АШРАБОВ А. А., РАУПОВ Ч.С

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ НАДЕЖНОСТИ СТРОИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Ташкент – 2005

ГАЖК «УЗБЕКИСТОН ТЕМИР ЙУЛЛАРИ»

ТАШКЕНТСКИЙ ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРОВ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

Кафедра «Мосты и тоннели»

АШРАБОВ А. А., РАУПОВ Ч.С

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ НАДЕЖНОСТИ СТРОИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Учебное пособие

Ташкент – 2005

УДК 624. 046:5

В учебном пособии изложены основные положения теории надежности конструкций зданий и сооружений и даны основные терминологические понятия и определения, используемые в практических расчетах элементов на надежность. Приведены понятия и классификация отказов и дефектов в конструкциях. В пособии освещены основные аспекты исследования и принципы анализа надежности конструкций и сооружений с учетом технического состояния сооружений за период эксплуатации, отмечены основные факторы, определяющие надежность сооружений. Рассмотрены вероятностно-статистические и стохастические основы расчета надежности элементов зданий и сооружений. Обобщены и изложены вероятностные понятия случайных событий, величин и потоков случайных событий, даны их характеристики. Подробно освещены основные характеристики и законы распределения случайных величин, процессов и событий, применяемые в практических расчетах элементов на надежность. Рассмотрены системы случайных величин. Во всех разделах пособия приведены примеры решения задач различной степени сложности, имеющих практическое и прикладное значение.

Учебное пособие предназначено для бакалавров направлений 5А580200-Строительство зданий и сооружений (Транспортное строительство), 5А580400 – Строительство инженерных сетей, 5580600 – Эксплуатация искусственных сооружений, 5140900 – Педагогическое образование и магистрантов специальностей 5А580212 –Мосты и транспортные тоннели, 5А580603 – Эксплуатация мостов и транспортных тоннелей, 5А580204 – Проектирование, строительство зданий и сооружений и аспирантов строительных факультетов и ВУЗов, и может быть использовано инженерно-техническими работниками научных и проектных организаций.

Рисунки – 16; таблицы –5; библиографии – 11 наим.

Составители: **А.А.Ашрабов**, д.т.к, проф., **Ч.С.Раупов, к.т.н**, доц.
Рецензенты: **А.А.Ишанходжаев** – д.т.н., проф. Каф. «Мосты и транспортные тоннели» ТАДИ, **Н.А.Красин** – к.т.н., доц. каф. «Мосты и тоннели» ТашИИТ.

Учебное пособие одобрено на заседании кафедры «Мосты и тоннели» и утверждено учебно–методическим советом Строительного факультета.

Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта , 2005 г.

ГЛАВА I. ОБЩИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ СТРОИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

1.1. Общие положения

Проектирование и строительство зданий и сооружений, обладающих все более высокими качествами, составляет основное содержание технического прогресса в строительстве. Доминирующим признаком качества конструкций зданий и сооружений как строительных систем является их *надежность* – количественный статистический показатель, объединяющий комплекс физико–механических, геометрических, расчетных и эксплуатационных характеристик. Однако, чем сооружение сложнее и многофункциональнее, тем труднее обеспечить его надежность, т. к. оно представляет собой сложную систему, предназначенную для выполнения разнообразных функций. Совокупность потребительских свойств, характеризующих полезные функции конструкций в строительных системах, и определяющих степень их соответствия требованиям эксплуатации, представляет их *качество*. Помимо основных функций, составляющих главное назначение строительных систем (прочность, устойчивость, безопасность), может ставиться еще ряд дополнительных требований, например, эстетические требования, требования комфорта и т. п.

С первого дня существования сооружения (как и любого другого промышленного изделия) в отдельных его узлах и конструкциях начинают происходить изменения, выражающиеся в ухудшении характеристик и показателей. Эти изменения по важности и интенсивности различны: одни приводят к ухудшению эксплуатационных качеств, другие – к авариям и разрушениям всего сооружения; одни можно быстро устранить, другие устранить вообще невозможно; одни протекают во времени медленно и непрерывно, другие – внезапно, случайно, бессистемно. Но все изменения через какой–то промежуток времени приводят к нарушению работоспособности изделия (невозможности выполнения заданных функций или разрушению). Таким образом, на протяжении всего срока нормального функционирования сооружения имеется *вероятность* (возможность) выхода из строя его полностью или его отдельных элементов. Чем меньше такая вероятность, тем надежнее сооружение.

Качество сооружения как строительной системы должно сохраняться в течение всего времени, установленного для её *эксплуатации*. В понятие эксплуатации включается не только полезное функционирование строительной системы, но и вся совокупность операций над нею, начиная от изготовления и кончая демонтажем или сносом. Качество может быть утрачено не только во время функционирования, но и, например, при возведении или транспортировании. Вопрос о сохранении качества имеет весьма большое значение. Реальная система всегда в той или иной мере отличается от идеализированной системы, составляющей содержание проекта. Это отличие обусловлено многочисленными технологическими несовершенствами, дефектами материала, некондиционностью комплектующих элементов и т. п. Условия эксплуатации реальной системы также могут существенно отличаться от тех условий, которые рассматривались на стадии проектирования. Поэтому параметры функционирования реальной системы могут оказаться далекими от расчетных значений. Таким образом, не будет обеспечен необходимый уровень качества системы и она окажется недостаточно эффективной.

Разработка методов оценки надежности систем и создания систем, обладающих заданными показателями надежности и долговечности, составляет содержание *теории надежности*. В качестве основных предпосылок для создания единой теории надежности строительных конструкций и сооружений используются результаты исследований в рамках следующих научных направлений: математическая теория надежности; теория надежности систем в смежных областях науки и техники; статистические методы расчета строительных конструкций; метод расчета конструкций по предельным состояниям; методы обследования, испытаний и контроля качества материалов и конструкций; теория долговечности материалов и конструкций; принципы технической эксплуатации зданий и сооружений; типизация, стандартизация и унификация основных элементов и конструкций и др. Наиболее существенным достижением теории является создание достаточно общей системы понятий и терминов, нашедших отражение в ГОСТ 13377–75 и применимых в различных областях техники, в том числе к строительным сооружениям.

Надежностью можно назвать свойство строительной системы, заключающееся в ее способности выполнять определенные задачи в определенных условиях эксплуатации. Другими словами, надежность – это устойчивость качества строительной системы по отношению ко всем возможным возмущениям, которые могут встретиться при её изготовлении, возведении, полезном функционировании, транспортировании, хранении и т. п. В зависимости от назначения строительной системы и условий ее эксплуатации надежность может включать такие свойства, как *безотказность, долговечность, ремонтопригодность, сохраняемость* или любое сочетание этих свойств.

Согласно ГОСТ 13377–75, *надежность определяется как свойство изделия выполнять заданные функции, сохраняя эксплуатационные показатели в заданных пределах в течение требуемого промежутка времени.*

Отсюда видно, что обеспечение надежности основных конструкций сооружения на всех этапах эксплуатации – важнейшая технико–экономическая проблема его проектирования, строительства и эксплуатации. При строительстве сооружения несущие конструкции должны обладать такими запасами прочности, которые обеспечивали бы его нормальное функционирование на протяжении всего срока службы с учетом снижения прочности и ухудшения технических характеристик во времени за счет износа, влияния окружающей среды, внешних и внутренних нагрузок и т. д., с учетом обеспечения нормативной системы технического обслуживания и ремонта. Но эти запасы прочности должны быть экономически оправданы. Чем выше начальная надежность, тем больше стоимость сооружения. Оптимальный уровень надежности определяется из условий минимума затрат на строительство и его содержание за весь период существования. В связи с этим, целью поисков является не максимальная возможная надежность, а нахождение оптимального компромисса между приведенными затратами и надежностью.

Различают: *проектную (теоретическую, расчетную) надежность* сооружения, предусмотренную документацией на его строительство; *начальную надежность* – фактическую надежность построенного сооружения к моменту начала его эксплуатации; *эксплуатационную надежность* – фактическую надежность на любом этапе использования сооружения. Исследование надежности сооружения в конечном итоге имеет две цели: обеспечение надежности уже построенных сооружений (эксплуатационной надежности) на любом этапе его использования; накопление информации о надежности для учета ее при проектировании и строительстве новых сооружений в порядке обратной связи. Исследуя надежность основных конструкций сооружений, рассматривают пять её аспектов:

философский, включающий фундаментальные вопросы теории, концепций, определений и формулировок. Сюда входят критерии отказов отдельных конструкций и сооружений в целом, классификация отказов по значимости в системе всего сооружения;

математический, устанавливающий вопросы формализации расчетов сооружений и конструкций с учетом изменчивости внешних и внутренних факторов во времени, специализацию и углубление расчета детермированных систем, составляющих сооружение;

научно–технический, рассматривающий вопросы генезиса и синтеза системы сооружения, включающие классификацию элементов и конструкций по важности (применительно к надежности), расчетные схемы, методы и модели, сведение отдельных элементов («простых» систем) к сложным;

экономический, предусматривающий оптимизацию расчетов надежности с учетом всего срока эксплуатации с использованием вероятностных методов;

организационный, включающий получение, накопление и обработку информации о характеристиках элементов сооружений в течении их эксплуатации, организацию и внедрение нормативной системы планово–предупредительных ремонтов конструкций и сооружений в целом.

1.2. Основные терминологические понятия теории надежности строительных систем

Надежность является комплексным свойством, которая зависит от значения строительной системы и условий её эксплуатации. Она включает безотказность, долговечность, ремонтопригодность и сохраняемость строительных систем в целом (зданий и сооружений) и его составных частей (их элементов и конструкций). *Надежность – свойство строительной системы выполнять заданные функции, сохраняя свои* *эксплуатационные показатели в заданных пределах в течение требуемого промежутка времени или требуемой наработки.*

Показатель надежности – количественная характеристика одного или нескольких свойств, составляющих надежность строительной системы. В частности, к таким свойствам относятся показатели прочности конструкций при различных видах разрушения, устойчивости, прогибов, углов поворота, амплитуд колебаний, образование и раскрытие трещин в железобетоне, степень коррозии бетона и арматуры. *Единичный показатель надежности* – это показатель надежности, относящийся к одному из свойств, составляющих надежность строительной системы. Например, наработка на отказ характеризует свойство безотказности, которое только в совокупности с другими (долговечность, ремонтопригодность, сохраняемость) составляет надёжность строительной системы.

Применительно к строительным системам различного назначения, используемым в транспортном строительстве, особенно важно отметить нижеследующие показатели, характеризующие их надежность.

Безотказность – свойство конструкции или сооружения в целом непрерывно сохранять работоспособность в течение некоторого срока эксплуатации или некоторой наработки. Вероятность безотказной работы означает вероятность того, что в пределах заданного срока службы отказ конструкции не возникает. К показателям безотказности относят: вероятность безотказной работы, среднюю наработку до первого отказа, наработку на отказ, интенсивность отказов, параметр потока отказов, гарантийную наработку.

Долговечность – свойство конструкции или сооружения в целом сохранять работоспособное состояние с момента возведения до наступления предельного состояния при установленной системе технического обслуживания или ремонта, т. е. с возможными перерывами в работе. Показателями долговечности являются гамма–процентный ресурс, средний ресурс, назначенный ресурс, средний срок службы, срок службы до первого капитального ремонта или списания, межремонтный срок службы.

Предельное состояние – состояние объекта, при котором его дальнейшая эксплуатация должна быть прекращена из–за неустранимого нарушения требований безопасности, или неустранимого ухода заданных параметров за установленные нормами пределы, или неустранимого снижения эффективности эксплуатации ниже допустимого, или необходимости проведения среднего или капитального ремонта. Признаки (критерии) предельного состояния устанавливаются нормативно–технической документацией на данный объект.

Объекты могут быть ремонтируемыми и неремонтируемыми, восстанавливаемыми и невосстанавливаемыми. Неремонтируемый объект всегда невосстанавливаемый. Невосстанавливаемый объект не всегда неремонтируемый. Восстанавливаемость зависит от условий, процесса и т. д. Ремонтируемость характеризует приспособленность объекта к проведению ремонтов и технического обслуживания. Неремонтируемый объект достигает предельного состояния при возникновении отказа или достижении заранее установленного предельно допустимого значения срока службы или суммарной наработки. Значения предельного срока службы или предельной суммарной наработки неремонтируемых объектов могут определяться расчетным, экспериментально–статистическим или совместным использованием этих методов. Для ремонтируемых объектов – переход в предельное состояние определяется наступлением момента, когда дальнейшая эксплуатация его невозможна или нецелесообразна по одной или нескольким следующим причинам: становится невозможным поддержание безопасности ими эффективности эксплуатации объекта на допустимом уровне; ремонт требует больших затрат или не обеспечивает необходимой степени восстановления работоспособности.

Характеристические значения – это значения случайных величин, ощутимо реализуемых и задаваемых нормативно; они определяются в доверительных границах 5 – 95%. В оценках прочности и выносливости материалов конструкции пользуются кривой снизу, отсекающей – 5% статистических данных; в оценках нагрузок и воздействий – кривой сверху – 95% статистических наблюдений. Количественная оценка уровня надежности дается с использованием понятия **«степени безопасности»,** которая выражается коэффициентом безопасности β, т.е. количеством стандартных отклонений, откладываемых в большую (для нагрузок и воздействий) или меньшую (для прочности) сторону от математического ожидания силовых или прочностных параметров.

Коэффициент сочетаний временных нагрузок η отражает в детерминированной форме ощутимую вероятность (более 5%) совпадения во времени некоррелируемых нагрузок (например, временная вертикальная нагрузка и ветровая нагрузка).

Срок службы – календарная продолжительность эксплуатации конструкции от начала эксплуатации или ее возобновления после ремонта до перехода в предельное состояние.

Остаточный срок службы – календарная продолжительность эксплуатации конструкции от момента контроля её технического состояния до перехода в предельное состояние.

Гарантированный срок службы – календарная продолжительность эксплуатации, в течение которой строительная система или её элемент не достигают предельного состояния с заданной вероятностью. Они могут находиться в работоспособном, неработоспособном и предельном состояниях.

Работоспособность (работоспособное состояние) – состояние конструкции, при котором значения параметров, характеризующих её способность выполнять заданные функции, соответствуют нормативным требованиям.

Исправность (исправное состояние) – состояние конструкции, при котором оно соответствует всем требованиям, установленным нормативно–технической документацией. Работоспособная конструкция может быть неисправна.

Ремонтопригодность – свойство элемента или конструкции, заключающееся в доступности и удобстве в проведении мероприятий по предупреждению и обнаружению причин возникновения отказов и повреждений, а также устранению их путем ремонта и технического обслуживания. Надежность сооружения, его работоспособность обеспечивается своевременным ремонтом. К показателям ремонтопригодности относятся вероятность восстановления в заданное время, среднее время восстановления, удельная трудоемкость обслуживания и ремонтов, средняя и относительная стоимость ремонтов конструкции.

Сохраняемость применительно к сооружениям рассматривается как: а) сохраняемость отдельных изделий (конструкций) как свойство непрерывно сохранять исправное и работоспособное состояние в течение (и после) хранения и транспортировки; б) сохраняемость объекта в целом до ввода в эксплуатацию и во время ремонтов (или консервации).

Неработоспособное состояние – состояние конструкции, при котором значение хотя бы одного параметра, характеризующего её способность выполнять заданные функции, не соответствует требованиям нормативно–технической документации.

Повреждение – несущественное событие, заключающееся в нарушении исправного состояния конструкции при сохранении его работоспособности.

Отказ – событие, влекущее за собой полную или частичную потерю работоспособности конструкции. Признаки (критерии) отказов устанавливаются нормативно–технической документацией на данный объект. Отказ – одно из самых основных понятий теории надежности.

Полный отказ соответствует полной потере работоспособности конструкции.

Частичный отказ – отказ, после возникновения, которого конструкция может быть использована по назначению, но с меньшей эффективностью.

***Внезапный отказ* –** отказ, характеризующийся скачкообразным изменением значений одного или нескольких заданных параметров конструкции. Наступление внезапного отказа, как правило, трудно прогнозировать предварительным контролем или диагностированием.

***Постепенный отказ* –** отказ, возникающий в результате постепенного изменения значений одного или нескольких заданных параметров конструкции (увеличение раскрытия трещин, рост прогибов, снижение прочности бетона, и др.).

Приработанный отказ обусловлен наличием дефектных элементов в сооружении, ошибками сборки и монтажа. Надежность сооружения в период приработки полностью определяется вероятностью отказов дефектных элементов. Надежность сооружения не может быть выше надежности самого дефектного элемента.

Отказ в период нормальной работы является следствием внезапных недопустимых концентраций нагрузок на элемент или внезапных изменений качества самого элемента.

Износовый отказ возникает в результате усталости, механического или химического износа и т.д.

Независимый отказ – это отказ элемента сооружения, не обусловленный повреждением или отказами других элементов объекта.

Сбой – самоустраняющийся отказ, приводящий к кратковременному нарушению работоспособности.

Перемежающийся отказ – многократно возникающий **сбой одного и того же характера.**

Устойчивый отказ – это отказ, для ликвидации которого требуется вмешательство извне.

Конструкционный отказ – отказ, возникающий в результате нарушения установленных правил и (или) норм конструирования.

Производственный отказ – отказ, возникающий в результате нарушения установленного процесса изготовления или ремонта сооружения.

Эксплуатационный отказ возникает в результате нарушения установленных правил и (или) условий эксплуатации сооружения.

Систематический отказ – многократно повторяющийся отказ, обусловленный дефектами конструкции сооружения, нарушением процесса его изготовления, низким качеством используемых материалов и т.д.

Параметрический отказ – отказ, при котором какой–либо параметр сооружения выходит за установленный допуск.

1.3. Понятия и классификация отказов и дефектов в конструкциях сооружений

Понятие безотказности сооружения в целом как сложной технической системы шире, чем его элементов и простых систем, способных находиться лишь в двух состояниях – работоспособном либо неработоспособном. Отказы отдельных конструкций и технических устройств (тротуаров, ограждений, деформационных швов в мостах, покрытий, систем водоотвода и др.) обычно являются частичными отказами. Не приводя к прекращению функционирования объекта в целом, они снижают качество (уровень) функционирования и выходной эффект объекта. Такая адаптация сооружения к комплексу внешних условий возникает благодаря наличию определенной избыточности – некоторому запасу технических характеристик сверх минимально необходимых для выполнения заданных функций. Связано это с тем, что обеспечение локальных требований прочности и жесткости, влаго– и теплозащиты, пожарной безопасности сопровождается возникновением обратных связей, известным «перекрытием» отдельных функций конструкций и систем. В результате объективно возникают различные виды резервирования – нагрузочное, структурное, функциональное и временное.

Событие, заключающееся в нарушении работоспособности, называется *отказом,* т. е. под отказом понимают прекращение выполнения конструкциями заданных функций, которые устанавливаются с соответствующими допусками. При назначении нормативной надежности как несущих, так и ограждающих конструкций, под отказом понимают техническое состояние элемента, предшествующее исчерпанию несущей способности или полной потере несущих или ограждающих функций. Отказы можно классифицировать следующим образом:

1) в зависимости от причин возникновения: *внутренние отказы,* вызванные недостатком конструкций; *отказы из–за внешних причин,* (перегрузки, изменение схем работы и нагрузки и т. п.);

2) в зависимости от скорости их проявления: *последовательные, постепенные и внезапные отказы. Постепенные* отказы являются функцией времени, вызываемые главным образом старением материалов, накоплением внутренних напряжений и т. д. *Внезапные* отказы вызываются такими изменениями параметров элемента, при которых его следует считать неработоспособным. Такие отказы появляются при перераспределении и суммировании в узлах нагрузок, действия дополнительных внешних нагрузок, неучтенных сочетаний нагрузок. При расчете систем с учетом этих двух видов отказов ориентируются на следующие положения:

– постепенные отказы можно исключить, если учесть все возможные изменения характеристик и параметров во времени;

– внезапные отказы – случайны, их нельзя полностью исключить или предсказать;

– постепенные и внезапные отказы взаимосвязаны и не являются независимыми;

3) в зависимости от диапазона отказов: *частичные,* (связанные с отклонением характеристик от допускаемых пределов и не вызывающие полной утраты работоспособности) и *полные отказы;*

4) по сочетанию предыдущих концепций: *катастрофические отказы* – внезапные и полные; *отказы с постепенным ухудшением параметров и характеристик;*

5) в зависимости от последствий; *незначительные,* не приводящие к ухудшению эксплуатационных характеристик, *значительные,* критические отказы, приводящие к полному прекращению выполнения функций и появлению большого риска;

6) в зависимости от срока эксплуатации: *преждевременные* (часто до монтажа), *случайные* и *износовые* отказы.

В отличие от простых систем, где имеются только два возможных состояния – нормальное эксплуатационное и отказ, в сооружениях большая часть конструкций и элементов может иметь несколько состояний, соответствующих частичным отказам и неисправностям. В связи с этим отказы иногда классифицируют по следующим двум группам: 1*–я группа* – частичный отказ узла или элемента, усиление которого приводит к полному восстановлению надежности сооружений; 2*–я группа* – отказы наиболее ответственных элементов сооружений (основания, фундаментов, колонн, ригелей и т. д.), приводящие к полному отказу всего сооружения. Отказы второй группы могут быть внезапными. Усиление этих элементов порой связано с большими объемами предварительной разборки. Для сооружений ответственного назначения целесообразно выделять в отдельную группу отказы, которые могут приводить к катастрофическим последствиям, например к гибели людей. Поэтому при обеспечении надежности требования по безопасности необходимо выделять в отдельную группу.

