Toshkent to‘qimachlik va engil sanoat instituti

Oliy matematika kafedrasi

Matematika fanidan

R E F E R A T

Mavzu: KO‘P ARGUMENTLI FUNKSIYA.
KO‘P ARGUMENTLI FUNKSIYANING XUSUSIY HOSILALARI.
TO‘LA DIFFERENSIALNING TAQRIBIY HISOBLASHGA TADBIQI

Bajaruvchi: PSTF 2-16 guruh talabasi
Shamsiddinov Shohro'z Ruhiddin o'g'li.
O‘qituvchi: R.Yarqulov

Toshkent-2017

KO‘P ARGUMENTLI FUNKSIYA.
KO‘P ARGUMENTLI FUNKSIYANING XUSUSIY HOSILALARI.
TO‘LA DIFFERENSIALNING TAQRIBIY HISOBLASHGA TADBIQI

Reja:

1. **Ko‘p argumentli funksiya haqida to‘shcha.**
2. **Xususiy va to‘la orttirma.**
3. **Ko‘p argumentli funksiyaning limiti va uzluksizligi.**
4. **Ko‘p argumentli funksiyaning xususiy hosilalari.**
5. **Xususiy differensiallar.**
6. **Xususiy hosila va xususiy differensialning geometrik ma’nosi.**
7. **To‘la orttirma va to‘la differensial.**
8. **To‘la differensialning taqribiy hisoblashga tadbiqi.**
9. **Murakkab funksiyaning hosilasi. To‘la hosila.**
10. **Oshkormas funksiyaning hosilasi.**

Ko‘p holatlarda biror miqdor boshqa bir qancha bog‘liqmas o‘zgaruvchilarga bog‘liq bo‘ladi. Masalan, uchburchakning yuzi S uning asosi a va balandligi h ning qiymatlariga bog‘liq, ya’ni

$$S = \frac{1}{2}ah$$

To‘g‘ri burchakli parallelepipedning hajmi V bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan qirralarning funksiyasidir:

$$V=abc$$

Elektr toki ajratadigan issiqlik miqdori Q kuchlanish E, tok kuchi J va vaqt t ning funksiyasidir:

$$Q=0,24JEt$$

Avval ikki argumentli funksiyaning ta’rifini keltiramiz.

O‘zgaruvchilar x va u ning har bir juft qiymatiga Oxu tekisligida bitta nuqta mos keladi. Oxu tekisligida D sohaga tegishli bo‘lgan nuqtalar to‘plamini olamiz.

Ta’rif. Agar o‘zgaruvchi miqdorlar x va u ning D sohadan olingan har bir juft qiymatiga boshqa o‘zgaruvchi miqdor z ning bitta yoki bir nechta qiymatlari mos kelsa, u holda z miqdor x va u ning funksiyasi deyiladi.

D sohaning nuqtalar to‘plami funksiyaning aniqlanish sohasi deyiladi, ya’ni funksiyaning aniqlanish yoki mavjudlik sohasi deb x va u ning shunday qiymatlari to‘plamiga aytiladiki, bu qiymatlarda funksiya z aniqlangan bo‘lsin. D soha Oxu tekislikning biror qismidan yoki butun tekislikdan iborat bo‘lishi mumkin.

D sohani chegaralab turgan chiziqqa sohaning chegarasi deyiladi. Sohaning chegarasida yotmagan nuqtalarga ichki nuqtalar deyiladi. Agar soha faqat ichki nuqtalardan tashkil topgan bo‘lsa, bunday soha ochiq soha deyiladi. Agar sohaga ichki nuqtalardan tashqari uning chegarasida yotgan nuqtalar ham tegishli bo‘lsa, u yopiq soha deyiladi.

Agar shunday o‘zgarmas miqdor *S* mavjud bo‘lib, sohaning ixtiyoriy *M* nuqtasidan koordinata boshi *O* gacha bo‘lgan masofa $|OM|<C$ bo‘lsa, u holda soha chegaralanmagan deyiladi. Masalan, $x^2+y^2<r^2$ tengsizlik bilan aniqlangan soha markazi koordinata boshida, radiusi *r* bo‘lgan doiraning ichida yotgan nuqtalar to‘plamidan iborat. Sohaga $x^2+y^2=r^2$ aylanada yotgan nuqtalar tegishli emas . Demak, soha ochiq (yopiq emas) sohadir. Agar $x^2+y^2\leq r^2$ bilan aniqlangan sohani qarab chiqsak, u yopiq soha ekanligini ko‘ramiz.

Agar z miqdor x va u ning funksiyasi bo‘lsa, uni $z=f(x, y)$ kabi belgilaymiz. Bu yerda *x* va *y* - bog‘liqmas o‘zgaruvchilar yoki argumentlar, *z* - bog‘liq o‘zgaruvchi yoki funksiya deyiladi. Funksional bog‘lanishdagi *f* harfi (uning o‘rniga ixtiyoriy boshqa harf bo‘lishi mumkin) *z* ning mos qiymatini topish uchun *x* va *y* qiymatlari ustida bajarilishi lozim bo‘lgan amallar to‘plamini bildiradi.

Agar *x* va *y* ning har bir juft qiymati uchun funksiya *z* ning bitta qiymati mos kelsa funksiya bir qiymatli, ko‘p qiymatlari mos kelsa ko‘p qiymatli deyiladi.

