O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS TALIM MINISTRLIGI

Berdoq nomidagi Qoraqalpoq davlat universiteti

''Matematik analiz''
kafedrasi

"**Matematika**" ta`lim yo`nalishini bitiruvchi

U. Xuddiyevaning

Akademik liseylarda birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalarni o‘qitish metodikasi

mavzusi bo‘yicha

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Kafedra mudiri: dots. Q. Elg‘ondiev

Ilmiy rahbar: dots. O. Qurbanbaev

Nukus 2019

Mundarija

.

Kirish

Hozirgi kunda ta’limning mazmuni va sifatini takomillashtirish masalalariga respublikamizda alohida ahamiyat berilmoqda. Fan-texnika rivojlanib borgan sari matematikaning roli ortib, shu jumladan matematikadan fizika, mexanika va astronomiya hamda iqtisodiy masalalarni yechishda, biologik jarayonlarni tahlil etishda va boshqa ko‘p sohalarda foydalaniladi. Bu sohalardagi jarayonlarning matematik modeli differensial tenglamalar nomi bilan yuritiladi.

Differensial tenglamalar nazariyasi o‘zgaruvchi kattaliklar analizi sifatida matematik analiz paydo bo‘lgandan buyon tabiashunoslik, xususan fizika va mexanika bilan chambarchas bog‘liq ravishda rivojlanib kelmoqda. Fizika fanlarini rivojlantirish ehtiyoji, harakatni va o‘zgaruvchan jarayonlarni miqdoriy jihatdan o‘rganish zarurati differensial va integral hisobning asosiy tushunchalari paydo bo‘lishiga va shakllanishiga olib keldi. Fizika qonunlarini matematik tilda bayon qilish, deyarli barcha holda fizika qonunlari o‘rganilayotgan jarayonni xarakterlovchi miqdorlar va ularning o‘zgarish tezliklari orasidagi munosabatlarni tasvirlaydi, bunday holda differensial tenglamalar asosiy tushunchalardan biri bo‘lib xizmat qiladi.

Maktab matematikasida o‘quvchilar, no’malum miqdor bitta yoki bir nechta o‘zgarmas sonlardan iborat bo‘lgan masalalarni va tenglamalarni yechib o‘rgangan. Biroq, matematikaning rivojlanuvi bilan matematikadan foydalanib hal qilinishi mumkin bo'lgan muammolarni chuqur tushinishda shunday masala yoki tenglamalar hosil bo‘lib, uning yechimi o‘zgarmas sonlar emas, o‘zgaruvchi miqdorlar, ya’niy funksiyalar bo‘ladi. Topilishi kerak bo‘lgan miqdor noma’lum funksiyadan iborat tenglamalar funksional tenglamalar deyiladi. Funksional tenglamalarning katta sinfi argumentni, argumentning noma’lum funksiyasini va uning hosilasini bog‘laydi. Bunday funksional tenglamalar differensial tenglamalar deyiladi.

Matematikadan ixtisoslashgan akademik liseylarda differensial tenglamalar elementlarini o‘qitishda amaliy tadbiqlari bilan birgalikda

matematik qat'iylikka ham e'tibor berish maqsadga muvofiqdir. Shu munosabat bilan qo‘yidagi keltiriladigan mulohazalarni matematikaga iqtisoslashgan lisey o‘qituvchilari uchun foydalidir. Pedagogik texnologiya tamoyillari asosida o‘quv mashg‘ulotini loyihalash modeli orqali amalga oshirishni keltiramiz: 1.Kichik modullar, ularning oldiga quyilgan maqsadlar va ularga ajratilgan vaqt. 2. Tayanch tushunchalar va ular asosidagi nazorat savollari. 3. Dars turlari va tiplari. 4. Qo‘llaniladiga usul va uslublar. 5. Foydalaniladigan axborot texnologiyalari. 6. Didaktik materiallar. 7. Yo‘naltirilgan matn yoki dars senariysi.

Bu bitiruv malakaviy ishida akademik liseylarda birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalarni o‘rganish maqsadida differensial tenglamalarni yechish tushunchasiga olib kelinadigan ayrim masalalar, differensial tenglamalar yordamida amaliy masalalarni yechishning ketma-ket algoritmi, differensial tenglamalarni yechish uchun zarur bo‘lgan hisoblash usullar va differensial tenglamalarni yechishning nazariy va amaliy savollarini o‘rganish masalalari qaraladi.

Bitiruv malakaviy ishi asosan kirish bo‘limidan, har birida uchta paragrafdan iborat ikki bob hajmda yozilib, keyinchalik xulosa qismi bilan foydalangan adabiyotlar ro‘yxati berilgan.

Bitiruv malakaviy ishining «Differensial tenglamalar bo‘yicha nazariy mashg‘ulotlarni o‘qitish metodikasi» deb ataladigan birinchi bobida birinchi tartibli differensial tenglamalar va ularning turlari, turlariga qarata yechish usullari bo'yicha metodik yo‘nalishlar, bu yo‘nalishlarni amalga oshirish usullari bo'yicha tushuntirishlar berilgan.

Birinchi bobning birinchi paragrafi «Differensial tenglamalar fanini o‘qitishning zamonaviy texnologiyalari va metodlari» deb atalib, unda dars jarayonlarida foydalaniladigan interaktiv metodlar masalalari qaralgan.

Birinchi bobning ikkinchi paragrafi «Birnchi tartibli differensial tenglamalar tushunchasiga olib kelinadigan ayrim masalalar» deb ataladi va unda differensial tenglamalar tushunchasiga olib keladigan hosila va integral

haqida qisqa ma’lumotlar berilib, keyinchalik, differensial tenglamalar yordamida yechiladigan fizik va geometrik masalalar qaraladi.

Birinchi bobning uchinchi paragrafi «Birinchi tartibli differensial tenglamalarning asosiy tiplari va ularni yechish metodlari» deb atalib, unda birinchi tartibli differensial tenglamalar bo‘yicha, shuning bilan birga o‘zgaruvchilari ajraladigan va ajralgan, bir jinsli, chiziqli va Bernulli tenglamalari bo‘yicha ma’ruza darsligida olib boriladigan ma’lumotlar qisqa beriladi.

Bitiruv malakaviy ishining «Differensial tenglamalar bo‘yicha amaliy mashg‘ulotlarni o‘qitish metodikasi» deb ataladigan ikkinchi bobida birinchi tartibli oddiy differensial tenglama mavzulariga oid amaliy masalalar va ularni yechish usullari qaraladi.

Ikkinchi bobning birinchi paragrafi «O‘zgaruvchilari ajralgan va ajraladigan differensial tenglamalar» deb atalib, unda birinchi tartibli o‘zgaruvchilari ajralgan va ajraladigan differensial tenglamalarni va bir jinsli differensial tenglamalarni yechishga oid ko‘rsatmalar beriladi.

Ikkinchi bobning ikkinchi paragrafi «Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar» deb atalib, unda chiziqli differensial tenglamalarni yechish usullariga oid ko‘rsatmalar beriladi.

Ikkinchi bobning uchinchi paragrafi « Bernulli tipidagi tenglamalar» deb atalib, unda Bernulli tipidagi differensial tenglamalarni yechish usullariga oid ko‘rsatmalar beriladi.

Bitiruv malakaviy ishining oxirida xulosa va foydalangan adabiyotlar ro‘yxati keltirilgan.

1-BOB. Differensial tenglamalar bo‘yicha nazariy mashg‘ulotlarni o‘qitish metodikasi

«Differensial tenglamalar» mavzusini o‘rganish paytida o‘quvchilar asosiy materiallarni, ayniqsa differensial tenglamaning ko‘rinishini turlarga ajratishda, ajratilgan turga mos metod bo‘yicha differensial tenglamani yechishni, fizikaviy, geometrik, iqtisodiy va yana boshqa amaliy masalalarni yechish paytida uning matematik modeli bo‘lib hisoblanadigan differensial tenglamalarini tuzishni bilishi kerak, shuning bilan birga amaliy masalalarni differensial tenglama yordamida yechishni mustaqil ishlashga o‘rgatish kerak. Amaliyot shuni ko‘rsatadi, «Differensial tenglamalar» mavzusini o‘rganish jarayonida talabalarda qiyinchiliklar hosil bo‘ladi. Birinchi qiyinchilik birinchi tartibli differensial tenglamalar turlarining ta’riflari bilan bog‘liq bo‘ladi. Bu qiyinchilikning sabablaridan biri darsliklarda differensial tenglamalarning barcha turlari formulalar bilan berilishida, har bir turdagi tenglama xususiyatlarining og'zaki tavsifi berilmaydi. Qiyinchilikning paydo bo‘lish sabablarining yana biri barcha turdagi birinchi tartibli differensial tenglamalarda, talabalar differensial tenglamalarning turlarini aniqlashga mumkinchilik beradigan umumiy ko‘rsatmaning berilmasligidadir.

Bu bobda shu aytilgan masalalarni bartaraf etish maqsadida birinchi tartibli differensial tenglamalar va ularning turlari, turlariga nisbatan yechish usullari bo‘yicha matematik yo‘nalishlar, bu yo‘nalishlarni amalga oshirish usullariga kiradigan birinchi tartibli differensial tenglamalar bo‘yicha tushuntirish sxemalar va «Differensial tenglamalar» mavzusini o‘tishdan oldin bu fanning boshi bo‘lgan hosilasi va integrali bo‘ yicha qisqa ma’lumotlar beriladi.

§1. Differensial tenglamalarni o‘rgatishning zamonaviy texnologiyalari va metodlari

Fan va texnikaning turli sohalarida uchrab turadigan noma’lumli funksiya va uning hosilalari qatnashgan tenglamalar uchrashadi. Bunday teglamalar va ularni yechish usullari oliy matematikaning muhim bo‘limlaridan biri differensial tenglamalar nazariyasida o‘rganiladi.

Pedagogik adabiyotlarni tahlil qilish, ma’lumotlarni umumlashtirish orqali mazkur tushunchalarning aniq ta’rifini shakllantirish mumkin. Umumiy ma’noda «metodika» tushunchasi ma’lum bir ishni bajarish uchun zarur bo‘ladigan metod va usullar yig‘indisidir. Ko‘pgina izohli lug‘atlarda «Metodika-qa’tiy ketma-ketlikka, ilgari o‘rnatilgan reja, tizimga aniq rioya qilish bo‘lib, biror bir ishni maqsadga muofiq o‘tkazish metodlari, yo‘llari majmuasi»ni ifoda etishi ko‘rsatib o‘tilgan.

«Metodika» tushunchasi turli fanlarni o‘qitish bilan ham bog‘liqlikda qo‘llanib, ma’lum sohani o‘qitish jarayoni va mazmuni, qonuniyatlari tamoyillari, shakl, metod va vositalar yig‘indisini o‘zida ifoda etadi. Differensial tenglamalarni o‘qitish metodikasiga qo‘yiladigan zaruriy talablar quyidagilar kiradi: aniqlik, hayot bilan bog‘liqlik, oldindan rejalashtirilgan harakat maqsad va vazifalarga moslik, asoslangan natija.

Differensial tenglamalarni o‘qitish metodikasi o‘zida:

- ta’limning maqsad va vazifalarini- ta’limiy, tarbiyaviy, rivojlantiruvchi, tashkiliy;
- ta’limning mazmuni;
-ta’limni tashkil etishning asosiy va yordamchi shakllarini;
-ta’limning umumiy va xususiy metodlarini;
-o‘quv vositalari;
-o‘qitish natijasini aks ettiradi.

Texnologik jarayon ikki–loyihalash va rejalashtirish bosqichlaridan tashkil topadi. Differensial tenglamalarni o‘qitish texnologiyasi – o‘quv mashg‘ulotining har bir bosqichini alohida-alohida loyihalash, kutiladigan

natijalarni oldindan aniqlashtirish, har bosqichda qo‘llaniladigan shakl, metod va vositalarini oqilona tanlab olish, professor-o‘qituvchi va o‘quvchining vazifalarini oydinlashtirishga qaratilgan algoritmik ketma-ketlikdir. Identiv o‘quv maqsadi– texnologik jarayonning asosiy komponenti bo‘lib, kutiladigan natijaga aynan mos keladigan o‘quv maqsadi. Interfaol metod– o‘quv jarayonining tarkibiy qismi bo‘lib, bir vaqtning o‘zida ham professor-o‘qituvchi, ham o‘quvchini faollashtirishga yo‘naltirilgan o‘qitish usullari majmui.

Differensial tenglamalarning grafik organayzerlari – o‘quv jarayonida qo‘yilgan maqsadga erishishda yordam beruvchi chizma, jadval, grafiklar majmui. Agar grafik organayzerlarni o‘qituvchi tayyor (to‘ldirilgan) holda qo‘llasa vosita vazifasini, o‘quvchilarning mashg‘ulot mavzusiga doir bilimlarini mustahkamlash va fikrlashini rivojlantirish maqsadida ishlatilsa, metod vazifasini bajaradi.

Differensial tenglamalarni o‘qitishda foydalaniladigan interfaol ta’lim metodlari. “Aqliy hujum” metodi – differensial tenglamalar bo‘yicha biror muammoga o‘quvchilar tomonidan bildirilgan erkin fikr va mulohazalarni to‘plab, ular orqali ma’lum bir yechimga kelinadigan metoddir. “Aqliy hujum” metodining yozma va og‘zaki shakllari mavjud. Og‘zaki shaklida o‘qituvchi tomonidan berilgan savolga o‘quvchilarning har biri o‘z fikrini og‘zaki bildiradi. O‘quvchilar o‘z javoblarini aniq va qisqa tarzda bayon etadilar. Yozma shaklida esa berilgan savolga o‘quvchilar o‘z javoblarini qog‘oz kartochkalarga qisqa va barchaga ko‘rinarli tarzda yozadilar. Javoblar doskaga (magnitlar yordamida) yoki «pinbord» doskasiga (ignalar yordamida) mahkamlanadi. “Aqliy hujum” metodining yozma shaklida javoblarni ma’lum belgilar bo‘yicha guruhlab chiqish imkoniyati mavjuddir. Ushbu metod to‘g‘ri va ijobiy qo‘llanilganda shaxsni erkin, ijodiy va nostandart fikrlashga o‘rgatadi.

“Aqliy hujum” metodi o‘qituvchi tomonidan qo‘yilgan maqsadga qarab amalga oshiriladi:

1. O‘quvchilarning boshlang‘ich bilimlarini aniqlash maqsad qilib qo‘yilganda, bu metod darsning mavzuga kirish qismida amalga oshiriladi.

2. Mavzuni takrorlash yoki bir mavzuni keyingi mavzu bilan bog‘lash maqsad qilib qo‘yilganda –yangi mavzuga o‘tish qismida amalga oshiriladi.

3. O‘tilgan mavzuni mustahkamlash maqsad qilib qo‘yilganda-mavzudan so‘ng, darsning mustahkamlash qismida amalga oshiriladi.