В составных конструкциях или сооружениях отказ одного составляющего элемента может привести к отказу всей конструкции, хотя остальные элементы продолжают нормально функционировать. Такое состояние предотвращается обеспечением при проектировании так называемой *робастности* сооружения, при котором обеспечивается его сопротивление прогрессирующему обрушению. Его можно избежать устройством системы внешних и внутренних связей с определением и усилением ключевых (критических) элементов, выход из строя которых повлечет за собой более чем ограниченный ущерб для сооружения. Например в действующих Британских нормах такие элементы проектируются на особо тяжелую нагрузку (34 кН/м^2), прикладываемую в любом направлении на площадь, которую они поддерживают, а в зданиях выше пяти этажей должна допускаться возможность удаления любого вертикального несущего элемента, не являющегося ключевым, без причинения более чем ограниченного ущерба. Статистика, показывает, что большая часть отказов и аварий происходит все же из–за так называемых мелочей: невыполнения всех проверочных расчетов конструкций (особенно по узлам при проектировании), при работе над проектом разных авторов, неаккуратности рабочих при изготовлении изделий (элементов) и монтаже при сборке, небрежности и недостаточной квалифицированности эксплуатационного персонала. Допустимая вероятность отказа должна определяться в зависимости от тяжести последствий.

Отказы в работе конструкции наступают в результате повреждений, которые, накапливаясь, ухудшают эксплуатационные качества конструкции. Оставленные без внимания незначительные дефекты могут привести к серьезным нарушениям целостности конструкций и даже к авариям. Надежная работа строительных конструкций возможна в случае, когда во время эксплуатации принимаются эффективные меры по устранению дефектов или ограничению их вредного влияния. ГОСТ 15467–79 определяет дефекты как каждое отдельное несоответствие продукции установленным требованиям. Длительное изучение дефектов и отказов конструкций позволило классифицировать их по частным признакам (табл.1.1). При этом особое внимание обращено на то, что наиболее часто встречаются отказы, вызванные их сочетанием.

В процессе изготовления и монтажа в элементах конструкции могут быть допущены дефекты, которые ослабляют конструкцию, а в процессе эксплуатации с течением времени способствует более раннему возникновению отказов. К таким дефектам в железобетонных конструкциях относятся раковины, пустоты, трещины технологического происхождения, смещение арматуры от проектного положения, низкий по сравнению с проектным уровень обжатия бетона, заниженная толщина защитного слоя, отклонения положения и геометрических размеров элементов конструкций и изделий от проектных, низкая прочность бетона и заполнителей, плохое уплотнение бетонной смеси, нарушение режима теплообработки. В процессе монтажа отклонения от нормативных требований приводят к снижению несущей способности и возникновению дополнительных усилий в железобетонных конструкциях.

Во всех периодах эксплуатации в элементах конструкции происходит накапливание повреждений, которые в зависимости от характера сочетания нагрузки и влияния внешней среды, вызываются следующими причинами:

1) многократно повторное (циклическое) действие нагрузки является причиной нарушения структуры материала и возникновения усталостных повреждений. Например, при сжатии, этот процесс начинается задолго до достижения внутренними микронапряжениями критических величин с образованием необратимых микротрещин, направленных вдоль действующего усилия. Образование микротрещин в бетоне при его первом нагружении создает опасность разрушения материала под воздействием многократно повторной нагрузки.

2) длительно действующие нагрузки вызывают повреждения, приводящие к деструкции конструкционного материала и протеканию процессов ползучести. При напряжениях в бетоне, превышающих предел длительной прочности R_l = 0,85R_b , с течением времени происходит интенсивное нарастание микротрещин, приводящее к разрушению бетона. При малых напряжениях $\sigma < R_{crc}^{0}$ происходит уплотнение структуры бетона и его прочность повышается. Природа ползучести бетона связана с его структурой, длительным процессом кристаллизации и уменьшением количества геля при твердении цементного камня. В изгибаемых элементах с течением времени высота сжатой зоны увеличивается, что приводит к возрастанию напряжений в

Таблица 1.1

Классификация дефектов и отказов строительных систем

По степени опасности	Критический дефект, при наличии которого использование продукции по назначению практически невозможно или недоступно
	Значительный дефект, который существенно влияет на использование продукции по назначению (или на ее долговечность, но не является критическим)
	Малозначительный дефект, который существенно не влияет на использование продукции по назначению на ее долговечность
По способам обнаружения	Явный дефект, для выявления которого в нормативной документации предусмотрены соответствующие правила, методы, средства
	Скрытый дефект, для выявления которого не предусмотрены соответствующие правила, методы, средства
По возможности устранения	Устранимый дефект, устранения которого технически возможно и экономически целесообразно
	Неустранимый дефект, устранения которого технически невозможно и экономически нецелесообразно
По технологическому характеру	Ухудшение прочностных характеристик
	Сверхнормативные деформации
	Нарушение эксплуатационных

	характеристик
В зависимости от причин возникновения	Внутренние отказы, вызванные недостатками конструкций
	Отказы из-за внешних причин перегрузки, изменения
В зависимости от сохранности продукции	Последовательные и постепенные отказы
	Внезапные отказы
В зависимости от последствий	Незначительные отказы, не приводящие к ухудшению эксплуатационных характеристик
	Значительные отказы
	Критические отказы, приводящие к полному прекращению функционирования
По диапазону отказа	Частичные отказы, связанные с отклонением от нормативных параметров
	Полные отказы
В зависимости от срока эксплуатации	Отказы в период строительства
	Эксплуатационные отказы
	Износовые отказы

арматуре, дополнительному раскрытию трещин и росту прогибов при неизменной нагрузке.

3) агрессивные, технологические и природные воздействия вызывают коррозионные повреждения бетона и арматуры, что приводит к снижении прочности и разрушению конструкции. Выход из строя конструкции может быть обусловлен потерей защитного действия бетона, разрушением защитного слоя бетона, коррозией арматуры и потерей сцепления стальной арматуры с бетоном. В зависимости от характера коррозионного процесса различают три основных вида коррозии бетона: а) выщелачивание извести из бетона мягкими водами при фильтрации воды через бетон, пористая структура которого обладает способностью пропускать жидкости и газы; в результате выщелачивания происходит растворение гидроксида кальция и вынос его водой из бетона. При этом поверхность бетона покрывается белыми отложениями, образовавшимися в результате карбонизации гидроооксида кальция, вынесенного из толщи бетона; б) растворение цементного камня кислотами в местах их соприкосновения по контактной поверхности; кислотную коррозию вызывает углекислота, присутствующая в большинстве природных вод, соляная, серная, азотная и другие кислоты; чем энергичнее протекает реакция между кислотой и цементным камнем, тем более растворимы новообразования, тем скорее и полнее разрушается бетон. Так, например, при действии углекислоты цементный камень полностью разрушается, а продукты разрушения частично растворяются; в) в порах к капиллярах бетона происходит накопление и кристаллизация солей, образующихся вследствие химических реакций агрессивной среды (сульфатов натрия, магния и калия) с составными частями цементного камня. При таких реакциях объем конечных продуктов реакций в порах и капиллярах превышает объем исходных продуктов, что вызывает растягивающие усилия в стенках пор и капилляров и разрушение структуры бетона.

Газовая коррозия бетона вызывает коррозионные повреждения, приводящие к потере бетоном защитного действия по отношении к арматуре. Защитные свойства бетона, предохраняющие арматуру от коррозии, полностью нейтрализуются в результате процесса карбонизации под влиянием углекислого газа, содержащегося в чистом воздухе и атмосфере промышленных предприятий. Прочность бетона карбонизированного слоя может возрастать до 30%. Воздействие других кислых газов – сернистого ангидрида, сероводорода, хлористого водорода, хлора – также приводят к разрушению защитного слоя.

Коррозионные повреждения арматуры вызываются физико–химическими процессами её разрушения под воздействием окружающей среды. Защитный слой бетона ограждает арматуру от внешней среды, но не изолирует её полностью. Бетон проникаем для влаги и кислорода – основных компонентов, необходимых для химической коррозии стали. Коррозия арматуры возрастает с увеличением содержания хлоридов, бикарбонатной щелочности и температуры окружающей среды. Коррозионные повреждения стали проявляются в виде сплошной (общей) коррозии, которая охватывает всю поверхность металла, или местной коррозии, поражающей отдельные участки поверхности в виде пятен и язв**,** ориентированных нормально растягивающему усилию. Коррозия арматурных сталей под напряжением, как правило, протекает белее интенсивно. Однако общая равномерная коррозия мягких малоуглеродистых сталей под напряжением не изменяет их механических характеристик. Влияние напряжений ниже предела текучести на коррозию стали незначительно.

Наиболее опасно коррозионное растрескивание, проявляющиеся у многих видов высокопрочных арматурных сталей. Высокопрочные арматурные стали с пониженной пластичностью, применяемые для предварительно напряженных конструкций в транспортном строительстве, для производственных и общественных зданий, склонны к хрупкому разрушению. Коррозия высокопрочных сталей сопровождается значительным снижением пластичности и обычно заканчивается хрупким разрушением. Поэтому наряду с уменьшением площади поперечного сечения проволок и стержней первостепенное значение приобретают количественные показатели изменения прочности и пластичности высокопрочной арматурной стали. Влияние коррозионных повреждений на механические свойства арматуры аналогично действию концентраторов напряжений, которые локализуют пластическую деформацию в небольшом объеме металла. У пластических мягких сталей около этих очагов происходит перераспределение напряжений, в то время как у высокопрочной арматуры с малой пластичностью такого не происходит.

Так, например, к основным повреждениям, обнаруженным при обследовании эксплуатируемых железобетонных мостов, относятся коррозия бетона и арматуры, зависящие от состояния гидроизоляции и водоотвода с пролетного строения, и трещины в различных зонах изгибаемой предварительно напряженной балки. Коррозия и деструктивные процессы в бетоне вызываются неисправностью гидроизоляции и системы водоотводных устройств. Повреждения гидроизоляции в железобетонных пролетных строениях мостов возникают в связи с недостаточной долговечностью изолирующего материала – рубероида, из–за некачественной укладки изоляционного ковра в зонах его сопряжения с водоотводными трубками, сколами бетона и нарушениями гидроизоляции при монтаже в зоне строповочных отверстий. С потерей балластом дренирующих свойств происходит обводнение стенок балок, выщелачивание и разрыхление бетона при замораживании и оттаивании. Коррозия рабочей арматуры пролетного строения происходит вследствие недостаточной толщины защитного слоя, систематического увлажнения из–за неисправности гидроизоляции и водоотвода, чрезмерного раскрытия трещин на поверхностях балок. Трещины в железобетонных пролетных строениях бывают поверхностные и сквозные. Поверхностные трещины образуются в результате воздействия усадочных, температурных деформаций и поперечных растягивающих деформаций от предварительного обжатия бетона. Главная опасность возникновения в эксплуатации трещин заключается в том, что они могут привести к перегрузке рабочей арматуры, не учитываемой в расчетах на действие многократно повторных нагрузок, и способствуют интенсивной коррозии стальной арматуры.

4) Возникшие на стадии изготовления и монтажа повреждения, развиваясь в процессе эксплуатации, изменяют работоспособность конструкции. Постепенная потеря эксплуатационных качеств конструкции вследствие необратимого накапливания повреждений проявляется в снижении прочности бетона от многократного и длительного действия нагрузки, попеременного замораживания и оттаивания, вследствие протекания указанных выше трех видов коррозий. Ухудшение эксплуатационных качеств конструкций проявляется также и в снижении прочности и площади поперечного сечения арматуры в связи с развитием коррозионных повреждений стали. Развитие коррозионных повреждений может привести к потере сцепления, увеличению прогибов и дополнительному раскрытию трещин.

1.4. Факторы, определяющие надежность сооружений

В процессе проектирования и конструирования сооружения закладывается его теоретическая надежность. В процессе изготовления обеспечивается фактическая надежность каждого конкретного элемента, что зависит от качества применяемых в изготовлении отдельных деталей, качества сборки и монтажа конструкций. После изготовления надежность следует поддерживать на необходимом уровне правильной организацией эксплуатации. При проектировании учитывают следующие факторы, влияющие на надежность конструкций: качество и количество применяемых элементов; режим работы элементов и деталей; стандартизацию и унификацию изготовления; доступность деталей, узлов и блоков для осмотра, ремонта. В процессе строительства и эксплуатации на надежность сооружения оказывают воздействие следующие условия: внутренние напряжения в конструкциях, не соответствующие их проектным значениям; воздействия внешней среды (в заданных или иных режимах); система технического обслуживания (предупредительного и систематического); техническая квалификация обслуживающего и ремонтного персонала. В результате нарушения правил монтажа сооружения; отсутствия соответствующего контроля качества материалов и комплектующих изделий; нарушения сортности и недоброкачественной замены материалов; установки элементов, подвергающихся длительному хранению в неблагоприятных условиях; недостаточного контроля на операциях и при выпуске готовой продукции, а также нарушения самой технологии монтажа возникают условия, отрицательно влияющие на надежность конструкции сооружения в целом.

Современные сооружения можно отнести к большим системам, представляющим соединение значительного числа разнообразных по сложности компонентов, подверженных переменным изменяющимся нагрузкам. В противоположность отдельным малым детерминированным системам и.устройствам, большие системы ведут себя «случайно». В сложной системе, как правило, значимость отдельных частей для целого неодинакова. Почти всегда ее можно привести к модели, состоящей из ряда более простых составных частей, которые делятся на уровни высшие и низшие. Сложные системы – иерархические, методология их исследования в отличие от физических представлений основана на умозрительности и неведении целого к части. Здесь важно отметить один из принципов исследования таких систем – принцип рекуррентного объяснения: свойства систем данного уровня выводятся исходя из постулируемых свойств элементов систем непосредственно нижестоящего уровня. При каждом переходе на следующий иерархический уровень система данного уровня становится элементом системы высшего уровня.

Надежность системы зависит от надежности составляющих ее элементов. Однако важна надежность не отдельных элементов, а их совокупности, включая стыки и сопряжения, и надежность не только прочностная, но и эксплуатационная (включая и надежность функционирования инженерных систем). Вместе с тем, в практике проектирования, строительства и эксплуатации конструкций и сооружений часто надежность по прочности рассматривается как главное, а надежность в смысле обеспечения эксплуатационных характеристик – как второстепенное. Практически при проектировании эксплуатационные характеристики сооружения не являются исходными (расчетными). Элементы и их стыки рассчитывают по деформациям и прочности, однако допускаемые деформации не всегда обеспечивают нормативное эксплуатационное состояние сооружения. Надежность сооружения и отдельных конструкций обусловливается изменчивостью во времени внутренних свойств (материалов) и внешних условий (нагрузок и воздействий). Характеристики и показатели этих факторов к моменту окончания монтажа сооружения определяют начальную его надежность, которая с первого дня эксплуатации постепенно снижается. Вся совокупность причин (факторов), вызывающих изменение работоспособности сооружения в целом и отдельных его элементов, с точки зрения механизма их воздействия, может быть условно разделена на две группы причин – внутреннего и внешнего характера. К причинам *внутреннего характера* относят физико–химические процессы, протекающие в материалах, из которых изготовлены конструктивные элементы нагрузки и процессы, возникающие при эксплуатации, конструктивные факторы, качество изготовления (дефекты производства). К причинам *внешнего характера* относят климатические факторы (температуру, влажность, солнечную радиацию), факторы окружающей среды (ветер, пыль и песок, наличие в атмосфере агрессивных соединений, биологические факторы), а также качество эксплуатации. К ним также, очевидно, следует отнести и воздействия, предусмотренные системой технического обслуживания и ремонта.

Более дифференцированно факторы, определяющие надежность зданий и сооружений могут быть объединены в четыре основных группы, представленных на рис.1.1.

В *первую* группу входят общенормативные положения, регламентирующие номенклатуру расчетных предельных состояний конструкций и сооружений, включающих требования по обеспечению уровня надежности, рекомендуемые для различных схем и моделей, расчетные нагрузки и воздействия и их сочетания, а также расчетные характеристики материалов.

Во *вторую* группу входят расчетные схемы и модели, принятые по результатам экспериментально–теоретических исследований и опыту предшествующего проектирования. Они и определяют выбор и обоснование методов расчета, объёмно–планировочных и конструктивных решений, обеспечение нормативных требований по прочности, устойчивости и выносливости. Основными факторами при этом являются: способы определения усилий и деформаций в системе; методы расчета сопротивления конструкций и узлы сопряжений; адекватность принятой расчетной схемы реальным условиям; учет пространственной работы систем и характера соединений и защемлений при сдвиге и отрыве; пластические свойства и нелинейность деформирования системы; конструкций и связей; методика учета длительных процессов, определяющих деформирование, прочность и долговечность конструкций.

В *третью* группу входят условия изготовления конструкций и их монтажа при возведении здания или сооружения, определяющие такие факторы как изменчивость свойств материалов и несущей способности конструкций, отклонения размеров и проектного положения конструкций, дефекты их изготовления и монтажа, контроль качества строительных работ и т. п.

Четвертая группа объединяет номенклатуру требований по технической эксплуатации зданий и сооружений, включающих систему планово–предупредительных ремонтов и контроля их технического состояния, уровень квалификации обслуживающего персонала.

Рассмотрим некоторые факторы, являющиеся причиной изменения технического состояния сооружений в процессе их эксплуатации. Наиболее существенными являются факторы *конструктивного характера*. Рациональные конструктивные решения обеспечивают требуемую работоспособность всех элементов сооружений в течение установленной продолжительности их эксплуатации при минимальных затратах труда и средств на поддержание их нормального состояния. В то же время нерациональные и конструктивные решения могут являться причиной быстрой утраты работоспособности или разрушения отдельных конструктивных элементов.

Действие *факторов окружающей среды и климатических факторов* на работоспособность элементов и конструкций сооружений проявляется или непосредственно, или путем воздействия на интенсивность протекания процессов, являющихся причиной изменения работоспособности конструктивных элементов. Соответствующими конструктивными решениями отрицательное воздействие этих факторов может быть значительно снижено или вовсе исключено. *Производственные факторы* вносят значительные коррективы в значения характеристик работоспособности конструкций, а *условия эксплуатации* (режимы использования и нагружения, квалификация эксплуатационного персонала, качество обслуживания) оказывают большое влияние на интенсивность изменения характеристик их работоспособности.

При проектировании сооружений и планировании для них профилактических мероприятий необходимо знать характеристики работоспособности конструктивных элементов, определяющих работоспособность в целом в определенных режимах и условиях их использования. Недостаточное знание физической природы протекающих процессов, являющихся причиной утраты конструктивными элементами работоспособности, случайный и неопределенный характер воздействующих эксплуатационных, климатических и других факторов, как правило, не позволяют получить зависимости для большинства конструктивных элементов аналитическими методами.

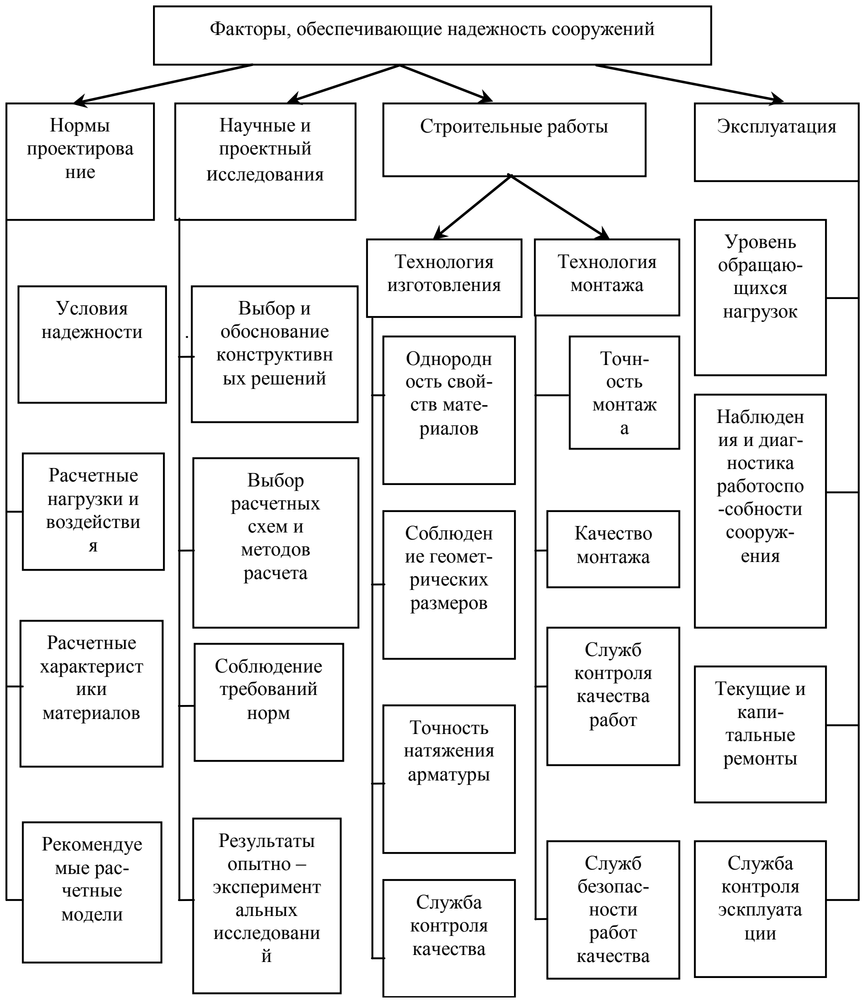


Рис.1.1. Факторы, определяющие надежность зданий и сооружений на стадиях проектирования, строительства и эксплуатации.

