I R I SH

Har xil ilim sohalarida har xil obektlarni (xodisalarni,jarayonlarni) ularning matematik modellarini yasab tadqiqotlash masalalari Nochiziqli tenglamalarni yechishga olib keladi. Nochiziqli tenglamalar amaliy matematikaning keng tarqalgan eng asosiy masalalarining biri bo’ladi. Bu masala hozirgi vaqtda bir noma’lumli haqiqiy va kompleks koeffitsientli bir algebraik tenglama berilgan hol uchun yetarli to’liq yechiladi.

Nochiziqli tenglamalarni yechish usullari, asosan ikki katta guruhga bo’linadi: to’g’ri va iteratsiyon usullar. To’g’ri usullar tenglamaning yechimlarini bazi-bir formula ko’rinishida yozishga imkon beradi va hamma vaqt uning aniq yechimlarini topishni ta’minlaydi [6,8,9].

Lekin hisoblash amaliyotida uchirashadigan murakkab nochiziqli tenglamalarning ko’pchiligini to’g’ri usul bilan yechish mumkin bo’la-vermaydi. Bunda boshqa, amaliy masalalarni yechish jarayonida kelib chiqgan tenglamalarning koeffitsentlari va ozod hadlari ko’pchilik hollarda faqat yaxlit turida belgili sonlar bo’ladi. Shu jarayonga bog’liq nochiziqli tenglamalarni va ularning sistemalarini iteratsiyon usullar yoki ketma-ket yaqinlashish usullari deb ataladigan yaqinlashish usullari bilan yechiladi. Bunday usulning ko’pchiligida, berilgan tenglamaning faqat bir ildizi joylashgan yetarli kichik masofasi avvaldan berilgan deb hisoblanadi. Izlanayotgan yechimning kichik atrofida yotgan nuqtalarning bittasi ildizga boshlang’ich yaqinlashish hisobidan qabul qilinib, bu ildizni taqrib usulning biri bilan avvaldan berilgan aniqligi bilan aniqlaydi. Bunday usullar sonli usullar deb ataladi[1,6,9].

Bu bitiruv malakaviy ishida amaliyotda ko’p qo’llaniladigan nochiziqli tenglamalarni va tenglamalar sistemasini yechishning iteratsiyon usullari qaraladi.

Bitiruv malakaviy ishi kirish bo’limi, olti paragrafdan, xulosa bo’limidan, fodalanilgan adabiyotlar va qo’simchalardan iborat.

Bitiruv malakaviy ishining 5-paragrafda nochiziqli tenglamalar sistemasining Nyuton usuli bilan taqribiy yechish qaraladi. Bunday sistemalarni yechish uchun ketma-ket yaqinlashish usulidan foydalaniladi va boshlang’ich yaqinlashishini ma’lum deb ketma-ket aniq ildizlari izlanadi.Bu sistemadagi $f(x)$ funksiyalari ba’zi bir qavariq sohada uzluksiz differensiallanuvchi bo’ladi deb va bu usulda funksiyaning birinchi tartibli xususiy hosilalarini Yakobi deb ataladigan matritsa tuziladi va Nyuton usulida bu matritsaga teskari bo'lgan matritsasindan foydalaniladi [1,7,9].

Bitiruv malakaviy ishining 6-paragrafda nochiziqli tenglamalar sistemasining oddiy iteratsiya usuli bilan taqribiy yechish masalasi qaraladi. Bunda iteratsiyalik jarayonlarning yaqinlashuvchi bo’lishining yetarli shartlari keltirilgan[1,6,8,9].

Sonli misollar bo’limida nochiziqli tenglamalarni oraliqni teng ikkiga bo’lish, Nyuton va oddiy iteratsiya usuli bilan yechimlari topiladi. Ikki o’zgaruvchili nochiziqli tenglamalarni,algebraik va transtsendent tenglamalar sistemasini Nyuton va iteratsiya usuli bilan yechish masalasi qaraldi.Qaralgan nochiziqli tenglamalar va tenglamalar sistemalarining yechimi joylashgan oraliqlarni aniqlash uchun, ularning grafiklari MathCad va Maple dasturida yasaldi[2]. Iteratsion usullarning algoritmiga C++ tilinda hisoblash programmasi yozildi va qo’yilgan masalaning natijalari $\varepsilon = 10^{-8}$ aniqligi bilan kompyuter yordamida olindi. Hisoblash programmalarning C++ tilindagi matni qo’shimcha bo’limda keltirilgan.

Bitiruv malakaviy ishining xulosa bo’limida ishda qaralgan masalalar va olingan natijalar taxlil qilindi.

1-§. Nochiziqli tenglamalarni sonli yechish masalasi

1. Masalaning qo'yilishi

Hohlagan funksiya'ni uch usuli bilan yozib ko'rsatishga bo'ladi:

-analitik (matematik simvollar yordamida)

$$y = Hx;\ y = x^2 - x + 1;\ y = \sin x^2;$$

-jadval formasida:

X	1	1,2	1,4	1,6	1,8
Y	-0,1	-0,7	-0,5	-0,05	0,5

-grafik turida(1-rasm).

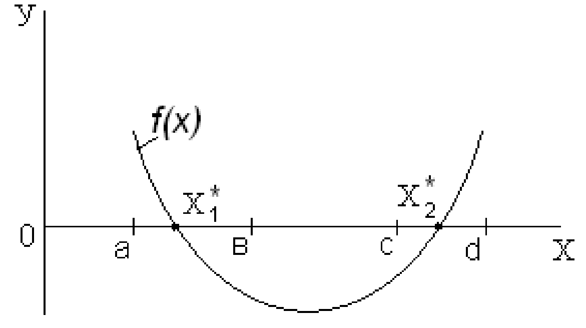
Tenglamani yechish deganda– bu tenglamani tenglikka aylantiruchi x argumentning qiymatini hisoblab topish tushuniladi. Grafik usulining ma'nosi $-x_i$ –ning absissa o'qini kesib o'tuvchi qiymatlarini toppish tushuniladi.

Umumiy o'rta bilim berish maktabida o'tiladigan matematika va matematik analiz fanida elementar funksiyalarning ildizlarin topish usullari qaraladi. Lekin amaliyotda ko'pincha shunday masalalar va modellar uchrashadi, ularning yechimlarini analitik usullar bilan topish mumkin emas.

Birinchidan, yechimlarini topishning aniq usullari bor tenglamalar oz bo'lib hisoblanadi. Ikkinchidan, ko'pchilik aniq usullar ancha ko'p mehnat talab qiladi, shu sababli ulardan foydalanish maqsadga muvoffiq bo'lmaydi. Uchinchidan, ko'pchilik hollar uchun tenglamaning aniq yechimi za'rur emas bo'lib va qo'yilgan masala yechilgan bo'ladi, agar berilgan aniqlik bilan uning taqribiy yechimi topilgan bo'lsa.

Tenglamaning taqribiy yechimini topish jarayoni ikki bosqichga bo'linadi: Ildizni ajratib olish va uni aniqlash. Aytaylik, $y = f(x)$ funktsiyasi x_1^* va x_2^* ildizlariga ega bo'ladi deb faraz qilamiz. Ildizni ajratib olish deganda – bu ildiz joylashgan (a,b)ва (c,d) bo'lgan kesmalarni (1-rasm) topishdan iborat bo'ladi.

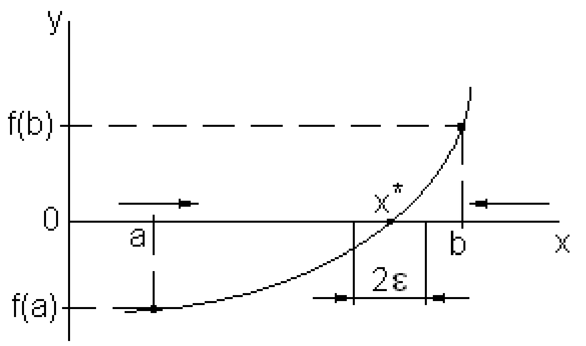
Ildizni aniqlab olish – bu katta bir mustaqil masala bo'lib va ma'lum bir matematik analizning usullari asosida yetarli natiyjali bo'lib yechiladi. Bu o'ziga xos,spetsifik usullarning ba'zi birlarini qaraymiz.



1-rasm.Ildizni ajiratib olish

Ildizni ajratib olgandan keyin, uning qiymati ya'na aniqlanadi, bunda ikki printsipiall yondashish mumkin bo'ladi.

Aniq algoritmlarni qo'llanish yo'li bilan $(a-b)$ ajratilgan kesmani $(b_n - a_n) \leq 2\varepsilon$ nisbati bajarilguncha kichiklashtirilib boriladi, bunda $\varepsilon - x_n$ ildizga taqribiylashning mumkin bo'lgan xatoligi (2-rasm).



2-rasm. Ildiz joylashgan intervalning o'zgarish kinetikasi

Unda ildizning haqiyqiy qiymati

$$x^* = x_n \pm \varepsilon = \frac{b_n + a_n}{2} \pm \varepsilon$$

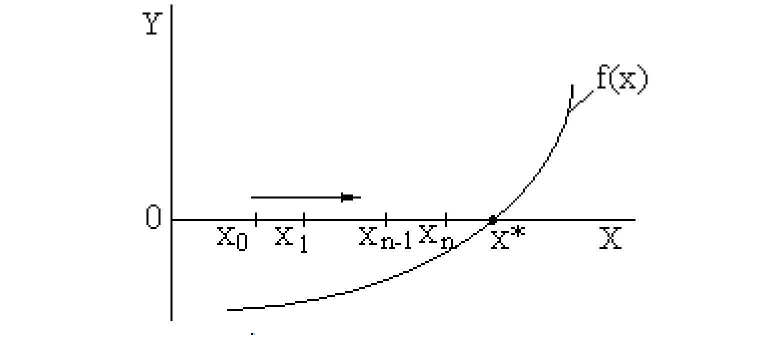
oralig'ida bo'ladi deb tasdiqlash mumkin bo'ladi, $\frac{b_n + a_n}{2} = x_n$ - qiymati ildizning taqribiy qiymati. Hozir ko'rsatib o'tamiz, $f(b) \cdot f(a) < 0$ sha'rti za'rur bo'ladigani va u $b > x^*, a < x^*$ nisbatlarining bajarilishiga kafolat beradi. Bunday algoritmni tenglamaning yechimiga ikki tomonlama taqribiy deb klassifikatsiyalasa bo'ladi.

Ildiz joylashgan kesmani kichraytirish jarayoni bir qator $a_0; b_0; a_1; b_1; a_2; b_2; ....; a_n; b_n,$ sonlarning paydo bo'lishi bilan birga bo'ladi va ular bo'yicha

$$x_0 = \frac{b_0 + a_0}{2}; x_1 = \frac{b_1 + a_1}{2}; ....; x_n = \frac{b_n + a_n}{2}$$

qiymatlari hisoblanadi. Bu satr sekin-senkin ildizning haqiyqiy qiymati bo’lgan x^* yaqinlashadi.

Ildizni topishning ikkinchi bir algoritmi ildiz joylashgan *(a,b)* intervalni topish masalasini nazarda tutmaydi, aniq bir fikrlash asosida ildizning dastlabki bir x_0 qiymatini ajratib olib, undan musbat belgili bir algoritm bo’yicha bajarilgan hisoblashlar natijasida bir qator $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n$ sonlarni hisoblab olib va ular ildizning haqiyqiy qiymatiga yaqinlashadi, ya’ni $f(x_i) \to 0$ bo’ladi (3-rasm).



3-rasm.Ildizga bir tomonlama yaqinlasish sxemasi

Ildizning x^* haqiyqiy qiymatiga qarab x_0 saylab olishga bog’liq berilgan tenglamaning ildiziga $|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon$ sharti bajarilguncha musbat tomondan va chap tomondan yaqinlashuvchi bo’ladi.

2.Ildizni ajratib olish. Odatda ildizni ajratib olish uchun grafik va analitik usullardan foyaniqanadi.

Umumiy holda tenglamaning ildizini ajratib olish jarayonini algoritimlashtirish mumkin emas. Shu boisdan $f(x)$ funksiyasi haqidagi barcha bor ma’lumotlardan foydalanib, nochiziqli tenglamalarning ildizlarini ajratish ko’pchilik hollarda qo’lda bajariladi. Agarda nochiziqli tenglamasi ba’zi bir qo’yilgan amaliy masalaning modeli bo’lsa, unda ba’zida, uning fizik bashoratlariga asoslanib ildizning taqribiy qiymati aniqlanadi.