Misol uchun “Differensial tenglamalar deb qanday tenglamalarga aytiladi va yechimi qanday?” deb, mavzuga kirish qismida so‘rash mumkin va hakoza.

“Kichik guruhlarda ishlash” metodi - o‘quvchilarni faollashtirish maqsadida ularni kichik guruhlarga ajratgan holda o‘quv materialini o‘rganish yoki berilgan topshiriqni bajarishga qaratilgan darsdagi ijodiy ish.

Ushbu metod qo‘llanilganda o‘quvchi kichik guruhlarda ishlab, darsda faol ishtirok etish huquqiga, boshlovchi rolida bo‘lishga, bir-biridan o‘rganishga va turli nuqtai- nazarlarni qadrlash imkoniga ega bo‘ladi.

Dars jarayoni boshlanganda kichik guruhlar shakllantiriladi, mavzu yoritiladi va har bir guruhga differensial tenglamalarga bog‘liq topshiriq beriladi. Ko‘rsatma berish va yo‘naltirish, muhokama va tahlil qilish ishlari olib boriladi, dars oxirida o‘quvchilar baholash mezonlari orqali baholaniladi.

“Bahs - munozara” metodi - biror differensial tenglamalarning mavzusi bo‘yicha o‘quvchilar bilan o‘zaro bahs, fikr almashinuv tarzida o‘tkaziladigan o‘qitish metodidir.

Har qanday mavzu va muammolar mavjud bilimlar va tajribalar asosida muhokama qilinishi nazarda tutilgan holda ushbu metod qo‘llaniladi. Bahs-munozarani boshqarib borish vazifasini o‘quvchilarning biriga topshirishi yoki o‘qituvchining o‘zi olib borishi mumkin. Bahs-munozarani erkin holatda olib borish va har bir o‘quvchini munozaraga jalb etishga harakat qilish lozim. Ushbu metod olib borilayotganda o‘quvchilar orasida paydo bo‘ladigan nizolarni darhol bartaraf etishga harakat qilish kerak va quyidagicha olib boriladi.

1. O‘qituvchi differensial tenglamalarning mavzusini tanlaydi va shunga doir savollar ishlab chiqadi.

2. O‘qituvchi o‘quvchilarga differensial tenglamalardan muammo bo‘lgan savol beradi va ularni munozaraga taklif etadi.

3. O‘qituvchi berilgan savolga bildirilgan javoblarni, ya’ni turli g‘oya va fikrlarni yozib boradi yoki bu vazifani bajarish uchun o‘quvchilardan birini kotib etib tayinlaydi. Bu bosqichda o‘qituvchi o‘quvchilarga o‘z fikrlarini erkin bildirishlariga sharoit yaratib beradi.

4. O‘qituvchi o‘quvchilarga bilan birgalikda bildirilgan fikr va g‘oyalarni guruhlarga ajratadi, umumlashtiradi va tahlil qiladi.

5. Tahlil natijasida qo‘yilgan muammoning eng maqbul yechimi tanlanadi.

“Loyiha” metodi - bu o‘quvchilarning individual yoki guruhlarda belgilangan vaqt davomida, belgilangan mavzu bo‘yicha axborot yig‘ish, tadqiqot o‘tkazish va amalga oshirish ishlarini olib borishidir. Bu metodda o‘quvchilar rejalashtirish, qaror qabul qilish, amalga oshirish, tekshirish va xulosa chiqarish va natijalarni baholash jarayonlarida ishtirok etadilar. Loyiha ishlab chiqish yakka tartibda yoki guruhiy bo‘lishi mumkin, lekin har bir loyiha o‘quv guruhining birgalikdagi faoliyatining muvofiqlashtirilgan natijasidir.

Loyiha o‘rganishga xizmat qilishi, nazariy bilimlarni amaliyotga tadbiq etishi, o‘quvchilar tomonidan mustaqil rejalashtirish, tashkillashtirish va amalga oshirish imkoniyatini yarata oladigan bo‘lishi kerak. Loyiha metodini quyidagicha olib borgan maqul.

1. O‘qituvchi differensial tenglamalar bo‘yicha loyiha ishi topshiriqlarini ishlab chiqadi. O‘quvchilar mustaqil ravishda darslik, sxemalar, tarqatma materiallar asosida topshiriqqa oid ma’lumotlar yig‘adilar.

2. O‘quvchilar mustaqil ravishda ish rejasini ishlab chiqadilar. Ish rejasida o‘quvchilar ish bosqichlarini, ularga ajratilgan vaqt va texnologik ketma-ketligini, material, asbob-uskunalarni rejalashtirishlari lozim.

3. Kichik guruhlar ish rejalarini taqdimot qiladilar. O‘quvchilar ish rejasiga asosan topshiriqni bajarish bo‘yicha qaror qabul qiladilar. O‘quvchilar o‘qituvchi bilan birgalikda qabul qilingan qarorlar bo‘yicha erishiladigan natijalarni muhokama qilishadi. Bunda har xil qarorlar taqqoslanib, eng maqbul variant tanlab olinadi. O‘qituvchi o‘quvchilar bilan birgalikda “Baholash varaqasi” ni ishlab chiqadi.

4. O‘quvchilar topshiriqni ish rejasi asosida mustaqil ravishda amalga oshiradilar. Ular individual yoki kichik guruhlarda ishlashlari mumkin.

5. O‘quvchilar ish natijalarini o‘zlarini tekshiradilar. Bundan tashqari kichik guruhlar bir-birlarining ish natijalarini tekshirishga ham jalb etiladilar. Tekshiruv natijalarini “Baholash varaqasi”da qayd etiladi.

6. O‘qituvchilar va o‘quvchilar ish jarayonini va natijalarni birgalikda yakuniy suhbat davomida tahlil qilishadi. O‘quv amaliyoti mashg‘ulotlarida erishilgan ko‘rsatkichlarni me’yoriy ko‘rsatkichlar bilan taqqoslaydi. Agarda me’yoriy ko‘rsatkichlarga erisha olinmagan bo‘lsa, uning sabablari aniqlanadi.

“Keys-stadi”metodi. «Keys-stadi» - inglizcha so‘z bo‘lib, («case» – aniq vaziyat, hodisa, «stadi» – o‘rganmoq, tahlil qilmoq) aniq vaziyatlarni o‘rganish, tahlil qilish asosida o‘qitishni amalga oshirishga qaratilgan metod hisoblanadi. Mazkur metod dastlab 1921 yil Garvard universitetida amaliy vaziyatlardan iqtisodiy boshqaruv fanlarini o‘rganishda foydalanish tartibida qo‘llanilgan. Keysda ochiq axborotlardan yoki aniq voqea-hodisadan vaziyat sifatida tahlil uchun foydalanish mumkin.

“Insert” metodi. Metodning maqsadi: Mazkur metod o‘quvchilarda yangi axborotlar tizimini qabul qilish va bilimlarni o‘zlashtirilishini engillashtirish maqsadida qo‘llaniladi, shuningdek, bu metod o‘quvchilar uchun xotira mashqi vazifasini ham o‘taydi. Metodni amalga oshirish tartibi:

- o‘qituvchi mashg‘ulotga qadar differensial tenglamalarning asosiy tushunchalari mazmuni yoritilgan matnni tarqatma yoki taqdimot ko‘rinishida tayyorlaydi;

- yangi mavzu mohiyatini yorituvchi matn o‘quvchilarga tarqatiladi yoki taqdimot ko‘rinishida namoyish etiladi;
- o‘quvchilar individual tarzda matn bilan tanishib chiqib, o‘z shaxsiy qarashlarini maxsus belgilar orqali ifodalaydilar. Matn bilan ishlashda talabalar yoki qatnashchilarga quyidagi maxsus belgilardan foydalanish tavsiya etiladi:

Belgilangan vaqt yakunlangach, o‘quvchilar uchun notanish va tushunarsiz bo‘lgan ma’lumotlar o‘qituvchi tomonidan tahlil qilinib, izohlanadi, ularning mohiyati to‘liq yoritiladi. Savollarga javob beriladi va mashg‘ulot yakunlanadi.

Differensial tenglamalarni o‘rganish jarayonida inson tafakkurining usul va metodlari qatoriga induksiya va deduksiya, umumlashtirish va aniqlashtirish, analiz va sintez, abstraksiyalash, analogiya, tasniflash va sistemalashtirish kabilar qo‘shiladi.

Biz differensial tenglamalarni o‘qitish deyilganda o‘qituvchi bilan o‘quvchilar orasidagi ongli va maqsadga tomon yo‘naltirilgan bilishga doir faoliyatni tushunamiz. Har qanday ta’lim o‘z oldiga ikkita maqsadni qo‘yadi:

1) O‘quvchilarga dastur asosida o‘rganilishi lozim bo‘lgan zarur bilimlar sistemasini berish.

2) Differensial tenglamalarni bo‘yicha bilimlarni berish orqali o‘quvchilarning mantiqiy fikrlash qobiliyatlarini shakllantirish.

Dars jarayonidagi ana shu ikki maqsad amalga oshishi uchun o‘qituvchi har bir o‘rgatilayotgan tushunchani psixologik, pedagogik va didaktik qonuniyatlar asosida tushuntirishi kerak. Buning natijasida o‘quvchilar ongida bilish deb ataluvchi psixologik jarayon hosil bo‘ladi.

Differensial tenglamalarni bo‘yicha amaliy mashg‘ulotlar va uyda masalalar echish aniq berilgan misollar yordamida nazariy materialni yaxshiroq o‘zlashtirish va tushunishga, o‘quvchi tomonidan nazariyani amaliyotga qo‘llay olish ko‘nikma va malakalarini shakllantirishga qaratilgan. Matematik ta’lim tizimining bunday tashkil etilishi odatiy bo‘lib, biz uni hech qanday qarshiliksiz qabul qilamiz. Aslida ta’lim jarayoni o‘quvchilar aqliy faoliyatiga suyanuvchi bir qancha qismlardan tashkil topgan kompleksdan iborat.

O‘quvchilarni hozirgi kun talablaridan kelib chiqqan holda o‘qitish, ta’lim-tarbiya berishda an’anaviy metodlar ish beravermaydi. Shu sababdan ta’lim jarayoniga o‘quvchi bilan o‘qituvchidan bu jarayonning faol ishtirokchilariga aylantiruvchi savol-javob, bahs-munozara, muammoli, modulli, taqlidiy o‘yinlar, ochiq muloqot kabi bir qancha metodlarni qo‘llash tajribalari keng olib borilmoqda.

Leksiyaning didaktik maqsadi, o‘qitish jarayonidagi o‘rni, axborotlarni bayon qilish metodlariga ko‘ra o‘ziga xos xususiyatlarga ega bo‘ladi. Agar leksiyada ilmiy bilimlar asosi bayon qilinadigan bo‘lsa, amaliy mashg‘ulotlarda bilimlar chuqurlashtiriladi, kengaytiriladi va detallashtiriladi. Eng muhimi, amaliy mashg‘ulotlar o‘quvchilar bilimini sinash uchun ham xizmat qiladi.

Ta’lim tizimining rivoji jamiyat rivoji natijasida amalga oshadi. Ijtimoiy omillarning ta’sirida innovasiyalar ta’lim sohasiga kirib kelmoqda. Respublikamizdagi ijtimoiy-iqtisodiy o‘zgarishlar ta’lim tizimini, ta’lim-tarbiya metodologiyasi va texnologiyalarini tubdan yangilash zaruratini keltirib chiqardi. Bu esa o‘z navbatida yosh avlodga ta’lim berish maqsadi, o‘qituvchi va o‘quvchilarning o‘zaro bog‘liq faoliyatiga yangiliklarni kiritishni talab etmoqda. Pedagoglarning innovasion faoliyatga yo‘naltirilganligi ta’lim siyosatini yangilash asosini tashkil etadi. Shu bilan birga ta’lim sohasidagi o‘zgarishlar jamiyat rivojiga o‘z ta’sirini o‘tkazmay qolmaydi. O‘qituvchi pedagogik faoliyatiga innovasiyalarni kiritishning pedagogik omillari zamonaviy pedagogika fanining rivoji bilan bog‘liq bo‘lib, ta’lim jarayonidagi innovasion jarayonlar asosi sifatida yangi pedagogik g‘oya, nazariya, konsepsiyalarni amaliyotga tatbiq etish muammosini keltirib chiqaradi.

Muammoli o‘qitish texnologiyasi. Bilish jarayonida aniq qo‘yilgan savol yoki savollar kompleksi odatda muammo, bilish esa bir savolga topilgan javob yordamida ikkinchi bir savol javobga o‘tish ketma-ketligi deb tushuniladi. Har qanday izlanish esa odatda «muammo» ⇨ «izlanish» ⇨ «yechim» ko‘rinishidagi ketma-ketlik orqali ifodalanadi. Bundan ko‘rinadiki, aniq, ravshan qo‘yilgan muammo uni hal etishda muhim ahamiyatga ega.

Muammoli ta’lim maqsadi – o‘qituvchi tomonidan taklif etilgan, maxsus bilim orttirishga xizmat qiladigan masala – muammoni o‘quvchilar o‘z aql-idroklari bilan echishdan iborat.

Muammoli o‘qitishning mohiyatini, o‘qituvchi tomonidan o‘quvchilarni o‘quv ishlarida muammoli vaziyatni vujudga keltirish va o‘quv vazifalarini, muammolarini va savollarini hal qilish orqali yangi bilimlarni o‘zlashtirish bo‘yicha ularning bilish faoliyatini boshqarish tashkil etadi. Bu esa bilimlarni o‘zlashtirishning ilmiy-tadqiqot usulini yuzaga keltiradi.

Muammoli o‘qitishni tashkil etishda o‘qituvchi o‘quv materialini: monolog; fikr yuritish va muhokama qilish usulida; dialogli bayon qiladi. Topshiriqlarni: evristik; tadqiqotli va programmali usullarda beradi.

Monologli bayon etish. O‘qituvchi muammoli vaziyat sharoitida o‘z ma’ruzasida yangi tushunchalar, faktlarning mazmun-mohiyatini tushuntiradi, talabalarga fanning tayyor xulosalarini aytib beradi.

Fikr yuritib bayon qilish metodi. Birinchi variant – o‘qituvchi muammoli vaziyat yaratib, bor materialni tahlil qiladi, xulosalar chiqaradi, fikrlarni umumlashtiradi. Ikkinchi variant – o‘qituvchi mavzuni bayon etishi borasida darsni suhbat – ma’ruza shaklida olib boradi. Bunda bilim orttirish jarayonining mantiqiy asosida fikr yuritib, ilmiy izlanishning sun’iy mantiqini yaratadi.

Dialogli bayon metodi. Bunda o‘qituvchi guruhdagi talabalar bilan muloqatda bo‘ladi. O‘qituvchi o‘zi yaratgan muammoli vaziyatda muammoni o‘zi qo‘yadi va uni talabalar yordamida yechadi. Talabalar muammoni qo‘yishda, taxminlarni oldinga surishda va gipotezalarni isbot etishda faol qatnashadi. Dars izlanishli suhbat, bayon shaklida olib boriladi.