Ikki argumentli funksiya bir argumentli funksiya kabi jadval yordamida, analitik va grafik ko‘rinishda berilishi mumkin.

Agar argumentlarning ma’lum qiymatlari uchun funksiyaning mos qiymatlari jadval yordamida berilsa bu funksiyani jadval ko‘rinishida berilishiga misol bo‘ladi.

Analitik usulda funksional bog‘lanish formula yordamida beriladi, masalan:

$$z = x^2 - xy + y^3;$$

$$z = \frac{tg(x+y)}{x^2 + y^2}$$

Analitik usulda berilgan funksiya uchun aniqlanish sohasi (qo‘shimcha shartlar bo‘lmasa) *x* va *u* ning *z* mavjud bo‘ladigan qiymatlari bo‘ladi. Masalan, $z=\ln(x^2+y^2-r^2)$ funksiyaning aniqlanish sohasi $x^2+y^2>r^2$, ya’ni doiradan tashqaridagi nuqtalardan iborat.

To‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi $S=xy$. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi $x>0$ va $y>0$ (to‘rtburchakning tomonlari manfiy va nolga teng bo‘lmasligi sababli). Bu funksiyaning tabiiy aniqlanish sohasi esa butun tekislik nuqtalaridan iborat.

Ikki argumentli funksiya grafigi deb abssissa va ordinatasi argumentlar *x* va *y* ning qiymatlari, applikatasi esa funksiya *z* ning mos qiymatlaridan iborat bo‘lgan nuqtalar to‘plamiga aytiladi. Bunday grafik biror sirt bo‘ladi.

Masalan, $x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad z > 0$ funksiyaning grafigi markazi koordinat boshida, radiusi *r* bo‘lgan sferaning *0XY* tekisligidan yuqori qismidan iborat, $z=2+x$ funksiyaning grafigi $0Y$ o‘qiga parallel bo‘lgan tekislikdan iborat.

Ikki argumentli funksiya oshkormas ko‘rinishda, ya’ni $f(x, y, z)=0$ ko‘rinishida berilishi mumkin.

Endi ko‘p argumentli funksiyaning ta’rifini keltiramiz.

Ta’rif. Agar o‘zgaruvchi $x, y, z, ..., t$ miqdorlarining har bir qiymatlari to‘plamiga o‘zgaruvchi U ning bitta yoki bir nechta qiymatlari mos kelsa, u holda U miqdor $x, y, z, ..., t$ ning funksiyasi deyiladi va

$$u=f(x, y, z,...,t)$$

kabi belgilanadi.

Agar funksiya oshkormas ko‘rinishda berilgan bo‘lsa,

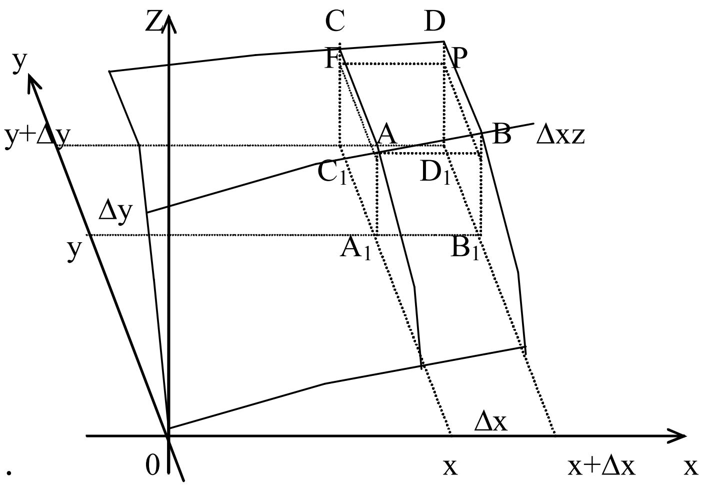
$$F(x, y, z, ..., t, u)=0$$

kabi belgilanadi.

Ikki argumentli funksiya uchun o‘rinli bo‘lgan hamma ta’riflar, ko‘p argumentli funksiya uchun ham o‘rinlidir. Uch va undan ko‘p argumentli funksiyalarning grafigini koordinat sistemasida tasvirlab bo‘lmaydi. Uch argumentli u=f(x,y,z) funksiyaning aniqlanish sohasi uch o‘lchovli fazoning biror qismidan yoki butun fazodan iborat bo‘ladi.

To‘rt va undan ortiq argumentli funksiyaning aniqlanish sohasini ham tasvirlab bo‘lmaydi.

2. Xususiy va to‘la orttirma.



1-rasm.

$z=f(x, y)$ sirtni $y=y_0$=const tekislik bilan kesamiz. Kesma AV chiziq hosil bo‘ladi. AV chiziq bo‘ylab z faqat x o‘zgarishi bilan o‘zgaradi. Bog‘liqmas o‘zgaruvchi x ga Δx orttirma beramiz. U funksiya z ham ortirma qabul qiladi. Uni x ga nisbatan xususiy orttirma deymiz va Δxz bilan belgilaymiz.

$$EV=V_1V-A_1A, \text{ ya’ni } \Delta xz=f(x-\Delta x, y)-f(x, y) \qquad (1)$$

Shunga o‘xshash, agar $z=f(x, y)$ sirtni $x=x_0$=const tekislik bilan kesishadi, kesimda AS chiziq hosil bo‘ladi (1-rasm).