В этих условиях основными методами получения информации и значений характеристик работоспособности конструктивных элементов *является статистический эксперимент*. При этом необходимо отдавать предпочтение активному многофакторному статистическому эксперименту, когда требуемая информация может быть получена при значительно меньшем объеме наблюдений, чем в случае однофакторного эксперимента. Данные пассивных экспериментов (результаты эксплуатационных наблюдений и некоторых видов испытаний) должны использоваться как априорная информация при планировании активных экспериментов.

Сложность исследования надежности всех конструкций сооружений состоит в многочисленности факторов, определяющих надежность. Главные из них – вид материалов, характер конструкций и их схем, качество изготовления изделий и монтажа, допусков и т. д. Причем очень часто все эти требования взаимопротивоположны, например стыки тяжелых и легких элементов. Здесь тяжелые железобетонные элементы мало поддаются объемным деформациям под влиянием изменения температурно–влажностного режима, но допуски при их изготовлении, особенно монтажные, довольно значительны. В легких элементах из металла, дерева, пластмасс возникают большие деформации в процессе эксплуатации, но допуски при их изготовлении значительно меньше. Еще большие трудности при исследовании надежности эксплуатируемых сооружений связаны с использованием различных по физическим и структурным свойствам материалов. Таким образом, под надежностью сооружения в целом как сложной системы, прежде всего, понимают стабильность показателей качества и эффективности его функционирования, которая зависит от надежности конструкций и систем. Задача оценки надежности сооружения сводится к установлению влияния частичных и полных отказов на качество и выходной эффект функционирования объекта. Надежность должна характеризоваться тем основным показателем, который является определяющим и в то же время составной частью оценки использования объекта. Функционирование моста оправдано в той мере, в какой он удовлетворяет не только техническим, но и изменяющимся социально–экономическим и организационным требованиям, поэтому в плане системного подхода, определяющим показателем его надежности в целом как конечной продукции, является его *оптимальный срок службы*. Надежность можно понимать как сохранение качества в течение времени. Понятно, что без базового хорошего качества не может быть и речи о надежности.

1.5. Количественные показатели надежности

Исследования и расчеты в области надежности становятся на практическую основу только тогда, когда исследователь или проектировщик имеет в своем распоряжении количественные методы сравнительной оценки и измерения надежности. Числовые значения количественных показателей надежности конструкций зависят от того, как часто в них возникают отказы и насколько быстро они устраняются. Понятие отказа является одним из основных понятий теории надежности. *Отказом называется событие, которое состоит в нарушении работоспособности системы.* Иначе говоря, отказ – это частичная или полная утрата качества системы. К отказам относятся недопустимые отклонения параметров системы от расчетных значений, временные нарушения условий нормальной эксплуатации системы, полный выход системы из строя. Понятие отказа весьма близко по смыслу к понятию предельного состояния в строительной механике и в расчетах сооружений. Однако в теории надежности под предельным состоянием понимается такое состояние системы, которое соответствует технической невозможности или нецелесообразности ее дальнейшей эксплуатации. Таким образом, в теории надежности понятию предельного состояния придается более узкий смысл, чем в теории сооружений.

Значительная часть отказов конструкций и сооружений имеет механическое происхождение. Примерами отказов, приводящих к выводу конструкции из строя или по крайней мере требующих прекращения ее эксплуатации, могут служить обрушение, опрокидывание, потеря устойчивости или равновесия сжатых элементов, хрупкое разрушение и т. п. Многие отказы носят постепенный характер: параметры системы по мере эксплуатации постепенно ухудшаются и в некоторый момент времени достигают значений, при которых дальнейшая эксплуатация становится невозможной или нецелесообразной. К явлениям этого типа принадлежат процессы накопления остаточных деформаций, механический и коррозионный износ, растрескивание и т. п. Отказы изделий, как правило, принадлежат к категории случайных событий. Поэтому и показатели надежности принадлежат к категории показателей, которые используются для характеристики случайных величин и случайных событий. Почти все отказы вызваны влиянием случайных факторов, которые либо заложены в систему при ее изготовлении и возведении, либо действуют на нее в процессе эксплуатации. Поэтому отказы, как правило, носят случайный характер. Трактовка отказов как случайного события является исходным пунктом при построении теории надежности.

За основной показатель надежности системы может быть принята вероятность безотказной работы в течение всего срока службы T^*, т. е. вероятность случайного события, состоящего в том, что в течение срока T^* не произойдет ни одного серьезного отказа. Эту вероятность в дальнейшем обозначим через P и назовем просто *показателем надежности*, тогда очевидно, что $P \equiv P(T^*)$. Наряду с показателем надежности P, определяемым для всего установленного срока службы T^*, целесообразно рассматривать вероятность безотказной работы на отрезке времени $(0, t)$, где t – переменная величина. Эту функцию времени t будем называть в дальнейшем функцией надежности и обозначать через $P(t)$. Она содержит в себе значительную информацию о надежности системы и через неё могут быть выражены некоторые другие показатели надежности. К ним относится, например, плотность распределения времени до первого отказа, равная производной от функции надежности $P(t)$, взятой с обратным знаком:

$$P(t) = - dP(t)/dt. \quad (1.1)$$

Срок службы системы T является тоже случайной величиной. Если эксплуатация системы прекращается после первого отказа, то функция распределения сроков службы $F(T)$ выражается через функцию надежности $P(t)$ следующим образом:

$$F(T) = 1 - P(t)_{t\ =\ T}. \qquad (1.2)$$

Соответствующая плотность вероятности $p(T)$ определяется по формуле (1.1) с заменой t на T. Средний срок службы вычисляется как: $\langle T \rangle = \int_0^\infty tp(t)dt$. Отсюда после интегрирования по частям и использования формулы (1.1) получим:

$$\langle T \rangle = \int_0^\infty P(t)dt. \qquad (1.3)$$

Выше за независимую переменную принималось время t. В теории надежности в качестве независимой переменной часто используется более общий параметр – *наработка*, которая определяется как продолжительность или объем работы, выполненный системой. Наработка может измеряться в единицах времени, в единицах произведенной продукции, в числе производственных циклов и т. п. Вместо срока службы при этом иногда употребляется более общий термин *«ресурс»*, равный наработке от некоторого начального момента времени до наступления предельного состояния. В дальнейшем, однако, мы будем всюду брать время в качестве независимого переменного, имея в виду, что результаты легко распространяются на более общий случай.

Теория надежности содержит также ряд понятий, которые позволяют включать в рассмотрение ремонт, восстановление, профилактику. Эти понятия образуются по такому же принципу, как и введенные выше понятия теории надежности. Так, понятие вероятности безотказной работы – функции надежности $P(t)$ – распространяется на восстанавливаемые системы: после каждого восстановления функция надежности принимает значение, равное единице, после чего значения функции $P(t)$ вновь монотонно уменьшаются. В общем виде конструкцию рассматривают как систему, если она восстанавливается, или как элемент, если она не восстанавливается. Удачная конструкция восстанавливаемого изделия отличается малым объемом обслуживания, а его надежность оценивается средней наработкой между отказами. Удачная конструкция невосстанавливаемого изделия характеризуется долговечностью работы до отказа. Неремонтируемые изделия подлежат замене после первого отказа. Все несущие и ограждающие конструкции сооружений в основном относятся к ремонтируемым изделиям. Применительно к строительным конструкциям случайные величины, встречающиеся в задачах надежности, как правило, имеют нормальное распределение.

Показатели надежности, полученные из предварительно составленной математической модели могут определяться математическим выражением, дающим *математическое определение показателя надежности.* Для опытного определения показателей надежности неремонтируемых конструкций и изделий проводят наблюдения за испытаниями или эксплуатацией n изделий в заданных условиях. Показатели надежности могут определяться также в результате статистической обработки большого числа данных опытов или наблюдений. В этом случае пользуются *статистическим определением показателя надежности* (со звездочкой сверху). Например, статистическая вероятность безотказной работы за время t обозначается $P^*(t)$. ГОСТ 27.002–83 содержит подробный перечень показателей надежности, часть которых, применительно к конструкциям и сооружениям, рассмотрена ниже.

Вероятность безотказной работы $P(t)$ – вероятность того, что в пределах заданной наработки отказ объекта не возникнет (*наработка* – продолжительность или объем работы).

Математическое определение: $P(t_з) = P(t>t_з)$, где t – случайное время работы объекта до отказа; $t_з$ – заданная наработка. *Статистическое определение:* $P^*(t) = N^*(t)/N^*\ (t = 0)$, где $N^*(t)$ – число работоспособных объектов в момент времени t; $N^*(t = 0)$ – число работоспособных объектов в начальный момент времени, т. е. при $t = 0$.

Вероятность отказа *Q(t)* – вероятность того, что в пределах заданной наработки отказ объекта возникнет. *Математическое определение:* $Q(t_з) = 1 - P(t_з)$. *Статистическое определение:* $Q^*(t) = n^*(t)/N^*$ ($t = 0$), где $n^*(t)$ – число отказавших объектов на интервале $0 - t$.

Нормативное значение надежности. Нормативным значением надежности считается величина вероятности отказа, которая является безопасной. Опыт эксплуатации сооружений позволил установить нормативные коэффициенты надежности, приведенные в табл.1.2.

Таблица 1.2

Наименование конструкций	P_0	$P(t)$
Самонесущие ограждающие элементы	0.95	0.85
Элементы статически неопределимых систем, отказ которых по прочности не влечет внезапного разрушения системы	0.99	0.95
Несущие элементы с постепенными отказами (перекрытия, опоры, колонны, балки и фермы)	0.999	0.99
Ответственные конструкции с внезапными отказами	0.9999	0.999

Интенсивность отказов невосстанавливаемого объекта $\lambda(t)$. Это условная плотность вероятности возникновения отказа невосстанавливаемого объекта, определяемая для рассматриваемого момента времени t при условии, что до этого момента отказ не возник.

Математическое определение: $\lambda(t) = f(t)/P(t)$, где $f(t)$ – плотность вероятности отказа в момент времени t:

$$f(t) = \frac{d}{dt}Q(t) = \frac{d}{dt}[1 - P(t)] = -\frac{d}{dt}P(t). \tag{1.4}$$

Функция надежности выражается через интенсивность отказов (т. е. связь между $\lambda(t)$ и $P(t)$) следующим образом:

$$\lambda(t)dt = -\frac{1}{P(t)}\frac{dP(t)}{dt} = -\frac{dP(t)}{P(t)}; \quad -\int_0^t \lambda(t)dt = \ln P(t)\,|_0^t; \; P(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(t)dt\right). \tag{1.5}$$

В частном случае при λ = const, из последней формулы вытекает экспоненциальный закон распределения отказов,

$$P(t) = exp(-\lambda t). \tag{1.6}$$

Для экспоненциального закона надежности (распределения отказов) формула (1.3) дает $\langle T\rangle = 1 / \lambda$, а формула (1.6) принимает следующий вид:

$$P(t) = exp(- t / \langle T\rangle). \tag{1.7}$$

Статистическое определение: $\lambda^*(t) = [n^*(t + \Delta t) - n^*(t)] / [N(t)\Delta t]$, где $n^*(t)$ – число отказов к моменту времени t; $n^*(t + \Delta t)$ – число отказов на интервале от i до Δt, т. е. на интервале Δt, примыкающем к t; $N(t)$ – число работоспособных объектов в момент времени t; $N(t)\Delta t$ –наработка объектов на интервале Δt.

Таким образом, $\lambda^*(t)$ – это число отказов в единицу времени на интервале Δt, примыкающем к t. Интервал Δt должен быть достаточно малым, чтобы обеспечить плавный характер кривой $\lambda(t)$, и в то же время достаточно большим, чтобы на нем могли быть зафиксированы отказы объекта.

Средняя наработка до отказа T_1. *Математическое определение* в общем виде: $T_1 = \int_0^\infty f(t)dt = \int_0^\infty P(t)dt$ или приближенно: $T_1 = 1/n \sum_4^n t_i$, где t – время от начала работы невосстанавливаемого изделия до его отказа. *Статистическое определение:*

$T_1^* = (t_1^* + t_2^* + \ldots + t_n) / n = (1 / n)\sum_{1}^{n} t_i$.

Средняя наработка на отказ восстанавливаемого изделия T_0. *Математическое определение:* $T_0 = \int_0^\infty t\, f(t)dt$, где t – время работы восстанавливаемого изделия от момента окончания $(k – 1)$–го восстановления до момента наступления k–го отказа. *Статистическое определение:* $T_0^* = (t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n) / n = (1 / n)\sum_{1}^{n} t_i$, где t_i – наработка восстанавливаемого изделия между отказами, т. е. от начала его работы (либо после постановки на работу, либо после восстановления) до момента очередного отказа.

Гамма–процентная наработка до отказа T_γ. Это наработка, в течение которой отказ не возникает с вероятностью γ, выраженной в процентах.

– наработка от начала эксплуатации до перехода изделия в предельное состояние, т. е. состояние, при котором либо невозможно, либо нецелесообразно продолжать использовать изделие по его назначению и необходимо снять его с эксплуатации и сдать в ремонт или списать. Ресурс представляет собой непрерывную случайную величину, характеризующуюся законом распределения или интегральной функцией распределения $F(t)$ и её первой производной – плотностью вероятности. *Средний ресурс* – математическое ожидание ресурса. *Назначенный ресурс* – установленная в нормативно–технической документации суммарная наработка, при достижении которой дальнейшее применение изделия по назначению следует прекратить независимо от его технического состояния.

Срок службы – календарная продолжительность от начала эксплуатации изделия до перехода его в предельное состояние. *Средний срок службы* – математическое ожидание срока службы. *Назначенный срок службы* – установленная в нормативно–технической документации календарная продолжительность эксплуатации, при достижении которой дальнейшее применение изделия по назначению следует прекратить независимо от его технического состояния.

Вероятность восстановления за заданное время $t_з$. Это вероятность того, что время восстановления работоспособности $t_В$ не превысит заданного времени, т. е. $P(t_В / t_з)$.

Среднее время восстановления $T_В$. Оно представляет собой математическое ожидание *времени восстановления* – времени, затраченного на поиск места неисправности и устранение неисправности. Время, затраченное на организационные простои, не предусмотренные инструкцией по эксплуатации, не должно входить в $T_В$.

Назначенный срок хранения. Это календарная продолжительность хранения, по истечении которой применение изделия не допускается независимо от его технического состояния.

Коэффициент готовности $K_г$ – вероятность того, что восстанавливаемое изделие окажется в работоспособном состоянии в произвольный момент времени его использования по назначению:

$$K_г = t_{р\sum} / (t_{р\sum} + t_{В\sum}) \qquad (1.8)$$

где $t_{р\sum}$ – суммарное время нахождения изделия в работоспособном состоянии; $t_{В\sum}$ – суммарное время восстановления изделия; учитывая, что $t_{р\sum} = T_0\, n$; $t_{В\sum} = T_В\, n$, где n – число отказов на интервале времени, для которого определяются значения $t_{р\sum}$ и $t_B s$, эту формулу можно записать в следующем виде:

$$К_г = T_0 / (T_0 + T_В). \qquad (1.9)$$

Данная формула находит широкое применение в инженерной практике. Степень ее приближения к истинному значению $K_г$ тем больше, чем больше интервал времени, на котором определяется $t_{р\sum}$. Поток отказов и восстановлений при этом становится установившимся и $K_г$ приобретает стационарный характер. Коэффициент готовности – комплексный показатель надежности. Как правило, он учитывает свойство аппаратурной безотказности и восстанавливаемости. Если под отказом понимать не только отказ аппаратуры, но любой отказ изделия в выполнении заданных функций (в том числе вызванный дефектом программы, снижением достоверности и т. п.), тогда $K_г$ может выполнять роль комплексного показателя надежности, учитывающего и другие свойства изделия. Поэтому при использовании $K_г$ всегда надо указывать, какие свойства изделия он учитывает.

Коэффициент оперативной готовности, $K_{ог}$ – это вероятность того, что объект в произвольный момент времени, кроме планируемых перерывов в работе, окажется работоспособным, когда требуется его применение по назначению, и с данного момента будет работать безотказно в течение заданного времени: $K_{ог} = K_г\ P(t_з)$, где $K_г$ – коэффициент готовности; $P(t_з)$ – вероятность безотказной работы на интервале заданного времени $t_з$.

Рассмотрение количественных показателей надежности позволяет сделать следующие выводы:

1. Показатели надежности сооружений сложной системы имеют характер системы показателей. Чем большее число показателей надежности системы определяется при анализе ее надежности, тем более подробным становится этот анализ. Но это не означает, что всякий раз либо при анализе надежности, либо при задании требований к надежности надо использовать весь перечень возможных показателей надежности. Перечень используемых показателей надёжности должен быть не просто возможно более полным, но и целесообразным, т. е. отвечающим задаче объективной характеристики требуемых свойств системы.
2. В системе показателей надежности целесообразно выделять главные показатели и вспомогательные. В отдельных случаях, например, определение ремонтопригодности, срока службы, долговечности и сохраняемости может оказаться неактуальным и даже ненужным. В других случаях показатели долговечности или срока службы могут стать главными показателями надежности системы. Для объектов, сложных по своей структуре, многофункциональных по своим задачам, используемых в большом числе рабочих режимов, к главным показателям надежности относятся комплексные показатели надежности.
3. Количественные значения показателей надежности следует задавать с учетом двух противоречивых требований: с одной стороны, показатель надежности должен быть не ниже некоторого уровня, который обеспечивает требуемую эффективность, с другой стороны, он не должен превышать уровня, который может быть обеспечен возможностями производства.

Искусство проектирования состоит в том, чтобы выбором расчетной схемы сооружения, учетом действительного характера и условий его работы и соблюдением мероприятий по обеспечению надежности выполнить эти два противоречивых требования.

ГЛАВА II. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ СТРОИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

2.1. Понятие вероятности события

Изучение закономерностей массовых однородных случайных событий является предметом теории вероятностей и математической статистики. Количественная характеристика события такого типа называется его *вероятностью*. Наглядно вероятность данного события может быть представлена как ожидаемый средний процент исходов с благоприятным для него результатом. Наличие вероятности какого–либо события в данных условиях подтверждается тем, что при многократном повторении испытаний в однородных условиях их результаты имеют тенденцию группироваться около некоторых величин, существенно отклоняясь от них лишь в редких случаях. Величину, характеризующую «степень возможности» события, принимают за численное значение вероятности.

Классическим определением вероятности является следующее: «При общем числе равноправных исходов опыта, равном N, вероятность некоторого события A, определяемого исходом опыта, равна отношению m/N, где m – число исходов, благоприятствующих этому событию».

Случайными событиями называются такие события, которые могут произойти или не произойти при осуществлении определенного комплекса условий, связанных с возможностью появления данных событий. Если случайная величина изменяется в процессе опыта, то возникает *случайная функция* – функция, которая в результате опыта может принять тот или другой вид, заранее не известный. Если аргументом случайной функции является время, то такая случайная функция называется *вероятностным (случайным) процессом.* Понятия случайной величины, случайного процесса и случайного события тесно связаны между собой. Так, например: действительный (натурный) размер длины элемента, изменяющийся от одного изделия к другому, будет случайной величиной, а вариации этого размера – случайным процессом; получение размера очередного изделия в заданных узких границах является случайным событием. Маловероятно, что единичное наблюдение за результатом опыта может быть воспроизведено вторично. Тем не менее, система наблюдений, полученных при повторении случайного процесса, может быть воспроизведена, ибо она обладает некоторыми характерными для данного процесса особенностями. Этот вывод имеет большое практическое значение, так как в массовом производстве важно знать не частные значения некоторых характеристик, а границы изменения искомых величин в пределах партии (совокупности) однотипных элементов или конструкций. Так, например, установление соответствия между теоретической (проектной) и действительной (фактической) надежностью конструкций и сооружений должно базироваться на изучении закономерностей распределения различных по величине и знаку случайных отклонений от «идеальных» величин, соответствующих «идеальным» технологическим процессам производства.

Определение вероятности можно проиллюстрировать примером извлечения железобетонной плиты перекрытия со склада, где хранится 36 плит, в том числе одна дефектная. Какова вероятность того, что при погрузке первая взятая наудачу плита окажется дефектной? Извлечение плиты из склада назовем *испытанием*, а каждый из возможных результатов испытания, т. е. каждое событие, которое может наступить или не наступить (появление годной или дефектной плиты) – *элементарным исходом*. Так, появление дефектной плиты – один элементарный исход; появление годной плиты – другой элементарный исход. Поскольку нас интересует вероятность появления дефектной плиты, то первый элементарный исход мы будем называть исходом, благоприятствующим наступлению события A (появлению дефектной плиты). Введем обозначения: $N = 36$ – общее количество плит на складе; $m = 1$ – количество дефектных плит; $P(A)$ – вероятность извлечения дефектной плиты (вероятность события A), т. е. отношение числа исходов, благоприятствующих этому событию, к общему числу возможных исходов испытания: $P(A) = m / N$. В нашем примере $P(A) = 1/36 = 0{,}028$, т. е. вероятность извлечения дефектной плиты из партии изделий, хранящихся на складе равно 2,8%.