Evristik topshiriqlar metodi. Bunda yangi qonuniyatlar, qoidalar o‘qituvchi tomonidan, talabalarning ishtirokida ham emas, balki talabalar tomonidan o‘qituvchi rahbarligida ochiladi. Bu metod evristik suhbat borasida muammoli masala va topshiriqlarni yechish yo‘li bilan amalga oshiriladi.

Tadqiqotli topshiriqlar metodi. O‘qituvchi talabalar oldiga yuqori

darajada muammoli nazariy va amaliy tadqiqot topshiriqlarini qo‘yadi. Talaba mustaqil mantiqiy fikr yuritib, yangi tushuncha va yangicha yondoshish usulining mohiyatini ochadi. Tadqiqot ishlarini tashkil etish shakllari turlicha bo‘lishi mumkin: tajriba, faktlarni yig‘ish, doklad tayyorlash, modullash.

Dasturlashtirilgan topshiriqlar metodi**.** Bunda talabalar maxsus tayyorlangan didaktik vositalar yordamida yangi bilimlar oladi.

Matematik muammo uch tarkibiy qismdan iborat: ma’lum (berilgan vazifa asosida), noma’lum (ularni topish yangi bilimlarni shakllantirishga olib keladi) va avvalgi bilimlar (talabalar tajribasi). Ular noma’lumni topishga yo‘nalgan qidiruv ishlarini amalga oshirish uchun zarurdir. Avvalo talabaga noma’lum bo‘lgan o‘quv muammosi vazifasi belgilanadi va bunda uning bajarilish usullari hamda natijasi ham noma’lum bo‘ladi, shunda talabalar o‘zlaridagi avval egallangan bilim va ko‘nikmalarga asoslanib turib kutilgan natija yoki yechilish yo‘lini izlashga tushadi.

§2. Birnchi tartibli differensial tenglamalar tushunchasiga olib kelinadigan ayrim masalalar

Hosila va uning ayrim ma'nolari. Aniq integral. Differensial tenglamalar fanining asosiy mazmuni bilan tanishishdan oldin hosila va uning har bir yunalish bo'yicha ma'nolari haqida tushunchalar beramiz. Hosilaning geometrik ma'nosi bo'lib hisoblanadigan urinmaning og'ish burchagining tangensi singari, amaliyotda ko'proq qo'llaniladigan hosilaning mexanik, fizik va yana boshqa ma'nolari: t vaqtdagi jismning $\vartheta(t)$ harakat tezligi $\vartheta(t)=\frac{ds}{dt}$; t vaqt birligidagi tezlanishi, $\omega(t)=\frac{d\vartheta}{dt}$; t vaqt birligidagi jismning sovush tezligi $\omega(t)=\frac{dT}{dt}$; temperatura T ning o'zgarish vaqtidagi Q issiqlik miqdorining o'zgarish tezligi $\frac{dQ}{dt}$; t vaqtda o'tkazgich orqali o'tadigan elektr tokining kuchi $I(t)=\frac{dq}{dt}$ (bu yerda q elektr miqdori); har xil jarayonlarning bo'lib o'tish tezligi, misoli kimyoviy reaksiya tezligi $\frac{dx}{dt}$ (bu yerda x litrdagi molekulalar soni) va yana boshqa ma'nolarini uchratishga bo'ladi.

Aniq integral va uning qo'llanishlarini o'rganish borasida differensial tenglamaga olib kelinadigan ko'plagan masalarni uchratishga bo'ladi. Misol uchun egri chiziqli trapesiyaning yuzasini topishga bag'ishlangan masalalarni o'rganish vaqtida, keyinchalik differensial tenglamaga keltiriladigan

$$3\int_0^x y(t)dt = 2xy$$

ko'rinishga ega integral tenglamaga olib kelinadigan masalani uchratishga bo'ladi. Bunday ko'rinishdagi masalalar nazariy va amaliy darslarda yechiladi va shuning bilan birga masalani yechish jarayonida matematik modellashtirish bosqichlari saqlanadi: matematik modelini tuzish, olingan tenglamani yechish, natijani analizlash.

Nazariy darsni o’rganish borasida talabalar sohasiga mos olingan qandaydir bir masalaning matematik modeli sifatida differensial tenglamani qo’llanish bo’yicha zarurli ma’lumotlarni oladi. Misol uchun kimyo-texnalogiya yo’nalishidagi talabalar kimyoviy texnalogiya masalalarining matematik modeli va kimyoviy jarayondagi matematik modellashtirishning bosqichlari sifatida differensial tenglamalarni qo’llanishga tegishli misollarni o’rganadi.

Matematik modellashtirish metodi bilan yechiladigan kimyo-texnalogiya mutaxassisligi uchun amaliy masalalaring mavzusi va matematik modeli bo’yicha quyidagi tiplarga bo’lishga bo’ladi:

1**.** Narsalarning erishi va emirilishi haqidagi birnchi va ikkinchi tur kimyoviy reaksiyalarga ta’luqli misollar.

2. Eritmaning konsentrasiyasi haqidagi masalalar.

3. Elementar qatlamlarga bo’lish yo’li bilan yechiladigan masalalar.

4. Hosila – jism harakatining tezligi yoki tezlanishi bo’ladigan mexanik masalalar.

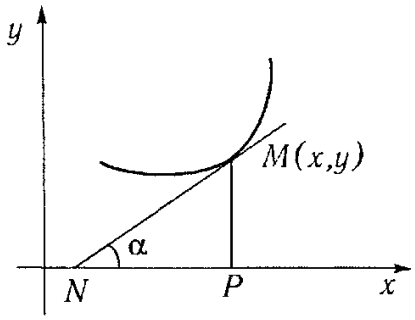
5. Har xil fizikaviy qonunlarni qo’llanib yechiladigan fizikaviy masalalar.

6. Hosila – urinmaning og’ish burchagining tangensi bo’ladigan geometrik masalalar.

Differensial tenglamani o’rganishdan oldin bunday tenglamaning barcha o’rganiladigan tiplariga olib kelinadigan masalalar ko’rsatiladi.

1-misol. Tekislikning $(1,1)$ nuqtasidan o’tadigan va ixtiyoriy nuqtasiga yurgizilgan urinma, Ox o’qidan o’zunligi urinish nuqtasining absissasining yarmiga teng bo’ladigan kesmani kesib oladigan egri chiziqni toping.

Yechilishi. Masalani bir necha bosqichlarga bo’lib yechish talabalarning fikrlashiga va kelasi masalalardi shunday yo’llar bilan yechishga turtki bo’ladi. Birinchi bosqichda grafigi izlanuvchi egri chiziqni beradigan funksiyaga qarata matematik model tuzishdan iborat. Uning uchun oldin ushbu egri chiziqning chama bilan olingan grafigi va ushbu grafikning ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtasiga yurgizilgan urinmasi chizilgan holda masalaning geometrik tasviri chiziladi.



Mayli izlanuvchi egri chiziq $y = f(x)$ funksiyaning grafigi, MN ushbu egri chiziqqa yurgizilgan urinma va MN urinma bilan absissa o'qi orasidagi burchak α bo'lsin. Urinish nuqtadan absissa o'qiga MP perpendikulyar yurgizib, kiyinchalik hosil bo'lgan MNP to'g'ri burchakli uchburchakdan $tg\alpha = \frac{MN}{NP}$ nisbatini aniqlaymiz. Bundan $MP = y$, $NP = \frac{x}{2}$ bo'lganlikdan $tg\alpha = \frac{2y}{x}$ kelib chiqadi. Hosilaning geometrik ma'nosi bo'yicha $tg\alpha = y'$ bo'lganlikdan, berilgan masala uchun $y' = \frac{2y}{x}$ ko'rinishidagi differensial tenglama bilan akslanadigan masalaning matematik modeli kelib chiqadi.

Ikkinchi bosqichda hosil bo'lgan tenglama yechiladi. Bu tenglamani yechish uchun y' ni $y' = \frac{dy}{dx}$ ko'rinishda yozib olamiz va tenglamani $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$ ko'rinishga keltiramiz. Keyinchalik tenglamani, tenglik belgisining har bir tarafi faqat bir turdagi o'zgaruvchilarga bogliq bo'lgan $\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x}$ ko'rinishga keltiramiz. Differensial tenglamani bunday ko'rinishga keltirish o'zgaruvchilarini ajratish deb ataladi. Hosil bo'lgan oxirgi tenglikning ikki tomonini integrallasak

$$\int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x}$$

yoki $\ln y = 2\ln x + C$ bo'ladi, bu yerda C ixtiyoriy o'zgarmas. Oxirgi tenglikdan y ni ajratib olish uchun tenglikning ikki tomonini potensiallaymiz. Potensiallash jarayonini osonlashtirish uchun ixtiyoriy o'zgarmas C ni $\ln C$ bilan almashtiramiz. Shunda $\ln y = 2\ln x + \ln C$ bo'lib, bundan $y = Cx^2$ ko'rinishidagi izlanayotgan egri chiziqlar guruhiga ega bo'lamiz.

Masalani yechishning uchinchi bosqichi ushbu egri chiziqlar guruhi ichidan bizga kerakli, ya'niy tekislikning (1,1) nuqtasidan o'tadigan egrilikni ajratib olishdan iborat. Buning uchun $y = Cx^2$ dan $x = 1$ bo'lganda $y = 1$ bo'ladigan C ning qiymatini aniqlaymiz: $1 = C \cdot 1^2$ tengligidan $C = 1$ bo'lib, izlana yotgan egrilikning $y = x^2$ parabolasi bo'ladiganligi kelib chiqadi.

Differensial tenglamalarni yechishga olib kelinadigan fizikaviy va mexanikaviy masalalar. Fizika qonunlarini matematik tilda bayon qilish, deyarli barcha holda fizika qonunlari o'rganilayotgan jarayonni xarakterlovchi miqdorlar va ularning o'zgarish tezliklari orasidagi munosabatlarni tasvirlaydi, bunday holda differensial tenglamalar asosiy tushunchalardan biri bo'lib xizmat qiladi. Uni yaqqol tushuntirish uchun biror fizik masalani differensial tenglamalar nazariyasining tadbiqi sifatida ko'rib chiqaylik. Ko'p sonli fizikaviy va mexanikaviy qonunlar ichida katta ahamiyatga ega qonunlarning biri Nyutonning ikkinchi qonuni bo'lib hisoblanadi. Bu qonun jismning qo'zg'alishi bilan bog'liq bo'lgan jarayonlarning barcha turlarini o'z ichiga oladi.

Qo'zg'alish davomida jismning massasi o'zgarmas bo'ladigan holat uchun Nyuton qonuni quyidagicha aytiladi: erkin qo'zgalishdagi jismga ta'sir etadigan kuch shu kuchning ta'siri natijasida kelib chiqadigan tezlanishga proporsional, proporsional koeffisenti jismning massasiga teng.

Agar qo'zg'alish to'g'ri chiziq bo'yicha amalga oshiriladigan bo'lsa, u holda Nyuton qonuni oddiy turda

$$F = m \cdot a$$

ko'rinishinda qabul qilinadi. To'g'ri chiziqli qo'zg'alishda jisimning tezligi uning koordinatasidan vaqt bo'yicha olingan hosilasi bo'ladi, jismning tezlanishi tezlikdan vaqt bo'yicha olingan hosila bo'ladi, ya'niy jismning koordinatasidan olingan ikkinchi tartibli hosila bo'ladi. Boshqacha aytganda $\vartheta = x'$, $\grave{a} = \vartheta' = x''$ tengliklari o'rinli bo'ladi. Demak, $F = m \cdot a$ formulani

$F = m \cdot x''$ ko'rinishida yozish mumkin. Bu modellashtirishlar masalasi dinamika masalasi deb ataladi.

2-misol. Ko'lda soatiga 32 kilometr tezlik bilan harakat qilib qilayotgan kater matorni o'chirgandan keyin bir minutdan so'ng uning tezligi soatiga 8 kilometr bo'lib qoladi. Agar suvning qarshilik kuchi katerning tezligiga proporsional ekanligi ma'lum bo'lsa, u holda mator o'chgandan keyin 2 minutdan so'ng uning tezligi qanday bo'ladi? Mator o'chgandan keyin bir minut vaqt ichida kater qancha yer suzib ulguradi? 2 minutda yeching?

Masalaning shartini taxlil qilgan o'quvchilar suvning qarshilik kuchi katerning tezligiga proporsional ekanligin hisobga olib, mator o'chgandan keyin 2 soatdan so'ng uning tezligining qanday bo'ladiganligini topish zarur degan xulosaga keladi. O'quvchilarning bu fikri yechilish uchun o'qituvchi tomoninidan birinchi bosqichda masalaning matematik modelini tuzish kerak ekanligi aytiladi va birgalikda bu masalaning matematik modelini quyidagicha tuzadi.

O'quvchilarga katerning harakatdagi tezligini ϑ, proporsionallik koeffisenti k deb belgilash taklif etiladi. Masalaning sharti bo'yicha harakatdagi katerga fizikadan ma'lum $F = -k\vartheta$ kuchi tasir etadi. Ikkinchi tomondan Nyutonning ikkinchi qonuni bo'yicha bu kuch $F = m\dfrac{d\vartheta}{dt}$ ga teng bo'ladiganligi aytiladi va bu yerda m ning massa, $\dfrac{d\vartheta}{dt}$ ning tezlik ekanligi eslatiladi. Shundan bu kuchlarning bir biriga teng ekanligini hisobga olgan holatda $m\dfrac{d\vartheta}{dt} = -k\vartheta$ tengligining o'rinli bo'ladiganligi va bu bo'lsa kater harakatining differensial tenglamasi bo'ladiganligi, ya'niy qaralayotgan masalaning matematik modeli bo'lishi tushuntiriladi.

Ikkinchi bosqichda o'quvchilar hosil bo'lgan differensial tenglamani o'zgaruvchilarni ajratish usuli bilan

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta} = -\frac{k}{m}dt$$

ko'rinishida yozib olib, bu tenglikning ikki tomonini integrallash orqali $\ln\vartheta(t) = -\frac{k}{m}t + \ln C$ yoki $\vartheta(t) = Ce^{-\frac{k}{m}t}$ ko'rinishidagi hosil bo'lgan differensial tenglamaning umumiy yechimiga ega bo'ladi.