Bu chiziq bo‘ylab z faqat u ga nisbatan o‘zgaradi. u ga Δu orttirma bersak funksiya z orttirma $\Delta_y z$ ni qabul qiladi. (chizmada FC). Bu u ga nisbatan xususiy orttirma deyiladi.

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y) \qquad (2)$$

Endi x ga Δx va u ga Δu orttirmani bersak funksiya z Δz orttirmani qabul qiladiki, u funksiyaning to‘la orttirmasi deyiladi (chizmada RD).

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y) \qquad (3)$$

Umuman olganda: $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$

Misol. $z = x^2 y$

$\Delta_x z = (x+\Delta x)^2 y - x^2 y = (2x\Delta x + \Delta x^2) y$

$\Delta_y z = x^2 (y+\Delta y) - x^2 y = x^2 \Delta y$

$\Delta z = (x+\Delta x)^2 (y+\Delta y) - x^2 y = (2x\Delta x + \Delta x^2) y + (x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2)\Delta y.$

Ko‘p argumentli funksiyaning xususiy va to‘la orttirmalari shunga o‘xshash aniqlanadi.

3. Ko‘p argumentli funksiyaning limiti va uzluksizligi.

Ta’rif 1. $M_0(x_0, y_0)$ nuqtaning r radiusli atrofi deb markazi M_0 nuqtada radiusi r bo‘lgan doira ichida yotgan $M(x, y)$ nuqtalar to‘plamiga, ya’ni

$$|M_0 M| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r$$

tengsizlikni qanoatlantiradigan nuqtalar to‘plamiga aytiladi.

Ta’rif 2. Agar har qanday kichik $\varepsilon>0$ con uchun shunday $r>0$ con mavjud bo‘lsaki, $|M_0M|<r$ shart bajarilganda $M(x, u)$ nuqtalar uchun $|f(x, y)-A|<\varepsilon$ shart bajarilsa, u holda A son $z=f(x, y)$ funksiyani $M_0(x_0, y_0)$ nuqtadagi limiti deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x, y) = A$$

Ta’rifga ko‘ra $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada funksiyaning aniqlangan bo‘lishi talab qilinmaydi, shuning uchun biz $x \neq x_0$ yoki $y \neq y_0$ deb qabul qilamiz.

Ko‘p argumentli funksiyaning limiti ham shunga o‘xshash ta’riflanadi.

Bir argumentli funksiyaning limitiga doir bo‘lgan teoremalar ko‘p argumentli funksiyalar uchun ham o‘rinlidir.

Ta’rif 3. Faraz qilamiz, (x_0, y_0) nuqta $z=f(x, y)$ funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli. Agar $z=f(x, y)$ funksiya uchun quyidagi tenglik o‘rinli bo‘lsa,

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

u holda $z=f(x, y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtada uzluksiz deyiladi.

Oxirgi tenglik shuni anglatadiki, agar funksiya $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada uzluksiz bo‘lsa, uning limiti shu nuqtadagi qiymatiga teng.

Ta’rif 4. Agar funksiya biror sohaning har bir nuqtasida uzluksiz bo‘lsa, funksiya shu sohada uzluksiz deyiladi.

Agar biror $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada uzluksizlik sharti bajarilmasa, M_0 nuqta uzilish nuqtasi deyiladi, bu quyidagi holatlarda bo‘lishi mumkin:

1) $z=f(x, y)$ funksiya $M_0(x_0,y_0)$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan, lekin M_0 nuqtada aniqlanmagan,
2) $z=f(x, y)$ funksiya $M_0(x_0,y_0)$ nuqtaning biror atrofining hamma nuqtalarida aniqlangan, lekin $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ mavjud emas,
3) $z=f(x, y)$ funksiya $M_0(x_0,y_0)$ nuqta atrofining hamma nuqtalarida aniqlangan va $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ mavjud, lekin $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)\neq f(x_0,y_0)$.

Misollar. 1. $z=xy$ funksiya $0XU$ tekislikning hamma nuqtalarida uzluksiz, demak uzilish nuqtasi yo‘q.

2. $z=\dfrac{1}{x^2+y^2}$ funksiya $0(0,0)$ nuqtada uzilishga ega.

3. $z=\dfrac{1}{x^2-y^2}$ funksiyaning uzilish nuqtalari $u=x$ va $u=-x$ to‘g‘ri chiziqlardan iborat.

4. $z=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ funksiya uchun $0(0,0)$ nuqta uzilish nuqtasidir.

4. Ko‘p argumentli funksiyaning xususiy hosilalari.

$z=f(x, y)$ tenglikda u ni o‘zgarmas deb olib, va bunday funksiyaning x ga nisbatan bir argumentli funksiyasi differensiallanuvchi deb faraz qilamiz.

Ta’rif. $z=f(x, y)$ funksiyani x ga nisbatan xususiy orttirmasi $\Delta_x z$ ni Δx ga nisbati $\Delta x\to 0$ dagi limitiga (mavjud bo‘lsa) ikki argumentli funksiyaning x bo‘yicha xususiy hosilasi deymiz va $z_x^|$ yoki $f_x^|(x, y)$, yoki $\partial z/\partial x$, yoki $\partial f/\partial x$ kabi belgilaymiz, ya’ni

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Shunga o‘xshash $z=f(x, y)$ funksiyadan u ga nisbatan xususiy hosila topiladi.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Boshqacha qilib aytganda: $z=f(x, y)$ funksiyadan x ga nisbatan xususiy hosila deb shu funksiyadan u ni o‘zgarmas deb x ga nisbatan topilgan hosilaga aytiladi. Shunga o‘xshash, $z=f(x, y)$ funksiyada u ga nisbatan xususiy hosila deb shu funksiyada x ni o‘zgarmas deb olib va u ga nisbatan topilgan hosilaga aytamiz.