2.2. Характеристики случайных событий и величин

Встречающиеся на практике процессы (например, технологические процессы производства, измерений и т. п.) могут быть разделены на два основных типа: *детерминированные* (определенные) и *случайные*. В отдельных, как правило, идеализированных, случаях по известному начальному состоянию можно точно определить результат процесса. Такой процесс принято называть детерминированным, а его исход – неслучайным событием. Если же результат процесса однозначно определить нельзя, то такой процесс называется случайным явлением, а его исход – случайным событием. Возникновение случайных явлений обусловливается одновременным или последовательным суммарным воздействием большого количества взаимосвязанных причин на течение того или иного процесса. Практически не представляется возможным проанализировать степень влияния этих причин, зафиксировать начальное состояние явления и, следовательно, с достаточной достоверностью однозначно определить его конечное состояние, которое иногда может изменяться весьма существенно. Случайное явление при многократном воспроизведении одного и того же опыта протекает каждый раз по иному.

В работах по исследованию и обеспечению надежности большое место занимают статистические методы исследований и вероятностные оценки надежности. Это вызвано тем, что события и величины, используемые в теории надежности, носят, как правило, случайный характер. Отказы конструкций, например, вызываются большим числом разнообразных причин. Проследить связь между каждой из возможных причин отказа и возникновением отказа не представляется возможным. Поэтому отказы конструкций, как правило, принадлежат к категории случайных событий. Время до возникновения отказа может принимать различные значения в пределах некоторой области возможных значений. Оно также принадлежит к категории случайных величин. Сказанное выше не означает, что при исследованиях вопросов надежности всегда и во всех случаях должны применяться только статистические методы или только вероятностные характеристики. Основаниями для отнесения поведения конструкций зданий и сооружений к категории случайных могут служить следующие положения и факты:

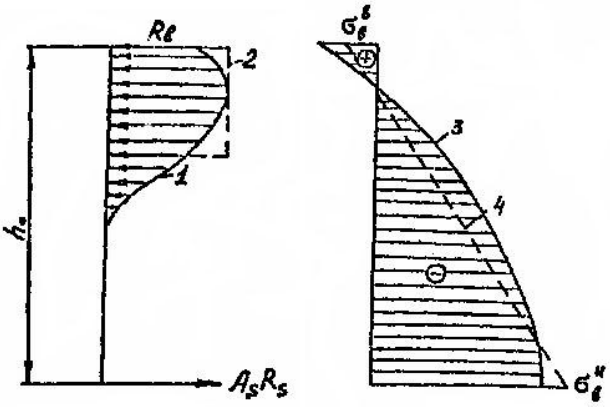
1. Всякое случайное изменение первоначального или промежуточного состояния конструкции приводит к случайным изменениям конечного состояния.
2. При анализе процессов или в расчетах конструкций и систем могут быть использованы идеализированные схемы и модели.
3. Сложность или неизученность закономерностей, сопутствующих физическим процессам, в которых рассматривается данное явление. Иногда практически не представляется возможным вычислить конечное состояние явления, хотя теоретические предпосылки для этого имеются.
4. Неоднородность свойств материалов, а также нестабильность технологических процессов при изготовлении и монтаже; изменчивость нагрузок и воздействий, величины и направления которых зависят от физических процессов, вызываемых условиями внешней среды.

Проиллюстрируем вышесказанное следующими примерами.

Пример 2.1. Часто на практике имеют место случаи, когда начальное состояние настолько сложно, что его невозможно зафиксировать с точностью, достаточной для однозначного определения конечного состояния. Допустим, что мы хотим с высокой степенью точности предсказать прочность железобетонной конструкции, но нам известно, что прочность её в готовом виде зависит от ряда физико–механических и геометрических факторов: однородности и прочности бетона и арматуры, вида армирования и степени сцепления арматуры с бетоном, правильности расположения арматуры, точности габаритных размеров. Каждый из этих факторов в свою очередь зависит от многих случайных причин: качества исходных материалов; В/Ц; степени уплотнения бетонной смеси, режима и длительности твердения; отклонений в размерах поперечных сечений, влияющих на величину момента инерции и собственный вес изделий. Точность размеров железобетонных изделий зависит от точности и деформативности формующего оборудования, деформаций твердения и т. д.

Таким образом, с одной стороны, для определения прочности конструкции в данный момент необходимо одновременно оценить влияние всех взаимодействующих факторов, что практически не представляется возможным. С другой стороны, интересующая нас характеристика конструкции – прочность может быть непосредственно измерена с помощью современных неразрушающих методов контроля качества бетона. Но точно предсказать эту характеристику, основываясь на начальной стадии твердения бетона, невозможно. Она может быть установлена лишь путем измерений прочности готового изделия с точностью, соответствующей избранному методу измерений. Заметим при этом, что все измеренные изделия, взятые из партии, будут иметь разные прочностные характеристики.

Пример 2.2. Смещение точки приложения расчетных усилий в элементах, работающих на сжатие с продольным изгибом, вызванное неточностью монтажных работ. Накопление этих погрешностей по высоте здания создает дополнительный (не предусмотренный расчетом) эксцентриситет в несущих элементах нижних этажей, вследствие которого усилия в них оказываются отличными от расчетных.



а) б)

Рис. 2.1. Эпюры, напряжений в бетоне: а – при разрушении; б – при обжатии; 1 – криволинейная эпюра; 2 – прямоугольная эпюра; 3 – с учетом упругопластических деформаций; 4 – при упругом расчете; (+ растяжение; – сжатие)

Пример 2.3. 1. Для упрощения расчета прочности железобетонных балок в её сжатой зоне принимается прямоугольная форма эпюры нормальных напряжений, которая отличается от фактической (рис.2.1,а). Криволинейное очертание фактической эпюры случайным образом зависит от деформативных и прочностных свойств бетона и арматуры.

2. Часто при выведении общих законов, применимых для практического пользования, часто приходится рассматривать только основную, интересующую нас характеристику (идеальная схема), отбрасывая другие, сопутствующие ей факторы, безусловно влияющие (иногда незначительно) на конечное значение этой характеристики. Закон Гука, применяемый в расчетах предварительно напряженных железобетонных конструкциях, относится только к идеально упругим телам, в то время как бетон представляет собой упруго–пластический материал. В результате учета упругопластических деформаций напряжения сжатия в нижнем поясе снижаются, растягивающие напряжения в верхнем поясе от усилия натяжения арматуры увеличиваются (рис.2.1,б). Эти изменения напряжений будут случайными, так как они зависят от свойств бетона, усилия натяжения арматуры и геометрических характеристик сечения.

3. Расчет заклепочных или болтовых соединений производится на срез и на смятие. При этом мы пренебрегаем силой трения, возникающей между соединяемыми элементами. Таким образом, используется идеальная расчетная схема соединения без учета случайного влияния сил трения.

4. Деформации усадки и ползучести колеблются в широких пределах в зависимости от изменчивости большого числа случайных факторов (состав бетона, условия его твердения, действующие напряжения, климатические и т.д.). Поэтому ни одна из существующих в настоящее время теорий не может однозначно определить процессы, связанные с развитием деформаций усадки и ползучести и их учет в расчетах конструкций производится на феноменологической основе.

Пример 2.4. Для определения величины действительных отклонений линейных размеров железобетонной конструкции от соответствующих им номинальных (основных проектных) размеров необходимо знать: 1) точность первоначальных размеров формы, которая зависит от точности изготовления и сборки ее элементов, в свою очередь зависящих от совершенства и стабильности технологических процессов на заводе – изготовителе форм; точности контрольно–измерительного инструмента и приспособлений, величин сварочных деформаций, квалификации рабочих и т. п.; точности закрытия формы перед заполнением бетонной смесью, зависящей от конструкции замковых соединений, величины усилий, прикладываемых при ее закрытии; точности методов и средств измерений, применяемых при контроле размеров формы, износа и деформативности ограждающих элементов замковых и шарнирных соединений формы в процессе эксплуатации; 2) упругие и остаточные деформации элементов формы под давлением бетонной смеси, зависящие от материала и конструкции формы, размеров и геометрии сечения ее бортов и условий закрепления граней, податливости шарнирных и замковых соединений, влияния вибрации на прогибы бортов формы, деформативности поддона; 3) деформации, сопутствующие твердению изделия, зависящие от размеров и конфигурации изделия, состава и однородности бетонной смеси, вида и степени армирования, способа распалубки, вида тепловой обработки.

Пример 2.5. Поступающие для приготовления бетона песок, щебень и цемент обладают различной плотностью. Качество изготовления и монтажа железобетонных конструкций существенно зависят от технологического и технического уровня производства. Например:

1) прочность бетона определяется такими случайными факторами, как активность цемента, в/ц, прочность и крупность заполнителя и их загрязненность, способ уплотнения бетонной смеси, режим пропаривания и т.д. Прочность строительных сталей и арматуры обладает статистической изменчивостью, обусловленной разбросом механических характеристик.

2) расчетный эксцентриситет приложения нагрузки для железобетонных пролетных строений под железнодорожную нагрузку определяется точностью монтажа балок, укладки пути, плотностью и упругими свойствами балласта под шпалой и может изменяться случайным образом в 1,5 – 2 раза.

3) при монтаже колонн многоэтажного здания наблюдается их отклонения от вертикали и эксцентриситеты в стыках. Чем больше высота здания, тем длиннее расчетная цепь погрешностей и более значительны конечные отклонения от проектного положения. Эти отклонения зависят от культуры сборки и монтажа и носят случайный характер.

Таким образом, для определения конечной величины размерных отклонений необходим точный анализ всех взаимодействующих факторов, каждый из которых также зависит от ряда причин. Но такой анализ ввиду большой сложности практически неосуществим. Очевидно, что влияние многочисленных факторов на конечное состояние явления является столь разнообразным, что при многократном повторении однотипных опытов можно получать каждый раз различные результаты. Всякая переменная величина, изменяющаяся при многократном повторении одного и того же опыта, называется *случайной*, или *стохастической*, величиной. Изменение случайных величин во времени называется *случайным процессом*. Событие, которое при многократном воспроизведении одного и того же опыта протекает каждый раз по иному, называется *случайным событием*.

2.1. Случайные события. *Случайное событие* – событие, которое может появиться или не появиться в результате данного опыта. *Вероятность случайного события* – количественная характеристика случайного события – теоретическая частота событий, около которой имеет тенденцию стабилизироваться действительная частота события при повторении опыта в данных условиях. *Частота случайного события* – статистическая вероятность события – отношение числа появления данного события к числу всех произведенных опытов. Характерным признаком случайного события является то, что оно принадлежит к категории массовых явлений (существует возможность неоднократного повторения опыта в заданных условиях). Примерами случайных событий, которые используются в прикладной теории надежности, являются:

а) событие, заключающееся в том, что на интервале времени от 0 до t изделие непрерывно находится в работоспособном состоянии. Вероятность такого события обозначается $P(t)$;

б) событие, заключающееся в том, что на интервале времени от 0 до t изделие может перейти в отказовое состояние. Вероятность такого события обозначается $Q(t)$;

в) событие, заключающееся в том, что работоспособное к моменту времени t изделие перейдет за время Δt из состояния работоспособного (состояние 1) в состояние отказа (состояние 2). Вероятность такого события

$$P(t + \Delta t) = P(t)\, p_{1\to 2}\, (\Delta t). \qquad (2.1)$$

Событие называется *достоверным*, если оно обязательно должно произойти; *невозможное* событие – заведомо никогда не наступит. Два события называют *несовместимыми*, если наступление одного из них исключает возможность наступления другого, т.е. они не могут появиться совместно. Вероятность суммы несовместных событий, т. е. вероятность того, что из всех возможных событий появится хотя бы одно из них, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B + ...) = P(A) + P(B) + ... \qquad (2.2)$$

Вероятность суммы двух совместных событий: $P(A + B) = P(A) + P(B) – P(A \cdot B)$,

где $P(A)$, $P(B)$ – соответственно вероятность событий A и B.

Условной вероятностью события А относительно события В называется отношение совместного появления событий A и B к вероятности события B:

$$P(A/B) = P(A\cdot B)/P(B). \qquad (2.3)$$

В общем случае вероятность произведения двух событий – это вероятность того, что события появятся совместно: $P(A\cdot B) = P(B) \cdot P(A/B)$.

Вероятность произведения двух независимых событий: $P(A\cdot B) = P(A)\cdot P(B)$.

Группа событий $A, ..., B$ называется *полной,* если в результате опыта обязательно появится одно из событий. Например, событие A (изделие находится в работоспособном состоянии) и событие B (изделие находится в неработоспособном состоянии) составляют полную группу событий. Для полной группы событий сумма вероятностей всех возможных событий равна единице:

$$P(A) + P(B) = 1, \quad (2.4)$$

т. е. для изделия, которое может находиться в двух состояниях (*А* или *В),* вероятность появления хотя бы одного из состояний — событие достоверное.

2.2. Потоки случайных событий. Случайные события, следующие одно за другим в некоторой последовательности, образуют *поток случайных событий.* Например, отказы и восстановления в восстанавливаемом изделии образуют поток отказов и поток восстановлений.

Ординарный поток событий – поток, при котором вероятность попадания двух событий на один и тот же малый участок времени Δt пренебрежимо мала. *Поток без последствия* – поток, при котором для двух неперекрывающихся временных участков число событий, попадающих на один из них, не зависит от того, сколько событий попало на другой участок. Отсутствие последствий в потоке означает также, что будущее развитие процесса появления событий не зависит от того, как этот процесс протекал в прошлом.

Стационарный поток – поток, однородный по времени, т. е. если плотность потока событий – среднее число событий в единицу времени – остается постоянной. Поток, обладающий свойством ординарности, стационарности и отсутствием последействия, называется *простейшим потоком* или *стационарным пуассоновским потоком.* Для простейшего потока вероятность числа событий m на интервале τ равна:

$$P_m(\tau) = (a^m/m!)\, e^{-a}, \quad (2.5)$$

где a – среднее число событий, приходящееся на интервал τ (положение интервала τ на оси времени t не имеет значения):

$$a = \lambda\tau. \quad (2.6)$$

Нестационарный пуассоновский поток – поток, обладающий свойством ординарности и отсутствием последействия, но не обладающий свойством стационарности. Для него:

$$P_m(t_0\, \tau) = (a^m/m!)\, e^{-a}, \quad (2.7)$$

где $a = \int_{t_0}^{t_0+\tau} w(t)dt$; $w(t)$ – параметр потока отказов.

Простейший поток находит широкое распространение в теории и практике надежности по следующим причинам: имеется предельная теорема, согласно которой сумма большого числа независимых потоков с любыми законами распределения приближается к простейшему потоку с ростом числа слагаемых потоков; практика исследования потоков отказов, потоков восстановлений, а также других потоков, имеющих место при исследованиях надежности изделий, подтверждает обоснованность предположений о широкой распространенности простейших потоков. Простейшему потоку отказов свойственно следующее:

– вероятность того, что на интервале времени т произойдет m отказов, определяется последним уравнением (закон Пуассона);

– время между двумя соседними отказами подчиняется показательному (экспоненциальному) распределению, т. е. вероятность того, что на участке времени τ, следующем за одним из отказов, не появится ни одного отказа, равна: $P(\tau) = e^{-\lambda\tau}$.

плотность вероятности (или интервал между двумя соседними отказами) равна:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda}, \quad (2.8)$$

среднее число отказов на интервале времени τ равно $\lambda\tau$. Разрежение простейшего потока путем отбрасывания некоторых событий из потока приводит к тому, что простейший поток преобразуется в *поток Эрланга.* Если разрежение осуществляется сохранением каждого k–го события, получается поток Эрланга k–го порядка. Поток Эрланга первого порядка – поток простейший. Плотность вероятности случайной величины для потока Эрланга k–го порядка

$$f_k(t)=\frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda t}, \qquad (2.9)$$

где λ – интенсивность исходного простейшего потока. Интенсивность потока Эрланга k–го порядка равна $\lambda_л = \lambda/k$. Математическое ожидание времени между двумя событиями:

$$m_k(t) = 1/\lambda_k, \qquad (2.10)$$

Дисперсия времени между событиями: $D_k(t) = 1/(k\ \lambda_k^2)$. Потоки Эрланга используются в практике надежности, так как имеют место средства разрежения потоков событий. Например, потоки отказов разрежаются в результате применения контроля по некоторым частям сооружения, применения временного резервирования и других средств повышения его надежности. Последние два уравнения позволяют аппроксимировать неизвестные потоки событий потоком Эрланга, если известны среднее значение и дисперсия времени между событиями.

Пример 2.6. Определить наиболее подходящий вид потока Эрланга для потока событий со средним значением времени между событиями $M(\lambda)$, равным 2 ч, и дисперсией $D(\lambda)$ =0,8 ч. Сделаем предположение, что имеет место поток Эрланга *k–го* порядка, и определим значение k.На основании последних двух формул запишем, что $\lambda_k = 1/M(\lambda) = 0{,}5$. Тогда $k = 1/(D_k\ \lambda_k^2) = 1/(0{,}8\ \lambda \cdot 0{,}5^2) = 5$. Следовательно, неизвестный поток событий – поток Эрланга пятого порядка.

2.3. Случайные величины и их характеристики. *Случайная величина* – величина, которая в результате опыта может принимать то или другое значение в зависимости от степени воздействия на нее различных случайных факторов. Она может быть либо *дискретной* (число отказов за время τ, число отказавших изделий при испытаниях заданного объема и т.д.), либо *непрерывной* (прочность бетона заданного класса, время работы изделия до отказа, время восстановления работоспособности). Численное значение случайной величины заранее предсказать невозможно. Тем не менее, практически важно знать, какое из возможных численных значений и с какой вероятностью может принять случайная величина в результате случайного события.

Пример 2.7. В партии изготовленных заводом железобетонных панелей имеется пять дефектных изделий. Допустим, что часть панелей из этой партии (называемая случайной выборкой) отобрана для отправки на монтажную площадку. Очевидно, что количество дефектных изделий, которые, возможно, попали в отобранную часть партии, будет случайной величиной. Эта величина может быть равна 0, 1, 2, 3, 4 или 5. В нашем примере случайная величина имеет только целые, разделенные промежутками значения, – количество дефектных плит в выборке.

Такие случайные величины, принимающие только отделенные друг от друга значения, называются прерывными, или *дискретными случайными величинами*. Чаще всего дискретные величины принимают только целые значения, тогда они называются целочисленными.

Пример 2.8. При силовой калибровке партии арматурных стержней оказалось, что действительные значения предела текучести трех образцов соответственно равны: 239,7; 240,8; 241,7 МПа. При этом случайное событие могло бы быть описано, например, так: предел текучести материала выбранного стержня σ_T = 240,8 МПа*;* здесь σ_T – случайная величина. Допустим, что значения 239,7 и 241,7 *кгс/см*^{2} являются предельными, образующими некоторый промежуток (интервал), в который укладываются величины предела текучести всех стержней, входящих в испытываемую партию. Численные значения предела текучести арматурных стержней могут принимать любые дробные значения, которые находятся в промежутках между предельными величинами. Такие случайные величины называются *непрерывными случайными величинами*.

Кроме дискретных и непрерывных случайных величин, существуют еще величины смешанного типа, которые также имеют практическое значение. Такие величины отличаются от непрерывных случайных величин тем, что из возможного для них непрерывного ряда значений некоторые являются выделенными. Например, время работы конструкции, рассматриваемое в качестве случайной величины, может принимать непрерывный ряд значений от нуля до конца срока службы. При этом начальный и конечный моменты эксплуатации соответствуют особым значениям, так как в момент ввода в эксплуатацию существует некоторая вероятность аварии, а в конечный момент (по истечении срока службы) конструкция за ненадобностью разбирается, хотя она могла бы еще эксплуатироваться.

Для характеристики случайной величины нужно знать, как часто могут повторяться те или иные размерные отклонения, т. е. с какой вероятностью случайная величина принимает эти значения. Число возможных значений случайной величины может быть конечным, счетным или несчетным; они характеризуются распределением вероятностей. Для дискретных случайных величин *распределением вероятностей* называется совокупность вероятностей случайных событий, заключающихся в том, что случайная величина принимает одно из своих возможных значений.

Пример 2.9. Если из большой партии панелей отобрать три изделия, то возможные значения числа дефектных панелей в выборке будут равны 0, 1, 2 или 3. Тогда при предположении, что имеет место биномиальное распределение с 10% дефектных изделий в партии [см. формулу (38)] при $P = 0{,}1$, можно показать, что:

$$\left.\begin{aligned} P_1(n=0) &= 0{,}729 \\ P_2(n=1) &= 0{,}243 \\ P_3(n=2) &= 0{,}027 \\ P_4(n=3) &= 0{,}001 \end{aligned}\right\}, \qquad (2.11)$$

где: P – вероятность попадания дефектных изделий в данную выборку; n – число дефектных плит в выборке.