Ildizni ajratib olishning grafik usuli. Bu yaxshi ko’rgazmali usul bo’lib va karrali ildizlarning barchasini solishtirmali oddiy turda aniqlashga imkoniyat beradi.

Uchinchi tartibli tenglamasini qaraymiz:

$$y = x^3 - x + 1; \qquad (1.1)$$

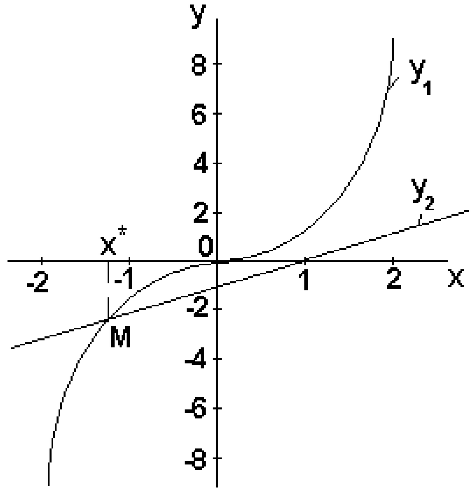
agarda x^*-tenglamaning ildizi bo'lsa, unda barcha $x = x^*$ da $y = 0$ bo'lganligi ma'lum, demak $0 = (x^*)^3 - x^* + 1$ ya'ni

$$(x^*)^3 = x^* - 1. \qquad (1.2)$$

Belgilashlar kiritamiz

$$y_1 = x^3;$$

$$y_2 = x - 1.$$



4-rasm.Chiziqli emas tenglamaning ildizlarni ajiratish

y_1 va y_2 funksiyalarning har biri yetarli tartibida sodda bo'lib, shu bilan birga ularning grafik ko'rinishi ham oddiy bo'ladi. y_1 va y_2 funksiyalarining grafiklarini chizamiz (4-rasm).

y_1 va y_2 funksiyalarining grafiklarining kesishish nuqtasi bo'lgan M nuqtasining absissasining (1.2) tenglamaning ildizi mos keladi. Qaralayotgan holat uchun

$y = x^3 - x + 1$ tenglamasi faqat bir ildizga ega bo'ladi va u $-2 \le x^* \le -1$kesmasida joylashgan bo'ladi

Ildizni ajratib olishning jadval usuli .Yana bir misol qarayniz

$$y = 5^x - 6x - 3 \qquad (1.3)$$

tenglamaning ildizini ajratish jarayonini amalga oshiramiz.

Bu funksiyani ikki funksiya turida yozib ko'rsatamiz:

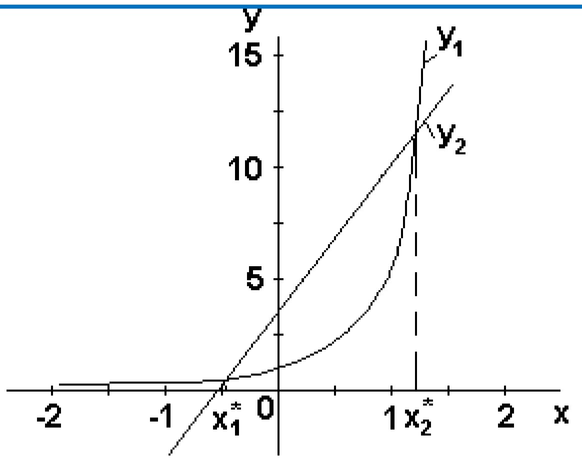
$$y_1 = 5^x; \qquad y_2 = 6x + 3.$$

Bunda, agarda $x = x^*$ bo'lganda, $y = 0$ yoki $y_1 = y_2$ bo'ladiganligi ma'lum. Son oqida bir qator nuqtalar ajratib olinib va y_1, y_2 funksiyalarning qiymatlarini hisoblablaymiz, u bilan birga ularning nisbatlarini ham hisoblaymiz. Hisoblash natijalarini jadvalda ko'rsatamiz(1-jadval).

y_1 va y_2 funksiyalarning grafigini yasashga bo’ladi, leykin bunda y_1 / y_2 munasabatini qarab o’tish yetarli bo’ladi. Bu qiymatni ikki marotaba o’zgartilishi ko’rinib turibdi.Birinchi marotaba (-1,0) oraliqda,ikkinchi marotaba (–1;2) oraliqda. Ikki funksiya’ning grafiklarining kesilishish nuqtalari shu oraliqlarda bor bo’ladiganligi aniq.

1-jadval. $y = 5^x - 6x - 3$ tenglamaning ildizini ajratib olish jarayoni.

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
y_1	0	0,2	1	5	25	$+\infty$
y_2	$-\infty$	-3	3	9	15	$+\infty$
y_1/y_2	$y_1 > y_2$	$y_1 > y_2$	$y_1 < y_2$	$y_1 < y_2$	$y_1 > y_2$	$y_1 > y_2$

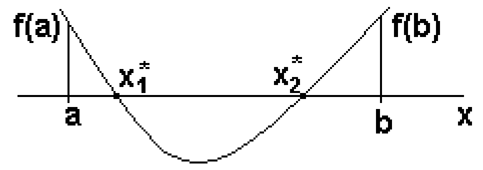


5-rasm. $y = 5^x - 6x - 3$ tenllamaning ildizlarin ajiratish

Shu boys (1.3) tenlamasi ikki ildizga ega bo’ladi va ular yoqarida ko’satilgan kesmalarda joylashgan deb tastiqlashga bo’ladi(5-rasm).Grafik usuldan ko’p qo’llaniladi. Odatta shu usuldan foydalanib ildizi joylashgan masofada ajiratib oladi, lekin bu usul yuqori chegarasiga ega emas va shu boysdan bu usul asosida yakuniy xulosa chiqarish har doyim mumkin bo’la- bermaydi.

Ildizni ajratib olishda quydagi berilgan teoremadan foydalanish yaxshi natiyja beradi:

Teorema. Agar $f(x)$ uzliksiz funksiyasi (a,b) kesmada aniqlangan bo'lsa bu kesmada belgisini o'zgartiradigan bo'lsa,ya'ni $f(a)\cdot f(b)<0$, unda bu kesmada $f(x)=0$ tenglamaning eng kamida bir ildizi bor bo'ladi yoki ildizlarning soni toq bo'ladi.

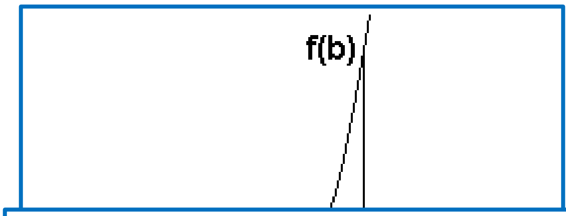


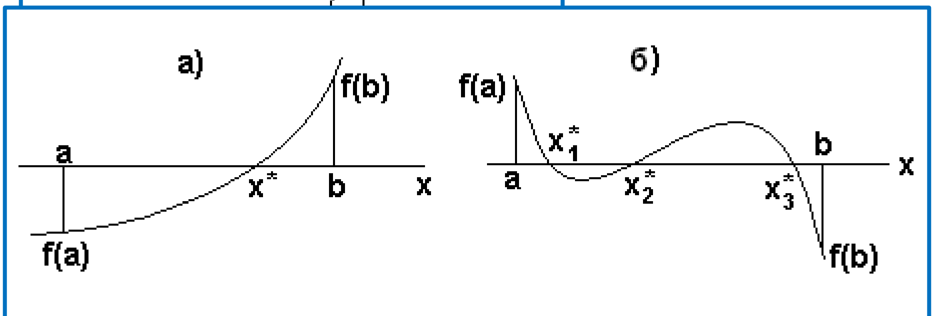
7-rasm.Tenglama ikki ildizga ega bo'ladi

Agar $f(x)$ funksiyasi uzliksiz va differensiyallanuvchi bo'lib va uning hosilasi (a,b) kesmada ishorasini o'zgartmasa, unda bu kesmada $f(x)=0$ tenglamaning faqat bir ildizi joylashgan bo'ladi.

Haqiyqatdan ham , 6a)-rasmda ko'rinib turiganidek $a<x^*$ bo'lsa $f(a)<0$ bo'ladi, $b>x^*$ bo'lsa $f(b)>0$ bo'ladi, demak $f(a)\cdot f(b)<0$. 6,б-rasimda $f(a)\cdot f(b)<0$ sharti o'rinlanganda funksiya uch ildizga ega bo'ladi. Agar $f(a)\cdot f(b)>0$ bo'lganda , unda bu kesmada ildiz yo'q bo'lib hisoblanadi, yoki ularning soni juft bo'ladi (7-rasm).

Ayrim vaqtlar, ildizlarning sonini aniqlash uchun matenatik analiz kursida qaraladigan funksiyalarni izatlash klassik usullardan foyaniqansak ham bo'ladi.





6-rasm. Ildizlarning soni toq bo'lgan shartlari

2-§. Nochiziqli tenglamalarni yechishning masofani teng ikkiga bo'lish usuli.

Ixtiyoriy $f(x)=0$ tenglamasi berilgan bo'lsin. (a,b) kesmasida x^* ildizi ajratib olingan deb hisoblaymiz. Qaralyotgan ildizning yaxlit manosi ε aniqligi bilan topish talab qilinadi, bunda ε-yetarli kichik bo'lgan musbat son. Tadqiqotlanuvchi funksiya ajratib olingan kesmada uzliksiz deb qabul qilinib, bundan $f(a)\cdot f(b)<0$ tengsizligi o'rinlanadi deya tastiqlashga bo'ladi. (a,b) kesmasini c nuqtasi bilan ikkiga bo'lamiz (8-rasm):

$$c=\frac{a+b}{2}$$

va $f(c)$ qiymatini hisoblaymiz. Agarda $f(c)=0$, unda $x^*=c$ berilgan

tenglamaning ildizi topilgan bo'ladi. Teskari holadda $f(c)\neq 0$ bo'ladi va ikkinchi bir kesmasiga o'tish kerak bo'lib, bunda ikki chegaraning birini *(a yoki b)* *c* nuqtasi bilan almashtirish tugri keladi. Yangidan, ya'ni o'zgartirilgan chegaralarning uchlarida $f(x)$ funksiyasi har xil belgidagi qiymatlarni qabul qilishi kerak. $f(c)$ qiymatini hisoblaymiz. Bundan smusbat taliqlash yurgizamiz:

-agar $f(a)\cdot f(c)>0$, unda $a\rightarrow c$ ga almashtirish zarur bo'ladi va musbat (a,b) kesmasida ildizni aniqlash olib boriladi;

-agar $f(a)\cdot f(c)<0$ bo'lsa, unda $b\rightarrow c$ ga almashtirish zarur bo'lib va izlanayatgan ildizni (a,b) kesmada aniqlaymiz.

Mayli almashtirishning 1-chi variant o'rinli bo'lsin deb faraz qilamiz. Unda bu usulning ikkinchi qadamida

$$c_1=\frac{a+b}{2}$$

nuqtasini hisoblab olamiz va qaytadan $f(c_1)$ hisoblaymiz. Yuqorida keltirilgan sxema bo'yicha analiz qilamiz. Agar masalan $f(a)\cdot f(c)>0$ bo'lsa, unda yangi kesmani (c_1,c) deb belgilab olib va shu tarizda hisoblashlarni davom ettiramiz. Natijada barcha n uchun $f(a_n)\cdot f(c_n)<0$ sharti o'rinlanadigan va soni cheksiz bo'lgan bir-birining ichida joylashgan $(\boldsymbol{a}_1;\boldsymbol{b}_1);(\boldsymbol{a}_2;\boldsymbol{b}_2)...(\boldsymbol{a}_n;\boldsymbol{b}_n)$ kesmalar ketma-ketligiga ega bo'lamiz. Izlanayotgan ildizning qiymati $\varepsilon>0$ aniqligi bilan hisoblab toppish uchun, kesmaning ikkiga bo'lish jarayonini n qadamda to'xtatish kerak bo'ladi, bunda kesmaning uzunligi

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \le 2\varepsilon,$$

yoki

$$\frac{b_n - a_n}{2} \le \varepsilon$$

bo'lishi kerak.