Bu ta’rifdan shu narsa ayon bo‘ladiki, xususiy hosilalarni topish qoidasi bir argumentli funksiyadan hosila topish qoidasi bilan ustma-ust tushadi, shuning uchun bir argumentli funksiyaning hosilasini topish uchun formulalar bu yerda ham o‘z kuchida qoladi. SHuni qayd qilamizki, ikki argumentli funksiyadan faqat xususiy hosila topish paytida boshqa o‘zgaruvchi o‘zgarmas deb faraz qilinadi va boshqa paytda esa, $f_x^{|}(x, y)$, $f_y^{|}(x, y)$ lar ikki argumentli funksiyalardir.

1-misol. $z=x^2\cos(xy)$ dan xususiy hosilalar topilsin.

Yechish. $z_x^{|}=2x\cos(xy)-x^2y\sin(xy)$ $z_y^{|}=-x^3\sin(xy)$.

Uch va undan ko‘p argumentli funksiyaning xususiy hosilalari shunga o‘xshash topiladi, masalan, to‘rt argumentli u=i(x, y, z, t) funksiyaning xususiy hosilalari

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z, t) - f(x, y, z, t)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y, z, t) - f(x, y, z, t)}{\Delta y}$$

va hokazo kabi aniqlanadi.

2-misol. $u=x^2+y^2-zt^3$

$$u_x^{|}=2x;\ u_y^{|}=2y;\ u_z^{|}=-t^3;\ u_t^{|}=-3zt^2.$$

5. Xususiy differensiallar.

Xususiy hosila ta’rifidan. $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = z_x^{|}$. Bundan $\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = z_x^{|} + \alpha$ bu yerda $\alpha \to 0$, agar $\Delta x \to 0$ bo‘lsa. Oxirgi tenglikdan $\Delta_x z=z_x^{|}\Delta x+\alpha\Delta x$ ni hosil qilamiz. SHunday qilib, xususiy orttirmani ikkita qo‘shiluvchi yig‘indisi shaklida tasvirladik. Ikkinchi qo‘shiluvchi $\alpha\Delta x$ $\Delta x \to 0$ holda yuqori tartibli cheksiz kichik miqdor.Birinchi qo‘shiluvchi $z_x^{|}\Delta x$ esa Δx ga nisbatan chiziqli ifoda bo‘lib, xususiy orttirmaning bosh qismini tashkil qiladi.

Ta’rif. $z=f(x, y)$ funksiyaning x ga nisbatan xususiy differensiali deb, x ga nisbatan xususiy orttirmaning bosh qismiga aytiladi va $d_x z$ bilan belgilanadi, ya’ni $d_x z = z_x^{|}\Delta x$.

Bog‘liqmas o‘zgaruvchining orttirmasi uning differensialiga teng: $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$ shuning uchun $d_x z = z_x^{|}dx$.

Shunga o‘xshash u ga nisbatan xususiy differensial topiladi.

$$d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

Xususiy differensiallardan $\frac{d_x z}{dx} = z_x^{|}$, $\frac{d_y z}{dy} = z_y^{|}$ ni topamiz, ya’ni xususiy hosila xususiy differensialni mos argument differensiali nisbatiga teng.

Xususiy differensial ifodasidan ko‘rinadiki, uni topish uchun xususiy hosilani argument differensialiga ko‘paytirish yetarlidir.

Misol. $z=\sin(x^2+y^2)$.

$d_x z = 2x\cos(x^2+y^2)dx$; $d_y z = 2y\cos(x^2+y^2)dy$.

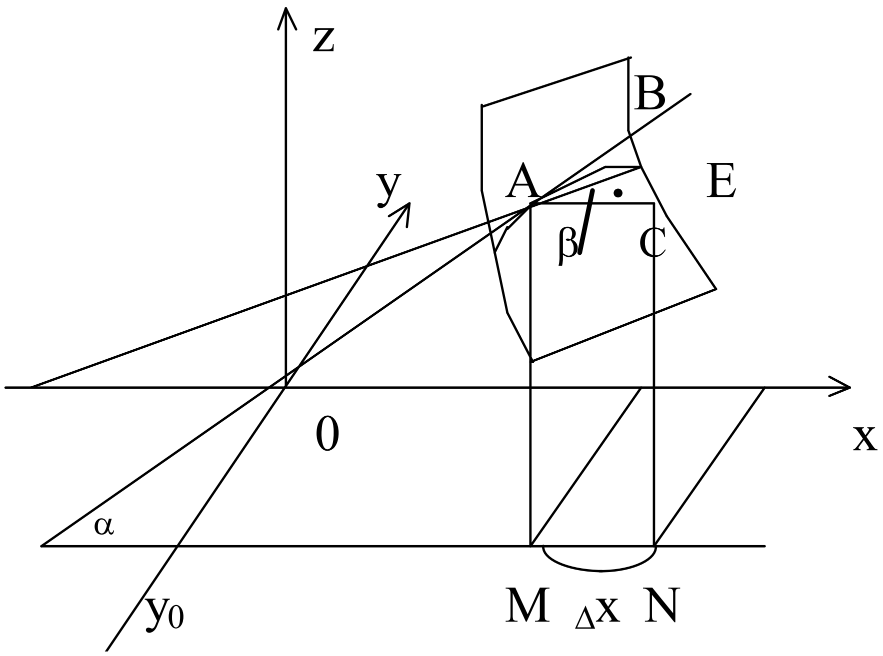
Uch va undan ko‘p argumentli funksiyadan xususiy differensiallarni topish ko‘rib chiqilganga o‘xshashdir.