Matorni o'chirgan vaqtni daslabki vaqt, ya'niy $t = 0$ vaqt deb hisoblasak va masalaning sharti bo'yicha bu vaqtdagi tezlikning soatiga 32 kilometrga teng ekanligini hisobga olsak, u holda $\vartheta(0) = Ce^{-\frac{k}{m}\cdot 0}$ bo'lib, bundan $C = 32$ bo'lishi kelib chiqadi. C ning bu qiymatini umumiy yechimdagi o'rniga qoysak $\vartheta(t) = 32e^{-\frac{k}{m}t}$ bo'ladi. Masalaning, kater matorni o'chirgandan keyin uning bir minutdan so'ngi tezligining soatiga 8 kilometr bo'lib qolgani haqidagi sharti bo'yicha $t = 1\min = \frac{1}{60}caat$ uchun so'ngi tenglikdan $\frac{k}{m}$ ning

$$\vartheta(1min) = \vartheta\left(\frac{1}{60}caat\right) = 32e^{-\frac{k}{m}\cdot\frac{1}{60}} = 8$$

tengligidan aniqlanishi o'quvchilarga tushuntiriladi va $e^{-\frac{k}{m}\cdot\frac{1}{60}} = \frac{1}{4}$ yoki $e^{-\frac{k}{m}} = 4^{-60}$ tengligini aniqlaydi. Bundan hosil bo'lgan differensial tenglamaning umumiy yechimining $\vartheta(t) = 32\cdot 4^{-60t}$ ko'rinishidagi xususiy yechimga aylanishi kelib chiqadi.

Endi masalaning talabiga o'sak, unda 2 minutdan keyingi katerning tezligini aniqlash uchun, oxirgi tenglikni foydalanib $t = 2\min = \frac{1}{30}caat$ uchun $\vartheta\left(2_{\min}\right) = \vartheta\left(\frac{1}{30}caat\right) = 32\cdot 4^{-60\cdot\frac{1}{30}} = 2$ tengligining o'rinli ekanligini ko'rsatadi.

Uchinchi bosqichda masalaning sharti bo'yicha olingan natijalarni tushuntirishga o'tamiz. Olingan natija bo'yicha mator o'chirilgandan keyin 2 minutdan so'ng katerning tezligi soatiga 2 km bo'lgan.

Talabalar masalaning birinchi savoliga javobni olgandan keyin ikkinchi savolning javobini eshitishga shoshadi. Mator o'chirilgandan keyin bir minutdan so'ng, 2 minutdan so'ng katerning bosib o'tgan yo'li qanday?

Talabalar masalaning bu shartini matematik termin tiliga aylantiradi, ya'niy differensial tenglamaga qo'shimcha shartning matematik modelini tuzadi.

Mator o'chirilgandan keyingi katerning bosib o'tgan yo'lini S orqali belgilaydi. Bu miqdor vaqt t ga bog'liqli, ya'niy $S = S(t)$ va $t = 0$ vaqt momentidagi qiymati $S(0) = 0$. Hosilaning fizikaviy ma'nosi bo'yicha tezlik, – bu yurilgan yo'ldan vaqt bo'yicha olingan hosilaga teng, demak $S'(t) = 32 \cdot 4^{-60t}$.

Boshlang'ich $S(0) = 0$ shartini hisobga olgan holda oxirgi tenglamani integrallasak

$$S(t) = 32 \cdot \int_0^t 4^{-60x} dx = \frac{-8}{15} \int_0^t 4^{-60x} d(-60x) = \frac{-8}{15} \frac{4^{-60x}}{\ln 60}\Bigg|_0^t = \frac{8}{15 \ln 60}\left(1 - 4^{-60t}\right).$$

Shunday qilib, mator o'chirilgandan keyin bir minutdan so'ng katerning bosib o'tgan yo'li $S(1) = \frac{8}{15 \ln 60}\left(1 - 4^{-60}\right) \approx 0{,}1 km = 100 m$, al 2 minutdan so'ng bosib o'tgan yo'li $S(2) = \frac{8}{15 \ln 60}\left(1 - 4^{-120}\right) \approx 0{,}125 km = 125 m$ bo'ladi.

Eslatma. Talabalar belgili $S = \vartheta t$ formulani foydalanishni taklif etishi mumkin, bu yerda ϑ tezlik $S'(t) = \vartheta = 32 \cdot 4^{-60t}$ formulasi bilan aniqlanadi. Lekin natijada ular katta noto'g'ri xulosaga ega bo'ladi: mator o'chirilgandan keyin bir minutdan so'ng katerning bosib o'tgan yo'li $S(1) = 32 \cdot 4^{-60 \cdot \frac{1}{60}} \frac{1}{60} \approx \frac{2}{15} km = 133{,}(3) m$, 2 minutdan so'ng bosib o'tgan yo'li $S(2) = 32 \cdot 4^{-60 \cdot \frac{1}{30}} \frac{1}{30} \approx \frac{1}{15} km = 66{,}(6) m$ bo'ladi, ya'niy o'tilgan yo'l vaqtning o'tishi bilan ko'paymaydi, kamayadi. Talabalarni bu xatolikdan qutqarish uchun, ularning diqqatini $S = \vartheta t$ formulaga aylantirip, bu formulaning teng o'lchamli qo'zg'alish vaqtiga to'g'ri ekanligini, hozirgi holatda qo'llanib bo'lmasligini

eslatishga to'g'ri keladi.

Differensial tenglamalarni yechishga olib kelinadigan jismning sovushi haqidagi masalalar. Mayli boshlang'ich vaqt momentidagi massasi m ga va o'zgarmas issiqlik sig'imi c ga teng bo'lgan jismnning boshlang'ich vaqt momentdagi temperaturasi ϑ_0 bo'lsin. Mayli muxitning temperaturasi o'zgarmas va $\vartheta_0 (\vartheta_0 > \vartheta_m)$ ga teng bo'lsin. Jismning sheksiz kichik dt vaqt ichidagi tarqatadigan issiqlik miqdori, jism va uning atrofidagi muxitning temperaturalari orasidagi ayirmaga va vaqtqa proporsional ekanligin itiborga olgan holda jismning sovush qonunini aniqlaylik.

Sovush davomida jismning temperaturasi ϑ_0 dan ϑ_c gacha pasayadi. Mayli vaqtning t momentida jismning temperaturasi ϑ ga teng bo'lsin. Sheksiz kichik dt vaqt oralig'idagi jism tarqatgan issiqlik miqdori joqarida aytilganlar bo'yicha $dQ = -\alpha(\vartheta - \vartheta_c)dt$ ga teng bo'ladi, bu yerda $\alpha - const$ proporsionallik koeffisent.

Ikkinchi tomondan jism ϑ temperaturadan ϑ_c temperaturagacha sovuganda tarqatadigan issiqlik miqdori $Q = mc(\vartheta - \vartheta_c)$, demak $dQ = mcd\vartheta$. dQ uchun topilgan bu ikki ifodani tenglab

$$mcd\vartheta = -\alpha(\vartheta - \vartheta_c)dt$$

differensial tenglamani hosil qilamiz. O'zgaruvchilarni ajratib:

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta - \vartheta_c} = -\frac{\alpha}{mc}dt$$

tenglamasiga ega bo'lamiz. Buni integrallasak: $\ln(\vartheta - \vartheta_c) = -\frac{\alpha}{mc}t + \ln C$ yoki $\vartheta - \vartheta_c = Ce^{-\alpha t/(mc)}$.

Boshlang'ich shart bo'yicha $t = 0$ bo'lganda $\vartheta = \vartheta_0$ bo'ladi. Bu C ni topishga yordam beradi: $C = \vartheta_0 - \vartheta_c$. Shundan jismning sovish qonuni quyidagi ko'rinishda yoziladi: $\vartheta = \vartheta_c + (\vartheta_0 - \vartheta_c)e^{-\alpha t/(mc)}$.

α koeffisent aniq berilgan bo'lishi yoki qoshimcha shart bilan berilgan bo'lishi mumkin, misoli $t = t_1$ bo'lganda $\vartheta = \vartheta_1$ ko'rinishda berilishi mumkin.

Bunday holda quyidagiga ega bo'lamiz: $\vartheta_1 - \vartheta_c = (\vartheta_0 - \vartheta_c)e^{-\alpha t_1/(mc)}$, Bundan $e^{-\alpha/(mc)} = (\frac{\vartheta_1 - \vartheta_c}{\vartheta_0 - \vartheta_C})^{1/t_1}$ Demak $\vartheta = \vartheta_c + (\vartheta_0 - \vartheta_c)(\frac{\vartheta_1 - \vartheta_c}{\vartheta_0 - \vartheta_c})^{t/t_1}$ bo'ladi.

3-misol. Pechdan olinib omborga qoyilgan nonning 20 minut ichida 100^0 dan 60^0 gacha sovitilganligi va omborxonadagi havoning temperaturasi 20^0 ekanligi ma'lum bo'lsa, u holda qancha vaqtda uning temperaturasi 40^0 va qancha vaqtda temperaturasi 30^0 bo'ladi?

Yechilishi. Masalaning shartini analizlagan talabalar jismning tarqatadigan issiqlik miqdorining, jism bilan tashqi muxitdagi temperaturalarning auirmasiga proporsional ekanligini itiborga olgan holda jism temperaturasining o'zgarish qonunini aniqlashga harakat qiladi. Jismning t vaqtdagi temperaturasini $T(t)$ orqali belgilasak, u holda jismning boshlang'ich $t = 0$ vaqt momentidagi ma'nosi $T(0) = 100^0$ bo'lishi aniq. Tashqi muxitdagi, ya'niy omborxonadagi temperaturaning T_0=20° ekanligi hisobga olinsa, u holda yuqoridagi keltirilgan formula bo'yicha jismning sovushi tezligining matematik modeli

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 20)$$

ko'rinishidagi o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama bilan tasvirlanadi va masalani yechishning birinchi bosqichi shu bilan yakunlanadi. Ikkinchi bosqichda olingan tenglamaning o'zgaruvchilarnini ajratib

$$\frac{dT}{T - 20} = kdt$$

so'ng buni integrallaydi:

$$\ln|T - 20| = kt + \ln C$$

yoki $T - 20 = Ce^{kt}$. Agar, boshlang'ich $t = 0$ vaqtda T(0)=100° ekanligi hisobga olinsa $C = 80^0$, ikkinchidan 20 minut ichida uning temperaturasi $T(20) = 60^0$ bo'lishini hisobga olinsa $6\ ^0 0 - = 2\ 0 e^{k\cdot\ 0}$ ya'niy

$e^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}}$ bo'lishi aniqlanadi. Shunday qilib, $T(t)$ ga qarata $T(t) = 20^0 + 80^0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$ tenglik paydo bo'lib, bu qaralayotgan jismning t vaqtdagi temperaturasini aniqlashga yordam beradi.

Masalaning uchunchi bosqichi masala savoliga javob beradigan bosqich bo'lib, bunda $T(t) = 40^0$, $T(t) = 30^0$ bo'lishi uchun t ning $T(t) = 40^0$ ma'nolari qanday bo'lishi kerak ekanligini aniqlashdan iborat. $T(t) = 40^0$ bo'lishi uchun $40^0 = 20^0 + 80^0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$ tengligidan $t = 40$ minut, $T(t) = 30^0$ bo'lishi uchun $30^0 = 20^0 + 80^0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$ tengligidan $t = 60$ minut bo'lishi aniqlanadi. Shunday qilib, omborda turgan nonning temperaturasi 40 minutdan keyin 40^0 ga, 60 minutdan keyin 30^0 gacha sovir ekan.

Eslatma. Omborxonadagi nonning temperaturasining $T(t) = 20 + 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$ qonun bo'yicha o'zgarishidan ko'rinib turganidek, bu temperatura hech qachon 20^0 dan past bo'lmaydi, ya'niy nonning temperaturasi omborxonadagi havo temperaturasidan past bo'lmaydi.

Differensial tenglamalarni yechishga olib kelinadigan kimyoviy masalalar. Bazi-bir elementlarning o'zaro ta'sir etish jarayonida boshqa bir elementlarning paydo bo'lishi kimyoviy tenglamalar yordamida ko'rsatiladi. Masalan $2H_2 + O_2 \to 2H_2O$ kimyoviy tenglamasi ikki vodorod molekulasi bilan bir kislorod molekulasining o'zaro ta'sir estish jarayonida suvning ikki molekulasining olinishini ko'rsatadi.

Umumiy vaziyatda kimyoviy tenglamalar

$$aA + bB + cC + ... \to mM + nN + pP + ...$$

ko'rinishda yoziladi, bu yerde $A, B, C, ...$ lar o'zaro ta'sir qiluvchi

elementlarning molekulalari, $M, N, P, ...$ lar kimyoviy reaksiya natijasinda olinadigan elementning molekulasi, hamda $a, b, c, ..., m, n, p, ...$ lar bo'lsa reaksiya vaqtida qatnashadigan molekulalar sonini ko'rsatadigan musbat butun sonlar.

Yangi elementning paydo bo'lish tezligi reaksiya tezligi dep ataladi. Reaksiyada qatnashuvchi elementning harakatdagi massasi yoki konsentrasiyasi bu elementning birlik hajmdagi molekulalar soni bilan ifodalanadi.

Kimyoviy reaksiya nazariyasining asosiy qonunlarining bir harakatdagi massa qonuni bo'lıp, bu qonun bo'yicha o'zgarmas temperaturadagi kimyoviy reaksiya tezligi, shu vaqtdagi reaksiyaga qatnashuvchı elementlarning konsentrasiyasina proporcional bo'ladı.

Agar kimyoviy reaksiya vaqtida A elementdan hosil bo'ladigan B elementning miqdori x bo'lsa, u holda o'zgarmas temperaturada va boshqa bazi-bir shartlar o'rinlansa reaksiya tezligi A elementning qolgan miqdoriga proporsional bo'ladi.

Bu vaziyatda quyidagi differensial tenglama kelib chiqadi:

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)$$

bu yerda a orqali A elementning boshlang'ich miqdori belgilangan, k proporsionallik koeffisent, $k > 0$.

4-misol. Kimyoviy A elementning yarimi 10 daqiqa ichida kimyoviy B elementiga aylanishi belgili bo'lsa, unda ushbu A elementning 0,1 bo'lagi B elementiga qancha vaqtda aylanishini aniqlang.

Yechilish. Birinchi bosqichda hosil bo'lgan B elementning t vaqtdagi miqdorini $x(t)$ deb belgilash kiritamiz va ushbu elementning paydo bo'lish tezligini beradigan masalaning matematik modelini tuzamiz. Uning uchun B elementning paydo bo'lish tezligi ushbu vaqtdagi A elementning qolgan bo'lagiga, ya'niy $a - x$ miqdoriga proporsional bo'lishini hisobga olamiz. Bu qonun bo'yicha B elementning paydo bo'lish tezligi

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)$$

ko'rinishida aniqlanadi, bu yerda $x(t)$ dan olingan hosila paydo bo'lib, B element miqdorining ko'payish tezligi bo'lib topiladi.