Unda ildizning yaqinlashish qiymati quyidagi munosabat bo'yish hisoblashga bo'ladi:

$$x^* = \frac{a_n + b_n}{2} \ .$$

Masofani ikkiga bo'lish usuli nochiziqli tenglamaning ildizini avval berilgan xohlagan aniqligi bilan hisoblash uchun oddiy va hisoblashga qulay algoritm taqdim qiladi. Bu usul $f(x)$ funksiyasidan qulay tekshirilishini talab qiladi: ildiz izlanuvchi kesmada funksiya'ning uzliksiz bo'lishi va kesmaning uchlarida funksiya har xil belgidagi qiymatlarni qabul qilishi.

Ildizga yaqinlashish qadamlarning soni faqat (a,b) kesmasiga va berilgan ε aniqligiga ega bo'ladi.

Uni quyidagicha hisoblab olishga bo'ladi:

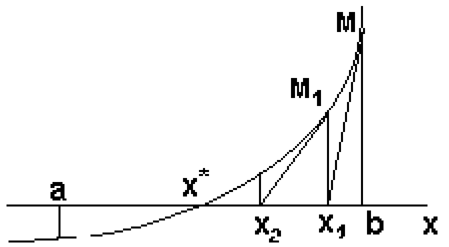
$$\boldsymbol{n} \ge \frac{\lg \dfrac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}{2\boldsymbol{\varepsilon}}}{\lg 2} \ .$$

3-§. Nochiziqli tenglamalarni yechishning urunmalar usuli (Nyuton usuli)

Bu bo'limida qaralayatgan urunmalar usuli ketma-ket yaqinlashish usullariga tegishli bo'ladi. Taqlil qiluvchi ildizga yaqinlashishlar quyidagicha aniqlanadi: agar avvalgi x_n, $n = 0,1,2,...$ yaqinlashish ma'lum bo'lsa, unda keying x_{n+1} yaqinlashishni:

$$x_{n+1} = P(x_n),$$

formulasi bo'yicha hisoblaydi, bunda P – avvalgi va kelgusi yaqinlashishlar orasida bog'lig'lik o'rnatuvchi bazi bir ifoda. $P(x_n)$ ko'rinishidagi formulalarni rekurrent formulalar deb ataydi, ular yordamida olinadigan ketma–ket yaqinlashishlarning iteratsiyon ketma – ketlik deb ataydi. Ketma–ket yaqinlashishlarni izlash jarayoni bazi bir x_0 - avvalgi yaqinlashish sonidan boshlaydi. Masalan, x_0 ildiz joylashgan kesmaning bir chegarasini olishga bo'ladi.



9-rasm. Urunbalar usuli bilan ildizni topish algoritimi

Mayli (a,b) kesmasida $f(x)$ uzliksiz funksiyasi x^* ildizga ega bo'lsin deb hisoblaymiz (9-rasm). Bu $f(\ a\cdot)\ f(<b)$ bo'lishini anglatadi. $M(\ y(\ b)$ nuqtasidan urunma yurgizamiz. Bu urunma Ox o'qini x_1 nuqtasida kesib o'tadi.

Bunda

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)},$$

bo'lishi ma'lum, sababi $f'(b) = tg\alpha$.

Bunda izlanayotgan x^* nuqtasida, $x_0 = b$ nuqtasidan x_1 nuqtasi $\Delta x = \frac{f(b)}{f'(b)}$ miqdorida yaqinlashgani ko'rinadi. Agar shu yo'l bilan funksiyaning grafigini ham $M_1(x_1)$, nuqtasiga ega bo'lib, kelasi x_2 nuqtasining qiymatiga ega bo'lishimiz mumkin, bu nuqta izlanayotgan x^* nuqtasiga ancha yaqin bo'ladi ya'ni:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Umumiy holat uchun rekkurent formulasini yozishga bo'ladi:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Bu bir qator x_i sonlariga ega bo'lishimiz uchun asosiy formula bo'lib hisoblanadi va bu formula bo'yicha x^* aniq ma'nosiga ketma – ket yaqinlashishadi. $\tau = \dfrac{1}{f'(x)}$ miqdori relaksatsiyalik parametrik deb hisoblanadi.

Bu parameter iteratsiyon jarayonning yaqlitligini isbotlaydi.

Bu parametirning qiymati yuqari bo'lgan sari, tezligi yoqari bo'ladi. Lekin umumiy holatda $\tau \neq const$ bo'ladi.

Mayli hisoblashlar natijasida:

$$x^* = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

deb belgilaymiz.

Shu vaqitda birinchi yaqinlashishda $(\boldsymbol{x_n} - \boldsymbol{x}^*) \leq \Delta_{\boldsymbol{a}}$ - yaqinlashishning absolyut xatoligi bo'ladi. Unda

$$\Delta_a = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

bo'lishi aniq.

Urunmalar usuli bilan ildizning yaxlit q iymatini topish ketma – ketligi quyidagicha bo'ladi:

1) Funksiya'ni differensiyallab, $f'(x)$ tenglamasiga ega bo'lamiz.

2) Rekkurent formulasini tuzamiz.

3) Ildizi yaqinlashishgan (a,b) kesmasini aniqlab olamiz.

4) (a,b) kesmaning bir chegarasi iteratsiyon jarayonning dastlabki yaqinlashish manosida olinadi (masalan, $x_0 = b$).

5) $f(x_0)$ va $f'(x_0)$ hisoblab olamiz.

6)Rekkurent formulasi bo'yicha ildizning keying yaqinlashishi hisoblanadi:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

7) $\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \le \Delta_a$ tengsizligi tekshiriladi. Agar tengsizlik orinlanadigan bo'lsa, unda hisoblash jarayoni toqtatiladi.

8) Agar tengsizlik orinlanmaydigan bo'lsa, unda hisoblashlarni davom etadi.

Ba'zi hollarda bu usulning oddiy turidan foydalanamiz, uni Nyutonning modifikatsiyalangan usuli deb ataymiz, bunda $\tau = const$ bo'ladi. Bunda funksiyaning egilishidagi chegaraviy nuqtasiga yurgizilgan urunma, musbat vaqtda o'z-o'ziga egilishidagi kelgusi nuqtalariga nisbatan parallel ko'chiriladi.

Dastlab, iteratsyon nolinchi qadamini olish uchun, $\boldsymbol{x_1}$ ning ma'nosiga ega bo'lamiz:

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} ,$$

Lekin ikkinchi va kelgusi iteratsiyalarida kesmaning (urunmaning emas) qiya burchagi o'zgarmas bo'lib va $\boldsymbol{\alpha = arctg\left[f'(b)\right]}$ ga teng bo'ladi, unda rekkurent formulasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$$

bunda, masalan, $x_0 = b$.

Bunday soddalashtirilgan formulasi iteratsiyaning har bir qadamida $f'(x_n)$ hosilaning qiymatini hisoblashni talab qilmaydi, faqat $f'(x_0)$ bir qiymatida foydalanishga imkon beradi. Bu hisoblash jarayonni asonlashtiradi, lekin Nyuton usuliga qaraganda bu usulning yaqinlashuvchanligi ,tezligi va natijaviyligi pasayadi.

Iteratsiyon ketma- ketlikning yaqinlashishi

Agar $x_0, x_1, ..., x_n, ...$ iteratsiyon qatorning so'ngi bo'lib izlanayotgan ildizning aniq qiymati bo'lsa, unda bu qatorning yaqinlashishi bo'ladi deb tushinamiz. Bu holatda usul yaqinlashuvchi bo'ladi deb ataladi. Aks holada usul yaqinlashuvchi bo'lmaydi va yechim olish mumkin emas bo'lib qoladi. Usulning yaqinlashuvchi bo'lishi uch sababga bog'liq bo'ladi:

-usulning asosiy xossalaridan(belgilaridan);

-ildiz ajratib olingan masofaning miqdoridan;

-rekkurent funksiyaning turidan.

Talab qilingan natijani olish uchun zarur bo'lgan iteratsiyon qadamlarning soni bilan ham yaqinlashishi aniqlanadi.

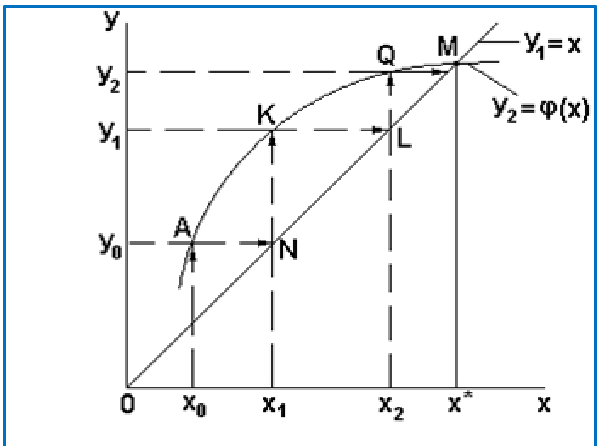
4-§. Nochiziqli tenglamalarni yechishning oddiy iteratsion usuli

1. Oddiy iteratsion usulning ma'nosi

Oddiy iteratsion usul eng qulay va natijali usullardan biri . Bu usulning nomidan ko'rinib turibdiki berilgan tenglamaning ildizin aniqlash uchun iteratsion ketma ketlikdan foydalanamiz Tenglamaning ildizlarini ajratish usullarini ko'rib chiqdik, bunda $f(x)$ funksiyasi ikki funksiyaning ayirmasi, ya'ni $f(x) = \varphi(x) - \psi($ ko'rinishida turlantiramiz va ildizni $\varphi(x) = \psi(x)$ shartidan ajratib olamiz. Oddiy iteratsiya usulida huddi shunday usuldan foydalanamiz, biroq keltirilgan funksiyalarning biri hamma vaqtda aniqlangan bo'lib, ya'ni $\psi(x) = x$ bo'ladi. Unda xohlagan $f(x)$ funksiyasi ba'zi bir usul bilan $f(x)=\varphi(x)-x$ turida keltiriladi va agarda x^{*} - $f(x)$ tenglamaning ildizi bo'lsa, unda $x^{*}=\varphi(x^{*})$ bo'ladi.

Bundan, iteratsion jarayon $|x_i-\varphi(x_i)|\to 0$ munosabati o'rinlanadiganday qilib olish kerak bo'lishi kelib chiqadi. Usulni quyidagi turda amalga oshiramiz.

Bu usulning geometrik ma'nosi bo'yicha $f(x)$ tenglamasining ildizi joylashgan masofada $y_1=x$ va $y_2=\varphi(x)$ ikki kesishuvchi to'g'ri chiziq turida ko'rsatiladi(10-rasm). Unda $M(x^{*})$ nuqtasining absissasi $f(x)$ tenglamaning ildizi bo'lib hisoblanadi.



10 -rasm.Oddiy iteratsion usulning algoritmi

Izlanayotgan ildizning dastlabgi x_0 yaqinlashish nuqtasi deb hisoblanib, $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ rekkurent formulasi asosida iteratsion jarayonni tuzamiz. Mayli $x=x_0$ bo'lsin. Bu uchun A nuqtasi $y_0=\varphi(x_0)$ ordinatasiga ega bo'lamiz. Endi $y_1=x$ hosilasidan chap tarafga nisbatan siljib N nuqtasiga ega bo'lamiz va uning koordinatalari $(x_1,\varphi(x_0))$ bo'ladi.

Ox_1 va Oy_0 ikki kesmaning tengligi ma'lum, sababi bu yerda $\varphi(x_0)=x_1$ rekkurent formulasi amalga oshiriladi. Ushbu algoritmni takrorlab, $\varphi(x_1)$ qiymatini hisoblab olamiz, ya'ni $K(x_1,\varphi(x_1))$ nuqtasini aniqlaymiz. K nuqtasidan nuqtasidan chap tamonga qarata $y_1=x$ tugrisigacha siljib, koordinatalari $(x_2,\varphi(x_1))$ bo'lgan L nuqtasiga ega bo'lamiz. Bundan so'ng, $x=x_2$ da $Q(x_2,\varphi(x_2))$ nuqtasiga ega bo'lamiz.

Hisoblash jarayonining musbatida, $x_0, x_1, ..., x_n$ iteratsiyon jarayon, ya'ni $n \to \infty$ bo'lsa, izlanayotgan ildizning aniq qiymatiga erishadi. Agar $|x^* - x_n| \le \varepsilon$ engsizligi o'rinlansa, unda iteratsiyon jarayonni to'xtatamiz. Amaliyotda, $\boldsymbol{x}^*$ belgisiz miqdor bo'lib hisoblanadi. Shu uchun oddiy iteratsiya usullarida hisoblash natijalarining aniqligini baholash uchun ikki hil munasabat bildirishadi:

- taqribiy baho: $|x_{n+1} - x_n| \le \varepsilon$;

- afzal baho: $\dfrac{|x_{n-1} - x_n|}{1-q} \le \varepsilon$, bunda $q = \max\limits_{x\in[a,b]} |y'(x)|$.