Рассмотренные четыре вероятности образуют распределение вероятностей случайной величины – числа дефектных плит в выборке. Анализируя выражения (2.11) и учитывая статистический характер вероятности, можно предполагать, что при большом количестве выборок, по три плиты каждая (согласно закону больших чисел), примерно 73% выборок не будут иметь ни одного дефектного изделия, 24% – одно, 3% – два и 0,1% – три, т. е. в последнем случае в одной из тысячи выборок все три изделия окажутся дефектными. Обозначив случайную величину через X, *а* ее возможные значения через X_k ($k = 1, 2, ..., n$), имеем в общем случае формулу распределения вероятностей:

$$p_k = P(X = x_k). \qquad (2.12)$$

Здесь правая сторона равенства означает вероятность того, что случайная величина X примет возможное значение x_k .Величины p_k обычно сводят в таблицу распределения, причем возможные значения x_k берутся в порядке возрастания. Запись распределения случайной величины X приведена в табл.2.1. Заметим, что сумма значений p_k (как сумма вероятностей полной группы несовместимых событий) должна быть равна единице, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1. \qquad (2.13)$$

Таблица 2.1

X	0	1	2	3
P	0,79	0,243	0,027	0,001

Представим это распределение графически (рис.2.1). Для дискретных величин по оси абсцисс откладывают возможные значения случайной величины, а по оси ординат – соответствующие этим значениям вероятности. Таким образом, распределение вероятностей для дискретной случайной величины изображается совокупностью линейных отрезков, сумма длин которых равна единице (ордината, соответствующая значению $x = 3$, на рис.2.1 не показана, так как ее значение слишком мало, чтобы быть изображенным в таком масштабе). Иногда вершины этих отрезков условно соединяются между собой ломаной линией (пунктир на рис.2.2), которую часто называют многоугольником распределения. Для непрерывных случайных величин понятие вероятности некоторого, точно определенного значения не имеет практического смысла, ибо такая вероятность равна нулю для всех значений. Здесь рассматривается оценка вероятности попадания случайной величины в некоторый промежуток. Для малых промежутков такая вероятность будет пропорциональна их величине, т. е.:

$$P(x \le X \le x + \Delta x) = f(x)\ \Delta x. \qquad (2.14)$$

Здесь $P(x \le X \le x + \Delta x)$ – вероятность попадания случайной величины X в промежуток $(x + \Delta x)$, где Δx – величина промежутка (например, вероятность того, что предел текучести данного арматурного стержня лежит в пределах между 239,7 и 240,8 МПа). Величина $f(x)$ называется плотностью вероятности, или дифференциальной функцией распределения.

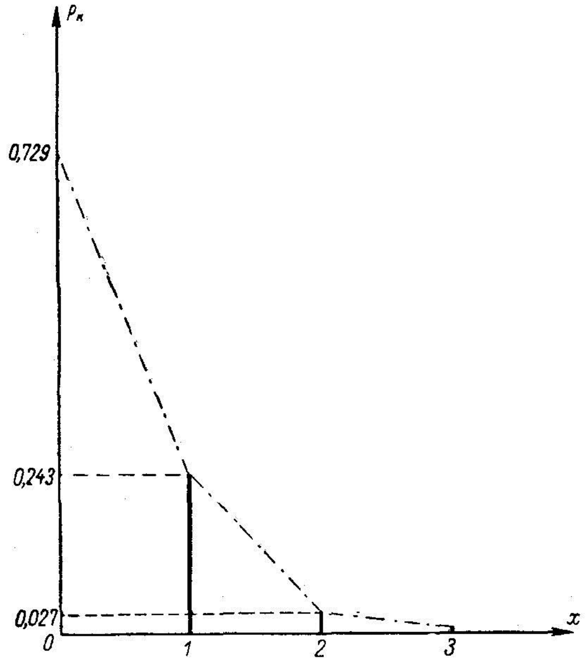
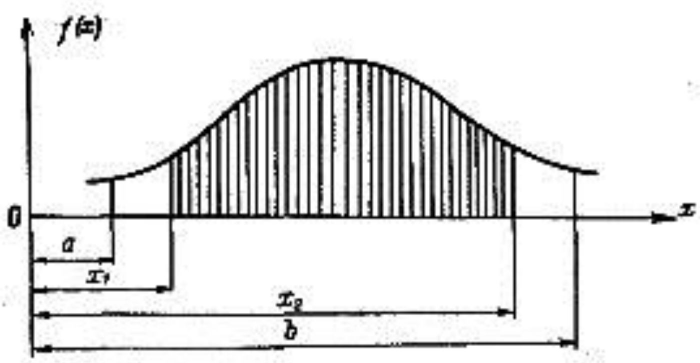
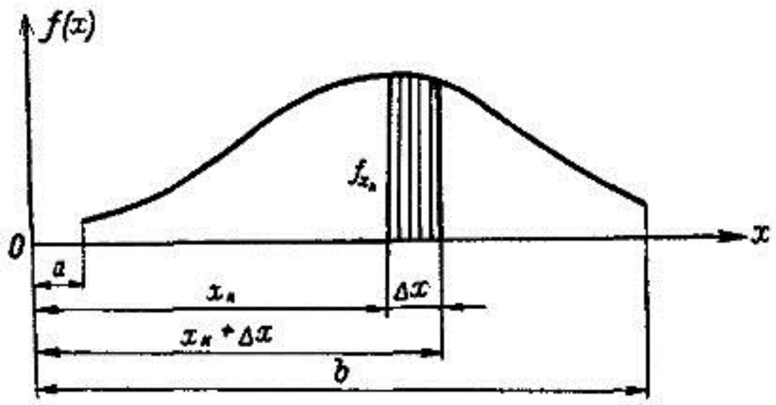


Рис.2.2. График распределения дискретной случайной величины

Определение $f(x)$ по формуле (2.14) не совсем точно, так как на самом деле это средняя плотность вероятности. Однако, если промежуток Δx достаточно мал, то $f(x)$ мало отличается от истинной плотности распределения в данной точке, получаемой как предел $f(x)$ при $\Delta x \to 0$. Распределение непрерывных величин также удобно представлять графически (рис.2.3). По оси ординат откладывают плотность вероятности, и такой график часто называют кривой распределения. В отличие от распределения дискретных величин вероятность события равна не ординате $f(x_k)$, а произведению $f(x_k)\Delta x$, т. е. заштрихованной на рис.2.3,а площади, которая при достаточно малых значениях Δx может быть принята за прямоугольник. В данном случае (рис.2.3,а) плотность вероятности отлична от нуля лишь в промежутке от a до b, так как случайная величина может принимать значения только из этого промежутка; иногда значения случайной величины не ограничены.



а)



б)

Рис.2.3. График распределения непрерывной случайной величины (а) и графическое изображение плотности вероятности (б)

Тогда график плотности вероятности (кривая распределения) лежит над всей числовой осью. Плотность вероятности является размерной величиной, обратной размерности данной случайной величины, поскольку произведение $f(x)\Delta x$ – безразмерно [см. выражение (2.16)]. Плотность вероятности изменяется при изменении единиц измерения случайной величины.

Пример 2.10. Вероятность попадания предела текучести стального арматурного стержня в интервал от 239,7 до 240,8 МПа равна 0,006. Промежуток Δx = 240,8 – 239,7 = 1,12 МПа. Тогда для плотности вероятности в интервале Δ_x = 1,12 МПа из выражения (2.14) получим: $f(x) = \dfrac{P(x \le X \le x + \Delta x)}{\Delta x}$ = f(239,7) = 0,006/1,12 ≈ 0,005 МПа. Пусть теперь предел текучести измеряется в единицах «СИ». Тогда интервал изменения предела текучести будет:

$$\Delta x = 11{,}2 \text{ x } 98 \text{ x } 10^3 = 11{,}0 \text{ x } 10^5 \text{ } н/м^2.$$

Следовательно, $f(x) = \dfrac{P(x \le X \le x + \Delta x)}{\Delta x}$ = f(2397,2) = 0,006/11,0 x 10^5 ≈ 5•10^{-9} $м^2/н$.

Разумеются, оба значения плотности дадут одинаковую вероятность попадания значения случайной величины (в нашем примере – предела текучести стального арматурного стержня) в данный интервал. Известно, что вероятность попадания в большой интервал (где $f(x)$ изменяется заметно) не может быть вычислена по формуле (2.14). В этом случае нужно брать сумму таких выражений, точнее предел суммы, который даст определенный интервал. Тогда:

$$P(x_1 \le X \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx. \qquad (2.15)$$

Здесь левая часть формулы (2.15) – вероятность попадания случайной величины X в интервал от x_1 до x_2. Вероятность, определенная по формуле (2.15), соответствует площади, ограниченной кривой распределения, осью абсцисс и ординатами, соответствующими значениям абсцисс x_1 и x_2 (рис.2.3). В этом случае (большой интервал) $f(x)$ нельзя считать постоянной величиной, как это имелось в виду при определении вероятности по формуле (2.15). Если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу от a до b, то вероятность того, что x принимает некоторое значение из этого интервала, равна единице. Поэтому $\int_a^b f(x)dx = 1$ (20) . Если случайная величина может принимать любые значения, то вместо формулы (20) имеем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1. \qquad (2.16)$$

Пример 2.11. Определим вероятности разрыва троса башенного крана при определенных условиях его эксплуатации от первого подъема до момента аварии (за вычетом простоев) в двух случаях: между 500 и 502 часами эксплуатации; между 500 и 1000 часами эксплуатации. Здесь случайной величиной является время безотказной эксплуатации рабочего троса башенного крана *(x* – в часах). Плотность распределения при постоянных условиях эксплуатации троса, взятого из некоторой партии, может быть представлена в виде:

$f(x) = 0$ (при $x < 0$);

$f(x) = 0{,}001e^{-0{,}001x}$ (при $x > 0$)

(Примем, что время безотказной работы подчиняется экспоненциальному закону (см. далее). Из формулы (2.14) следует, что вероятность разрыва троса между пятисотым и пятьсот вторым часами эксплуатации при $x = 500$ и $\Delta x = 2$ будет:

$$P\,(500 < X < 502) = f\,(500)\cdot 2 = 0{,}001 - e^{-0{,}5}\cdot 2 \approx 0{,}00131, \text{ или} \sim 0{,}13\%.$$

Мы воспользовались здесь формулой (2.14), так как в данном интервале величина $f(x)$ изменяется мало. В случае, когда интервал составляет не 2, а 500 часов, воспользуемся формулой (2.15), справедливой для больших интервалов, в пределах которых плотность вероятности значительно меняется:

$$P\,(500 < X < 1000) = \int_{500}^{1000} 0{,}001e^{-0{,}001x}\,dx = -\,\mathrm{e}^{-0{,}001ч}\Big|_{500}^{1000} = \mathrm{e}^{-0{,}5} - e^{-1} = 0{,}6065 - 0{,}3679 = 0{,}2386,$$

или ~ 23,9%.

Контроль физико–механических и геометрических характеристик качества элементов и узлов строительных конструкций производится с некоторой ограниченной точностью измерений. Таким образом, в известной степени стираются различия в оценке дискретных непрерывных величин. Различные на первый взгляд графики, изображающие распределение дискретных (рис.2.2) и непрерывных (рис.2.4,а) величин, также можно сблизить, если в первом случае изобразить вероятность не ординатой, а площадью, а во втором – учесть дискретность измерений. Для дискретной величины, изображенной на рис.2.2, вместо ординаты p_k будем откладывать $\dfrac{p_k}{x_{k+1} - x_k}$ (т. е. распределим вероятность по всему интервалу между двумя точками) или $\dfrac{p_k}{1/2(x_{k+1} - x_{k-1})}$ (по двум половинам смежных интервалов). Тогда вместо рис.2.2 получим рис.2.4,а,б. Здесь вероятность данного значения случайной величины выражается (в общем случае) не высотой (рис.2.2), а площадью прямоугольника от x_k до x_{k+1} (рис.2.4,а) или от ½(x_{k-1} + x_k) до ½(x_k + x_{k+1}) (рис.2.4,б). В построениях на рис.2.4,а,б все интервалы равны единице, поэтому высоты прямоугольников совпадают с ординатами.

Теперь заменим плавную кривую, характеризующую вероятность распределения непрерывной случайной величины (рис.2.4,а,б) на ступенчатую (рис.2.4,в). Такое преобразование правомерно, если учесть, что практически точное значение величины x установить невозможно. Здесь высоты прямоугольников должны быть выбраны так, чтобы их площадь равнялась соответствующей площади под исходной кривой (пунктир на рис.2.4,в). Если соответствующую вероятность отнести к левому концу интервала, эта ордината равна:

$$f(x_k) = \int_{x_k}^{x_k + \Delta x_k} f(x)dx, \tag{2.17}$$

если к середине интервала, то:

$$f(x_k) = \frac{1}{\frac{1}{2}(x_{k+1} - x_{k-1})} \times \int_{\frac{1}{2}(x_{k-1} + x_k)}^{\frac{1}{2}(x_k + x_{+1k})} f(x)dx. \tag{2.18}$$

Ступенчатые (столбчатые) графики, изображенные на рис.2.4 называются гистограммами; они аналогичны. В обоих случаях вероятность попадания случайной величины в некоторый интервал определяется частью площади гистограммы, лежащей над этим интервалом. Так, например, вероятность попадания некоторой случайной величины в интервал *($x_л$, $x_л + \Delta x$)* равна площади заштрихованного прямоугольника (рис .2.4, в). Если интервал захватывает несколько прямоугольников, то вероятность будет равна сумме их площадей. Таким образом, различие между дискретной и непрерывной случайной величиной, в конечном счете, сводится к тому, что первая может принимать не все значения в рассматриваемом интервале, а вторая – все.

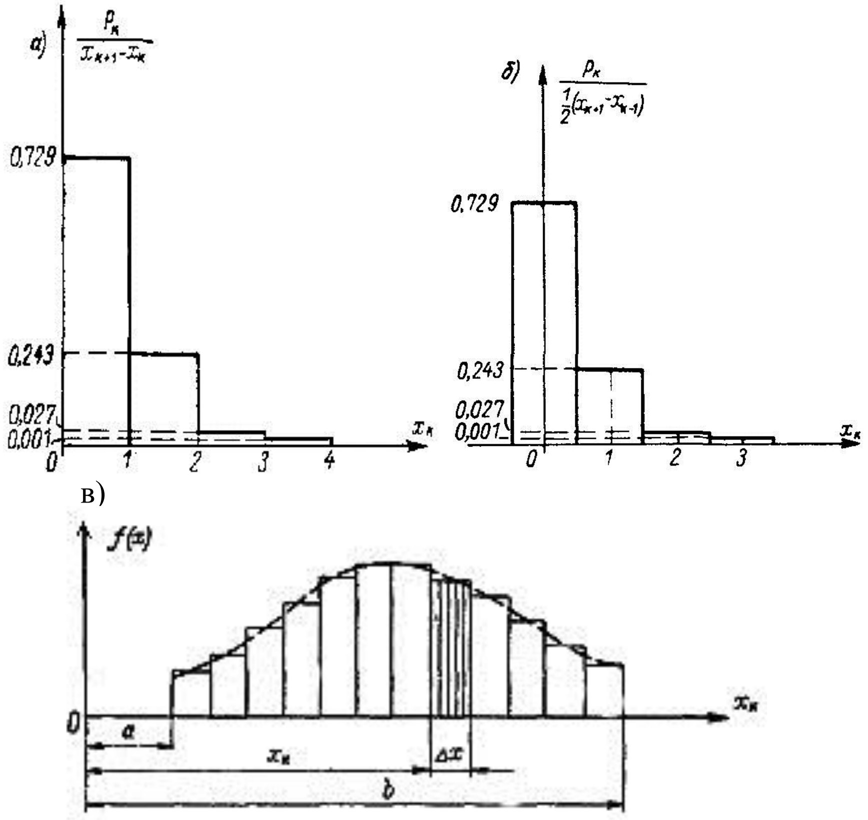


Рис.2.4. Ступенчатые графики распределения дискретной (а – по всему интервалу, б – по двум половинам смежных интервалов) и непрерывной величин (в).

Для решения практических задач это различие не очень существенно. Заметим (рис.2.4), что ординаты в гистограммах – величины размерные, изменяющиеся при изменении единицы измерения случайной величины. Очевидно, что так как вероятность (в нашем случае площадь или часть площади гистограммы) величина безразмерная, то размерность ординаты должна быть обратна размерности абсциссы.

Совокупность всех возможных значений случайной величины, которые могут произойти при многократном повторении опытов с соблюдением данного комплекса условий, называют *генеральной совокупностью.* Множество значений случайной величины, полученное в последовательности экспериментов, называют *случайной выборкой.* Каждый элемент выборки называется *реализацией* случайной величины. Случайные величины принято обозначать заглавными буквами с тильдой над ними $(\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{Z})$, а их возможные значения – реализации – соответствующими малыми буквами с индексами (x_i,y_j,z_k). Примерами случайных параметров, рассматриваемых в строительном проектировании, являются нагрузки, физико–механические характеристики материалов, геометрические размеры конструкций и их элементов. Случайные величины подчиняются вполне строгим закономерностям, которые проявляются только для больших выборок. Случайная величина будет полностью описана с вероятностной точки зрения, если задан ее закон распределения – соотношение между значениями случайной величины и их вероятностями. В этом смысле каждая случайная величина подчинена определенному закону распределения, форма задания которого может быть различной. Простейшей формой задания такого закона для дискретных случайных величин является таблица, в которой перечислены в порядке возрастания возможные значения x_i случайной величины X и соответствующие им вероятности их появления p_i:

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_2	p_3	…	p_n

Такая таблица называется *статистическим рядом распределения* случайной величины *x*. *Функции распределения* случайных величин являются универсальной количественной характеристикой, существующей как для дискретных, так и для непрерывных случайных величин. Эту характеристику (или вероятность того, что случайная величина *x* может принимать значения меньше *x*) иногда называют *интегральной функцией распределения* (ИФР), или *интегральным законом распределения(функцией распределения)*, в отличие от *плотность вероятности случайной величины x,* (или, сокращенно плотности распределения случайной величины *x*), называемой в этом случае *дифференциальной функцией распределения* (ДФР). *Законом распределения* случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями. Обычно под функцией распределения понимается вероятность того, что случайная величина *X* не превзойдет выбранного значения *x:*

$$F(x) = P(X < x). \qquad (2.19)$$

Таким образом, функция распределения представляет собой *«накопленную» вероятность*, т. е. сумму вероятностей всех значений, меньше выбранного. Она полностью характеризует вероятность распределения случайной величины, будучи одной из форм закона распределения. Для дискретных величин функция распределения представляет собой сумму вероятностей, соответствующих всем x_k, меньшим *x,* т. е.:

$$F(x) = \sum_{x_k \prec x} p_k. \qquad (2.20)$$

Для непрерывных величин эта сумма превращается в интеграл

$$F(x)= \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \qquad (2.21)$$

Функция распределения $F(x)$ – неубывающая функция, т. е. $F(x_2) > F(x_1)$, если $x_2 > x_1$. При этом $F(-\infty) = 0$, а $F(+\infty) = 1$. Функция распределения дискретной величины может быть представлена ступенчатым графиком (рис.2.5), так как ее значения изменяются только в том случае, если в сумме (2.20) появится новое слагаемое (т. е. при прохождении какого–то из значений x_k). Здесь высота каждой «ступеньки» $(p_1, p_2,\dots p_n)$ равна вероятности соответствующего значения. В случае, если $x > x_n$, имеем $F(x) = 1$, что ясно как из выражения (2.13), так и из определения. По мере увеличения числа возможных значений случайной величины и уменьшения интервалов между ними увеличивается количество «ступеней» при одновременном уменьшении их величины. Тогда дискретная величина приближается к непрерывной, а ступенчатый график функции распределения – к плавной кривой. Для непрерывных величин график функции распределения представляет собой монотонно возрастающую функцию (рис.2.6). При возрастании *x* здесь $F(x)$ также стремится к единице (рис.2.6,а). Если интервал изменения случайной величины ограничен промежутком от *a* до *b*, то график функции примет вид, представленный на рис.2.6,*б.* На этом графике за точкой *b* идет горизонтальная прямая, так как при $x > b$ всегда $F(x) = 1$. Все возможные значения случайной величины меньше *b,* т. е. достоверно, что $X \leq b$. При решении практических задач встречаются случайные величины, которые, вообще говоря, характеризуются плотностью вероятности, но отдельные значения принимают с вероятностью, отличной от нуля. Случайные величины подобного типа, возможные значения которых непрерывно заполняют некоторый промежуток, но функция распределения которых имеет разрывы, называются *случайными величинами смешанного типа* (рис.2.7). Во многих практических задачах надежности вместо вероятности того, что случайная величина *X* принимает некоторое определенное значение x_j, необходимо определить вероятность того, что случайная величина X не больше x_i. Эта вероятность задается интегральной функцией распределения $F(x_i)$. Например, пусть в результате наблюдений над случайной величиной x получена выборка из N реализаций.