Misol. $u=z\sin(xy)$

$$d_x u = yz\cos(xy)dx; \quad d_y u = xz\cos(xy)dy; \;\; d_z u = \sin(xy)dz.$$

6. Xususiy hosila va xususiy differensialning geometrik ma’nosi.

Xususiy hosilalar $z_x^{|}$ va $z_y^{|}$ ning absolyut qiymatlari funksiyani mos ravishda x ga va u ga nisbatan o‘zgarish tezligining miqdorini bildiradi, ularning ishoralari esa bu o‘zgarishning xarakterini (o‘sish yoki kamayish) bildiradi.



2-rasm.

$y=y_0$=const tekislik bilan $f(x, y)$ tekislikni kesamiz. Kesimda AE chiziq hosil bo‘ladi. Tekislikdagi $M(x, y_0)$ nuqtaga sirtdagi $A(x, y_0, z)$ nuqta to‘g‘ri keladi. x ga Δx orttirma beramiz, u holda tekislikdagi $N(x+\Delta x, y_0)$ nuqtaga sirtda $E(x+\Delta x, y_0, z+\Delta z)$ nuqta mos keladi va funksiya $\Delta_x z=CE$ orttirmani qabul qiladi (2-rasm). $\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ nisbat AE kesuvchini $0X$ o‘qining musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchagining tangensiga teng, ya’ni $\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\text{tg}\beta$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{ва} \quad \lim_{\Delta x\to 0} tg\beta = tg\alpha$$

shuning uchun $\frac{\partial z}{\partial x}=tg\alpha$, ya’ni $\frac{\partial z}{\partial x}$ xususiy hosila sirtni $y=y_0$ tekislik bilan kesishda hosil bo‘lgan chiziqqa o‘tkazilgan urinmani $0X$ o‘qining musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchagining tangensiga teng.

Xususiy differensial $d_x z$ esa urinma nuqtasi applikatasining orttirmasini (chizmada EV) bildiradi. Shunga o‘xshash xususiy hosila $z_y^{|}$ va xususiy differensial d_x^z ga ham geometrik ma’no beriladi.

7. To‘la orttirma va to‘la differensial

Ma’lumki $f(x, y)$ funksiyaning to‘la orttirmasi

$$\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y) \tag{1}$$

ko‘rinishga ega. Faraz qilaylik, funksiya qaralayotgan nuqta $M(x, u)$ da uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo‘lsin. (1) ifodaning o‘ng tomoniga f(x,y+Δy) ni qo‘shamiz va ayiramiz:

$$\Delta z=[f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y+\Delta y)]+[f(x, y+\Delta y)-f(x, y)] \tag{2}$$

Bu ifodaning o‘ng tomonidagi birinchi o‘rta qavs ichidagi ifoda bir argumentli funksiyaning ikki qiymatining ayirmasidan iborat (ikkinchi argument o‘zgarmasdir). Bu ifodaga Lagranj teoremasini qo‘llab topamiz:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y+\Delta y)=\frac{\partial f(\overline{x}, y+\Delta y)}{\partial x}\Delta x, \tag{3}$$

Bu yerda $\overline{x}$ x bilan x+Δx orasida joylashgan. (2) ifoda o‘ng tomonidagi ikkinchi o‘rta qavsdagi ifoda u ga nisbatan bir o‘zgaruvchi (x ga nisbatan o‘zgarmaydi) funksiyaning ikkita qiymatlarining ayirmasidan iborat. Unga ham Lagranj teoremasini qo‘llaymiz:

$$f(x, y+\Delta y)-f(x, y)=\frac{\partial f(x, \overline{y})}{\partial y}\Delta y, \tag{4}$$

bu yerda $\overline{y}$ - *u* va Δ*u* lar orasida joylashgan. (3) va (4) ifodalarni (2) ga qo‘ysak:

$$\Delta z=\frac{\partial f(\overline{x}, y+\Delta y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x, \overline{y})}{\partial y}\Delta y \tag{5}$$

Ma’lumki:

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\partial\ f(\overline{x}, y+\Delta y)}{\partial\ x}=\dfrac{\partial\ f(x,y)}{\partial\ x} \\ \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\partial\ f(x,\overline{y})}{\partial\ y}=\dfrac{\partial\ f(x,y)}{\partial\ y} \end{cases} \tag{6}$$

Chunki $\Delta x\to 0, \Delta y\to 0,$ bo‘lganda $\overline{x}\to x, \overline{y}\to y,$ bo‘ladi.(6) tengliklarni qo‘yidagicha yozish mumkin:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \alpha_1 \\ \dfrac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y} = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} + \alpha_2 \end{cases} \tag{7}$$