Yuqarida qaralgan usullar bilan taqqoslaganda, oddiy iteratsiya usuli nochiziqli tenglamalarni yechishning ancha umumiylashgan usuli bo'lib hisoblanadi. Shu sababdan u bir qancha o'ziga xos xususiyatlarga ega bo'ladi.

2. Usulning yaqinlashish shartlari

Usulning geometrik interpretatsyasi asosida, ya'niy to'grilarni yasash natijasida bu muamoni ancha keng turda ko'rib chiqib va natijalarini umumiylashtiramiz:

- oddiy iteratsiya usul yaqinlashuvchi bo'ladi, agar $|\varphi'(x)| \le 1$ sharti o'rinlansa;

- agar $0 < |\varphi'(x)| < 1$ bo'lsa, unda iteratsiya jarayon bir tamonlama yaqinlashuvchi bo'ladi, agar $-1 < |\varphi'(x)| < 0$ bo'lsa, unda bu usul ikki tamonlama yaqinlashadi;

- agar $|\varphi'(x)| > 1$, unda oddiy iteratsiya usuli yaqinlashuvchi bo'ladi.

Bundan ko'rinib turiganimizdek, oddiy iteratsiya usulini foydalanish amali o'ziga teng spetsifikasiga ega bo'ladiganiligini, lekin bu spetsifikasi undan foydalanish amaliga to'sqinlik qilmaydi.

3 Dastlabki berilgan funksiyani turlantirishning o'ziga xos xususiyatlari

Yuqorida ko'rsatilganidek, oddiy iteratsiya usuli $|\varphi'(x)| \le 1$ shartining o'rinlanishini zaruriy turda talab qiladii. Haqiqatdan berilgan $f(x)$ funksiyasini $f(x) = x - \varphi(x)$ ko'rinishida turlantirish natijasida $\varphi(x)$ funksiyasiga ega bo'lamiz va uni turlantirishning bir nechta usullari bor bo'lib hisoblanadi. Bundan, $\varphi(x)$ funksiyasi oldindan belgilash mumkin emasligi kelib chiqadi. Shu sababli $f(x)$ funksiyasiga oddiy iteratsiya usulini qo'llanishi mumkin bo'lishi uchun, $|\varphi'(x)| \le 1$ shart o'rinlanadigan $\varphi(x)$ funksiyasining turiga ega bo'lishimiz kerak bo'ladi.

Oddiy iteratsiya usulidan foydalanishga qulay qilib berilgan tenglamani turlantirish

Oddiy iteratsiya usuli uchun $\varphi(x)$ tenglamasini rekkurent formula ko'rinishida yozish amali ahamiyatli bo'lib hisoblanadiganligi yuqorida ko'rsatildi. Bundan boshqa, agar asosiy $f(x) = 0$ tenglamasi uchun ildizlar soni birdan ko'p bo'lsa, unda ularning har birini topish uchun $\varphi(x)$ tenglamasini har xil ko'rinishda yozish talab qilinadi. Bunda ildizni, $\varphi'(x)$ ning qiymatlari bilan ildizi joylashgan kesmaning atrofida, $|\varphi'(x)| \le q$ shart bajariladigan qilib topish kerak bo'ladi, bunda $0 \le q < 1$. Agar $\varphi(x)$ tenglamaning eng oddiy turi bo'yicha olib borilgan hisoblashlar yaqinlashuvchi bo'lmasa, unda $\varphi(x)$ funksiyaning boshqa turlarini ko'rish kerak. Ko'pincha quyidagi usuldan foyadalaniladi:

Mayli $[a,b]$ kesmada $f(x)$ tenglamasi faqat bir ildizga ega bo'lsin. Bu kesmada $f(x)$ funksiyasi uzluksiz, o'zgarmas songa teng emas va birinchi hosilasi bir belgidagi ma'nosini qabul qiladi deb faraz qilamiz.

$f'(x) > 0$ bo'ladi deb hisoblab, yoki unga teng kuchli bo'lgan $-f(x)=0$ tenglamasini qaraymiz.

Hisoblash kesmasida $f'(x)$ hosilasining chekli ma'nosi quyidagicha bo'ladi:

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{f}'_{\min}(\boldsymbol{x}); \quad \boldsymbol{M} = \boldsymbol{f}'_{\max}(\boldsymbol{x}),$$

shu bilan birga $\boldsymbol{k} = \dfrac{1}{\boldsymbol{M}}$ va $\boldsymbol{q} = 1 - \dfrac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{M}}$ koeffitsentlarini kiritamiz.

Bundan,

$$(\boldsymbol{M}\text{-}\boldsymbol{m}) < \boldsymbol{M}$$

bo'lgani uchun, $0 \le \boldsymbol{q} < 1$ ma'lum. $\varphi(x)$ tenglamasini quyidagicha izlaymiz:

$$\varphi(x_n) = x_n - \boldsymbol{k} \cdot f(x_n) \ .$$

Bu tenglama uchun (a,b) intervalida xohlagan $\boldsymbol{x}$ uchun $0 \le \varphi(x) < q$ sharti hamma vaqt bajariladi. Unda $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ formulasi quyidagicha bo'ladi:

$$x_{n+1} = x_n - k \cdot f(x_n) \ .$$

Agar, bundagi k koeffitsentining (hisoblash intervalida izlanayotgan funksiyaning hosilasiga teskari miqdor sifatida) ma'nosini tahlil qilsak, unda ikki usulning – Nyutonning yetishtirilgan va oddiy iteratsiyalar usullarining bog'liqligi aniq bo'ladi. Kesuvchining ma'nosi bo'lib keyingi holda, qiyalik burchakning o'rtacha qiymati hisoblanadi. k koeffitsentining qiymati hamma vaqitda $y(x)$ tenglamasiga o'z belgisi bilan qo'yiladi.

Ba'zi bir holda k koeffitsentini $\dfrac{1}{M} < k < \dfrac{1}{m}$ chegarada saylab olinadi, lekin ko'p hollarda $k \ge \dfrac{2}{M}$ deb qabul qiladi.

Shu bilan birga iteratsiyon jarayonning yaqinlashishi ko'p hollarda (a,b) kesmaning uzunligiga bog'liq bo'ladi. Bu kesma kichik bo'lgani sari, yaqinlashish jarayoni ishonishli bo'ladi.

5-§. Nochiziqli tenglamalar sistemasini Nyuton usuli bilan taqribiy yechish

Aytaylik, bizga n-chi tartibli nochiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x_1,x_2,...,x_n)=0, \\ f_2(x_1,x_2,...,x_n)=0, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ f_n(x_1,x_2,...,x_n)=0 \end{array}\right\} \tag{5.1}$$

(4.1)sistemasining qisqacha ko'rinishini yozamiz. U uchun $x_1,x_2,...,x_n$ argumentlar yig'indisining n-o'lchamli vektor sifatida qarashga bo'ladi

$$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Shunga o'xshash $f_1, f_2,..., f_n$ funksiyalar majmuini n-o'lchamli vektor yoki vektor-funksiyasi bo'lib hisoblanadi

$$f=\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ . \\ . \\ f_n \end{bmatrix}.$$

Shu sababli (4.1) sistemasi qisqacha quyidagicha yoziladi:

$$f(x)=0. \tag{5.1'}$$

$(5.1')$ sistemasini yechish uchun ketma-ket yaqinlashish usulidan foydalanamiz.

Aytaylik, $(5.1')$ vektorli tenglamaning $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ ayrim bir ildizi $p-$yaqinlashishi, ya'ni

$$x^{(p)}=(x_1^{(p)},x_2^{(p)},...,x_n^{(p)}).$$

topilgan deb faraz qilamiz. Unda $(5.1')$ tenglamaning aniq ildizi quyidagicha ko'rsatishga bo'ladi:

$$x=x^{(p)}+\varepsilon^{(p)}, \tag{5.2}$$

bunda $\varepsilon^{(p)}=(\varepsilon_1^{(p)},\varepsilon_2^{(p)},...,\varepsilon_n^{(p)})$-xatolikni tuzatuvchi had (ildizning xatoligi). (5.2) ifodani $(5.1')$ tenglamasiga olib borib qo'yamiz va bundan

$$f(x^{(p)}+\varepsilon^{(p)})=0, \tag{5.3}$$

ega bo'lamiz.

Mayli $f(x)$ funksiyasi x va $x^{(p)}$ nuqtalarini o'z ichiga olishi ba'zi bir qavariq sohada uzluksiz differensiallanuvchi deb faraz qilamiz. (4.3) tenglamaning chap yon tomonidagi chiziqli hadlari bilan chegaralanib, $\varepsilon^{(p)}$- kichik vektorning darajalari bo'yicha ajratamiz

$$f(x^{(p)}+\varepsilon^{(p)})=f(x^{(p)})+f'(x^{(p)})\varepsilon^{(p)}=0, \tag{5.4}$$

yoki quyidagicha yozishga bo'ladi

$$\left.\begin{aligned}
& f_1(x_1^{(p)}+\varepsilon_1^{(p)}, x_2^{(p)}+\varepsilon_2^{(p)},\dots,x_n^{(p)}+\varepsilon_n^{(p)}) = \\
& = f_1(x_1^{(p)},x_2^{(p)},\dots,x_n^{(p)}) + f'_{1x_1}(x_1^{(p)},x_2^{(p)},\dots,x_n^{(p)})\varepsilon_1^{(p)} + \\
& + f'_{1x_2}(x_1^{(p)},x_2^{(p)},\dots,x_n^{(p)})\varepsilon_2^{(p)} + \dots + f'_{1x_n}(x_1^{(p)},x_2^{(p)},\dots,x_n^{(p)})\varepsilon_n^{(p)} = 0, \\
& \quad . \; . \\
& f_n(x_1^{(p)}+\varepsilon_1^{(p)}, x_2^{(p)}+\varepsilon_2^{(p)},\dots,x_n^{(p)}+\varepsilon_n^{(p)}) = \\
& = f_n(x_1^{(p)},x_2^{(p)},\dots,x_n^{(p)}) + f'_{nx_1}(x_1^{(p)},x_2^{(p)},\dots,x_n^{(p)})\varepsilon_1^{(p)} + \\
& + f'_{nx_2}(x_1^{(p)},x_2^{(p)},\dots,x_n^{(p)})\varepsilon_2^{(p)} + \dots + f'_{nx_n}(x_1^{(p)},x_2^{(p)},\dots,x_n^{(p)})\varepsilon_n^{(p)} = 0.
\end{aligned}\right\}, \qquad (5.4')$$

(5.4) va $(5.4')$ formulalardan $f'(x)$ hosilasi deb $x_1, x_2, \dots, x_n,$ o'zgaruvchilariga nisbatan $f_1, f_2, \dots, f_n$ funksiyalar sistemasining Yakobi matritsasini tushunish kerak bo'ladi, ya'ni

$$f'(x) = W(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

yoki qisqacha yozish shaklida

$$f'(x) = W(x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right] \quad i, j = 1, 2, \dots, n.,$$

$(5.4')$ sistemasi $\varepsilon_i^{(p)}$, $i = 1, 2, \dots, n$ xatoliklariga nisbatan $W(x)$- matritsali chiziqli sistemasi ko'rinishiga ega, shu sababli (5.4) formulasi quyidagi ko'rinishda yozishga bo'ladi:

$$f(x^{(p)}) + W(x^{(p)})\varepsilon^{(p)} = 0.$$

Bundan $W(x^{(p)})$- maxsus bo'lmagan matritsa bo'ladi deb faraz qilib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\varepsilon^{(p)} = -W^{-1}(x^{(p)})\, f(x^{(p)}).$$

Demak, quyidagi Nyuton formulasiga ega bo'lamiz:

$$x^{(p+1)} = x^{(p)} - W^{-1}(x^{(p)})\, f(x^{(p)}), \quad p = 0,1,2,..., \tag{5.5}$$

Bo'shlang'ich $x^{(0)}$ yaqinlashish qilib izlanuvchi ildiziga yaqin qiymatni olishga bo'ladi. n-chi tartibli Nochiziqli tenglamalar sistemasini xususiy holi bo'lsin, ikkinchi tartibli nochiziqli tenglamalar sistemasini Nyuton usuli bilan yechish masalasini qaraymiz.