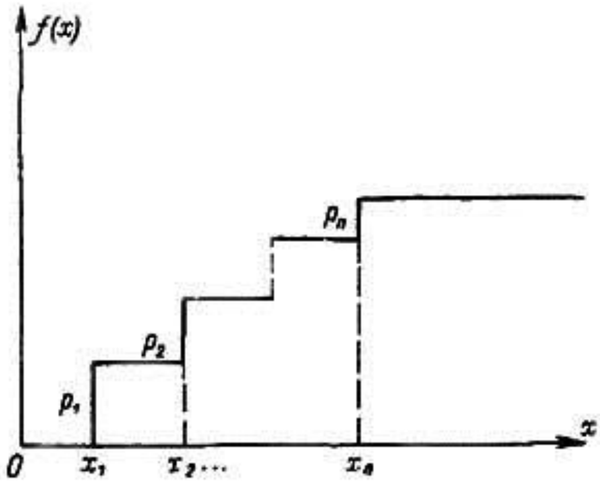


Рис.2.5. График функции распределения дискретной величины

С помощью функции распределения могут решаться разнообразные практические задачи, связанные с определением вероятности попадания в любой интервал. Для непрерывных величин на основании формул (2.15) и (2.21) имеем:

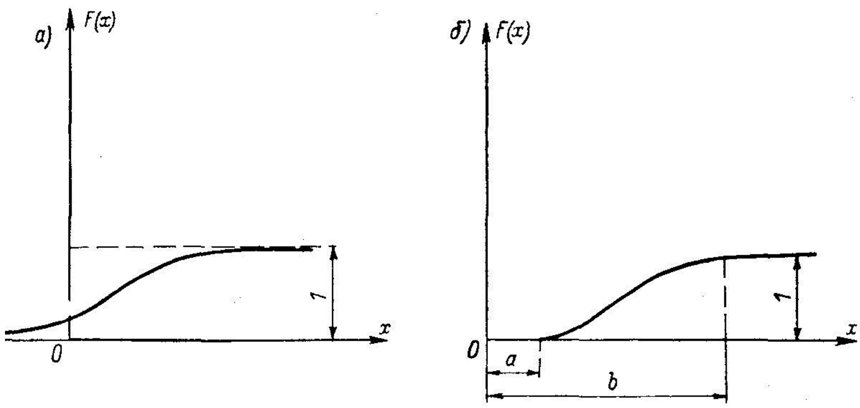
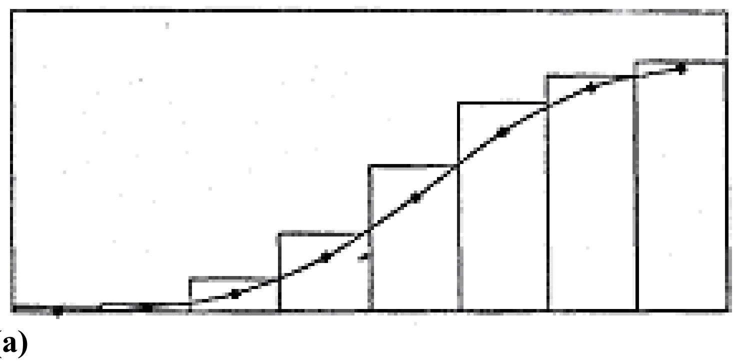
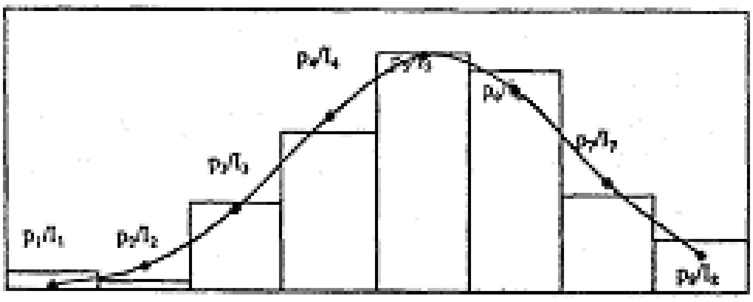


Рис.2.6. График функции распределения непрерывной случайной величины: а – значения случайной величины не ограничены; б – случайная величина принимает значение только в интервале от a до b.



(а)



(б)

Рис.2.7. Графическое представление доверительного интервала: а) – с использованием интегрального закона распределения (функция распределения $F(x_i)$); б) – с использованием дифференциального закона распределения (плотность распределения $p(x_i)$)

$$P(x_1 \le X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1), \qquad (2.22)$$

где $F(x_1)$ и $F(x_2)$ – значения функции распределения на концах интервала.

Эта формула может применяться также и для решения задач с дискретными случайными величинами. Пользуясь ею, решим пример**.** При принятой в этом примере плотности вероятности разрыва троса функция распределения имеет вид (частный случай экспоненциального закона):

$$F(x) = \begin{cases} 0; x < 0 \\ 1 - e^{-0{,}001x}; x > 0 \end{cases}$$

Тогда: P $(500 \le X \le 1000) = F$ $(1000) - F$ $(500) = (1 - e^{-1}) - (1 - e^{-0{,}5}) = 0{,}2386$, что совпадает с ранее полученным результатом.

Разделим весь диапазон значений случайной величины x на интервалы или «разряды» и подсчитаем количество значений m_i , приходящихся на i–й разряд. Это число разделим на общее число наблюдений N и найдем *частоту,* соответствующую данному разряду:

$$p_i = m_i / N. \qquad (2.23)$$

Сумма частот всех разрядов равна единице,

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \qquad (2.24)$$

где n – число разрядов.

Далее построим статистический ряд в виде таблицы, где в первой строке приведены разряды в порядке их расположения вдоль оси абсцисс; во второй строке – количество попаданий m_i значений случайной величины в данный интервал; в третьей соответствующие частоты p_i .

I_i	x_{min}; x_1	x_1; x_2	…	x_i; x_{j+1}	…	x_{n-1}; x_{max}
m_i	m_1	m_2	…	m_{j+1}	…	m_n
p_i	p_1	p_2	…	p_{i+1}	…	p_n

Число разрядов, на которые следует группировать статистические данные, не должно быть очень большим (тогда ряд распределения становится невыразительным, и частоты в нем обнаруживают незакономерные колебания); с другой стороны оно не должно быть и слишком малым (при малом числе разрядов свойства распределения описываются статистическим рядом слишком грубо). Оптимальное число разрядов зависит от величины выборки и составляет 8 – 20. Статистический ряд часто оформляется графически в виде *гистограммы.* При построении гистограммы по оси абсцисс откладываются разряды, и на каждом из разрядов как на их основании строится прямоугольник, площадь которого равна частоте данного разряда. Для построения гистограммы нужно частоту каждого разряда разделить на его длину и полученное число взять в качестве высоты прямоугольника (рис.2.7,а). В случае равных разрядов высоты прямоугольников пропорциональны соответствующим частотам. *Полная площадь гистограммы равна единице.* При увеличении числа опытов можно выбирать все более мелкие разряды. При этом гистограмма все более будет приближаться к некоторой кривой *p(x),* ограничивающей площадь, равную единице. Эта кривая есть *плотность распределения случайной величины X,* или другими словами, производная от *p(x)* по *x: f(x) = dp(x)/dx; p(x)* = $\int_{-\infty}^{x}$ *f(x)dx.* Иногда функцию *p(x)* называют *дифференциальным законом распределения* величины *X.* Основные свойства плотности распределения: (а) плотность распределения есть неотрицательная функция: $p(x) \geq 0$; (б) интеграл в бесконечных пределах от плотности распределения равен единице: $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$.

Заметим (рис.2.7), что ординаты в гистограммах – величины размерные, изменяющиеся при изменении единицы измерения случайной величины. Очевидно, что так как вероятность (в нашем случае площадь или часть площади гистограммы) величина безразмерная, то размерность ординаты должна быть обратно размерности абсциссы. Для построения гистограммы интегральной функции распределения по оси абсцисс откладываются разряды, и на каждом *i*–м разряде строится прямоугольник, ордината которого равна сумме вероятностей $p_i + p_2 + ... + p_i$ (рис.2.7,б). Для дискретной случайной величины:

$$F(x_i) = P(x \leq x_i) = \sum_{X \leq x_i} p(x_i)\,. \qquad (2.25)$$

Для непрерывной:

$$F(x) = P(x < x_i) = \int_{-\infty}^{x} p(x)dx. \qquad (2.26)$$

Очевидно, что

$$0 \leq F(x) \leq 1. \qquad (2.27)$$

Если случайная величина – наработка до отказа *t*, то вероятность того, что *t* меньше заданного значения $t_а$ равна вероятности возникновения отказа на интервале от нуля до $t_з$:

$$F(t_з) = P(t < t_з). \qquad (2.28)$$

Функция $F(t_з)$ обычно обозначается *Q(t)* и называется *функцией ненадежности.* Вероятность того, что на интервале времени от 0 до $t_з$ не возникнет отказа, равна:

$$P(t_з) = p(t \geq t_з) = 1 - Q(t), \qquad (2.29)$$

Функция $P(t_з)$ называется *функцией надежности.*

Законы распределения случайной величины (интегральный и дифференциальный) являются исчерпывающей характеристикой случайной величины с вероятностной точки зрения. Однако, во многих вопросах практики эту информацию трудно целиком охватить или использовать, поэтому нет необходимости характеризовать случайную величину полностью, исчерпывающим образом. Точное определение распределения вероятностей экспериментальным путем также представляет большие трудности, поэтому на практике чаще всего задаются тем или иным видом распределения, основываясь на определенных экспериментальных и теоретических предпосылках, полученных при решении аналогичных задач. Зачастую достаточно бывает указать только отдельные числовые параметры, до некоторой степени, характеризующие существенные черты распределения случайной величины, например: среднее значение, около которого группируются возможные значения случайной величины; число, характеризующее степень разбросанности относительно среднего и т.д. Пользуясь такими статистическими характеристиками, можно все существенные сведения относительно распределения случайной величины выразить более компактно с помощью минимального числа *параметров закона распределения,* определяющих характер распределения случайной величины. В теории вероятности и ее приложениях числовые характеристики и операции над ними играют огромную роль. С их помощью существенно облегчается решение многих вероятностных задач. Однако сами по себе параметры распределений не всегда являются наглядными и удобно определяемыми из опыта; кроме того, при неизвестном заранее распределении их невозможно найти. Поэтому широкое применение получили *характеристики распределений*, которые часто называют также *характеристиками случайной величины*.

Очень часто удается решить задачу до конца, оставляя в стороне законы распределения и оперируя одними числовыми характеристиками случайных величин. Такими характеристиками закона распределения, используемыми в практике расчетов надежности, являются: среднее значение случайной величины, интенсивность, дисперсия, среднеквадратическое отклонение.

Математическое ожидание (МО). Основная характеристика случайной величины – математическое ожидание, которое иногда называют *математическим средним значением*. Среднее значение случайной величины есть некоторое число, являющееся как бы ее представителем, и заменяющее ее при грубо ориентировочных расчетах. Математическое ожидание данной случайной величины есть среднее из ее значений, вычисленное с учетом теоретической частоты их появления, т. е. среднее взвешенное данной случайной величины. Опираясь на «закон больших чисел», можно показать, что среднее из большого числа значений случайной величины, найденных опытным путем, т. е. среднее эмпирическое значение, будет близко к математическому ожиданию. *Математическим ожиданием M(x)* случайной величины называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины на вероятности этих значений. Сокращенно вместо обозначения *M(X)* часто используют обозначения m_x или *m.* Для дискретных случайных величин (если *n* – число измерений, *p(x)* – плотность распределения дискретной случайной величины *x*, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, а *n* – число интервалов наблюдения):

$$M(x) = \overline{X} = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{\sum p_i} = \sum p_i x_i\,. \quad (2.30)$$

Для непрерывных случайных величин :

Математическое выражение

$$M(x) = \overline{X} = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) x dx, \quad (2.31)$$

Статистическое определение $-\tilde{M}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx$, где x_i – *i–е* возможные или опытные значения случайной величины.

Математическое ожидание случайной величины тесным образом связано со средним арифметическим, при большом числе опытов среднее арифметическое наблюдаемых значений случайной величины приближается (сходится по вероятности) к ее математическому ожиданию. Тогда оценить величину математического ожидания случайной величины по выборке из *N* испытаний можно по формуле:

$$M(x) = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}, \quad (2.32)$$

где *N* – число наблюдений случайной величины.

Математическое ожидание характеризует центр распределения. Здесь сумма для дискретных величин распространена на все их возможные значения, а интеграл для непрерывной величины – на область всех возможных значений этой величины. В случае, если интервал изменения ограничен абсциссами *a* и *b* (рис.2.4,в), то интеграл в формуле (2.33) также распространяется на промежуток от *a* до *b*. Математическое ожидание обладает следующими свойствами:

- математическое ожидание постоянной величины равно этой постоянной;
- математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий;

• математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.

Математическое ожидание (наличие в выборке из трех панелей одной дефектной), вычисленное по формуле (2.32), будет

$$m = 0\cdot 0{,}729 + 1\cdot 0{,}243 + 2\cdot 0{,}027 + 3\cdot 0{,}001 \approx 0{,}3,$$

т. е. если из партии изготовленных панелей взять очень большое число выборок по три изделия в каждой, то в среднем на выборку придется по 0,3 дефектной панели (или три дефектные панели на десять выборок). Соответственно (с тросом башенного крана) математическое ожидание по формуле (2.33) будет

$$m = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = \int_{0}^{\infty} x\cdot 0{,}001\cdot e^{-0{,}001x}\,dx = 1000, \qquad (2.33)$$

т. е. при испытании большого числа тросов среднее время их безотказной работы до обрыва будет около 1000 часов (здесь взят интеграл от 0 до $+\infty$, так как в интервале от $-\infty$ до 0 плотность $f(x)$ равна нулю).

Математическое ожидание характеризует только среднее значение случайной величины, ее положение на числовой оси. Вокруг этого среднего значения группируются все возможные значения случайной величины, поэтому математическое ожидание часто называют *центром распределения*, или центром группировки. Однако этой важнейшей характеристики все же недостаточно для оценки разброса, или рассеяния, значений случайной величины около ее среднего значения. Разброс характеризуется *дисперсией* случайной величины, определяемой по формулам:

Дисперсия и среднее квадратическое отклонение. Пусть имеется случайная величина x с математическим ожиданием $M(x)$. *Центрированной случайной величиной* $\hat{X}$, соответствующей величине x, называется отклонение случайной величины x от ее математического ожидания:

$$\hat{X} = x - M(x). \qquad (2.34)$$

Таким образом, математическое ожидание центрированной случайной величины равно нулю. *Дисперсией* случайной величины x называется математическое ожидание квадрата соответствующей центрированной случайной величины. Дисперсия вычисляется по следующим формулам:

1. Для непрерывной случайной величины выражение для дисперсии будет

Математическое:

$$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(x)]^2\, p(x)\,dx. \qquad (2.35)$$

Статистическое: $\tilde{D}(x) = \dfrac{\sum^{n}[x_i - M(x)]^2}{n-1}$; *для среднего значения:* $\tilde{D}[M(x)] = D(x)/n$.

2. Для дискретной случайной величины

$$D(x) = \sum [x_i - M(x)]^2 p_i\,. \qquad (2.36).$$

Дисперсия случайной величины является характеристикой рассеивания значений случайной величины около ее математического ожидания. Она имеет размерность квадрата случайной величины. В практических расчетах для оценки рассеивания удобнее пользоваться величиной, размерность которой совпадает с размерностью самой случайной величины. Такую величину называют *средним квадратическим отклонением* (иначе – «стандартом») случайной величины x:

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)}\,. \qquad (2.37)$$

Для упрощения записи можно пользоваться сокращенными обозначениями для математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения соответственно: m_x, D_x, σ_x. Используются также термины: «среднее квадратическое отклонение», «стандартное» или просто «стандарт». Очевидно, что размерность ст совпадает с размерностью данной случайной величины. Так, например, дисперсия и среднеквадратическое отклонение дискретной величины (по данным примера 2.17), вычисленные по формулам (2.36) и (2.37), при m = 0,3 будут:

$$D\,(X) = 0{,}729\,(0 - 0{,}3)^2 + 0{,}243\,(1 - 0{,}3)^2 + 0{,}027(2 - 0{,}3)^2 + 0{,}001\,(3 - 0{,}3)^2 = 0{,}27;$$
$$\sigma = \sqrt{0{,}27} \approx 0{,}52 \text{ дефектных изделий.}$$

Соответственно, дисперсия и среднеквадратическое отклонение непрерывной величины, вычисленные по формулам (31) и (32),

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - 1000)^2 0{,}001\, e^{-0{,}001x} dx = 10^6 \text{ ч}^2, \qquad (2.38)$$

где $\sigma = \sqrt{10^6} = 1000$ ч.

Для решения практических задач о надежности строительных конструкций чаще всего используются двухпараметрические распределения, которые характеризуются величинами m и $\boldsymbol{\sigma}$. Однако для распределений с большим числом параметров, так же как и для распределений неизвестного типа, эти величины позволяют в некоторой степени характеризовать такого рода распределения. Наряду с математическим ожиданием и дисперсией рассматриваются другие характеристики распределений и прежде всего *моменты случайной величины*, определяемые по формулам:

для дискретных случайных величин:

$$m_k = M(X^k) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i^k\,; \qquad (2.39)$$

для непрерывных случайных величин:

$$m_k = M(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx. \qquad (2.40)$$

Эти моменты называются *начальными*. Они представляют собой взвешенные средние k–тых степеней случайной величины. Из них наибольшую роль играет второй начальный момент $m_2 = M(X^2)$, поскольку он сравнительно просто вычисляется. Через него дисперсия выражается формулой:

$$D(X) = m_2 - m^2; \qquad (2.41)$$

здесь $m_2 = M(X^2)$ – второй начальный момент; $m = m_1$ – математическое ожидание. Для примера 2.17 имеем:

$$m_2 = \mathrm{M}(\mathrm{X}^2) = 0{,}729 \text{ x } 0^2 + 0{,}243 \text{ x } 1^2 + 0{,}027 \text{ x } 2^2 + 0{,}001 \text{ x } 3^2 = 0{,}36.$$

Тогда: $D\,(X) = m_2 - m^2 = 0{,}36 - 0{,}3^2 = 0{,}27$, что совпадает с ранее полученным результатом. Заметим, что вычисления здесь оказались проще.

Моменты случайной величины обычно применяются в тех случаях, когда параметры многопараметрических распределений должны быть найдены опытным путем. Экспериментальное определение моментов как средних степеней некоторых случайных величин осуществляется сравнительно просто. Моменты могут быть также связаны с параметрами распределения путем приравнивания их эмпирических и теоретических значений. Наряду с начальными рассматриваются также центральные моменты, представляющие собой математическое ожидание степеней разности случайной величины и ее математического ожидания:

для дискретной случайной величины:

$$M_k = M[(x–m)^k] = \sum_{i=1}^{n} p_i\,(x_i - m)^k\,; \qquad (2.42)$$

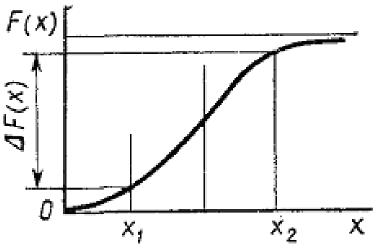
для непрерывной случайной величины:

$$M_k = M\,[(x - m)^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} f\,(x)\,(x - m)^k\,dx. \qquad (2.43)$$

Центральные моменты обладают теми же свойствами и применяются в тех же случаях, что и начальные, причем второй центральный момент совпадает с дисперсией.

В качестве показателей надежности, наряду с рассмотренными выше параметрами законов распределения, используются также следующие характеристики: вероятность отказа за заданное время, $Q(t_з)$; вероятность отсутствия отказа за заданное время $P(t_з)$; вероятность того, что в случайный момент времени восстанавливаемое изделие будет находиться в работоспособном состоянии $К_г$; вероятность того, что случайная величина не будет превосходить заданного значения (γ – процентный ресурс); вероятность числа отказов за заданное время $P_n(t)$; доверительный интервал значений случайной величины при заданной доверительной вероятности (используется для интервальной оценки случайной величины).

Чтобы определить доверительный интервал необходимо из площади, ограниченной кривой плотности распределения, «вырезать» симметричную относительно центра группирования площадь, которая соответствует заданной доверительной вероятности. Нижнее и верхнее значения границ этой площади будут нижним и верхним значениями доверительного интервала. На рис.2.8 показан пример доверительного интервала для случайной величины x (от x_1 до x_2) с доверительной вероятностью $\Delta F(x)$.



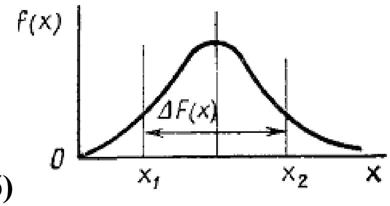


Рис.2.8. Графическое представление доверительного интервала: а – при интегральном законе распределения;
б – при дифференциальном законе распределения

2.3. Системы случайных величин

В практических приложениях теории вероятностей очень часто приходится сталкиваться с задачами, в которых результат опыта описывается не одной случайной величиной, а двумя или более случайными величинами, образующими систему. Систему случайных величин можно описать в виде многомерных законов распределения $p(x_l, x_2, ..., x_n)$, либо приближенно при помощи статистических характеристик. При рассмотрении вопросов, связанных с системами случайных величин, удобно пользоваться геометрической интерпретацией. Например, систему из двух случайных величин $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ можно изобразить случайной точкой на плоскости с координатами x и y (рис.2.8,б).

Совокупность математических ожиданий m_x , m_y представляет собой характеристику положения системы. Геометрически – это координаты средней точки на плоскости, вокруг которой происходит рассеивание. Рассеивание случайной точки в направлении осей OX и OY характеризует дисперсии величин $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$: D_x и D_y.

При изучении систем случайных величин всегда следует обращать внимание на степень и характер их зависимости. Понятие о зависимости случайных величин – одно из важнейших понятий теории вероятностей, где мы встречаемся с более общим типом зависимости, чем функциональная – *вероятностной или статистической зависимостью.* Если случайные величины $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ находятся в вероятностной зависимости, то это не означает, что с изменением величины $\tilde{X}$ величина $\tilde{Y}$ изменяется вполне определенным образом (как при функциональной зависимости двух величин); это лишь означает, что с изменением величины $\tilde{X}$ величина $\tilde{Y}$ имеет тенденцию также изменяться (например, возрастать или убывать при возрастании $\tilde{X}$ *)*. Эта тенденция соблюдается лишь в среднем, и в каждом отдельном случае от нее возможны отступления. Численно статистическая зависимость между двумя случайными величинами выражается при помощи корреляционного момента, который вычисляется по формулам:

– для дискретной случайной величины:

$$K_{xy} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)(y_i - m_y)p_{xy}, (2.1) \quad \text{или} \quad K_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{N-1} - m_x m_y; \qquad (2.44)$$

– для непрерывной случайной величины:

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x - m_x)(y - m_y)p(x, y)dxdy. \qquad (2.45)$$

В случае, если $X = Y$, корреляционный момент равен дисперсии случайной величины X*:* $K_{xy} = D_x$. В практических задачах для оценки степени корреляции между двумя величинами удобнее пользоваться относительной характеристикой, называемой *коэффициентом корреляции.*

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}, \qquad (2.46)$$

где $-1 \le r_{xy} \le 1$.