Bu yerda $\alpha_1 \to 0$, $\alpha_2 \to 0$, agar $\Delta x \to 0, \quad \Delta y \to 0$ bo‘lsa, ya’ni agar $\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$ bo‘lsa, (7) ni (5) ga qo‘yib topamiz:

$$\Delta z = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y \tag{8}$$

Oxirgi tenglikda o‘ng tomondagi ikkita oxirgi qo‘shiluvchilarning yig‘indisi Δr ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik miqdordir. Haqiqatda

$$\frac{\alpha_1 \Delta x}{\Delta r} \to 0, \frac{\alpha_2 \Delta y}{\Delta r} \to 0, \qquad \text{agar } \Delta r \to 0 \text{ bo‘lsa}$$

(8) ifodada o‘ng tomondagi ikkita oldingi hadlarning yig‘indisi Δx va Δy ga nisbatan chiziqli ifodadir. Bu yig‘indi $f_x^|(x, y) \neq 0$ va $f_y^|(x, y) \neq 0$ bo‘lganda to‘la orttirmaning bosh qismini beradi va Δz dan yuqori tartibli cheksiz kichik miqdor bilan farq qiladi.

Ta’rif. Ikki argumentli funksiyaning to‘la differensiali deb to‘la orttirmasining Δx va Δy ga nisbatan chiziqli bo‘lgan bosh qismiga aytiladi va dz yoki df bilan belgilanadi:

$$dz = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y$$

Bog‘liqmas o‘zgaruvchilarning orttirmalari Δx va Δy ularning differensiali deyiladi va dx va dy bilan belgilanadi. U holda to‘la differensial

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \tag{10}$$

ko‘rinishni oladi, bu erda $dx = \Delta x$ va $dy = \Delta y$.

Shunday qilib, agar $z = f(x, y)$ funksiya uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo‘lsa,u holda u differensiallanuvchi bo‘lib, to‘la differensial (10) formula bilan topiladi.

Misol. $z = xy$ funksiyaning to‘la differensiali va to‘la orttirmasi (2,1) nuqtada $\Delta x = 0{,}2$ va $\Delta y = 0{,}1$ bo‘lganda topilsin.

$dz = ydx + xdy = y\Delta x + x\Delta y$

$\Delta z = (x+\Delta x)(y+\Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y.$

$dz=1\cdot 0{,}2+2\cdot 0{,}1=0{,}4$

$\Delta z=1\cdot 0{,}2+2\cdot 0{,}1+0{,}1\cdot 0{,}2=0{,}42$

Argumentlarning soni ko‘p bo‘lgan holatda ham to‘la differensial shunga o‘xshash topiladi. Masalan, $u=f(x, y, z, ...,t)$ bo‘lsa

$$du=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz+...+\frac{\partial f}{\partial t}dt$$

bo‘ladi.

Misol. $u=x^2y+\cos 2z$ bo‘lsa, $du=2xydx+x^2dy-2\sin z dz$ bo‘ladi.

8. To‘la differensialning taqribiy hisoblashga tadbiqi.

Oldingi mavzudan $\Delta z\approx dz$ yoki

$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\approx\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$ kelib chiqib, bundan

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y \quad (1)$$

taqribiy formulani hosil qilamiz. Bu formula taqribiy hisoblashda qo‘llaniladi. Agar $x_0+\Delta x=x$, $y_0+\Delta y=y$ desak, (1) ni

$$f(x,y)\approx f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) \quad (2)$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

Misol. Agar to‘g‘ri burchakli uchburchakda o‘tkir burchak α va gipotenuza s o‘zgaruvchan bo‘lsa, katetlar ular orqali
$a=s\sin\alpha$, $b=c\cos\alpha$ kabi ifodalanadi.
$s+\Delta s$, $\alpha+\Delta\alpha$ bo‘lganda, katetlar a_1,b_1 ni topamiz:
$a_1\approx a+da$, $b_1\approx b+db$ yoki
$a_1\approx a+\sin\alpha\cdot\Delta c+c\cos\alpha\cdot\Delta\alpha$, $b_1\approx b+\cos\alpha\cdot\Delta c-c\sin\alpha\Delta\alpha$.
Shu jumladan, $c=2$, $\alpha=30^o$, $c_1=2{,}1$, $\alpha_1=31^o$ bo‘lganda

$$a_1=2\cdot\sin 30^0+\sin 30^0\cdot 0{,}1+2\cdot\cos 30^0\cdot\frac{\pi}{180}\approx 1{,}080.$$

$$b_1=2\cdot\cos 30^0+\cos 30^0\cdot 0{,}1-2\cdot\sin 30^0\cdot\frac{\pi}{180}\approx 1{,}801.$$

Hisoblashda yo‘l qo‘yilgan xatolikni baholashga differensialning tatbiqi.

Faraz qilaylik, x, u ning qiymatlarini aniqlashda Δx va Δu xatolikka yo‘l qo‘yilgan bo‘lsin. U holda $z=f(x, y)$ ni qiymatini hisoblashda yo‘l qo‘yilgan xato

$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$ bo‘ladi. Bu xatolikni baholaymiz. Δx, Δu absolyut qiymatlari bo‘yicha yetarli darajada kichik bo‘lganda to‘la orttirmani to‘la differensial bilan almashtirish mumkin:

$$\Delta z \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

Bundan

$$|\Delta z| \le \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \cdot |\Delta x| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \cdot |\Delta y| \tag{1}$$

hosil bo‘ladi. Agar $|\Delta^* x|$ va $|\Delta^* y|$ orqali Δx va Δu ning absolyut qiymatlarining eng kattasini belgilasak, u holda

$$\left|\Delta^* z\right| \le \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \cdot \left|\Delta^* x\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \cdot \left|\Delta^* y\right| \tag{2}$$

deb qabul qilish mumkin .