Ikki nochiziqli tenglamalar sistemasi uchun Nyuton usuli. Mayli x_n va y_n quyidagi berilgan tenglamalar sistemasining taqribiy yechimi bo'lsin:

$$\left.\begin{aligned} F(x,y) = 0 \\ G(x,y) = 0 \end{aligned}\right\} . \tag{5.6}$$

Bunda F va G -uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar. Endi

$$x = x_n + h_n; \quad y = y_n + k_n.$$

to'r yasaymiz, natijada quyidagicha tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz:

$$\left.\begin{aligned} F(x_n + h_n, y_n + k_n) = 0 \\ G(x_n + h_n, y_n + k_n) = 0 \end{aligned}\right\} . \tag{5.7}$$

Bundan, Teylor formulasidan foydalanib h_n, k_n larga nisbatan chiziqli hadlari bilan cheklanib quydagiga ega bo'lamiz:

$$\left.\begin{aligned} F(x_n, y_n) + h_n F'_x(x_n, y_n) + k_n F'_y(x_n, y_n) = 0, \\ G(x_n, y_n) + h_n G'_x(x_n, y_n) + k_n G'_y(x_n, y_n) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.8}$$

agar Yakobi

$$J(x_n, y_n) = \begin{vmatrix} F'_x(x_n, y_n) & F'_y(x_n, y_n) \\ G'_x(x_n, y_n) & G'_y(x_n, y_n) \end{vmatrix} \neq 0,$$

bo’lsa, u holda (5.8) sistemadan ega bo’lamiz:

$$h_n = -\frac{1}{J(x_n, y_n)} \begin{vmatrix} F(x_n, y_n) & F'_y(x_n, y_n) \\ G(x_n, y_n) & G'_y(x_n, y_n) \end{vmatrix} \tag{5.9}$$

$$k_n = -\frac{1}{J(x_n, y_n)} \begin{vmatrix} F'_x(x_n, y_n) & F(x_n, y_n) \\ G'_x(x_n, y_n) & G(x_n, y_n) \end{vmatrix} \tag{5.10}$$

demak

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{J(x_n, y_n)} \begin{vmatrix} F(x_n, y_n) & F'_y(x_n, y_n) \\ G(x_n, y_n) & G'_y(x_n, y_n) \end{vmatrix}, \tag{5.11}$$

$$y_{n+1} = y_n - \frac{1}{J(x_n, y_n)} \begin{vmatrix} F'_x(x_n, y_n) & F(x_n, y_n) \\ G'_x(x_n, y_n) & G(x_n, y_n) \end{vmatrix}. \tag{5.11'}$$

Bunda boshlang’ich yaqinlashishlari x_0, y_0 yechimlari taqribiy aniqlanadi.

Nochiziqli tenglamalar sistemasi uchun Nyuton usulining yaqinlashuvchanligi.

(5.1) sistemasini yechishga Nyuton usulini qo’llanish uchun quyidagi shartlarning bajarilishi zarur va yetarli.

1) (5.1) sistemaning izlanayotgan x^* yechimi $G \in E_n$ sohasida $f_i(x_1, x_2, ..., x_n),\ i = \overline{1,n}$ funksiyalari va ularning birinchi tartibli hosilalari uzliksiz bo’lishi zarur.

2) $x^{(p)}$, $p = 0,1,2,...,$ yaqinlashuvlarining G sohasiga tegishli bo’lishi zarur.

3) $\det W(x^{(p)}),\ p = 0,1,2,...,$ Yakobi aniqlovchilari noldan farqli bo’lishi zarur.

Agarda (5.1) sistemaning izlanayotgan x^* yechimiga $x^{(0)}$ boshlang’ich yaqinlashuvi yetarli yaqin saylanib olinsa, unda Nyuton usuli sistemaning x^*

yechimiga yaqinlashuvchi bo'ladi. Shuning bilan kvadratik yaqinlashuvchilik tezligiga ega bo'ladi:

$$\left\| x^* - x^{(p+1)} \right\| \le c \left\| x^* - x^{(p)} \right\|^2, \quad c = const.$$

Nyuton usulida iteratsiyalarni bajarishni to'xtatish kriteriyasi bo'lib $\left\| x^{(p)} - x^{(p+1)} \right\| \le \varepsilon$ shartining bajarilishi yetarli bo'ladi.

Nyuton usulida $\varepsilon^{(p)}$ vektori ($5.1'$) sistemasining ildizlarining xatolik vektorining $\left\| f(x^{(p)}) \right\|$ normasining kamayish yo'nalishini aniqlaydi, ya'ni barcha $p = 0,1,2,...,$ uchun

$$\left\| f(x^{(p+1)}) \right\| \le \left\| f(x^{(p)}) \right\|$$

tengsizligi bajariladi. Shuning uchun, Nyuton usulida iteratsion jarayonini to'xtatish sharti hisobida

$$\left\| f(x^{(p)}) \right\| \le \varepsilon$$

tengsizligidan foydalanishga bo'ladi. Bunda $\varepsilon > 0$ - oldindan berilgan kichik son.

6-§.Nochiziqli tenglamalar sistemasini yechish uchun iteratsiya usuli

Bizga quyidagi nochiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n), \\ x_2 = \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n), \end{array}\right\}, \qquad (6.1)$$

bunda $\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n$ haqiqiy, aniqlangan va bu sistemaning ayrim ajratib olingan $(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)$ yechimlarining ϖ atrofida uzluksiz bo'ladi.

Ba'zi-bir vektorlarni kiritamiz.

$$x=(x_1,x_2,...,x_n) \text{ va } \varphi(x)=(\varphi_1(x),\varphi_2(x),...,\varphi_n(x_n)),$$

va (6.1) sistemani qisqacha yozishga bo'ladi:

$$x=\varphi(x). \qquad (6.2)$$

(6.2) tenglamaning $x^*=(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)$ - ildizlar vektorini topish uchun iteratsiya deb ataluvchi usuldan foydalanish qulay bo'ladi:

$$x^{(p+1)}=\varphi(x^{(p)}) \quad , \quad p=0,1,2,..., \qquad (6.3)$$

bunda dastlabki yaqinlashuv bo'lib $x^{(0)}\approx x^*$ hisoblanadi. Bu jarayonning yaqinlashuvchi bo'lishini tadqiq qilamiz. Agarda (6.3) jarayoni yaqinlashuvchi bo'lsa, unda uning limit qiymati

$$\xi=\lim_{p\to\infty}x^{(p)} \qquad (6.4)$$

(6.2) tenglamaning albatta ildizi bo'lib hisoblanadi. Haqiqatdan ham, (6.4) nisbati bajariladi deb taxmin qilamiz, va (6.3) tenglikda $p\to\infty$ limitga o'tish orqali va $\varphi(x)$ funksiyaning uzluksizligini hisobga olib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\lim_{p\to\infty}x^{(p+1)}=\varphi(\lim_{p\to\infty}x^{(p)}),$$

ya'ni

$$\xi=\varphi(\xi).$$

Demak, ξ - bu (6.2) vektorlik tenglamaning ildizi bo'lib hisoblanadi.

Agarda, bulardan boshqa, barcha $x^{(p)},\ p=0,1,2,...$ ϖ sohasiga tegishli bo'lsa, va x^{*} - bu ϖ sohasida (6.2) sistemaning yagona bir ildizi bo'lsa, unda quyidagi aniq bajariladi:

$$\xi = x^{*}.$$

Iteratsiyalar usulini quyidagi umumiy turda berilgan tenglamalar sistemasiga ham qo'llashga bo'ladi:

$$f(x)=0, \tag{6.5}$$

bunda $f(x)$- ajratib olingan x^{*}-ildizlar-vektorning ϖ atrofida aniqlangan va uzluksiz vektor-funksiyasi. Masalan, bu sistemani quyidagicha ko'rinishda qaytadan yozib chiqamiz:

$$x = x + \Delta f(x),$$

bunda Δ - o'zgacha emas matritsasi. Belgilashlarini kiritamiz:

$$x + \Delta f(x) = \varphi(x), \tag{6.6}$$

unda ega bo'lamiz:

$$x = \varphi(x). \tag{6.7}$$

(6.7) tenglamaga oddiy (6.3) iteratsiyalar usulini qo'llaymiz.

Agarda, $f(x)$ funksiyasi ϖ atrogida $f'(x)$ uzluksiz hosilasiga ega bo'lsa, unda (6.6) formuladan quyidagi kelib chiqadi:

$$\varphi'(x) = E + \Delta f'(x).$$

Isbot qilingan, (6.7) tenglamasi uchun iteratsiyalar usuli tez yaqinlashuvchi bo'ladi, agarda $\varphi'(x)$ hosilasi norma bo'yicha kichik bo'lsa. Bu holatni hisobga olib quyidagi tengligi bajariladigan qilib Δ matritsasini tanlab olamiz:

$$\varphi'(x^{(0)}) = E + \Delta f'(x^{(0)}) = 0\,.$$

Bundan, agarda $f'(x^{(0)})$ -o'zgacha emas bo'lsa, unda quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\Delta = -\left| f'(x^{(0)}) \right|^{-1}.$$

Agarda, $\Delta = \det f'(x^{(0)}) = 0$ bo'lsa, unda boshqa bir $x^{(0)}$ boshlang'ich yaqinlashuvini tanlab olish kerak.

Iteratsiyalar jarayonining yaqinlashuvchilik shartlari. (6.1) nochiziqli tenglamalar sistemasiga yoki bu sistemaning qisqacha matritsaviy turda yozilgan (6.2) sistemasini qaraymiz.

Bunda $\varphi(x)$ vektor-funksiyasi o'zining $\varphi'(x) = \left[\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right]$ hosilalari bilan $G \subset E_n$ chegaralangan qavariq yopiq to'plamida aniqlangan va uzluksiz bo'lsin.

Iteratsion jarayonning yaqinlashuvchilik shartlarini keltirib chiqarish uchun vektorlarning normasi tushunchasini kiritamiz:

$$\|x\|_m = \max_i |x_i|\,,$$

$$\|x\|_l = \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,.$$

G sohasiga nisbatan quyidagi normalarni kiritamiz:

$$\|\varphi'(x)\|_I = \max_{x \in G} \|\varphi'(x)\|_m\,,$$

$$\|\varphi'(x)\|_{II} = \max_{x \in G} \|\varphi'(x)\|_l\,,$$

Bunda

$$\|\varphi'(x)\|_m = \max_i \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_j} \right|,$$

$$\|\varphi'(x)\|_l = \max_j \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_j} \right|.$$

Endi iteratsiyalar jarayonining yaqinlashuvchanligi haqida quyidagi teoremalarni keltiramiz.

1-teorema. Mayli $\varphi(x)$ va $\varphi'(x)$ funksiyalari G sohasida uzluksiz bo'lsin va G sohasida quyidagi tengsizligi bajarilsin

$$\|\varphi'(x)\|_I \le q < 1,$$

bunda q -ba'zi bir o'zgarmas.

Agarda

$$x^{(p+1)} = \varphi(x^{(p)}) \quad , \quad p = 0,1,2,..., \tag{6.8}$$

ketma-ket yaqinlashuvlari G sohaning ichida bo'lsa, unda (6.8) iteratsiyalar jarayoni yaqinlashuvchi bo'ladi va

$$x^* = \lim_{p\to\infty} x^{(p)}$$

limiti G sohasida (6.1) sistemaning yagona bir yechimi bo'ladi.

1-teoremadan (6.8) iteratsiyalar jarayoni yaqinlashuvchi bo'ladi, Agarda

$$\sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_j} \right| \le q < 1, \qquad i = \overline{1,n},$$

bunda $x \in G$.

Xususiy holda, agarda $0 \le q \le \frac{1}{2}$ bo'lsa, unda

$$\left\| x^{(p)} - x^{(p+1)} \right\| \le \varepsilon$$

va bundan

$$\left\| x^{*} - x^{p} \right\| \le \varepsilon$$

tengsizligi bajarilishi ko’rsatilgan [3].

2-teorema. Mayli $\varphi(x)$- vektor-funksiyasi o’zining $\varphi'(x)$ hosilalari bilan cheklangan qavariq yopiq G sohasida uzluksiz bo’lsin va

$$\left\| \varphi'(x) \right\|_{II} \le q < 1, \qquad (6.9)$$

tengsizligi bajarilsin, bunda q-ba’zi bir o’zgarmas. Agarda $x^{(0)} \in G$ bo’lib va

$$x^{(p+1)} = \varphi(x^{(p)}) \quad , \quad p = 0,1,2,..., \qquad (6.10)$$

ketma-ket yaqinlashuvlari ham G sohasining ichida bo’lsa, unda (6.10) iteratsiyalar jarayoni G sohasida

$$x = \varphi(x)$$

tenglamaning yagona bir yechimiga yaqinlashadi.