Если $r_{xy} > 0$, то между случайными величинами $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ существует положительная корреляционная зависимость. Это означает, что при возрастании одной из них другая имеет тенденцию в среднем возрастать (рис.2.9,*б).* При отрицательной корреляции $r_{xy} > 0$, что означает, что при возрастании одной случайной величины другая имеет тенденцию убывать (рис.2.9,в). При $r_{xy} = 0$ случайные величины статистически независимы (рис.2.9,г). Если $|r_{xy}| \approx 1$, то можно считать, что рассматриваемые величины связаны функциональной зависимостью.

Вероятностный расчет строительных конструкций состоит в том, чтобы по вероятностным характеристикам нагрузок, прочности материалов и геометрических параметров конструкций найти вероятностные характеристики перемещений, усилий, напряжений. Во многих случаях для решения этой задачи не требуется знание законов распределения случайных параметров, а .можно ограничиться их числовыми характеристиками: математическими ожиданиями, дисперсиями, корреляционными моментами. Наиболее просто проводится вероятностный расчет систем, работу которых можно описать линейной функцией.

Правила преобразования математических ожиданий и дисперсий для линейных функций:

1. Неслучайная величина C: $M[C] = C; D[C]=0.$

2. Произведение случайной величины $\tilde{X}$ на неслучайную C*:*

$M[C\tilde{X}]=CM[\tilde{X}];$

$D[C\tilde{X}]=C^2D[\tilde{X}].$

1. Сумма (разность) случайных величин*:*

$M[\tilde{X} \pm \tilde{Y}] = M[\tilde{X}] \pm MY], D[\tilde{X} \pm \tilde{Y}] = D[\tilde{X}] + D[\tilde{Y}] + 2K_{xy}$

1. Сумма (разность) случайных величин*:*

$M[\tilde{X} \pm \tilde{Y}] = M[\tilde{X}] \pm MY], D[\tilde{X} \pm \tilde{Y}] = D[\tilde{X}] + D[\tilde{Y}] + 2K_{xy}$

2. Произведение случайных величин:

$$M[\tilde{X}\,\tilde{Y}\,] = M[\tilde{X}\,]M[\tilde{Y}\,],\, D[\tilde{X}\,\tilde{Y}\,]=D[\tilde{X}\,]D[\tilde{Y}\,] + m_x^2 D[\tilde{Y}\,] + m_y^2 D[\tilde{X}\,] + K_{xy}.$$

$$D[a\tilde{X} - b\tilde{Y}\,]=D[a\tilde{X}\,] + D[b\tilde{Y}\,] + 2K[a\tilde{X}, b\tilde{Y}\,] = a^2 D[\tilde{X}\,] + b^2 D[\tilde{Y}\,] + 2abK[\tilde{X}, \tilde{Y}\,].$$

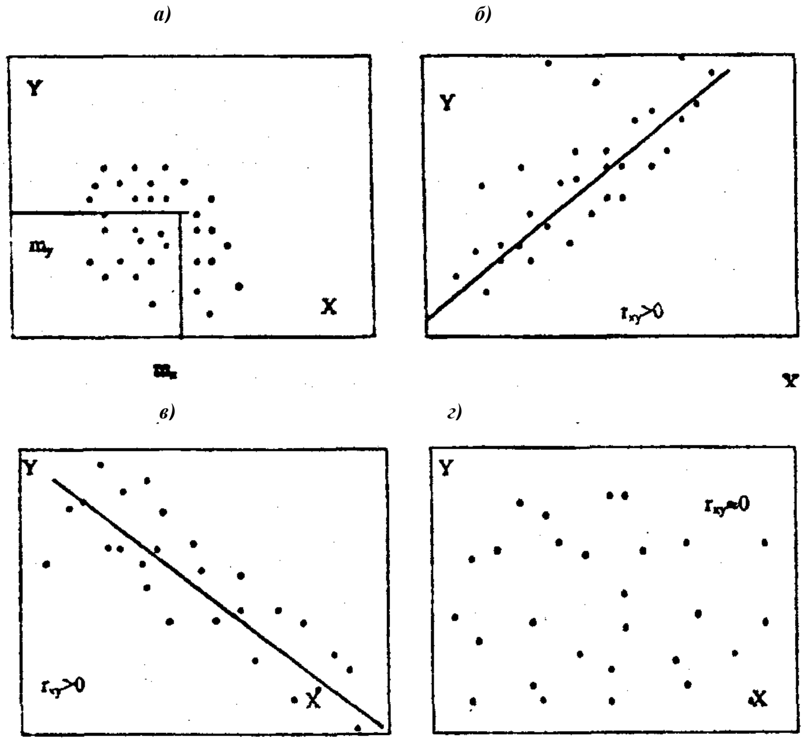


Рис.2.9. Система двух случайных величин: *а)* графическая интерпретация; *б)* положительная корреляция величин $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$; *в)* отрицательная корреляция величин $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$; *г)* величины $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ некоррелированы.

1. Сумма (разность) случайных величин:

$$M[\tilde{X} \pm \tilde{Y}\,] = M[\tilde{X}\,] \pm MY],\, D[\tilde{X} \pm \tilde{Y}\,] = D[\tilde{X}\,] + D[\tilde{Y}\,] + 2K_{xy}$$

2. Произведение случайных величин:

$$M[\tilde{X}\,\tilde{Y}\,] = M[\tilde{X}\,]M[\tilde{Y}\,],\, D[\tilde{X}\,\tilde{Y}\,]=D[\tilde{X}\,]D[\tilde{Y}\,] + m_x^2 D[\tilde{Y}\,] + m_y^2 D[\tilde{X}\,] + K_{xy}.$$

$$D[a\tilde{X} - b\tilde{Y}\,]=D[a\tilde{X}\,] + D[b\tilde{Y}\,] + 2K[a\tilde{X}, b\tilde{Y}\,] = a^2 D[\tilde{X}\,] + b^2 D[\tilde{Y}\,] + 2abK[\tilde{X}, \tilde{Y}\,].$$

Метод статистической линеаризации для нелинейных функций. На практике часто встречаются случаи, когда исследуемая функция случайных величин не является строго линейной, но мало отличается от таковой и при решении задачи может приближенно рассматриваться как линейная. Такое допущение возможно в том случае, когда случайные изменения параметров $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, ..., \tilde{X}_n$ незначительны (5–25%). Величина статистической изменчивости случайных параметров строительных конструкций соответствует этим требованиям. Для вычисления статистических характеристик таких функций проводится их линеаризация путем разложения в ряд Тейлора в окрестности центра распределения случайных аргументов (в точке математического ожидания случайной функции).

Пусть имеется *n* случайных величин $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, ..., \tilde{X}_n$ с заданными числовыми характеристиками: математическими ожиданиями m_{xi}, дисперсиями D_{xi} и корреляционными моментами K_{xixj} (i = 1,..., n). Работа системы описывается функцией

$$\tilde{y} = \varphi(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, ..., \tilde{X}_n), \qquad (2.47)$$

которая мало отличается от линейной. Требуется найти числовые характеристики случайной величины $\tilde{y}$ *:* m_y , D_y . Ряд Тейлора около точки $(m_{x1}, m_{x2}, ..., m_{xn})$ *с* сохранением только членов первого порядка имеет вид:

$$\tilde{y} = \varphi(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, ..., \tilde{X}_n) \approx \varphi(m_{x1}, m_{x2,} ..., m_{xn}) + \sum_{i=1}^{n} \varphi'_{xi}(m_{x1}, m_{x2}, ..., m_{xn})(\tilde{X}_i - m_{xi}). \qquad (2.48)$$

Применив к этой функции способы определения числовых характеристик линейных функций, получим следующие зависимости:

$$m_y = \varphi(m_{x1}, m_{x2}, ..., m_{xn}), \qquad (2.49)$$

$$D_y = \sigma_y^2 = \sum \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tilde{X}_1} \right)_m^2 \sigma_{xi}^2 + 2\sum_{i<j} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial X_i} \right)_m \left(\frac{\partial\varphi}{\partial X_j} \right)_m K_{ij} \quad , \qquad (2.50)$$

где: $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial X_i} \right) = \varphi'_{Xi}(m_{X1}, m_{X2}, ..., m_{Xn})$.

При $K_{ij} = 0$ (т. е. $i \neq j$): $D_y = \sigma_y^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tilde{X}_i} \right)_m^2 \sigma_{xi}^2$. (2.51)

Эти формулы находят широкое применение в различных прикладных задачах.

Пример 2.12. Требуется рассчитать несущую способность прямоугольного железобетонного сечения с одиночной арматурой двумя методами:

- предельных состояний (по КМК);
- статистической линеаризации (прямой вероятностный расчет).

Сравнить полученные результаты.

Исходные данные:

Размеры сечения: b =30 см; h = 80 см; a = 7см.

Арматура А–III: A_s = 29,45 *см*^{2} *(6 Ø 25);* R_{sn} = 390 МПа; R_s = 365 МПа.

Бетон В20: R_{bn} = 15 МПа; R_b = 10,5 МПа.

Изгибающий момент от внешней нагрузки: M = 540 кНм.

Коэффициент условий работы: $\gamma_c = \gamma_{b2}$ = 0,9.

Случайные параметры системы: прочность бетона и стали соответственно $\tilde{R}_b$ и $\tilde{R}_s$.

А. Решение методом предельных состояний. В формулах метода предельных состояний вместо случайных параметров рассматриваются их расчетные или нормативные значения.

1. Рабочая высота сечения $h_0 = h - a$ = 80 – 7 = 73 см.

2. Высота сжатой зоны ; $x = \frac{R_s A_s}{R_b b} = \frac{365 \times 29{,}45}{10{,}5 \times 30} = 34{,}12$ *см.*

3. Относительная высота сжатой зоны $\xi = \frac{x}{h_0} = \frac{34{,}12}{73}$ = 0,467.

4. Граничная высота сжатой зоны: $\xi_R = \frac{\omega}{1 + \frac{R_s}{\sigma_{sc.u}}\left(1 - \frac{\omega}{1{,}1}\right)} = \frac{0{,}766}{1 + \frac{365}{500}\left(1 - \frac{0{,}766}{1{,}1}\right)}$ = 0,627,

где $\omega = 0{,}85 - 0{,}008\gamma_{b2}R_b$ = 0,85 – 0,008 x 0,9 x 10,5 = 0,766; ξ = 0,467 < ξ_R = 0,627.

5. Предельный изгибающий момент в сечении:

$$M = R_s A_s\left(h_0 - \frac{x}{2}\right) = 365 \times 29{,}45 \times \left(73 - \frac{34{,}12}{2}\right) \times 10^{-3} = 601{,}31 \ кНм.$$

$$M = 601{,}31 < 540 \ кНм .$$

Б. Решение методом статистической линеаризации. При вероятностном расчете системы вместо случайных величин используются их статистические характеристики: математические ожидания, дисперсии, корреляционные моменты. Случайные характеристики прочности бетона и стали являются статистически независимыми величинами, тогда $K_{b,s}= 0$. Математические ожидания m_b, m_s и дисперсии D_b и D_s (или стандарты σ_b и σ_s) можно вычислить исходя из соответствующих нормативных значений.

$$R_{bn} = m_b(1 - 1{,}64 f_b), \quad R_{bs} = m_s(1 - 1{,}64 f_s), \tag{2.52}$$

Коэффициенты вариации бетона и стали А–III соответственно равны: f_b = 0,135; f_s = 0,0437

Из формул (2.47) и (2.48) находим: $m_b = 1{,}28\ R_{bn} = 19{,}2\ МПа;$ $m_s = 1{,}077\ R_{sn} = 420{,}11\ МПа;$

$$\sigma_b = m_b f_b = 2.592\ МПа; \quad \sigma_s = m_s f_s = 18{,}359\ МПа.$$

Формула для вычисления предельного изгибающего момента в сечении как функции двух случайных величин $\tilde{R}_b$ и $\tilde{R}_s$ аналогична формуле метода предельных состояний, но целью вероятностного расчета является не определение одного из возможных значений случайной величины момента (расчетного значения M), а нахождение его статистических характеристик. Это дает возможность описать всю совокупность возможных значений предельного изгибающего момента в следующем виде:

$$\varphi(\tilde{R}_b, \tilde{R}_s) = \tilde{M} = \tilde{R}_s A_s\left(h_0 - \frac{\tilde{R}_s A_s}{2\tilde{R}_b b}\right). \tag{2.53}$$

Математическое ожидание случайной величины M находится по формуле (2.54) в которой вместо случайных параметров $\tilde{R}_b$ и $\tilde{R}_s$ поставлены их математические ожидания:

$$m_M = m_s A_s\left(h_0 - \frac{m_s A_s}{2 m_b b}\right) = 420{,}11 \times 29{,}45\left(73 - \frac{420{,}11 \times 29{,}45}{2 \times 19{,}2 \times 30}\right) \times 10^{-3} = 777{,}85\ кНм.$$

Дисперсия изгибающего момента находится по формуле (2.50)

$$\sigma_M^2 = \left(\frac{\partial M}{\partial R_b}\right)_m^2 \sigma_b^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial R_s}\right)_m^2 \sigma_s^2 = \left[-\frac{m_s^2 A_s^2}{2 b m_b^2}\right] \times \sigma_b^2 + \left[A_s h_0 - \frac{m_s^2 A_s^2}{b m_b}\right] \times \sigma_s^2 =$$

$$= \left[-\frac{420{,}11^2 \times 29{,}45^2 \times 10^{-8}}{2 \times 0{,}3 \times 19{,}2^2}\right]^2 \times 2{,}592^2 + \left[29{,}45 \times 0{,}73 \times 10^{-4} - \frac{420{,}11 \times 29{,}45 \times 10^{-8}}{19{,}2 \times 0{,}3}\right]^2 \times 18{,}359^2 =$$

$$= (3{,}22 + 7{,}76) \text{ x } 10^{-4}(МНм)^2 = 10{,}98 \text{ x } 10^{-4}(МНм)^2. \quad \sigma_M^2 = 0{,}03314 \times 10^{-3}\ кНм = 33{,}14\ кНм.$$

2.4. Законы распределения случайных величин

Нормальный закон распределения случайной величины. Нормальный закон распределения (часто называемый законом Гаусса) играет исключительно важную роль в теории вероятностей и занимает среди других законов распределения особое положение. Это – наиболее часто встречающийся на практике закон распределения. Главная особенность, выделяющая нормальный закон среди других законов, состоит в том, что он является *предельным законом,* к которому приближаются другие законы распределения. Сумму достаточно большого числа независимых (или слабо зависимых) случайных величин, подчиненных каким угодно законам распределения, приближенно можно описать нормальным законом, и это выполняется тем точнее, чем большее количество случайных величин суммируется. Это распределение наиболее часто используется для описания распределений прочности строительных материалов и конструкций. Нормальный закон распределения случайной величины *X* характеризуется *плотностью вероятности* вида:

$$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \tag{2.54}$$

Кривая распределения нормального закона имеет симметричный вид. Максимальная ордината кривой, равная $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$, соответствует точке математического ожидания $x = m$, по мере удаления от точки m плотность распределения падает, и при $x \to \pm\infty$ кривая асимптотически приближается к оси абсцисс. Если изменять центр рассеивания m, кривая распределения будет смещаться вдоль оси абсцисс, не изменяя своей формы (рис.2.10.а).

Параметр σ – среднее квадратическое отклонение случайной величины x – характеризует не положение, а саму форму кривой распределения. Это есть характеристика рассеивания. Наибольшая ордината кривой распределения обратно пропорциональна σ, при увеличении σ максимальная ордината уменьшается. Так как площадь кривой распределения всегда должна оставаться равной единице, то при увеличении σ кривая распределения становится более плоской, растягиваясь вдоль оси абсцисс; напротив, при уменьшении σ кривая распределения вытягивается вверх, одновременно сжимаясь с боков (рис.2.10,6).

Функция распределения случайной величины *X*, распределенной но нормальному закону с параметрами m и σ имеет вид:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\ . \tag{2.55}$$

Сделаем в интеграле (1.22) замену переменной

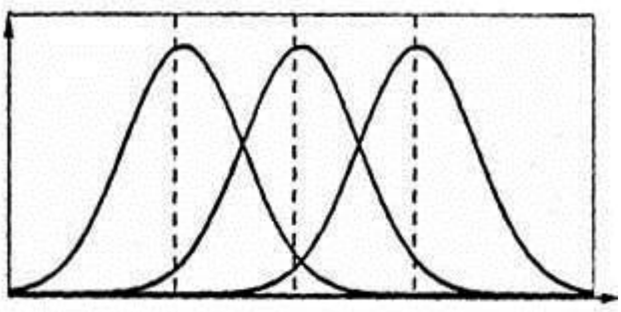
$$(x-m)/\sigma=t \tag{2.56}$$

и приведем его к виду:

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt. \tag{2.57}$$

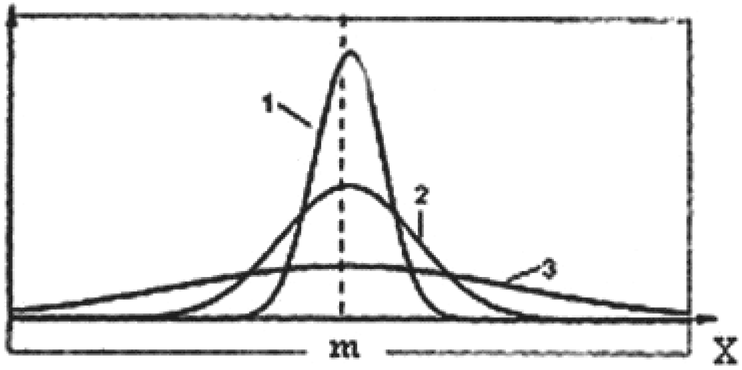
$p(x)$ $m_{x1} < m_{x2} < m_{x3}$; $D_{x1} = D_{x2} = D_{x3}$

Интеграл (2.57) называется интегралом вероятностей, его значения находятся по табл.2 приложений. Интеграл вероятностей обозначается как $Ф(x)$, он представляет собой функцию распределения нормально распределенной случайной величины с параметрами m= 0 и σ =1. Очевидно, функцию распределения (1.21) случайной величины *X* с параметрами m и σ можно выразить через нормальную функцию распределения $Ф(x)$.



(a)

$p(x)$ $D_{x1} < D_{x2} < Dm_{x3}$; $m_{x1} = m_{x2} = m_{x3}$



m_{x1} m_{x2} m_{x3} X

(б)

Рис.2.10. Графики плотности вероятностей нормального закона распределения : а) при m_x *– const:* б) при D_x *– const*

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right). \qquad (2.58)$$

Для случайной величины времени до отказа изделия *t* – функция распределения (вероятность того, что за время *t* возникает отказ) – определяется формулой: $Q(t) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-(t-T)^2(2\sigma^2)}dt$. Плотность вероятности отказа для *t:* $f(t) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-(t-T)^2(2\sigma^2)}$, где *a* и *T* – параметры закона распределения (*σ* – среднеквадратическое отклонение *t* относительно *T; T* – среднее значение *t).* Для удобства вычислений предыдущая формула приводится к виду:

$$Q(t) = 0.5 + \Phi(x), \qquad (2.59)$$

где $\Phi(x) = \Phi(u) = (1/\sqrt{2\pi})\int_0^u \exp(-u^2/2)du$ – функция Лапласа (числовые значения *Ф(u)* даны в табл.2.2, $u = (t-T)/\sigma$ – нормированное отклонение *t* относительно *T*).

Таблица 2.2

Характеристики прочности арматуры и коэффициенты их вариации

	А–I	А–II	А–III Ø6–8	А–III Ø10–40	А–III	А–III	А–IV	А–V	А–VI
m_s, *МПа*	247	313	432	420	600	648	686	912	1179
v_s	0,024	0,035	0,059	0,044	0,061	0,102	0,086	0,085	0,103

Пример 2.13. Определить вероятность того, что случайная величина *t* будет меньше среднего значения на – 600, если известно, что закон распределения нормальный, а σ(*i*) = 300; *a* = – 600/200 = – 2; $f(t)_{u=-2} = 0.023$.

Пример 2.14. Определить *Q(t)* для *t* = 100 ч, если σ (*t*) = 150 ч, *T* = 500 ч. Нормированное отклонение *t* относительно *T* равно *u* = – 2,6; *Q(t)* (см. табл.2.2) равно 0,005.

Интенсивность отказов монотонно возрастает и после *t* = *T* начинает приближаться к асимптоте *y= (t – T)/σ.* Монотонное возрастание λ*(t)* – характерный признак нормального распределения. Нормальному распределению подчиняется время появления износовых отказов.

Правило трех стандартов. При оценке надежности строительных систем часто необходимо определить вероятности того, что значение случайной величины попадет в интервал *(а; б).* Эта вероятность находится по формуле:

$$P(a<x<b) = F(a) - F(b) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right), \quad (2.60)$$

где: $\Phi(-\infty) = 0$; $\Phi(\infty) = 1$; $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

Отложим от центра рассеивания m в обе стороны отрезки длиной σ (рис.2.11.) и вычислим вероятности:

$P(m-\sigma < X < m + \sigma) = \Phi(1) - \Phi(-1) - 2\Phi(1) - 1 = 2 - 0{,}841 - 1 = 0{,}6827$;
$P(m-2\sigma < X < m + 2\sigma) = \Phi(2) - \Phi(-2) - 2\Phi(2) - 1 = 2 - 0{,}977 - 1 = 0{,}9545$;
$P(m-3\sigma < X < m + 3\sigma) = \Phi(3) - \Phi(-3) - 2\Phi(3) - 1 = 2 - 0{,}999 - 1 = 0{,}9973$.