Masalaning ikkinchi bosqichi bu tenglamani yechishdan iborat. Bu tenglama o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamalar safiga kirib, o'zgaruvchilari ajralgandan keyin integrallasak $x(t) = a - Ce^{-kt}$ ko'rinishidagi tenglamaning umumiy yechimiga ega bo'lamiz. Boshlang'ich $t = 0$ vaqt momentida B elementi paydo bo'lmagan, sababli $x(0) = 0$ bo'lishi kerak. Bu shartni hisobga olsak C ning $C = a$ qiymatiga ega bo'lamiz. Shunday qilib B elementi to'la aniqlanmagan paydo bo'lish qonuni (ya'niy t vaqtdagi miqdori) $x(t) = a - àe^{-kt}$ formulasi bilan aniqlanadi. To'la aniqlanishi uchun proporsionallik koeffisent aniq bo'lishi kerak. Buni aniqlash uchun masalaning 10 daqida ichida A elementning yarimi B elementga aylanadi degan shartini, ya'niy $x(10) = a - àe^{-10k} = \frac{a}{2}$ tengligini foydalanamiz. Bundan $e^{-k} = 2^{-\frac{1}{10}}$ bo'ladi. Buni oxirgi yechimining o'rniga qo'ysak $x(t) = a - à \cdot 2^{-\frac{t}{10}}$ ko'rinishidagi B elementi to'la aniqlangan paydo bo'lish qonuniga ega bo'lamiz.

Masalaning uchunchi bosqichi oxirgi natijani olishdan iborat bo'lib, bunda A elementning 0,1 bo'lagi B elementga aylanish uchun qancha vaqt kerak ekanligini hisoblaymiz. Bu savolga javob $\frac{a}{10} = a - à 2^{-\frac{t}{10}}$ tengligidan t ni aniqlash bilan $t = 10 \cdot \log_2 \frac{10}{9}$ ko'rinishida yakunlanadi.

§3. Birinchi tartibli differensial tenglamalarning asosiy tiplari va ularni yechish metodlari

Birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalarga kirish. Erksiz o'zgaruvchini, no'malum funksiyani va uning ma'lum tartibgacha bolgan hosilasini yoki ushbu o'zgaruvchilarning differensiallarni bog'laydigan tenglama differensial tenglama deb ataladi. Tenglamada qatnashgan no'malum funksiyaning hosilasining yoki differensialining eng yuqori tartibi differensial tenglamaning tartibi deyiladi. Agar differensial tenglamadagi no'malum funksiya faqat birgina erksiz o'zgaruvchining funksiyasi bo'lsa, unda bunday tenglama oddiy differensial tenglama deb ataladi.

Birinchi tartibli differensial tenglama $F(x, y, y') = 0$ ko'rinishga ega bo'ladi, bu yerda x erksiz o'zgaruvchi argument, $y = y(x)$ biz topish kerak bo'lgan izlanuvchi funksiya, $y' = \frac{dy}{dx}$ uning hosilasi. Bunday turdagi differensial tenglamaning yechimini topish uchun tenglamani avval $y' = f(x, y)$ yoki $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ turga olib kelish kerak, bu yerda $f(x, y)$ ma'lum funksiya.

Differensial tenglama cheksiz ko'p har xil yechimga ega bo'ladi. Bunday yechimlarning har biri hususiy yechim deb ataladi. Misol uchun eng oddiy $y' = 2x$ differensial tenglama $y = x^2$, $y = x^2 + 1$, $y = x^2 - 2$ va boshqa shunday cheksiz ko'p yechimga ega. Bu yechimlar $y' = 2x$ differensial tenglamaning hususiy yechimlari bo'lib topiladi.

Hususiy yechimlarning yig'indisi umumiy yechim deb ataladi. Misol uchun $y' = 2x$ differensial tenglamaning hususiy yechimlarning ko'rinishidan shuni bilamiz $y = x^2 + C$ umumiy yechim bo'ladi.

Birinchi tartibli differensial tenglamaning umumiy yechimi bir erkli o'zgarmas C ga erkli bo'ladi va $y = \varphi(x, C)$ ko'rinishda yoziladi, demak ixtiyoriy $C = C_0$ uchun $y = \varphi(x, C_0)$ funksiyasi yechim bo'ladi va ixtiyoriy xususiy yechim umumiy yechimdan erkli o'zgarmas C ga son qiymat

berishdan kelib chiqadi. Agar differensial tenglamaga qo'shimcha, aytaylik boshlang'ich shart deb ataluvchi $y(x_0)=y_0$ ko'rinishdagi shart berilsa, unda ushbu shartni qanoatlantiradigan, tenglamaning umumiy yechimidan xususiy yechim ajratib olinadi.

Differensial tenglamaning yechimi aniq $y=y(x)$ ko'rinishda olinishi yoki aniq emes $g(x,y)=0$ ko'rinishda olinishi mumkin. Bu oxirgi holatda tenglamaning yechimi ushbu tenglamaning integrali deb ataladi.

$y(x_0)=y_0$ boshlang'ich shartga ega $y'=f(x,y)$ differensial tenglamasi Koshi masalasi deb ataladi.

Koshi teoremasi. Agar $M(x_0,y_0)$ nuqtaning bazi-bir atrofida $f(x,y)$ funksiyasi va uning y bo'yicha olingam hususiy $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ hosilasi uzluksiz bo'lsa, unda x_0 nuqtaning shuningdek atrofi bor bo'lib, bu atrofida $y'=f(x,y),\ y(x_0)=y_0$ Koshi masalasining yechimi bor va birdan-bir bo'ladi.

Mayli birinchi tartibli

$$y'=f(x,y) \text{ yoki } \frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

differensial tenglamasi berilgan bo'lsin. $f(x,y)$ funksiyasining ko'rinishiga qarata bunday tenglamalarni bir necha turga ajratamiz.

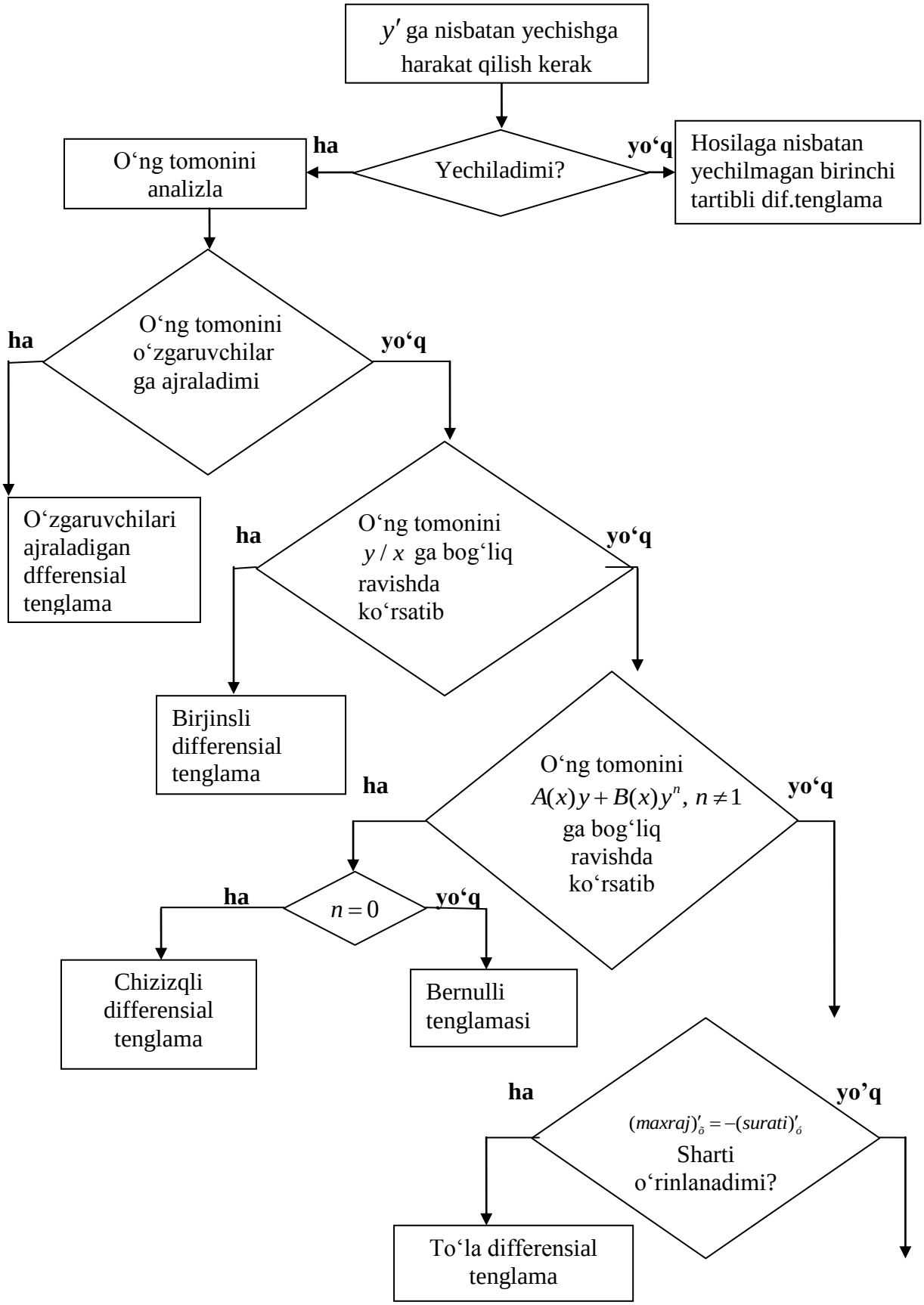
1. O'zgaruvchilari ajralgan va ajraladigan differensial tenglamalar. Bu holatda $f(x,y)$ funksiyasi $f(x,y)=\mathrm{g}(x)h(y)$ ko'rinishga ega bo'lib, tenglamaning o'zi

$$\frac{dy}{dx}=\mathrm{g}(x)h(y)$$

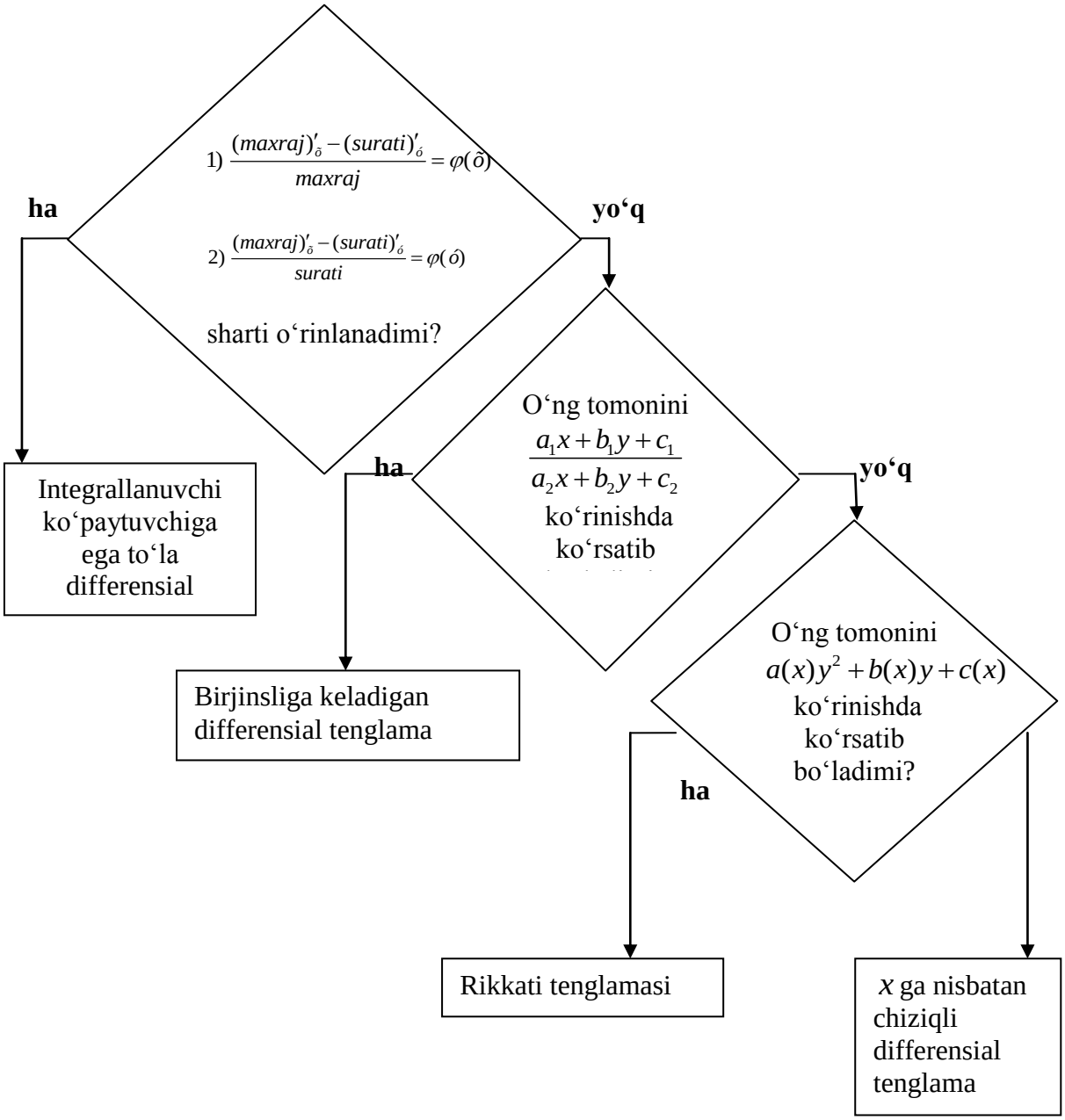
turga ega bo'ladi. Bunday tenglamalar o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalar deb ataladi.

Yechish metodi: bunday ko'rinishdagi differensial tenglamalarni integrallash uchun avval o'zgaruvchilarni bir biridan ajratamiz, yaniy

tenglamani $\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx$ turga olib kelamiz va tenglikning ikki



Davomi



tomonini integrallaymiz

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx$$

va tenglamaning $H(y) = G(x) + C$ turidagi umumiy integraliga ega bo’lamiz.

Misol uchun $\frac{dy}{dx} = 2xy$ tenglamasi o’zgaruvchilari ajraladigan tenglama bo’lib, integrallash uchun avval o’zgaruvchilarni bir biridan ajratib,

o’zgaruvchilari ajralgan

$$\frac{dy}{y} = 2xdx$$

tenglamani integrallaymiz

$$\int \frac{dy}{y} = 2\int xdx$$

va berilgan tenglamaning $\ln y = x^2 + \ln C$ turidagi umumiy integraliga yoki $y = Ce^{x^2}$ umumiy yechimiga ega bo’lamiz.

2. O’ng tomoni birjinsli bo’lgan differensial tenglamalar. k tartibli birjinsli funksiya deb $f(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, x_2, ..., x_n)$ tengligini qanoatlantiradigan ko’p argumentli $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyasiga aytiladi, bu yerda $\lambda \in R$. Nolinchi tartibli birjinsli funksiyalar faqat birjinsli funksiyalar deb aytiladi va bunday funksiyalar

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

tengligini qanoatlantiradi. Ikki argumentli bir jinsli $f(x, y)$ funksiyasi argumentlarning nisbatiga erkli bo’lgan $f(x, y) = \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ ko’rinishga ega bo’ladi.