(6.10) iteratsiyalar jarayoni (6.1) tenglamaning yagona bir yechimiga yaqinlashadi, agarda $x \in G$ bo’lganda quyidagi

$$\sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x_i} \right| \le q_i < 1, \qquad i = \overline{1,n},$$

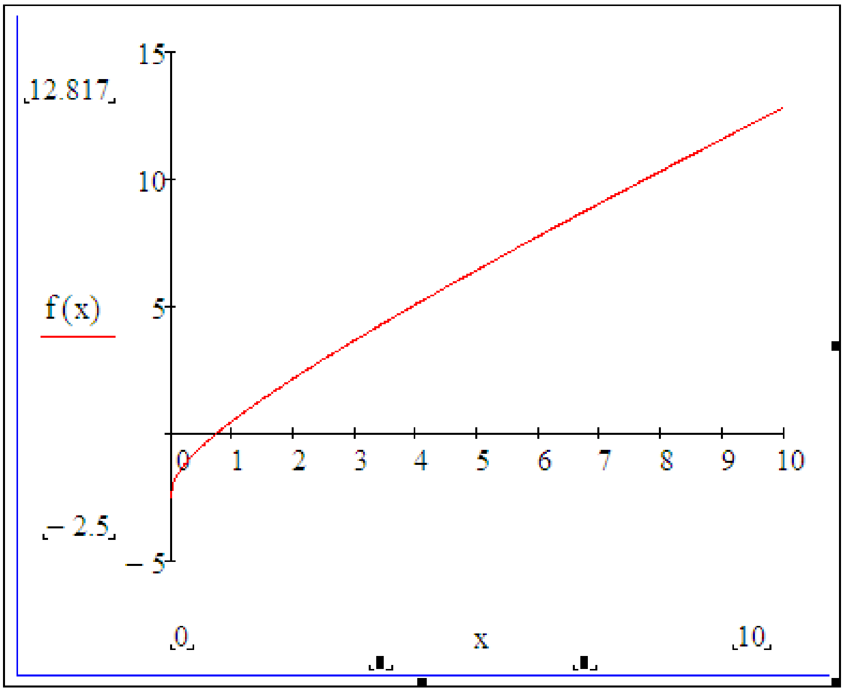
tengsizligi bajariladigan bo’lsa.

Sonli misollar

1-Misol. Berilgan nochiziqli tenglamaning yechimini masofani teng ikkiga bo’lish usuli bilan toping:

$$x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 2.5 = 0 \qquad (1)$$

Yechimi. Berilgan tenglamaning ildizi joylashgan kesmasini aniqlash uchun bu funksiya’ning grafigini yasaymiz. U uchun MathCad paketidan foydalanamiz(1-rasm):



1-rasm

1-rasimdan berilgan tenglamaning ildizi $[0.5,1]$ kesmasida joylashgani ko’rinib turibdi.

(1) tenglamaning yechimini topish algoritmi quyidagi berilgan amallar ketma-ketliklarini o’z ichiga oladi:

1. Mayli $a=0.5$, $b=1$, $\varepsilon=0.00001=10^{-4}$;

2. $f(a)=a+\sqrt{a}\ +\ \sqrt[3]{a}-2.5$ hisoblaymiz;

3. $x=\dfrac{(a+b)}{2}$ hisoblab olamiz va shu nuqtasida funksiyaning qiymatini, ya’ni $f(x)=x+\sqrt{x}\ +\ \sqrt[3]{x}-2.5$ hisoblaymiz;

4. $f(x)=0$ chartini tekchiramiz. Agar bu shartni o'rinlasak, unda x tenglamaning yechimi bo'ladi va hisoblash jarayonini to'xtatamiz. Teskari holatda, ya'ni bu shart o'rinlanmasa, unda $f(x)$ funksiyasi har xil belgilarni qabul qiladigan kesmani saylab olishga o'tamiz. Aniqroq qilib aytganda:

5. $f(a)\cdot f(x)<0$ shartining o'rinlanishini tekshiramiz. Agar bu shart o'rinlansa, unda $b=x$ deb hisoblab va 6 qadamga o'tamiz. Agar bu shart o'rinlanmas, unda $a=x$, $f(a)=f(x)$ deb hisoblab 6 qadamga o'tamiz.

6. $b-a>\varepsilon$ shartini tekchiramiz. Agar bu shart o'rinlansa, unda oraliqni ikkiga bo'lish jarayonini davom etamiz, ya'ni 3 qadamga o'tamiz. Agar bu shart o'rinlansa , ya'ni $b-a\le\varepsilon$ bo'lsa, unda natija sifatida x ni qabul qilamiz va hisoblashlarni to'xtatamiz.

(1) tenglamani oraliqni ikkiga bo'lish usuli bilan yechish algoritmining blog-sxemasi qo'simcha bo'limda berilgan.

Tuzilgan algoritmga mos oraliqni teng ikkiga bo'lish usulining C ++ dastrurida hisoblash programmasi quydagicha:

```
#include <iostream>
#include <iomanip>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
using namespace std;
double f (double x);
int main()
{
    int i,limit,n;
    double a,b,c,x[10000],E,X,t;
    cout<<"Oraliqni kiriting\n";
     cin>>a>>b;
     cout<<"Xatolikni kiriting \n";
     cin>>E;
     cout.precision(11);
    for (i=0; i<1000; i++)
    {
     c=(a+b)/2;
     if ((b-a)<=2*E){break;}
     if ((f(a)*f(c))>0){a=c;}
     else if ((f(a)*f(c))<0){b=c;}
```

```
     cout<<i<<" "<<c<<endl;
     }
    system ("pause");
    return 0;
}
    double f (double x)
      {
       return x+sqrt(x)+pow(x,0.33333333)-2.5;
      }
```

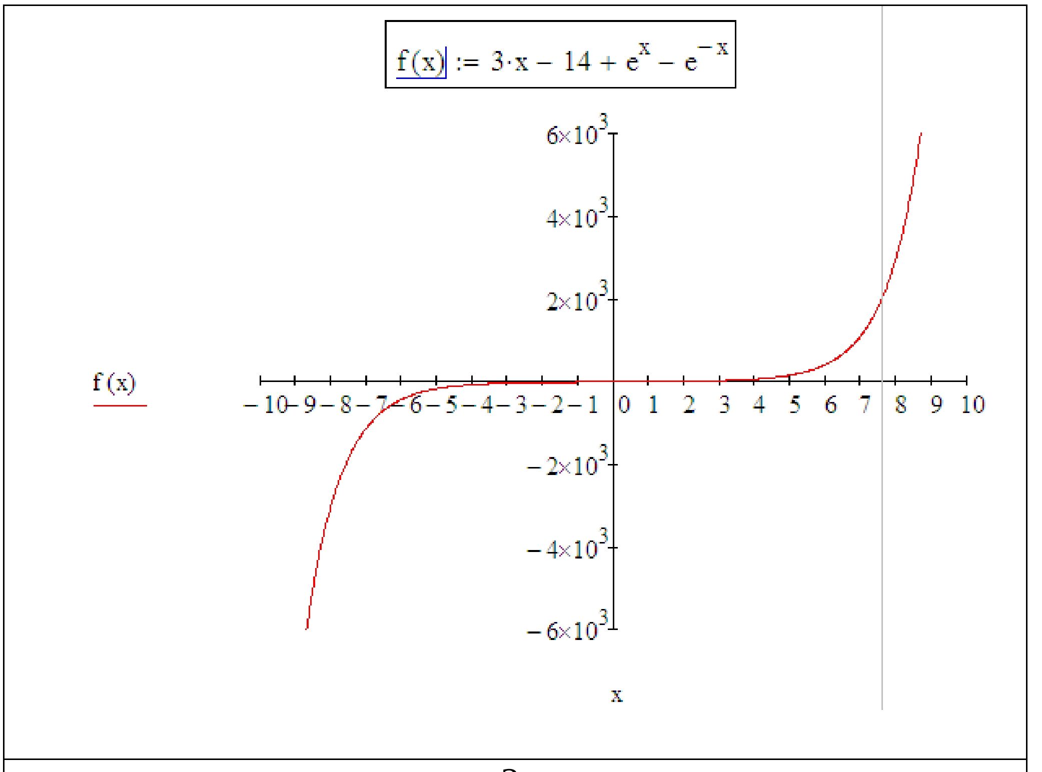
```
Natija

Oraliqni kiriting

0.5

1

Xatolikni kiriting

0.00001

0 0.75

1 0.625

2 0.6875

3 0.71875

4 0.734375

5 0.7421875

6 0.73828125

7 0.736328125

8 0.7373046875

9 0.73779296875

10 0.73754882812

11 0.73767089844

12 0.73760986328

13 0.73764038086

14 0.73762512207

Javobi->  0.73762512207
```

2-Misol. Berilgan Nochiziqli tenglamaning yechimini Nyuton usuli bilan toping:

$$3x - 14 + e^{x} - e^{-x} = 0 \tag{2}$$

Yechimi. Berilgan tenglamaning ildizi joylashgan kesmasini aniqlash uchun bu funksiya'ning grafigini yasaymiz. Uning uchun MathCad paketidan foydalanamiz(2-rasm):

2-rasmda berilgan tenglamaning ildizi [1;3] kesmasida joylashgani



2-rasm

ko'rinib turibdi. $f(1)=-8.65,\ f(3)=15.036$.

$f(x)$ funksiyaning birinchi hosilasini, ya'ni $f'(x)=3+e^{x}+e^{-x}$ hisoblaymiz.

Nyuton formulasi bo'yicha (2) tenglamaning yechimini topishning hisoblash formulasi quyidagicha bo'ladi:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{3x_{n-1} - 14 + e^{x_{n-1}} - e^{-x_{n-1}}}{3 + e^{x_{n-1}} + e^{-x_{n-1}}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Dastlabki yaqinlashish $x_0 = 3$ deb olamiz, sababi bu nuqtasida $f(3)\cdot f''(3) > 0$ sharti o'rinlanadi.

$[1,3]$ kesmasida $|f'(x)|$ eng kichik qiymatini hisoblab olamiz va uni m_1 deb belgilaymiz. $f'(x) = 3 + e^x + e^{-x}$ bo'ladi, shuning uchun

$$m_1 = \left|3 + e^3 + e^{-3}\right| = 23.135$$

Bundan musbat, $[1,3]$ kesmasida $|f''(x)|$ eng katta qiymatini hisoblab olamiz va uni M_2 deb belgilaymiz. $f''(x) = e^x - e^{-x}$, shuning uchun $M_2 = \left|e^4 - e^{-4}\right| = 54.58$. Demak, $2\cdot m_1 / M_2 = \dfrac{2\cdot 23.135}{54.58} = 0.848 \geq 10^{-2}$ sharti o'rinlanadi va hisoblash aniqligini tekshirish uchun $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-2}\sqrt{\varepsilon}$ shartidan foydalanamiz.

(2) tenglamaning yechimini topish algoritmi quyidagi berilgan amallar ketma-ketliklarini o'z ichiga oladi:

1. $x_0 = 3,\ \varepsilon = 0{,}00001,\ n = 0$ bo'lsin.

2. Kelgusi yaqinlashishni quyidagi formula bo'yicha hisoblaymiz:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{3x_n - 14 + e^{x_n} - e^{-x_n}}{3 + e^{x_n} + e^{-x_1}}\,. \qquad (3)$$

3. $\delta = x_{n-1} - x_n$ ayirmasini hisoblaymiz va n ga bir birlik qo'shamiz.

4. $|\delta| > \varepsilon_1$ shartini tekshiramiz. Agar bu shart o'rinlansa, unda (3) formulasi bo'yicha kelgusi yaqinlashishni hisoblaymiz, ya'ni 2-chi qadamga o'tamiz. Keri holda, agar bu shart o'rinlanmasa, ya'ni $|\delta| \geq \varepsilon_1$ bo'lsa, unda hisoblash natijasi sifatida x_{n+1} ni qabul qilamiz ni qabul qilamiz va hisoblash jarayonini to'xtatamiz. Bunda n ning qiymati o'rinlangan iteratsiyalar soniga teng bo'ladi.