Misol. To‘g‘ri burchakli uchburchakda gipotenuza s va katet a ning qiymatlari $s=75$, $a=32$ maksimal absolyut xato $|\Delta * c|=0{,}2$; $|\Delta * a|=0{,}1$ bilan aniqlangan. a katet qarshisidagi burchak α ni $\sin\alpha = a/c$ formula bilan va yo‘l qo‘yilgan maksimal absolyut xatoni aniqlang.

Yechish. $\sin\alpha = a/c$; $\alpha = \text{arssin}\, a/c$; bundan:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial a} = \frac{1}{\sqrt{c^2 - a^2}}; \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial c} = -\frac{a}{c\sqrt{c^2 - a^2}}.$$

(2) formuladan foydalanamiz:

$$|\Delta\alpha| = \frac{0{,}1}{\sqrt{75^2 - 32^2}} + \frac{32 \cdot 0{,}2}{75\sqrt{75^2 - 32^2}} = 0{,}00275 \text{ radian} = 9^{|}38^{||}.$$

Shunday qilib: $|\alpha| = 9^{|}\ 38^{||}$

Maksimal nisbiy xatoni baholash uchun (2) ning ikkala tomonini funksiya taqribiy qiymatining moduli $|z| = |f(x, y)|$ ga bo‘lamiz:

$$\frac{\left|\Delta^* z\right|}{|z|} = \frac{\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|}{|z|} \cdot \left|\Delta^* x\right| + \frac{\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|}{|z|} \cdot \left|\Delta^* y\right|$$

Bundan $\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f} = \dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}}{z} = \dfrac{\partial}{\partial x}\ln|f|$; $\qquad \dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f} = \dfrac{\partial}{\partial y}\ln|f|$. ni hisobga olib topamiz:

$$|\delta^* z| = \frac{|\Delta^* z|}{|z|} = \left|\frac{\partial}{\partial x}\ln|f|\right| \cdot |\Delta^* x| + \left|\frac{\partial}{\partial y}\ln|f|\right| \cdot |\Delta^* y| \tag{3}$$

yoki qisqacha

$$|\delta * z| = |\Delta * \ln|z|| \tag{4}$$

(3) formuladan funksiyaning maksimal nisbiy xatosi bu funksiya logarifmining maksimal absolyut xatosiga tengligi kelib chiqadi.

9. Murakkab funksiyaning hosilasi. To‘la hosila.

Faraz qilaylik

$$z=F(u, v) \tag{1}$$

tenglamada u va v bog‘liqmas o‘zgaruvchilar x va u ning funksiyalari bo‘lsin:

$$u=\varphi(x, y);\ v=\psi(x, y) \tag{2}$$

(2) ni (1) ga qo‘yib

$$z=F(\varphi(x, y),\ \psi(x, y)) \tag{3}$$

ni hosil qilamiz.

(3) tenglamadan foydalanmasdan, (1) va (2) dan foydalanib va $F(u, v)$, $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ funksiyalar uzluksiz xususiy hosilalarga ega deb faraz qilib, $\partial z/\partial x$ va $\partial z/\partial y$ ni u ni o‘zgarishsiz qoldirib, x ga Δx orttirma beramiz. U holda (2) ga asosan, u va v ham $\Delta_x u$ va $\Delta_x v$ xususiy orttirmalarni qabul qiladi. (1) ga asosan esa funksiya z Δz orttirmani qabul qiladi. Bu orttirmani qo‘yidagi (to‘la differensial mavzusiga qaralsin) ko‘rinishda yozamiz:

$$\Delta z = \frac{\partial F}{\partial u}\Delta_x u + \frac{\partial F}{\partial v}\Delta_x v + \alpha_1 \Delta_x u + \alpha_2 \Delta_x v.$$

Bu tenglikning har bir hadini Δx ga bo‘lamiz.

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \alpha_1 \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \alpha_2 \frac{\Delta_x v}{\Delta x}.$$

Agar $\Delta x \to 0$ bo‘lsa, $\Delta_x u \to 0$, $\Delta_x v \to 0$ va $\alpha_1 \to 0$, $\alpha_2 \to 0$. Oxirgi tenglikda $x \to 0$ bo‘lganda limitga o‘tamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{4}$$

x ni o‘zgarishsiz qoldirib, u ga Δu orttirma berib, topamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \qquad (5)$$

Argumentlarning sanog'i ko'p bo'lganda ham xususiy hosilalar shunga o'xshash topiladi.

Misol: $w=u^2v-t^3$ bo'lib $u=x-y$; $v=xy$; $t=x+y$ bo'lsin.

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.+\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}=2uv+u^2y-3t^2=$$

$$2(x-y)xy-(x-y)^2y-3(x+y)^2.$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=2uv(-1)-u^2x-3t^2=-2(x-y)xy-(x-y)^2x-3(x+y)^2.$$

Agar $z=F(x, y, u, v)$ funksiya berilgan bo'lib, u, u, v o'z navbatida faqat x ning funksiyalari bo'lsa, ya'ni $y=f(x)$, $u=\varphi(x)$, $v=\psi(x)$, u holda z faqat bitta o'zgaruvchi x ning funksiyasi bo'lib qoladi va undan oddiy hosila dz/dx ni topish masalasini qo'yish mumkin.