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

turidagi differensial tenglamalar birjinsli differensial tenglamalar deb ataladi.

Yechish metodi: bunday ko’rinishdagi differensial tenglamalarni integrallash uchun avval $u(x) = \frac{y}{x}$ belgilanishini kiritamiz. Bundan $y = x \cdot u(x)$ bo’lib, $u(x)$ funksiyasiga qarata

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

turidagi o’zgaruvchilari ajralgan differensial tenglamaga ega bo’lamiz. Oxirgi tenglamani integrallab

$$\int \frac{du}{\varphi(u)-u} = \int \frac{dx}{x}$$

no'malum $u(x)$ funksiyasini aniqlaymiz va undan keyin izlanuvchi $y(x)$ funksiyani $y(x) = x \cdot u(x)$ ko'rinishda aniqlaymiz.

Misol uchun $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ tenglamasi o'zgaruvchilari ajraladigan tenglama bo'lishi bilan bir qatorda birjinsli tenglama bo'ladi. Shundan so'ng bunday ko'rinishdagi tenglamani integrallash uchun o'zgaruvchilarni ajratib integrallash bilan bir qatorda $u = \frac{y}{x}$ yoki $y = xu$ belgilanishini kiritib, berilgan tenglamani yana o'zgaruvchi $u(x)$ funksiyasiga qarata $u'(x) = 0$ tenglamasiga olib kelish orqali yechishgada bo'ladi. Oxirgi tenglamadan $u(x) = C$ bo'lib, izlanuvchi funksiya $y = xu(x) = Cx$ bo'ladi, bu yerda C erkli o'zgarmas.

3. Chiziqli differensial tenglamalar. Agar tenglamaning o'ng tomoni $f(x, y) = a(x)y + b(x)$ ko'rinishga ega bo'lsa, unda

$$y' = a(x)y + b(x)$$

turidagi tenglamalar chiziqli differensial tenglamalar deb ataladi, bu yerda $a(x)$ va $b(x)$ lar berilgan funksiyalar.

Yechish metodi: chiziqli differensial tenglamalarni integrallashning Bernulli va erkli o'zgarmaslarni variasiyalashning Lagranj usuli deb ataladigan ikki usuli bor.

Birinchi usul (Bernulli usuli): Chiziqli $y' = a(x)y + b(x)$ differen tenglamaning yechimi ikki funksiyaning $y = u(x)\vartheta(x)$ ko'paytmasi ko'rinishida izlanadi. Buni tenglamadagi o'rinlariga qo'ysak

$$u'(x)\vartheta(x) + u(x)\vartheta'(x) = a(x)u(x)\vartheta(x) + b(x)$$

bo'lib, $u(x)$ funksiyasini $u'(x) = a(x)u(x)$ tenglamasini qanoatlantiradiganday qilib, u $\vartheta(x)$ funksiyasini bo'lsa

$$\vartheta'(x) = \frac{b(x)}{u(x)}$$

tenglamasini qanoatlantiradiganday qilib saylab olamiz. Bizga ma'lum

$$u(x)=e^{\int a(x)dx}$$

bo'lib, bundan $u(x)$ funksiyasini aniqlab, kiyinchalik $\vartheta(x)$ funksiyasini

$$\vartheta(x)=\int\frac{b(x)}{u(x)}dx+C$$

ko'rinishida aniqlaymiz.

Topilgan $u(x)$ va $\vartheta(x)$ funksiyalarni $y=u(x)\vartheta(x)$ ko'paytmasidagi o'rinlariga qo'ysak

$$y=e^{\int a(x)dx}\left(C+\int\frac{b(x)}{u(x)}dx\right)=e^{\int a(x)dx}\left(C+\int e^{\int a(x)dx}b(x)dx\right).$$

Ikkinchi usul (Lagranj usuli): Avval o'zgaruvchilarga ajraladigan chiziqli bir jinsli

$$y'=a(x)y$$

differensial tenglamani integrallab olamiz. Bizga ma'lum bu tenglamaning umumiy yechimi

$$y(x)=Cy_1(x)=Ce^{\int a(x)dx}$$

bo'lib, endi birjinsli emes $y'=(a\ )x+\ y$ tenglamaning yechimini $y(x)=C(x)y_1(x)$ ko'paytma ko'rinishida izlaymiz. Buni tenglamaga qo'ysak

$$C'(x)y_1(x)+C(x)y_1'(x)=a(x)C(x)y_1(x)+b(x)$$

yoki

$$C'(x)y_1(x)+C(x)\left(y_1'(x)-a(x)y_1(x)\right)=b(x)$$

bo'lib, $y_1'(x)-a(x)y_1(x)=0$ bo'lganligidan, oxirgi tengligidan $C'(x)y_1(x)=b(x)$ bo'ladi, u bundan

$$C'(x)=\frac{b(x)}{y_1(x)}$$

bo'lganligidan, buning integrali

$$C(x)=\int\frac{b(x)}{y_1(x)}dx+C$$

bo'lib, buni $y(x)=C(x)y_1(x)$ ko'paytmasinidagi orniga qo'ysak

$$y=e^{\int a(x)dx}\left(C+\int\frac{b(x)}{u(x)}dx\right)=e^{\int a(x)dx}\left(C+\int e^{\int a(x)dx}b(x)dx\right)$$

turidagi Bernulli usuli bilan olingam yechimga ega bo'lamiz. Bu ikki usul bilan olingam yechim $u(x)=y_1(x)$, $\vartheta(x)=C(x)$ ko'rinishida bir biridan belgilashdagi ayirmachilik bilan farqlanadi.

4. Bernulli tipidagi tenglamalar. Agar tenglamaning o'ng tomoni $f(x,y)=a(x)y+b(x)y^n$, $n\neq 0$, $n\neq 1$ ko'rinishga ega bo'lsa, unda tenglama

$$y'=a(x)y+b(x)y^n$$

turiga ega bo'lib, bunday tenglamalar Bernulli tipidagi differensial tenglamalar deb ataladi, bu yerda $a(x)$ va $b(x)$ lar berilgan funksiyalar.

Yechish metodi: Bernulli tipidagi tenglamalarnida integrallashning Bernulli va chiziqliga olib kelish usuli deb ataladigan ikki usuli bor.

1. Birinchi usul (Bernulli usuli). Mayli $y=u(x)\vartheta(x)$ bo'lsin, unda

$$u'(x)\vartheta(x)+u(x)\vartheta'(x)=a(x)u(x)\vartheta(x)+b(x)u^n(x)\vartheta^n(x)$$

yoki

$$\vartheta(x)\big(u'(x)-a(x)u(x)\big)+u(x)\vartheta'(x)=b(x)u^n(x)\vartheta^n(x)$$

bo'lib, $u(x)$ funksiyasini $u'(x)=a(x)u(x)$ tenglamasini qanoatlantiradiganday qilib olsak, unda $\vartheta(x)$ funksiyasiga qarata o'zgaruvchilarga ajraladigan

$$u(x)\vartheta'(x)=b(x)u^n(x)\vartheta^n(x)$$

turidagi differensial tenglamaga ega bo'lamiz. Bulardan

$$\int\frac{du}{u}=\int a(x)dx \quad \text{va} \quad \int\frac{d\vartheta}{\vartheta^n}=\int b(x)u^{n-1}(x)dx$$

bo'lib, birinchi integraldan erkli o'zgarmas $u(x)$ funksiyasini va ikkinchi integraldan $\vartheta(x)$ funksiyasini erkli o'zgarmas bilan aniqlaymiz.

2. Ikkinchi usul (Chiziqli differensial tenglamaga olib kelish usuli). Bernullini $y'=a(x)y+b(x)y^n$ tenglamasining $(1-n)y^{-n}$ ga ko'paytirib, yana

$z = y^{1-n}$ belgilanishini kiritamiz. Shunda $z' = (1-n)y^{-n}y'$ bo'lib, natijada $z(x)$ funksiyasiga qarata

$$z' = (1-n)a(x)z + (1-n)b(x)$$

yoki

$$z' = a_1(x)z + b_1(x)$$

turidagi chiziqli differensial tenglamaga ega bo'lamiz. Oxirgi chiziqli differensial tenglamani yuqorida o'rgangan usullarning biri bilan integrallab, $z(x)$ ni, kiyinchalik $y = z^{\frac{1}{1-n}}$ bo'yicha $y(x)$ ni aniqlaymiz.

5. Agar $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ differensial tenglamasi yuqoridagi keltirilgan korinishlarning hech biriga mos kelmasa, unda tenglamani $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}$ ko'rinishda yozib olamiz. Bu holatda ayrim vaqtlari $x(y)$ ga qarata

$$\frac{dx}{dy} = a(y)x + b(y)$$

turidagi chiziqli differensial tenglama hosil bo'lsa, ayrim vaqtlari

$$\frac{dx}{dy} = a(y)x + b(y)x^n$$

turidagi Bernulli tenglamasi hosil bo'ladi. Bu tenglama, tenglik belgisining ikki tomonini $(1-n)x^{-n}$ ga ko'paytirish orqali chiziqli tenglamaga olib kelinadi. Agar $z = x^{1-n}$ belgilash kirisak, unda z ga qarata

$$z'(y) = A_1(y)z + B_1(y)$$

turidagi chiziqli differensial tenglamaga ega bo'lamiz.

6. Agar tenglama $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ turiga ega bo'lsa, unda tenglamani

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = f(x, y)$$

ko'rinishga olib kelamiz va tenglamaning turini aniqlab, qulay usul bilan yechamiz. Agar tenglama yuqorida keltirilgan ko'rinishlarning hech biriga mos

kelmasa, u holda $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ ifodasini bazi-bir $U(x,y)$ funksiyasining to'liq differensiali bo'ladigan yoki bo'lmaydiganligini tekshirib ko'ramiz, yaniy yechim izlanayotgan sohaning barcha nuqtalarida $U_x = P(x,y),\ U_y = Q(x,y)$ tengliklarining o'rinlanishini tekshirib ko'ramiz. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar teorimasidan ma'lum, agar

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

tengligi o'rinlansa, unda bunday $U(x,y)$ funksiyasi bor bo'ladi.

Agar bunday funksiya bor bo'lsa, unda $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ tenglamasi to'liq differensialli differensial tenglama deb ataladi. Bunday tenglamani yechish uchun $U(x,y)$ funksiyasini

$$U(x,y) = \int P(x,y)dx\Big|_{y=const} = F(x,y)+C(y)$$

ko'rinishda aniqlashga harakat qilamiz, bu yerda $C(y)$ funksiyasini aniqlash uchun $U(x,y)$ funksiyasidan y bo'yicha hosila olamiz

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} + C'(y)$$

va buni $Q(x,y)$ funksiyasi bilan solishtiramiz.

Agar $U(x,y)$ funksiyasi topilsa, unda qaralayotgan to'liq differensialli tenglamaning umumiy yechimi $U(x,y)=\mathrm{C}$ umumiy integraldan aniqlanadi.

2-BAP. Differensial tenglamalar buyicha amaliy mashg‘ulatlarni o’qitish metodikasi

Differensial tenglama uchun ma’ruza mazmunini tuchunishga usha maruza materiallariga oyd masalalarni echishga katta yordam beradi. Masalani echishdan oldin, shu masalaga oyd nazariyadan kelib chiqqan holda masalani echishning ketma-ket etaplarini saqlash muxim rol o’ynaydi. Agar talaba masalani echishning bir nechta usullarini bilib tursa, u holda talaba bu usullarning eng yaxshisi tanlab oladi. Masalani echishdan oldin qisqa echish rejasini tuzish, masalani echishni osonlashtiradi.

Matnli ko‘rinishda berilgan masalani echishdan oldin izlanayotgan integral egri chiziqning chizmasini masaladagi shartlarni xisobga olgan holda qo‘ldan chizish kerak.

Ushbu bobda birinchi bobning uchinchi paragrafida o‘rganilgan birinchi tartibli oddiy differensial tenglama mavzulariga oid amaliy
masalalar va ularni echish usullari qaralgan.

Bobning birinchi paragrafida o‘zgaruvchilari ajraladigan va ajralgan differensial tenglamalar bilan bir qatorda bir jinsli differensial tenglamalar uchun masalalarni echish usullari, ikkinchi paragrafda chiziqli diffeerensial tenglamalarga va uchinchi paragafda esa Bernulli tenglamasiga oid masalalar qaralib, bunday masalalarni echish usullari ketma-ket qadamlarga ajratilib ko‘rsatilgan va har bir mavzu oxirida auditoriyada ishlanadigan masalalar to‘plami berilgan. Dars oxirida shu mavzuga oid uyda ishlanadigan topshiriqlar berilgan.

§1. O‘zgaruvchilari ajralgan va ajraladigan differensial tenglamalar

Darsning maqsadi. Talabalarga o‘zgaruvchilari ajralgan va ajraladigan differensial tenglamalarning, birjinsli differensial tenglamalarning umumiy echimin topishni o‘rgatish.

Darsni olib borish tartibi:

1. nazariy materialni eslatish;
2. tavsiya etilgan misolni tahlil qilish;
3. alohida vazifalarni mustaqil bajarish;
4. tekshiruv savollariga javob berish.

Talaba: birinchi tartibli differensial tenglamaning ta'rifi haqidagi ta’rifni; birinchi tartibli differensial tenglamaning umumiy va xususiy yechimlari haqidagi ta’rifni; o'zgaruvchilari ajralgan, ajraladigan va bir jinsli birinchi tartibli differensial tenglamalarni echish usullarini bilish kerak.

Birinchi tartibli differensial tenglamalar haqida tushuncha Birinchi tartibli differensial tenglama

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (1)$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi, bu erda $x-$ erkin o‘zgaruvchi; $y = y(x)$ –izlanuvchi funksiya, $y' = \dfrac{dy}{dx}$ – esa izlanuvchi funksiyaning hosilasi, $F(x, y, y') - x, y, y'$ argumentlarning berilgan funksiyasi.

Agar (1) tenglama y' hosilaga nisbatan echish mumkin bo‘lsa, u holda

$$y' = f(x, y) \qquad (2)$$

Mayli $f(x, y$ funksiyasi ba’zi-bir (a, b) kesmada aniqlangan va uzluksiz bo‘lsin deb faraz qilaylik.

Ta’rif. Differensial tenglamani ayniyatga aylandiradigan ixtiyoriy differensiallanuvchi $y = \varphi(x)$ funksiyasi o‘sha differensial tenglamaning echimi deyiladi.

Agar echim noaniq $\Phi(x, y) = 0$ ko‘rinishda olingan bo‘lsa, u holda bu echim o‘sha differensial tenglamaning integrali deyiladi.