Tuzilgan algoritmga mos Nyuton usulining C ++ dasturida hisoblash programmasi quydagicha tuzilgan:

```
#include<iostream>
#include<iomanip>
#include<math.h>
using namespace std;
double f (double x);
double f1 (double x);
double f2(double x);
main()
{      int i,j,limit;
       cout<<"Oraliqni kiriting\n";
       double a,b,x[10000],E;
       cin>>a>>b;
        cout<<"Xatolikni kiriting' \n";
        cin>>E;
       bool g=false;
       cout.precision(10);
       if (f(a)*f2(a)>0)x[0]=a;
       else x[0]=b;
       cout<<endl;
       for (i=0; i<10000; i++)
       {x[i+1]=x[i]-f(x[i])/f1(x[i]);
        cout<<i<<" "<<x[i]<<endl;
        if (fabs(x[i+1]-x[i])<E){limit=i;break;}
       }
       cout<<endl<<x[limit]<<endl;
       system ("pause");
       returibdin 0;
}
       double f (double x)
       {
        returibdin 3*x-14+exp(x)-exp(-x);
       }
       double f1(double x)
       {
        returibdin 3+exp(x)+exp(-x);
       }
       double f2(double x)
       {
        returibdin exp(x)-exp(-x);
       }
Natija
Oraliqni kiriting
1
3
Xatolikni kiriting'
0.00001

0 3
1 2.350095557
```

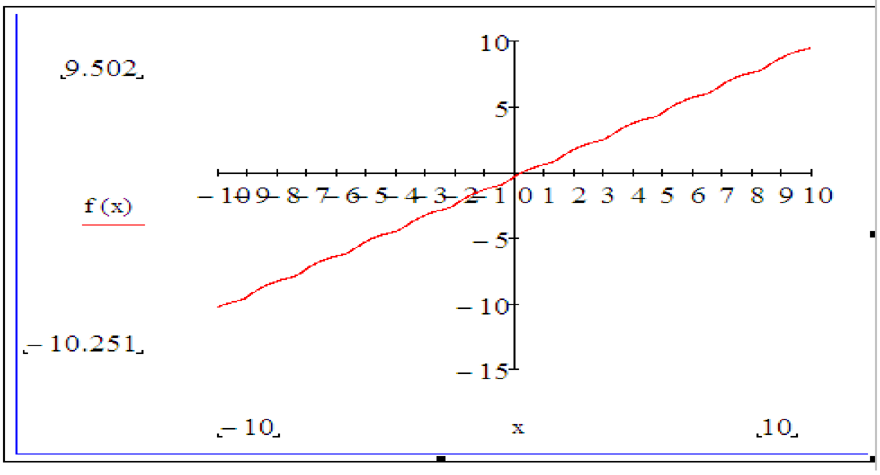
```
2 2.096707569
3 2.069484616
4 2.069218221

2.069218221

Javobi->2.069218221
```

3-Misol. Berilgan nochiziqli tenglamaning yechimini oddiy iteratsiya usuli bilan toping:

$$x - \frac{1}{3 + \sin 3{,}6x} = 0 \qquad (4)$$

Yechimi. Berilgan tenglamaning ildizi joylashgan kesmasini aniqlash uchun bu funksiya'ning grafigini yasaymiz. Uning uchun MathCad paketini foydalanamiz(3-rasm):

$$f(x) := x - \frac{1}{3 + \sin(3.6 \cdot x)}$$



3-rasm

3-rasmda berilgan tenglamaning ildini [0,1] kesmasida joylashgani ko'rinib turibdi.

(4) tenglamasini quyidagi ko'rinishga olib kelamiz:

$$x = \frac{1}{3 + \sin 3{,}6x}$$

yoki

$$\varphi(x) = \frac{1}{3 + \sin 3{,}6x}.$$

Bundan, $\varphi'(x) = \frac{3{,}6 \cdot \cos 3{,}6x}{(3 + \sin 3{,}6x)^2}$ topamiz. $|\varphi'(0)| = 0{,}4 < 1$ va $|\varphi'(1)| = [-0{,}494[= 0{,}494 < 1.$ Demak $q = 0{,}4$ va iteratsiyon jarayon yaqinlashuvchi bo'ladi..Dastlabki yaqinlashish uchun $[0{,}1]$ kesmaning xohlagan nuqtasini olishga bo'ladi.

Tuzilgan algoritmga mos oddiy iteratsiya usulining C ++ dasturida hisoblash programmasi quydagicha tuzilgan:

```
#include <iostream>
#include<string.h>
#include<stdio.h>
#include<math.h>
#include<iomanip>
#include<conio.h>
float hos(float y);
float funk(float z);
using namespace std;
int main(){
char d=187,ss=188; int i=0,j,k=0;
float a=0,b=1,x[100],f[100],c,M,m,q,l; x[0]=1;
cout<<"\n\n      ***  NOCHIZIQLI TENGLAMALARNI***"<<endl;
cout<<"          *** ODDIY ITERATSIYALAR USULI BILAN HISOBLASH
***"<<endl<<endl;
cout<<"ЙННЛНННННННННЛНННННННННЛНННННННННЛНННННННННННННЛНННННННННН
НННН"<<d<<"\n";
cout<<"  є iє    xi   є   c      є    q    є   f(xi)      є
Aniqliq   є\n";
cout<<"
МННОНННННННННОНННННННННОНННННННННОНННННННННННННЛНННННННННННННН№\n
";
while(k!=4){ cout<<"  є";if(i<10)cout<<" ";
cout<<i<<setprecision(6)<<setiosflags(ios::fixed|ios::showpoint)
<<"є";
if(x[i]>=0)cout<<" ";cout<<x[i];
M=hos(a);m=hos(b);if(fabs(M)<fabs(m)){l=M;M=m;m=l;};
q=1-m/M;c=-1/M;f[i]=funk(x[i]);x[i+1]=x[i]+c*f[i];
```

```
cout<<"є";if(c>=0)cout<<" ";cout<<c<<"є";if(q>=0)cout<<"
";cout<<q<<"є";
if(f[i]>=0)cout<<" ";cout<<f[i]<<"є";
if(i>0)cout<<q/(1-q)*fabs(x[i]-x[i-1]);else cout<<"
";cout<<"є\n";
if(i>0&&q/(1-q)*fabs(x[i]-x[i-1])<0.001){goto ss;}i++;}ss:
cout<<"ИННКНННННННННКННННННННННКННННННННННКНННННННННННННННКННННННННН
НННН"<<ss<<"\n\n";
cout<<"                JAVOBI: x="<<x[i];
cout<<"\nm="<<m<<endl;cout<<"M="<<M<<endl;cout<<"q="<<q<<endl;
getch();}
float hos(float y){
float y1;
y1=y-(1/(3+sin(3.6*y)));
return y1;}
float funk(float z){
float z1;
z1=1+(3.6*cos(3.6*z))/((3+sin(3.6*z))*(3+sin(3.6*z)));
return z1;}
```

C ++ dasturida olingan natija quydagicha jadvalda chiqadi.

```
        ***  NOCHIZIQLI TENGLAMALARNI***
    *** ODDIY ITERATSIYALAR USULI BILAN HISOBLASH ***
```

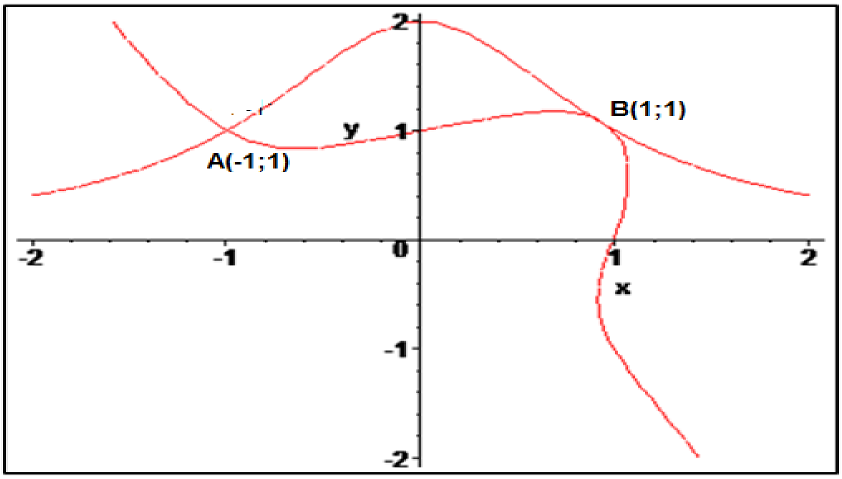
i	xi	c	q	f(xi)	Aniqliq
0	1.000000	-1.642063	1.547354	0.506424	
1	0.168419	-1.642063	1.547354	1.232139	-2.350854

```
              JAVOBI: x=0.168419

m=-0.333333
M=0.608990
q=1.547354
```

4-misol. a) Nyuton usuli bilan quyidagi nochiziqli algebraik tenglamalar sistemasining musbat taqribiy qiymatlarini $\varepsilon = 10^{-8}$ aniqligi bilan toping.

$$\left.\begin{aligned} f_1 = (x_1, x_2) \equiv x_1^5 + x_2^3 - x_1 \cdot x_2 - 1 = 0, \\ f_2 = (x_1, x_2) \equiv x_1^2 \cdot x_2 + x_2 - 2 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Yechilishi: f_1 va f_2 nochiziqli algebraik funksiyalarining grafiklarini Maple dasturi yordamida aniqlaymiz:



Rasmdan ko'rinib turibdiki, berilgan sistema ikki A(-1;1) va B(1;1) haqiyqiy yechimga ega bo'ladi. Bu ikki yechimlarni $\varepsilon = 10^{-8}$ aniqligi bilan hisoblaymiz. Boshlang'ich yaqinlashish hisobida $x^{(0)} = (0,5;0,5)$ olamiz.

Ildizning kelasi yaqinlashishini hisoblaymiz. Endi

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

deb hisoblab, ega bo'lamiz:

$$f(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 0,5^5 + 0,5^3 - 0,5 \cdot 0,5 - 1 \\ 0,5^2 \cdot 0,5 + 0,5 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,09375 \\ -1,375 \end{bmatrix}.$$

Yakobi matritsasini tuzamiz

$$W(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x_1^4 - x_2 & 3x_2^2 - x_1 \\ 2x_1 \cdot x_2 & x_1^2 + 1 \end{bmatrix},$$

buning natijasida

$$W(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 5 \cdot 0,5^4 - 0,5 & 3 \cdot 0,5^2 - 0,5 \\ 2 \cdot 0,5 \cdot 0,5 & 0,5^2 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,1875 & 0,25 \\ 0,5 & 1,25 \end{bmatrix},$$

shu sababli,

$$\Delta = \det W(x^{(0)}) = -0,359375.$$

Shunday qilib, $W^{-1}(x^{(0)})$ - maxsus bo'lmagan matritsa. Teskari matritsasini tuzamiz

$$W^{-1}(x^{(0)}) = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} 1,25 & -0,25 \\ -0,5 & -0,1875 \end{bmatrix}.$$

(5.11) formulasidan foydalanib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} + \frac{1}{0,359375}\begin{bmatrix} 1,25 & -0,25 \\ -0,5 & -0,1875 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1,09375 \\ -1,375 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} +$$

$$+\frac{1}{0,359375}\begin{bmatrix} -1.0234375 \\ 0.8046875 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2,8478261 \\ 2,2391304 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,3478261 \\ 2,7391304 \end{bmatrix}.$$

Hisoblashlarni $\alpha_k = \max_k \left\{ \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| \right\} \le \varepsilon = 10^{-8}, \quad k = 0,1,2,...$ sharti bajarilguncha davom etamiz. 1-jadvaldan ko'rinib turganidek, $i = 8$ bo'lganda hisoblashlar to'xtatish shartini qanoatlantiradi. Shundan berilgan masalaning quyidagi yaqinlashuvchi yechimiga ega bo'lamiz:

$$x_1 = -1.00000000; \quad x_2 = 1.00000000,$$

shu sababli

$$f(x^{(8)}) = \begin{bmatrix} 0,00000000 \\ 0,00000000 \end{bmatrix}.$$

1-jadval

i	x_1	$\varepsilon_i^{(1)} = \lvert\Delta x_1\rvert$	x_2	$\varepsilon_i^{(2)} = \lvert\Delta x_2\rvert$
0	0,5	2,84782608	0,5	2,23913043
1	-2,34782608	0,53363156	2,73913043	1,37807698
2	-1,81419452	0,36321109	1,36105345	0,47701096
3	-1,45098342	0,26086359	0,88404249	0,02448297
4	-1,19011983	0,15246792	0,85955951	0,09721794
5	-1,03765190	0,03671923	0,95677746	0,04138713
6	-1,00093266	0,00093326	0,99816459	0,00183471
7	-0,99999940	0,00000059	0,99999931	0,00000068
8	-1,00000000		1,00000000	

b) Ikki o'zgaruvchili nochiziqli tengalamalar sistemasini tenglamalarining grafiklari yana bir A(-1;1) nuqtasida kesishadi.Shuning uchun boshlang'ich yaqinlashish hisobida

$$x^{(0)} = (-0,5;0).$$

Bu $x^{(0)}$ boshlang'ich qiymati bilan hisoblashlar kompyuter yordamida olib borildi va natijalar quyidagi jadvalda keltirilgan.