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

va $\dfrac{dx}{dx}=1, \dfrac{\partial y}{\partial x}=\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{\partial y}{\partial x}=\dfrac{du}{dx}, \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{dv}{dx}$ bo'lib,

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{dx}. \qquad (6)$$

hosil bo'ladi, bu esa to'la hosila deyiladi.

Misol. $z=\sqrt{x^3+y}; y=\sin 2x$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y}}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{x^3+y}}; \qquad \frac{dy}{dx}=2\cos 2x$$

bo'lib $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x^3+y}}\cdot 2\cos 2x=\dfrac{3x^2+2\cos 2x}{2\sqrt{x^3+\sin 2x}}$ bo'ladi.

10. Oshkormas funksiyaning hosilasi.

Avval bitta bog'liqmas o'zgaruvchining oshkormas funksiyasidan hosilani qarab chiqamiz.

Teorema. Oshkormas funksiya $F(x, y)=0$ berilgan bo'lib, funksiyani qanoatlantiradigan (x, u) nuqtani o'z ichiga olgan biror D sohada $F(x, y)$, $F_x^{|}(x, y)$, $F_y^{|}(x, y)$ uzluksiz va $F_y^{|}(x, y)\neq 0$ bo'lsin. U holda x ning funksiyasi bo'lgan u

$$y'_x = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$$ hosilaga ega bo‘ladi.

Isbot. x ning biror qiymatida $F(x, y)=0$ bo‘lsin. x ga Δx orttirma bersak, u Δu orttirma qabul qiladi. $F(x+\Delta x, y+\Delta y)=0$ hosil qilamiz. $F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x, y)=0$ ayirmani xususiy hosilalar orqali ifodalaymiz:

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x+y) = \frac{\partial F}{\partial \mathrm{x}}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y = 0$$

bo‘lib, bundan

$$\frac{\partial F}{\partial \mathrm{x}}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y = 0$$

hosil bo‘ladi. Buni ikkala tomonini Δx ga bo‘lamiz va $\Delta u/\Delta x$ ni topamiz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x} + \alpha_1}{\frac{\partial F}{\partial y} + \alpha_2}$$

$\Delta x \to 0$ holda $\alpha_1 \to 0$ va $\alpha_2 \to 0$, hamda $\partial F/\partial y \neq 0$ ekanligini hisobga olib topamiz

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \tag{1}$$

Misol. $x^2+\cos(x+y^2)=0$. $y'_x=?$

$$y'_x = -\frac{2x - \sin(x+y^2)}{-2y\sin(x+y^2)} = \frac{2x - \sin(x+y^2)}{2y\sin(x+y^2)}$$

Endi ikki argumentli oshkormas ko‘rinishda berilgan $F(x, y, z)=0$ funksiyadan $\partial z/\partial x$ va $\partial z/\partial y$ xususiy hosilalarni topamiz. $\partial z/\partial x$ ni topish paytida u o‘zgarmasligini hisobga olib va (1) formuladan foydalanib $\partial z/\partial x=-F'_x/F_z$ ni shunga o‘xshash $\partial z/\partial y=-F'_y/F_z$ ni topamiz.

Misol. $e^z+x^2y+z+5=0$. $F(x, y, z)=e^z+x^2y+z+5$
$F'_x=2xy$; $F'_y=x^2$; $F'_z=e^z+1$; demak,

$$z'_x = -\frac{2xy}{e^z+1}, \quad z'_y = -\frac{x^2}{e^z+1}.$$

Асосий ва қўшимча адабиётлар ҳамда ахборот манбалари

Асосий адабиётлар

1. Gerd Baumann. Mathematics for Engineers I . München. 2010.
2. Erwin Kreyszig . Advanced engineering mathematics. USA. 2006
3. M.Xushvaqtov va boshqalar. Oliy matematika. Adabiyot uchqunlari. T. 2016.
4. Д.Т. Письменный Конспект лекции по высшей математике.М. 2009
5. Ё.У. Соатов. Олий математика.1-2-3-4-5-жилд. Т.: «Ўқитувчи».- 1992-1998. 640 б
6. Ш.И.Тожиев, “Олий математикадан масалалар ечиш”. Дарслик. Т.: “Ўзбекистон”, 2002. - 512 б.
7. П.Е.Данко, “Олий математикадан мисол ва масалалар тўплами”. Дарслик. 1-2- қисмлар. Т.:“Ўзбекистон”, 2007. - 248 б.

Қўшимча адабиётлар

8. Т.Жўраев, Г.Худойберганов, Х.Мансуров, А.Борисов. “Олий математика асослари”. Дарслик. Т.:“Ўзбекистон”, 1998-303 б.
9. Claudio Canute, Anita Tabacco. Mathematical Analysis I,II.Springer-Verlag Italia, Milan 2015.
10. Ф.Усмонов, Р.Исмоилов, Б.Хўжаев. Математикадан қўлланма. Т.:“Янги аср авлоди”, 2006-464 б.
11. Худайберганов Г. ва бошқ., Математик анализдан маърузалар. I-, II-қисмлар. Тошкент: “Ворис-нашриёти”, 2010.
12. Липман Берс. Математический анализ.Том1.Перевод с английского Л.И.Головинной, под редакцией И.М.Яглома. М.Высшая школа. 1975.