Ta’rif. (1) differensial tenglamaning y echimi umumiy deyiladi, agar u x va erikli c o‘zgarmasga bog‘liq $y = \varphi(x, c)$ ko‘rinishga ega bo‘lsa; o‘zgarmas c ning bazi bir $c = c_0$ qiymatida $y = \varphi(x, c_0)$ echim (1) tenglamaning xususiy echimi deyiladi.

Agar umumiy echim noaniq $\Phi(x, y) = \tilde{n}$ ko‘rinishga ega bo‘lsa, u holda bu (1) tengamaning umumiy integrali deyiladi.

(1) tenglama uchun Koshi masalasi shu tenglamaning $y(x_0) = y_0$ boshlang‘ich shartini qanoatlandiradigan echimini topishdan iborat.

Birinchi tartibli o‘zgaruvchilari ajralgan va ajraladigan differensial tenglamalarni echishga oid ko‘rsatma. Masalaning qo‘yilishi.

$$f_1(x)g_1(y)dy + f_2(x)g_2(y)dx = 0 \qquad (3)$$

ko‘rinishda berilgan differensial tenglamanin umumiy integralini toping, bu erda $f_1(x),\ g_1(y),\ f_2(x),\ g_2(y)$ – uzluksiz funksiyalar yoki o‘zgarmas miqdorlar.

Echish rejasi. 1). $f_1(x) \neq 0$ va $g_2(y) \neq 0$ uchun (3) tenglamaning ikki tomonini $f_1(x)\,g_2(y)$ ko‘paytmasiga bo‘lib, o‘zgaruvchilari ajralgan

$$\frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy + \frac{f_2(x)}{f_1(x)}dx = 0 \qquad (4)$$

tenglamaga ega bo‘lamiz;

2). (4) tenglamaning ikki tomonini integrallaymiz

$$\int \frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy + \int \frac{f_2(x)}{f_1(x)}dx = c$$

va javobni umumiy integralning ta’rifi bo‘yicha $\Phi(x, y) = \tilde{n}$ ko‘rinishda yozamiz, bu erda c ixtyoriy o‘zgarmas.

Ta’rif. (3) differensial tenglama o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama deyiladi.

Izoh 1. (3) tenglamani turlantirish paytida tenglikning ikki tomoni $f_1(x)g_2(y)$ ko‘paytmasiga bo‘lingan edi. Bunday holda (3) tenglamaning ayrim echimlari yo'qolishi mumkin.

Agar x_1, x_2 va y_1, y_2 umumiy echimdagi c ning hech qanday qiymatidan kelib chiqmaydigan $f_1(x)g_2(y)=0$ tenglamaning echimi bo‘lsa, u holda maxsus echim deb ataladigan $x=x_1$, $x=x_2$ va $y=y_1$, $y=y_2$ echimlarni (5) javobga kiritish kerak.

Izoh 2. Agar (2) tenglamani

$$y' = f_1(x)f_2(y)$$

ko‘rinishda yozib bo‘lsa, u holda $y'=\dfrac{dy}{dx}$ tenglikni foydalanib o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga ega bo‘lamiz.

Misol. $2x^2yy'+y^2=2$ tenglamaning umumiy echimini toping.

Echish. $y'=\dfrac{dy}{dx}$ tenglikni foydalanib berilgan tenglamani turlantirish orqali o‘zgaruvchilari ajraladigan

$$2x^2y\frac{dy}{dx}+y^2-2=0 \,\Big|\, \cdot dx,$$

$$2x^2ydy+(y^2-2)dx=0 \qquad (5)$$

tenglamaga olib kelamiz, bu erda

$$f_1(x)=x^2; \quad g_1(y)=2y; \quad f_2(x)=1; \quad g_2(y)=y^2-2.$$

1). $x^2\neq 0$ va $y^2-2\neq 0$ sohada (5) tenglamaning ikki tomonini $x^2(y^2-2)$ ko‘paytmaga bo‘lib, o‘zgaruvchilari ajralgan

$$\frac{2y}{y^2-2}dy+\frac{1}{x^2}dx=0$$

tenglamaga ega bo‘lamiz.

2). Bu tenglamaning iki tomonini integrallab

$$\int \tfrac{2y}{y^2-2}dy+\int \tfrac{1}{x^2}dx=\tilde{n}$$

yoki

$$\ln\left|y^2-2\right|-\frac{1}{x}=c$$

ko‘rinishga ega umumiy integralga ega bo‘lamiz.

c deb $c=\ln c_1$ ni olib, echimni soddalashtiramiz. U holda

$$\ln\left|y^2-2\right|=\ln \tilde{n}_1+\frac{1}{x}$$

yoki

$$y^2-2=c_1e^{1/x}$$

ko‘rinishda (5) ning umumiy echimiga ega bo‘lamiz.

Endi $x^2\neq 0$ va $y^2-2\neq 0$ shartlarini tekshiramiz:

$$x^2=0\Leftrightarrow x=0 \quad \text{va} \quad y^2-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y=\sqrt{2}; \\ y=-\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Demak $x=0$ tenglamani qanoatlantirmaydi; $y=\sqrt{2}$ va $y=-\sqrt{2}$ lar (5) ni qanoatlantiradi va $c_1=0$ uchun umumiy echimga kiradi.

Javob: $(y^2-2)e^{-1/x}=c_1$ umumiy integral.

SHu mavzuga oid shu sxema asosida quyidagi

1. $(1+x^2)dx+y^2dy=0;$ 2. $y'(3x^2+1)+2xy^2=0;$ 3. $y^2dx=e^xdy;$

4. $6xdx-6ydy=2x^2ydy-3xy^2dx;$ 5. $y'+\sin(x+y)=\sin(x-y)$.

differensial tenglamalarning umumiy echimi topiladi.

Mustaqil topshiriq. Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy echimi toping

1. $ydx+(1+x^2)dy=0;$ 2. $y'=2e^y\cos x;$ 3. $yy'+x=0;$

4. $6xdx(x^2-yx^2)dy+(y^2+xy^2)dx=0;$ 5. $y'=y\ln y.$

Bir jinsli differensial tenglamalarni echishga oid ko‘rsatma.

Masalaning qo‘yilishi.

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \tag{6}$$

ko‘rinishda berilgan bir jinsli differensial tenglamaning umumiy integralini toping, bu erda $P(x,y)$, $Q(x,y)-$tartibi k bo‘lgan bir jinsli funksiyalar:

$$P(tx,ty)=t^kP(x,y) \text{ va } Q(tx,ty)=t^kQ(x,y)$$

Echish rejasi. 1). (1) tenglamani

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

ko‘rinishga keltiramiz.

2). $\frac{y}{x}=u$ belgilash kiritamiz, bu erda $u=u(x)$ yangi izlanuvchi funksiya. Bu holda $y'=u+xu'$ bo‘lib, o‘zgaruvchilari ajralgan

$$u+xu'=f(u)$$

tenglamaga ega bo‘lamiz. Natijada turlantirishdan keyin

$$x\frac{du}{dx}=f(u)-u \tag{7}$$

tenglamaga ega bo‘lamiz.

3). $f(u)-u\neq 0$ sohada (7) tenglamaning ikki tomonini $\frac{dx}{x(f(u)-u)}$ kasrga bo‘lamiz va o‘zgaruvchilari ajralgan

$$\frac{du}{f(u)-u}=\frac{dx}{x} \tag{8}$$

tenglamaga ega bo‘lamiz.

4). (8) tenglamani integrallab

$$\int\frac{du}{f(u)-u}=\ln|x|+\ln c$$

ko‘rinishda (7) tenglamaning umumiy integraliga ega bo‘lamiz va keyinchalik $u=\frac{y}{x}$ belgilash yordamida (6) masalaning javobini yozamiz.

Izoh 1. $y=xu$ belgilash kiritib va $dy=udx+xdu$ tengligidan foydalanib masalani echish mumkin.

Izoh 2. Agar $f(u)-u=0$ tenglama $u=u_0$ ildizga ega bo‘lsa, u holda (6) tenglama $u=xu_0$ ko‘rinishdagi ham echimga ega bo‘ladi.

Misol. $x^2+y^2-2xyy'=0$ tenglamaning umumiy echimini toping.

Echish. 1). Berilgan tenglamani

$$y'=\frac{x^2+y^2}{2xy} \tag{9}$$

ko‘rinishga keltiramiz. Bu tenglama bir jinsli, sababi x ni tx ga va y ni ty ga almashtirib tenglamaning o‘zgarmay qolishini isbotlashga bo‘ladi. Haqiqatdan ham

$$y'=\frac{(tx)^2+(ty)^2}{2(tx)(ty)}=\frac{t^2(x^2+y^2)}{2t^2xy}=\frac{x^2+y^2}{2xy}.$$

(9) tenglamaning o‘ng tomonining maxraji va suratini xy ga bo‘lib

$$y'=\frac{x}{2y}+\frac{y}{2x}$$

tenglamasiga ega bo‘lamiz. x

2). $\frac{y}{x}=u(x)$ almashtirish kirisak, bu erda $u=u(x)$ yangi izlanuvchi funksiya, u holda $y'=u+xu'$ bo‘lib, tenglama

$$u+xu'=\frac{1}{2u}+\frac{1}{2}u$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi va soddalashtirsak $u(x)$ ga nisbatan

$$x\frac{du}{dx}=\frac{1-u^2}{2u}$$

tenglamaga ega bo‘lamiz.

3). Kelib chiqqan tenglamaning o‘zgaruvchilarini ajratib, o‘zgaruvchilari ajralgan

$$\frac{2u}{1-u^2}du=\frac{dx}{x}$$

tenglamaga ega bo‘lamiz.

4). Tenglikning ikki tomonini integrallab

$$\int \frac{2u}{1-u^2}du = \int \frac{dx}{x}.$$

yoki

$$-\ln\left|1-u^2\right| = \ln|x| + \ln c$$

va soddalashtirib

$$1-u^2 = \frac{1}{x}c_1$$

yoki

$$x^2 - y^2 = c_1 x$$

umumiy integralga ega bo‘lamiz.

SHu mavzuga oid ko‘rsatilgan sxema asosida quyidagi

1. $y' = \dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2}$; 2. $y' = e^{y/x} + \dfrac{y}{x}$; 3. $xy + y^2 = (2x^2+xy)y'$;

4. $(2\sqrt{xy} - y)dx + xdy = 0$; 5. $xy'\sin(y/x) + x = y\sin(y/x)$.

differensial tenglamalarning umumiy echimi topiladi.

Mustaqil topshiriq. Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy echimi toping

1. $y' = \dfrac{y}{x} - 1$; 2. $(4y^2 + x^2)y' = xy$; 3. $(x-y)dx + (x+y)dy = 0$;

4. $2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$; 5. $xy' - y = xtg\, y/x$.

§2. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar

Darsning maqsadi. Talabalarga o‘zgaruvchilari ajralgan va ajraladigan differensial tenglamalarning, birjinsli differensial tenglamalarning umumiy echimin topishni o‘rgatish.

Darsni olib borish tartibi:

1. nazariy materialni o‘rgatish;
2. tavsiya etilgan misolni tahlil qilish;
3. alohida vazifalarni mustaqil bajarish;
4. tekshiruv savollariga javob berish.

Talaba: birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamani echish usullarini bilish kerak.

Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar. Birinchi tartibli differensial tenglama chiziqli deb ataladi, agarda tenglamada izlanuvchi $y(x)$ funksiya va uning $y'(x)$ hosilasi birinchi darajasi bilan qatnashib, ularning ko‘paytmasi qatnashmasa. Umuman bunday tenglama

$$A(x)y' + B(x)y + C(x) = 0 \qquad (1)$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi, bu erda A, B, C – berilgan x ning uzliksiz funksiyalari. $A(x) \neq 0$ bo‘ladigan x ning bazi bir intervalida (1) ning ikki tomonini $A(x)$ bo‘lib va kelib chiqqan

$$y' + \frac{B(x)}{A(x)} y + \frac{C(x)}{A(x)} = 0$$

tenglamada $\frac{B(x)}{A(x)} = p(x)$, $\frac{C(x)}{A(x)} = -f(x)$ belgilash kiritib, birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamaning

$$y' + p(x)y = f(x)$$

ko‘rinishiga ega bo‘lamiz.

Ta’rif. Agar $f(x) \equiv 0$ bo‘lsa, u holda

$$y' + p(x)y = 0$$

tenglama chiziqli bir jinsli deb ataladi.

Agar $f(x) \neq 0$ bo‘lsa, u holda tenglama chiziqli bir jinsli emas deb ataladi.

Izoh. CHiziqli bir jinsli differensial tenglama o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglama bo‘ladi.

Masalaning qo‘yilishi. CHiziqli differensial tenglama uchun

$$y' + p(x)y = f(x) \tag{2}$$

$$y(x_0) = y_0$$

Koshi masalasini eching, bu erda $p(x)$, $f(x)-$ uzluksiz funksiyalar yoki o‘zgarmas miqdorlar.

Echish rejasi. 1). Quyidagicha belgilash kiritamiz:

$$y = U(x)V(x), \quad y' = U'(x)V(x) + U(x)V'(x) \tag{3}$$

2). (2) tenglamaga (3) ifodani quyib

$$U'V + UV' + p(x)UV = f(x)$$

soddalashtirsak

$$U'V + U(V' + p(x)V) = f(x) \tag{4}$$

3). Bitta noma’lum $y(x)$ funksiya o‘rniga (4) ni qanoatlantiradigan endi ikkita $U = U(x)$ va $V = V(x)$ funksiyalarin topish kerak bo‘lib, o‘larning bittasini erkli tanlab olamiz.

Aytaylik $V = V(x)$ni erkin tanlab: (4) da $U = U(x)$ ga nisbatan ifodani nulga tenglashtirib, $V = V(x)$ ni tenglamaning nollik emas echimi sifatida aniqlaymiz

$$V' + p(x)V = 0 \tag{5}$$

(4) dan (5) ga ko‘ra ikkinchi $U = U(x)$ funksiyasi

$$U'V = f(x) \tag{6}$$

tenglamani qanoatlantiradigan etib olamiz.

4). $V = V(x)$ ni (6) ga quyib, uning umumiy $U = U(x, c$ echimini aniqlaymiz.

5). (2) tenglamaning umumiy echimin $y = U(x)V($ ko‘rinishda yozamiz.

6). (2) dagi boshlang‘ich shartni hisobga olib, berilgan Koshi masalasining echimiga ega bo‘lamiz va echimni $y=\varphi(x)$ ko‘rinishda yozamiz.

Misol. $y'-\dfrac{2x}{x^2-5}=(x^2-5)\sin x,\ \ y(0)=0$ Koshi masalasining echimin toping.

Echish. 1). Berilgan tenglama chiziqli bir jinsli emas, bu erda

$$p(x)=-\frac{2x}{x^2-5},\quad f(x)=(x^2-5)\sin x.$$

1). Tenglamaning echimini

$$y=U(x)V(x),\quad y'=U'(x)V(x)+U(x)V'(x)$$

ko‘rinishda izlaymiz.