Hisoblashlarni $\alpha_k = \max_k \left\{ \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| \right\} \leq \varepsilon = 10^{-7}, \quad k = 0,1,2,...$ sharti bajarilguncha davom etamiz.

2-jadval

i	x_1	$\varepsilon_i^{(1)} = \lvert\Delta x_1\rvert$	x_2	$\varepsilon_i^{(2)} = \lvert\Delta x_2\rvert$
0	-0,5	0,74000000	0	1,60000000
1	0,24000000	0,69829573	1,60000000	0,21600900
2	0,93829573	0,11105614	1,38399099	0,16699738
3	0,82723958	0,02381634	1,21699361	0,05804529
4	0,85105593	0,00911396	1,15894831	0,00948151
5	0,86016990	0,00051951	1,14946680	0,00056079
6	0,86068942	0,00000178	1,14890600	0,00000191
7	0,86069120		1,14890408	

2-jadvaldan ko'rinib turganidek, $i = 7$ bo'lganda hisoblashlar to'xtatish shartini qanoatlantiradi. Shundan berilgan masalaning quyidagi yaqinlashuvchi yechimiga ega bo'lamiz:

$$x_1 = 0,86069120; \quad x_2 = 1,14890408,$$

shu sababli

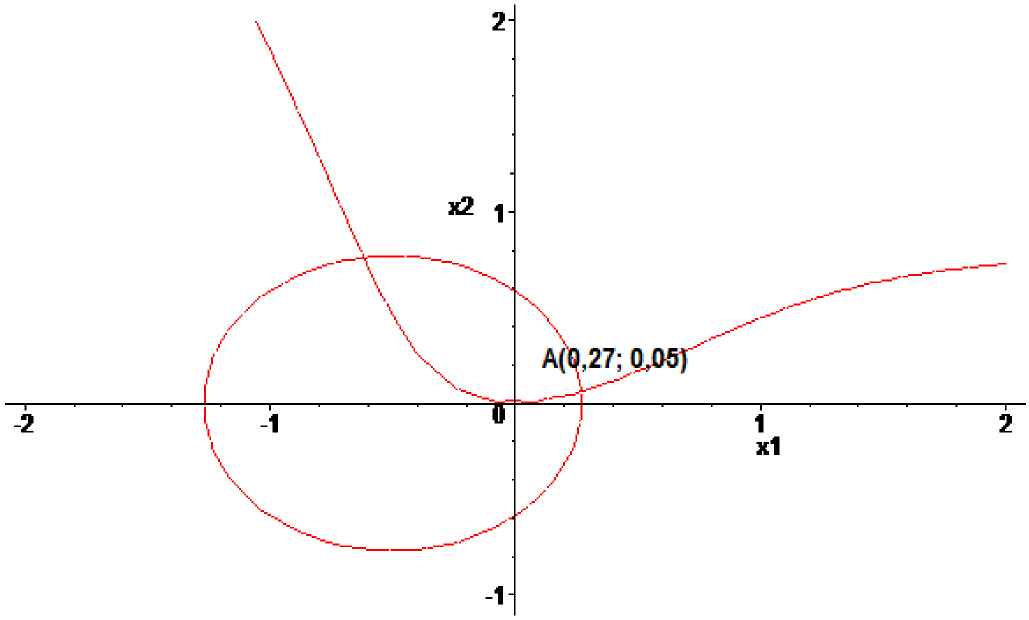
$$f(x^{(7)}) = \begin{bmatrix} 0,00000000 \\ 0,00000000 \end{bmatrix}.$$

Sonli misollarning C++ tilida tuzilgan hisoblash programmalari va natijalari qo'shimcha bo'limda berilgan.

5-misol. Nyuton usuli bilan quyidagi transtsendent tenglamalar sistemasining musbat taqribiy qiymatlarini $\varepsilon = 10^{-8}$ aniqligi bilan toping.

$$\left. \begin{aligned} f_1 = (x_1, x_2) &\equiv e^{x_1 \cdot x_2} - x_1^2 + x_2 - 1 = 0, \\ f_2 = (x_1, x_2) &\equiv \left(x_1 + 0,5\right)^2 + x_2^2 - 0,6 = 0. \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

Yechilishi: f_1 va f_2 funksiyalarining grafiklarini Maple dasturi yordamida aniqlaymiz:



Rasmdan ko’rinib turibdiki berilgan sistema ikki haqiyqiy yechimga ega bo’ladi. Ularning bir nuqtasini olib, $\varepsilon = 10^{-8}$ aniqligi bilan hisoblaymiz. Boshlang’ich yaqinlashish hisobida $x^{(0)} = (0;0)$ olamiz.

Ildizning kelasi yaqinlashishini hisoblaymiz. Endi

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

deb hisoblab, ega bo'lamiz:

$$f(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,35 \end{bmatrix}.$$

Yakobi matritsasini tuzamiz

$$W(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \cdot e^{x_1 \cdot x_2} - 2 \cdot x_1 & x_1 \cdot e^{x_1 \cdot x_2} + 1 \\ 2 \cdot (x_1 + 0,5) & 2 \cdot x_2 \end{bmatrix},$$

buning natijasida

$$W(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

shu sababli

$$\Delta = \det W(x^{(0)}) = -1$$

Shunday qilib, $W^{-1}(x^{(0)})$ - maxsus bo’lmagan matritsa. Teskari matritsasini tuzamiz

$$W^{-1}(x^{(0)}) = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(5.11) formulasidan foydalanib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -0,35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,35 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,35 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Hisoblashlarni $\alpha_k = \max\limits_k \left\{\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right|\right\} \le \varepsilon = 10^{-8}, \quad k = 0,1,2,...$ sharti bajarilguncha davom etamiz.

i	x_1	$\varepsilon_i^{(1)} = \lvert\Delta x_1\rvert$	x_2	$\varepsilon_i^{(2)} = \lvert\Delta x_2\rvert$
0	0	0,35000000	0	0,00000000
1	0,35000000	-0,07205885	0,00000000	0,05337690
2	0,27794117	-0,00549865	0,05337690	0,00481199
3	0,27244251	-0,00003684	0,05818890	0,00003028
4	0,27240567		0,05821918	

Jadvaldan ko’rinib turganidek, $i = 4$ bo’lganda hisoblashlar to’xtatish shartini qanoatlantiradi. Shundan berilgan masalaning quyidagi yaqinlashuvchi yechimiga ega bo’lamiz:

$$x_1 = 0,27240567\,; \quad x_2 = 0,05821918,$$

shu sababli

$$f(x^{(4)}) = \begin{bmatrix} 0,00000000 \\ 0,00000000 \end{bmatrix}.$$

XULOSA

Mazkur bitiruv malakaviy ishining muhim natijalari quyidagilar:

- nochiziqli tenglamalar va tenglamalar sistemasini yechish ancha murakkab va bu masala hisoblash matematikasining mukammal yechilmagan muammosi ekan;
- nochiziqli tenglamalar va tenglamalar sistemasini yechishning boshlang'ich muammosi – bu nochiziqli tenglamalar va tenglamalar sistemasini yechimlarining mavjudligi, soni va ular yotgan oraliqni topish muammolari o'rganildi, bular aniq misollarni yechish orqali izohlandi;
- nochiziqli tenglamalar va tenglamalar sistemasini ajratilgan ildizini topish muammosi bir necha taqribiy usullarda bayon qilindi, aniq misollar yechimlari bilan izohlandi;
- nochiziqli tenglamalar va tenglamalar sistemasini ildizlarini topishning taqribiy usullari soddadan murakkabga va ularning xususiy hollari bilan o'rganildiki, bu shu mavzuni batafsilroq yoritish imkonini berdi;
- nochiziqli tenglamalar va tenglamalar sistemasini C++ dasturida,Maple va Mathcad paketi yordamida yechishning muammolari o'rganildi, uni amalga oshirishning bosqichlari ishlab chiqildi;
- nochiziqli tenglamalar va tenglamalar sistemasi funksiyalarining grafigini Maple va Mathcad paketi yordamida chizish orqali tenglamalar sistemasi haqiqiy yechimlari mavjudligi, ularning soni, bu yechimlar yotgan oraliqlarni topish muammolari o'rganildi;
- nochiziqli tenglamalar va tenglamalar sistemasining analitik yechimini Maple va Mathcad paketi yordamida yechish o'rganildi, hisob algoritmiga oid tushunchalar bilan tanishildi, amaliy masalalar yechildi;

- nochiziqli tenglamalar va tenglamalar sistemasini Maple va Mathcad paketi yordamida sonli yechishning algoritmi, dasturi, matematik paketlardan foydalanish bosqichlari bajarildi, har xil amaliy masalalar yechildi;
- qo’yilgan masalani matematik paketlar yordamida samarali yechishga oid tavsiyalar ishlab chiqildi, undan foydalanishning mumkin bo’lgan imkoniyatlari ketma-ket tahlil qilindi;
- olingan sonli yechimlar analitik yechimlar bilan taqqoslandi, hisob jarayonining to’g’ri ekanligi, algoritm va dasturdan samarali foydalanish mumkinligi ko’rsatildi;
- ishlab chiqilgan hisob metodikasi va yaratilgan hisob dasturiy vositasidan har xil nochiziqli tenglamalar va tenglamalar sistemasiga oid amaliy masalalarini yechishda samarali foydalanish mumkin;
- nochiziqli tenglamalar va tenglamalar sistemasini taqribiy yechish usullaridan Nyuton usuli juda samarali ekan, ammo uning qo’llanilish sohasi juda kam;
- Nyuton usuli kvadratik yaqinlashish tezligiga ega;
- iteratsiyalar usuli ham juda qulay, ammo yaqinlashuvchi funksiyalarni topish ko‘p hollarda mushkulroq;
- iteratsion usullarning takomillashtirilan har xil variantlari juda samarali, ammo bu boshlang’ich yaqinlashishni yakkalashtirilgan ildizga juda yaqin olinganda va yaqinlashish shartlari bajarilgandagini bu usullarning yaqinlashsh tezligi keskin oshadi.

Shunday qilib, nochiziqli tenglamalar va tenglamalar sistemasini yechish muammosi qo’yilgan amaliy masala turiga qarab to’g’ri taqribiy usulni va boshlang’ich shartni tanlash, bu usullardan va matematik paketlardan samarali foydalanishdan iborat ekan.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Абдухамидов А.У., Худойназаров С. Ҳисоблаш усулларидан амалиёт ва лаборатория машғулотлари. – Тошкент: Ўқитувчи, 1995.

2. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. Решение задач вкчислительной математики в пакетах Mathcad 12, MATLAB7, Maple 9.-М.: НТ Пресс, 2006.

3. Березин И.С., Жидков И.П. Методы вычислений , т.1.-М.:Физматгиз,1962.

4. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобелков Г. М. Численные методы. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. – 600 с.

5. Демидович Б.П., Марон И.А.,- М.:Наука,1967.

6. Исраилов М.И. Ҳисоблаш усуллари. 1-қисм. – Тошкент: Ўқитувчи, 2003

7. Исраилов М.И. Ҳисоблаш усуллари. 2-қисм. – Тошкент: Ўқитувчи, 2004

8. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах.- М.: Наука, 1972.

9. Отаров А.О., Алланазаров Ж.П. Есаплаў усыллары.II бөлим.- Нөкис: Билим, 2006.

Internet manbalari

10. \http://mathhelpplanet.com/static.php?p=metody-resheniya-nelineynykh-uravneniy.

11. http://solidbase.karelia.ru/edu/meth_calc/files/11.shtm

12. http://alnam.ru/book_bcm.php?id=81

13. www.edu.uz

14. www.exponenta.ru

15. www.ziyonet.uz