2). y va y' ning qiymatlarinin berilgan tenglamaga qo‘yib

$$U'V+UV'-\frac{2x}{x^2-5}UV=(x^2-5)\sin x$$

tenlamasin soddalashtirsak

$$U'V+U(V'-\frac{2x}{x^2-5}V)=(x^2-5)\sin x. \qquad (7)$$

3). U ga ko‘paytilib turgan qavsni nolga tenglashtirib

$$V'-\frac{2x}{x^2-5}V=0$$

o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga ega bo‘lamiz. O‘zgaruvchilarni ajratib

$$\frac{dV}{V}-\frac{2x}{x^2-5}dx=0$$

integrallasak

$$\int\frac{dV}{V}-\int\frac{2x}{x^2-5}dx=c$$

yoki

$$\ln|V|-\ln|x^2-5|=c$$

Bizga nollik emas echim kerak, shu sababli $c=0$ deb olib

$$\ln|V|=\ln|x^2-5|$$

bundan

$$V = x^2 - 5$$

turdagi echimga ega bo‘lamiz.

4). Endi U ga nisbatan (7) tenglama o‘zgaruvchilari ajraladigan

$$U'(x^2 - 5) = (x^2 - 5)\sin x$$

tenglama bo‘lib

$$dU = \sin x dx$$

integrallasak

$$\int dU = \int \sin x dx,$$

$$U = -\cos x + c$$

5). $y = U(x)V(x)$ ni foydalanib izlanuvchi y funksiyani topamiz

$$y = (-\cos x + c)(x^2 - 5) \qquad (8)$$

6) Boshlang‘ich $y(0) = 0$ shartni hisobga alsaq

$$(-\cos 0 + c)(-5) = 0$$

bo‘lib $c = 1$ bo‘ladi va buni (8) umumiy echimga qo‘ysaq $y = (1 - \cos x)(x^2 - 5)$.

Javob. $y = (1 - \cos x)(x^2 - 5)$.

Ikkinchi usul (Lagranj usuli): Avval o’zgaruvchilarga ajraladigan chiziqli birjinsli

$$y' = \frac{2x}{x^2 - 5} y$$

differensial tenglamani integrallab olamiz. Bizga ma’lum bu tenglamaning umumiy yechimi

$$y(x) = Cy_1(x) = Ce^{\int \frac{2x}{x^2-5}dx} = Ce^{\ln|x^2-5|} = C(x^2 - 5)$$

bo’lib, endi birjinsli emes $y' = \frac{2x}{x^2 - 5} y + (x^2 - 5)\sin x$ tenglamaning yechimini $y(x) = C(x)(x^2 - 5)$ ko’paytma ko’rinishida izlaymiz. Buni tenglamaga qo’ysak

$$C'(x)(x^2 - 5) + C(x) \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 - 5} C(x)(x^2 - 5) + (x^2 - 5)\sin x$$

yoki

$$C'(x)y_1(x) = (x^2 - 5)\sin x$$

bundan

$$C'(x) = \sin x$$

bo'lganligidan, buning integrali

$$C(x) = -\cos x + c$$

bo'lib, buni $y(x) = C(x)(x^2 - 5)$ ko'paytmasinidagi orniga qo'ysak

$$y = (x^2 - 5)\left(c - \cos x\right)$$

turidagi Bernulli usuli bilan olingam umumiy yechimga ega bo'lamiz.

Boshlang'ich $y(0) = 0$ shartni hisobga alsaq

$$(-\cos 0 + c)(-5) = 0$$

bo'lib $c = 1$ bo'ladi va buni umumiy echimga qo'ysaq $y = (1 - \cos x)(x^2 - 5)$.

Javob. $y = (1 - \cos x)(x^2 - 5)$.

SHu mavzuga oid ko'rsatilgan sxema asosida quyidagi

1. $y' + y = e^x,\ y(0) = 1;$ 2. $xy' - 3y = 4x^3,\ y(1) = 0;$

3. $y' + \frac{y}{x} = \dfrac{2}{1 + x^2},\ \ y(1) = \ln 2;$ 4. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^3,\quad y(1) = 8;$

5. $y'\cos^2 x + y = tgx,\quad y(0) = 0.$

Koshi masalasini eching.

Mustaqil topshiriq. Quyidagi differensial tenglamalar uchun Koshi masalasini eching

1. $xy' + y - e^x = 0,\ y(1) = 0;$ 2. $y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^2,\ \ y(1) = 4;$

3. $y' - ytgx = \dfrac{1}{\cos x},\ y(0) = 0;$ 4. $y' - 2xy = 3x^2 - 2x^4,\ \ y(0) = 0;$

5. $y' - \dfrac{2xy}{x^2 + 3} = (x^2 + 3)\cos x,\ \ y(0) = 3.$

§3. Bernulli tipidagi tenglamalar

Darsning maqsadi. Talabalarga Bernulli tipidagi differensial tenglamalarning umumiy echimin topishni o‘rgatish.

Darsni olib borish tartibi:

1. nazariy materialni o‘rgatish;
2. tavsiya etilgan misolni tahlil qilish;
3. alohida vazifalarni mustaqil bajarish;
4. tekshiruv savollariga javob berish.

Talaba: Bernulli tipidagi differensial tenglamani echish usullarini bilish kerak.

Bernulli tipidagi tenglamalar

Birinchi tartibli differensial tenglama Bernulli tenglamasi deyiladi, agarda chiziqli tenglamada $f(x)$ ozod had izlanuvchi $y(x)$ funksiyaning bir yoki noldan tashqari bazi bir n darajasiga ko‘paytilsa.

Umuman bunday tenglama

$$y' = a(x)y + b(x)y^n, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1 \qquad (1)$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi, bu yerda $a(x)$ va $b(x)$ lar berilgan funksiyalar.

Bernulli tipidagi tenglamalarni integrallashning Bernulli va chiziqliga olib kelish usuli deb ataladigan ikki usuli bor.

Izoh 1. Bernulli tipidagi tenglamalar chiziqliga keltiriladigan differensial tenglama bo‘ladi.

Izoh 2. $z = \dfrac{1}{y^{n-1}}$ almashtirish yordamida Bernulli tenglamasi chiziqli tenglamaga keltiriladi.

Masalaning qo‘yilishi. (1) tenglama menen berilgen Bernulli tenglamasini eching, bu erda $a(x)$, $b(x)-$ uzluksiz funksiyalar yoki o‘zgarmas miqdorlar.

Echish rejasi. 1). Quyidagicha belgilash kiritamiz:

$$y = u(x)\vartheta(x) \quad y' = u'(x)\vartheta(x) + u(x)\vartheta'(x) \qquad (2)$$

2). (1) tenglamaga (2) ifodani quyib

$$u'(x)\vartheta(x)+u(x)\vartheta'(x)=a(x)u(x)\vartheta(x)+b(x)u^n(x)\vartheta^n(x)$$

soddalashtirsak

$$\vartheta(x)\left(u'(x)-a(x)u(x)\right)+u(x)\vartheta'(x)=b(x)u^n(x)\vartheta^n(x)$$

3). $u(x)$ funksiyasыn $u'(x)=a(x)u(x)$ tenglamasini qanoatlantiradiganday qilib olamiz, bundan

$$\int\frac{du}{u}=\int a(x)dx$$

yoki $u(x)=e^{\int a(x)dx}$.

4). $\vartheta(x)$ funksiyasiga nisbatan o‘zgaruvchilari ajraladigan

$$u(x)\vartheta'(x)=b(x)u^n(x)\vartheta^n(x)$$

turidagi differensial tenglamaga ega bo‘lamiz, bundan

$$\int\frac{d\vartheta}{\vartheta^n}=\int b(x)u^{n-1}(x)dx$$

yoki $\vartheta(x)=\left((1-n)\int e^{(1-n)\int a(x)dx}b(x)dx\right)^{\frac{1}{1-n}}$

4). $\vartheta=\vartheta(x)$ni (2) ga quyib, berilgan (1) tenglamaning umumiy $u=u(x,c)$ echimini aniqlaymiz.

$$u(x)=ce^{\int a(x)dx}\left((1-n)\int e^{(1-n)\int a(x)dx}b(x)dx\right)^{\frac{1}{1-n}}$$

Misol. $xy'+y=y^2\ln x$ tenglamasini eching.

Echish. Berilgan tenglama Bernulli tenglamasidir. Uning ikkala qismini y^2 ga bo’lib, $\frac{1}{y}=z$ deb olamiz, u holda

$$y=\frac{1}{z},\quad y'=-\frac{1}{z^2}z'\quad ,-xz'\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}=\frac{1}{z^2}\ln x.$$

Bundan $xz'-z=-\ln x$ ko’rinishdagi chiziqli tenglama hosil bo’ladi. Uning umumiy yechimi: $z=\ln x+1+Cx$ bo’ladi.

z ni $\frac{1}{y}$ bilan almashtirib, berilgan tenglamaning $y=\frac{1}{\ln x+1+Cx}$ umumiy yechimini hosil qilamiz. Javob: $y=\frac{1}{\ln x+1+Cx}$.

SHu mavzuga oid ko‘rsatilgan sxema asosida quyidagi

1. $y'-y\cos x=y^2\cos x$; 2. $xy'+y=-xy^2$; 3. $y'+xy=xy^3$;

4. $y'+y=y^2$; 5. $y'-2(1-x^2)y'-xy=xy^2$.

Koshi masalasini eching.

Mustaqil topshiriq. Quyidagi Bernulli tenglamalari uchun Koshi masalasini eching

1. $y'+2y-y^3=0,\ y(1)=0$; 2. $y'-y=xy^2,\ y(1)=4$;

3. $y'-ytgx=\frac{1}{\cos x}y^3,\ y(0)=0$; 4. $y'-2(1-x^2)y'-xy=xy^2,\ y(0)=1$;

5. $y'-4y=y^2\cos x,\ y(0)=1$.

Xulosa

Differensial tenglama fizika va texnikaning turli sohalariga tadbiq qilinadi. Differensial tenglamani echish uchun, fan va texnikaning har xil masalalarini echishda differensial tenglamalar nazariyasining metodlarin qullash qonunini kafalatlaydigan echimning mavjudligi va yogonaligi haqidagi teorema katta rol uynaydi va shu bilan birga o‘qitishning yangi usullarini yoratishga imkon beradi.

Differensial tenglamani liseylarda o‘rganish matematikani o‘rganishning amaliy yonalishini kushaytadi, fanlar arasidagi bog‘likni ko‘proq oshishga yordam beradi. Shu sababli matematikadan ixtisoslashgan akademik liseylarda differensial tenglamalar elementlarini o‘qitishda amaliy tadbiqlari bilan birgalikda matematik qat’iylikka ham e’tibor berish maqsadga muvofiq bo‘ladi.

Bu bitiruv malakaviy ishida akademik liseylarda birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalarni o‘rganish maqsatida, differensial tenglamalarni echish tushunshasiga olib kelinadigan ayrim masalalar qaraladi. Differensial tenglamalar yordamida ayrim soxalardagi amaliy masalalarni echish va differensial tenglamalarni echishning nazariy va amaliy sorao‘lari o‘rganiladi.

Bu bitiruv malakaviy ishida akademik liseylarda o‘rganiladigan birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalarni echish usullari nazariy va amaliy jihatdan bayon etiladi va ko‘p amaliy masalalar echib ko‘rsatiladi.

Adabiyotlar

1. Агафонов С.А., Герман А.Д., Муратова Т.В. Дифференциальные уравнения: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. – 352 с. (Сер. Математика в техническом университете, вып. VIII).

2 .Богомолов Н.В. Практические занятия по математике: Учеб. пособие для средних спец. учеб. заведений. – 7 – изд., стер. – М.: Высшая шк.,2004.

3. Богомолов В.Г., Кандаурова И.Е., Шишкина С.И. Дифференциальные уравнения первого порядка. – М.: Изд-во МГТУ, 2001. – 37 с.

4. Бойқўзиев. Қ.Б. Дифференциал тенгламалар. Тошкент. “Ўқитувчи” 1983.

5. Данко П.Е., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. II: Учеб. пособие для втузов. – 5 изд., испр. – М.: Высш. шк.,1999.

6. Дилмуродов Н., Шарипов Э. Математикага ихтисослашган академик лицейларда дифференциал тенгламалар элементлари. «Замонавий физика ва астрономиянинг долзарб муаммолари». II Республика илмий анжумани материаллари. Қарши. Қарши давлат университети, 2010.

7. Дилмуродов Н., Шарипов Э. Matematikaga ixtisoslashgan akademik litseylarda differensial tenglama elementlari. Fizika, matematika va informatika ilmiy uslubiy jurnal Toshkent 2010 3 - son 42-46 b

8. Дилмуродов Н., Шарипов Э. Касб-ҳунар коллежлари ва академик лицейларда дифференциал тенгламалар элементларини ўқитиш ҳақида. «Касб таълими бўйича мутахассис кадрлар тайёрлаш тизимини такомиллаштириш назария ва амалиёт» мавзуидаги Республика илмий-амалий конференцияси илмий ишлар тўплами. Қарши: Насаф, 2007.

9. Дороговцев А.Я. Математический анализ. "Вища школа''. Киев. 1985

10.Иванов В.Е., Физические задачи на составление и решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Методические пособие для студентов института информатики, физики и информатики. Тамбов, 2007.

11. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Сборник задач по дифференциальным уравнениям первого порядка. – М. Высшая школа. 1987.

12. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Сборник задач по

обыкновенным дифференциальным уравнениям. Учеб. пособие для вузов. 3-изд. –М. Высшая школа. 1978.

13. Мантуров О.В., Матвеев Н.М. Курс высшей математики. "Высшая школа''. –М. 1986.

14. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие для втузов. – 14 – изд. испр. – М.: Издательство физико – математической литературы, 2000.

15. Пелевина И.Н., Раров Н.Н., Филиновский А.В. Дифференциальные уравнения высших порядков. Методические указания для выполнения домашнего задания. – М.: Изд-во МГТУ, 2001. – 38 с.

16. Пехлецкий И.Д. Математика: Учеб. для студ. Образоват. учреждений сред. проф. образования. – 2 – изд., стереотип. – М.: Издательский центр «Академия», 2003.

17. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. т. 1, 2. "Наука''. М. 1985.

18. Салоҳитдинов М.С., Насритдинов Ғ.Н.. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент. “Ўзбекистон”, 1994.

19. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения примеры и задачи. М.: “Высшая школа ”, 1989.

20. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 2. Специальные разделы математического анализа: Учеб. пособие для втузов / Под ред. А.В. Ефремова и Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1986. – 368 с.

21. Уваренков И.М., Малер М.З. Курс математического анализа. "Просвещение''. М. 1976.

22. Шапкин А.С. Задачи по высшей математике: Учебное пособие. – 2 – изд. – М.: Издательско – торговая корпорация «Дашков и К°», 2006.

23. Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Краткий курс высшей математики. т. 1. "Высшая школа''. М. 1978.