Это означает, что для нормально распределенной случайной величины, зная ее математическое ожидание и дисперсию, можно ориентировочно указать интервал ее практически возможных значений, а именно: $m \pm 3\sigma$. Такой способ оценки диапазона возможных значений случайной величины называется «правилом трех стандартов». Это правило используется в теории надежности для определения расчетных значений параметров конструкции.

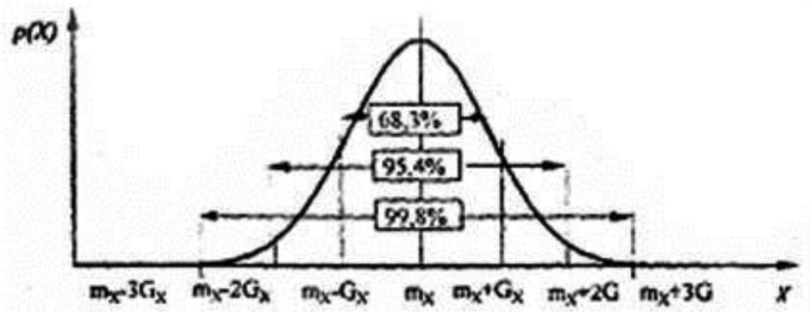


Рис.2.11. Правило трех стандартов

Пример 2.15. ***Статистический характер прочности.*** Прочность материалов конструкций, определяемая экспериментально по стандартной методике, имеет значительный разброс и, следовательно, является случайной величиной. Кривая распределения прочности асимметрична и ограничена снизу нулевым значением. Приближенно принимается, что прочность материалов распределена по нормальному закону. В современных нормах проектирования железобетонных конструкций учитывается случайная природа прочности бетона и стальной арматуры. Поэтому в расчет введено понятие «нормативная прочность», обладающая 95% обеспеченностью. Нормативная прочность бетона определяется по формуле:

$$R_{bn} = m_b - 1{,}64\sigma_b, \quad (2.61)$$

где m_b, σ_b – среднее и стандарт прочности бетона,

$$P(R_b < m_b - 1{,}64\sigma_b) = 1 - \Phi(1{,}64) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \quad (2.62)$$

.

Коэффициент вариации прочности бетона $v = \sigma_b / R_b$ не является постоянной величиной. Нормированное его значение зависит от уровня технологии производства бетона и является среднестатистическим для множества заводов по производству железобетонных изделий. Он принят равным 0,135. Нормативное сопротивление арматуры также соответствует 95%–ной обеспеченности

$$R_{sn} = m_s - 1{,}64\sigma_s\,, \tag{2.63}$$

где m_s , σ_s – среднее и стандарт прочности арматуры.

Характеристики прочности и нормированные значения коэффициентов вариации прочности арматуры даны в приведенной выше таблице.

Биномиальный закон распределения случайной величины. *Биномиальный закон распределения числа n появления события A* в m независимых опытах (наблюдениях, испытаниях). Если вероятность появления события A в одном испытании равна p, вероятность непоявления равна $q = 1 - p$, число независимых испытаний m, то вероятность появления n событий равна $P_m^n = C_m^n p^n (1-p)^{m-n}$, где $C_m{}^n$ – число сочетаний из m по n. *Свойства биномиального распределения* следующие: 1) математическое ожидание числа событий равно mp; 2) среднеквадратическое отклонение числа событий, $\sigma = \sqrt{mp(1-p)}$. При увеличении числа испытаний биномиальное распределение приближается к нормальному со средним значением n/m и дисперсией $p(1-p)/m$.

Закон Пуассона. Вероятность числа n случайных событий за время t определяется как: $P_n(t) = \dfrac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$, где λ (среднее число событий в единицу времени) – интенсивность появления случайного события; λt – среднее число событий за время t.

Свойства распределения Пуассона следующие: 1) математическое ожидание числа событий за время t равно λt; 2) среднеквадратическое отклонение числа событий $\sigma = \sqrt{\lambda t}$.

Характерный признак распределения Пуассона – равенство математического ожидания и дисперсии (используется для проверки степени соответствия исследуемого опытного распределения с распределением Пуассона).

Пример 2.16. Определить вероятность того, что за время t =100 ч произойдет 0 – 3 отказа, если $\lambda = 0{,}025$. Среднее число отказов за время t, $\lambda t = 2{,}5$. Из таблицы 1 (приложение) вероятность отсутствия отказов $P_0(100) = e^{-2,5} = 0{,}082$. Вероятность одного отказа $P_1(100) = \lambda t e^{-\lambda t} = 0{,}205$. Вероятность двух отказов $P_2(100) = [(\lambda t)^2/2!]\, e^{-2,5} = 0{,}256$. Вероятность трех отказов $[(\lambda t)^2/3!]e^{-2,5} = 0{,}131$. Распределение Пуассона получается из биномиального распределения, если число испытаний m неограниченно возрастает. Покажем это:

$P_m^n = \dfrac{m(m-1)(m-2)...(m-n+1)}{n!} p^n (1-p)^{m-n}$. Примем, что $a = mp$ – среднее число событий при m испытаниях, равное n; $p = n/m$ – вероятность событий в m испытаниях. Тогда $(1-n/m)^m = e^{-n} = e^{-mn/m} = e^{-a}$; $(1-n/m)^n = 1$; $m\,(m-1)\,(m-2)...(m-n+1) = mm(1-1/m)\,m(1-2/m)...= m^n$.

При таких допущениях формула может быть преобразована как:

$$P_m^n = \frac{mm(1-1/m)(m(1-2m))...m(1-(n-1)/m)}{n!} p^n (1-p)^{m-n} =$$

$$= \frac{(mp)^n}{n!}(1-\frac{n}{m})^{m-n} = \frac{a^n}{n!} \times \frac{(1-n/m)^m}{(1-n/m)^n} = \frac{a^n}{n!} e^{-a}\,. \tag{2.64}$$

Вероятность получить n событий за время t равна:

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}\,.$$

Экспоненциальный закон распределения случайной величины (рис.2.12). Функция распределения, $F(x) = 1 - e^{-\lambda ч}$. Плотность вероятности, $f(x) = \lambda\, e^{-\lambda ч}$. Интенсивность (среднее число событий в единицу времени), $\lambda = f(x)/1 - F(x) =$ const (числовые значения e^{-x} даны в табл. 1 приложений). Когда x – время до возникновения отказа, вероятность того, что за время t возникает отказ, $Q(t) = 1 - e^{-\lambda e}$, а $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ – плотность вероятности отказа в момент времени t. Вероятность того, что за время / отказ не возникает равна:

$$P(t) = 1 - Q(t) = e^{-\lambda t}. \tag{2.65}$$

Дисперсия и среднеквадратическое отклонение времени работы до возникновения отказа соответственно: $D(t)=\int\limits_0^\infty (t-T_1)^2 f(t)dt = 1/\lambda^2$ и $\sigma(t)=\sqrt{D(t)} = 1/\lambda = T_i$.

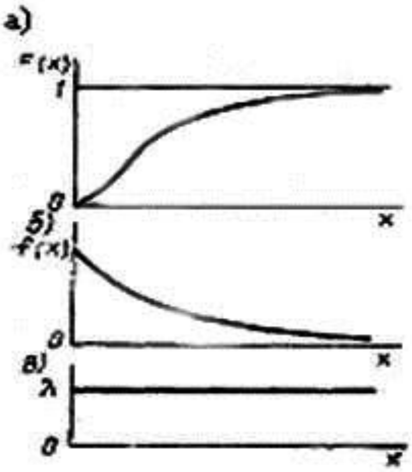


Рис. 12. Экспоненциальный закон распределения: *а* – интегральный; *б* – дифференциальный; *в* – параметр закона λ;

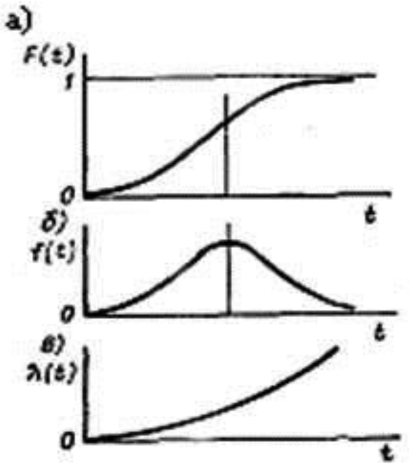


Рис. 13. Нормальный закон распределения случайной величины:
а – интегральный; *б* – ифферен–циальный; *в* – интенсивность

Равенство $\sigma(t) = T_i$ – характерный признак экспоненциального распределения. Статистические материалы об отказах типовых элементов конструкций свидетельствуют о том, что в основном время работы этих элементов для нормального периода эксплуатации, т. е. до возникновения износовых отказов, подчиняется экспоненциальному закону. Признаком экспоненциального закона распределения времени до отказа служит постоянство интенсивности отказов, что характерно для внезапных отказов на интервале времени, когда период приработки конструкции закончился, а период износа и старения еще не начался. Также постоянной становится интенсивность отказов объекта, если вызываются они отказами большого числа составляющих элементов, отказ каждого из которых приводит к отказу объекта. Этими обстоятельствами, а также тем, что предположение об экспоненциальном распределении времени до отказа изделия существенно упрощает расчеты надежности, не вызывая существенных погрешностей, объясняется широкое распространение экспоненциального закона в инженерной практике.

Биномиальный закон распределения, закон Пуассона, экспоненциальный и нормальный законы принадлежат к наиболее распространенным в прикладной теории надежности. Экспоненциальный закон и нормальный образуют своеобразные крайние положения: первый (экспоненциальный) имеет резко выраженный асимметричный характер *f(t)* и постоянное значение λ; второй (нормальный) – строго симметричный характер *f(t)* и монотонное возрастание *λ(t).* Инженерная практика встречается со значительно большим числом случаев, чем перечисленные два крайних случая. Укажем лишь некоторые из таких промежуточных распределений.

Закон γ – распределения случайной величины. Это распределение возникает тогда, когда имеет место своеобразное группирование числа случайных событий. Например, в случае, если отказ изделия наступает когда в нем произойдет k отказов элементов, а отказы элементов распределяются по экспоненциальному закону с интенсивностью λ_o. Такая ситуация, например, возникает при резервировании изделий. Здесь время до отказа изделия подчиняется закону γ – распределения. Плотность вероятности времени до отказа равна:

$$f(t)=\frac{\lambda_0^k t^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda_0 t}, \qquad (2.66)$$

где λ_o и k – соответственно интенсивность и число отказов элементов.

Это уравнение может быть получено из предположения о том, что имеет место пуассоновский закон распределения отказов. Тогда вероятность того, что число отказов n больше или равно k за время t, равна:

$$P_{n\geq k}(t) = 1 - \sum_{n=0} \frac{(\lambda_0 t)^n}{n!} e^{-\lambda_0 t}; \qquad f(t) = \frac{d}{dt}[P_{n\geq k}(t)] = \frac{\lambda_0^k t^{k-1}}{(k-1)!} e \cdot \quad (2.67)$$

Интенсивность отказов:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)} = \frac{\lambda_0}{(k-1)!} \times \frac{\lambda_0 (t)^{k-1}}{\sum 1/i} \cdot \quad (2.68)$$

Средняя наработка до отказа: $T_1 = kT_0$. Вероятность безотказной работы изделия за время t равна:

$$P(t) = e^{-\lambda_0 t} \sum_{i=0}^{k-1} 1/i!(\lambda_0 t)^i \cdot \quad (2.69)$$

При $k = 1$ γ –распределение совпадает с экспоненциальным распределением. При увеличении k характер γ – распределения приближается к нормальному распределению. γ – распределение является частным случаем χ^2 – распределения. Оно возникает при некоторых условиях формирования случайной величины. Например, если случайная величина t распределена по нормальному закону с параметрами $T = 0$, $\sigma = 1$, то $\sum_1^n t_i^2$ будет случайной величиной, распределенной по закону χ^2 – распределения, с параметром распределения $k = n$. Параметр k в данном случае равен числу слагаемых. Отношение удвоенного значения наработки на отказ к средней наработке, т. е. удвоенное число отказов, также подчиняется закону χ^2 – распределения. Формула для $f(x)/\chi^2$ – распределения имеет сложный вид. Для фактического использования χ^2–распределения разработаны специальные таблицы. Некоторые извлечения из них даны в табл.3 приложений.

Пример 2.17. Определить χ_1^2 для $T_н$ и χ_2^2 для $T_в$ при доверительной вероятности γ = 0,8 и чисел отказов 21: χ_1^2 (k = 44; α = 0,1) = 56,4; χ_2^2 (k = 42; α = 0,9) = 30,8. 5.

Вид кривых χ^2 – распределения показан на рис.2.14. Из рисунка видно, что форма кривых зависит от значения параметра k – числа степеней свободы. Чем меньше k, тем более χ^2 – распределение становится асимметричным и совпадает при некоторых значениях k с экспоненциальным: чем больше k_t тем больше оно приближается к нормальному распределению. При k = 30 его можно считать практически совпадающим с нормальным. Чтобы определить значение χ^2, пользуясь таблицей χ^2 – распределения, необходимо знать число степеней свободы k и p – вероятность того, что χ^2 будет больше найденного значения. Например, при $k = 3$ и $p = 0{,}9$ значение $\chi^2 = 0{,}584$.

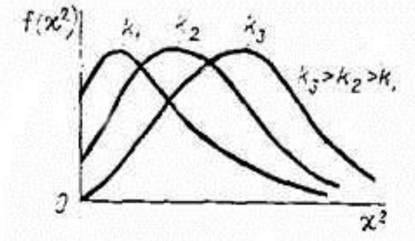


Рис.2.14. Графическое представление χ^2 – распределения (k – число степеней свободы)

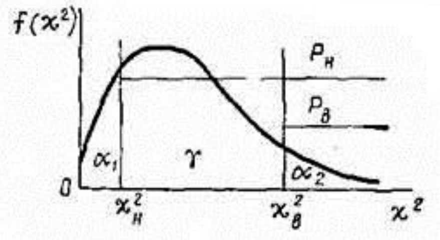
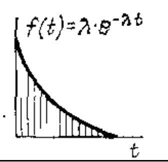
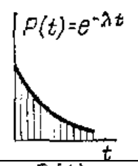
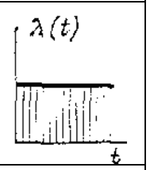
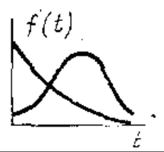
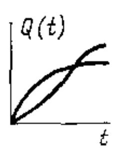
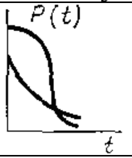
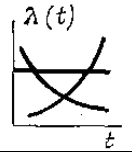
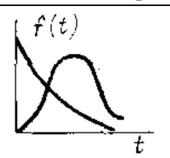
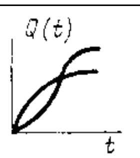
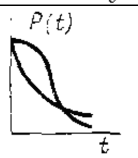
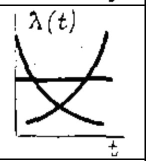
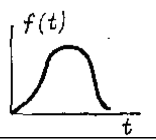
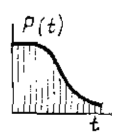
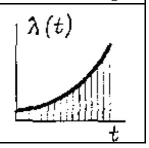


Рис.2.15. Графическое представление доверительного интервала случайной величины (по закону χ^2 – распределения: γ – доверительная вероятность; $P_Н$, $P_В$ – вероятности, определяющие границы доверии-тельного интервала

Значения k определяются по определенным правилам. Например, если в качестве χ^2 используется сумма квадратов $\sum_{1}^{n} t_i^2$, тогда для плотности распределения χ^2 числом степеней свободы k будет число слагаемых n. Если в качестве χ^2 используется $2t_р / T_0 = 2n$ (где t_p – суммарная наработка изделия; n – суммарное число отказов), тогда числом степеней свободы для $f(\chi^2)$ будет удвоенное число отказов ($k = 2n$). Значение P также выбирается по определенным правилам в каждом конкретном случае использования таблицы. Для случая, представленного на рис.2.15, значение P для нижнего значения $P_и$ определяется по формуле $P_н = (1+ \gamma)/2$; для верхнего – по формуле $P_в = (1 - \gamma) / 2$, где γ – заданная доверительная вероятность.

Таблица 2.3

Сводный перечень сведений о законах распределения случайных величин

Определение	Законы распределения			Параметр
	f(t)	Q(t)	P(t)	λ(t)
Экспоненциальный				
γ распределение				
Вейбула				
Нормальный				

Распределение Вейбулла – распределение, промежуточное между нормальным и экспоненциальным. Оно удобно для подбора наиболее подходящего выражения для опытного распределения. Плотность вероятности времени до отказа по этому распределению равна: $f(t) = \lambda_о \alpha t^{\alpha - 1} e^{-\lambda_0 t^\alpha}$, где γ_0, α – параметры закона распределения.

Вероятность отсутствия отказа за время t равна: $P(t) = e^{-\lambda_0 t^\alpha}$.

Интенсивность отказов равна: $\lambda = \lambda_о \alpha t^{\alpha - 1}$.

Если $\alpha = 1$, то $f(t) = \lambda_о e^{-\lambda_0 t^\alpha}$, т. е. распределение Вейбулла совпадает с экспоненциальным распределением, у которого $\lambda = \lambda_о$.

Если $\alpha < 1$, то интенсивность отказов является монотонно убывающей функцией. Если $\alpha > 1$, то интенсивность отказов – это монотонно возрастающая функция.

Распределение Вейбулла для времени до отказа изделия возникает обычно тогда, когда имеют место отказы различной физической природы (износ, старение, механические перегрузки и т. п.). Сводный перечень сведений о законах распределения случайных величин дан в табл.2.3.

Рекомендуемая литература

1. Авиром Л. С. Надежность конструкций сборных зданий и сооружений. Л.: Стройиздат, 1971. – 215 с.
2. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 567 с.
3. Винниченко Ю. С., Паншин С. Д. Введение в проектирование сложных технических систем. – М.: Изд. МГТУ, 1993. – 82 с.

4. Голинкевич Т. А. Прикладная теория надежности. – М.: Высшая школа, 1985. – 168 с.

5. Гнеденко В. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д. Математические методы в теории надежности. М., Наука, 1965.

6. Иосилевский Л. И. Практические методы управления надежностью железобетонных мостов.–М.: Науч. – изд. центр «Инженер», 1999, – 295 с.

7. Лужин О. В. Вероятностные методы расчета сооружений. – М.: Стройиздат, 1983. – 94 с.

8. Ржаницин А.Р.Теория расчета строительных конструкций на надежность.– М.Стройиздат, 1978, 239 с.

9. Ройтман А. Г. Надежность конструкций эксплуатируемых зданий. – М.: Стройиздат, 1985. – 175 с.

10. Чирков В. П. Вероятностные методы расчета мостовых железобетонных конструкций, – М.: Транспорт, 1980. – 128с.

11. Надежность в технике. Основные понятия. Термины и определения. – ГОСТ 27.002 – 89.

Приложение

Таблица 1

Таблица значений функций $y = e^{-x}$

x	y	x	y	x	y	x	y
0,0	1,000	0,40	0,670	0,80	0,449	3,00	0,050
0,1	990	41	664	81	445	10	045
02	980	42	657	82	440	20	041
03	970	43	650	83	436	30	037
04	961	44	644	84	432	40	033
05	951	45	638	85	427	50	030
06	942	46	631	86	423	60	027
07	932	47	625	87	419	70	025
08	923	48	619	88	415	80	022
09	914	49	613	89	411	90	020
10	905	50	606	90	407	4,00	0183
11	896	51	600	91	403	10	0166
12	887	52	595	92	399	20	0150
13	878	53	589	93	395	30	0136
14	869	54	583	94	391	40	0123
15	861	55	577	95	387	50	0111
16	852	56	571	96	383	60	0101
17	844	57	565	97	379	70	0091
18	835	58	560	98	375	80	0082
19	827	59	554	99	372	90	0074
20	819	60	549	1,00	368	5,00	0067
21	811	61	543	10	333	10	0061
22	803	62	538	20	302	20	0055
23	795	63	533	30	273	30	0050
24	787	64	527	40	247	40	0045
25	779	65	522	50	223	50	0041
26	771	66	517	60	202	60	0037
0,27	0,763	0,67	0,512	1,70	0,183	5,70	0,0033
28	756	68	507	80	165	80	0030
29	748	69	502	90	150	90	0027
30	741	70	497	2,00	135	6,00	0025
31	733	71	492	10	122	10	0022
32	726	72	487	20	11	20	0020
33	719	73	482	30	100	30	0018

34	712	74	477	40	091	40	0017
35	705	75	472	50	082	50	0015
36	698	76	468	60	074	60	0014
37	692	77	463	70	067	70	0012
38	684	78	458	80	061	80	0011
39	677	79	454	90	055	90	0010
40	670	80	449	3,00	050	7,00	0009

Таблица 2

Значения нормальной функции распределения

$$F(t) = 0{,}5 + \Phi(u); \quad \Phi(u) = 1/\sqrt{2\pi}\int_0^u \exp(-u^2/2)\,du$$

u	F(t)	u	F(t)	u	F(t)
–0,00	0,500	–1,60	0,055	0,80	0,788
–0,10	0,460	–1,70	0,44	0,90	0,816
–0,20	0,420	–1,80	0,36	1,00	0,841
–0,30	0,382	–2,00	0,023	1,20	0,885
–0,40	0,344	–2,20	0,014	1,30	0,903
–0,50	0,308	–2,40	0,008	1,40	0,919
–0,60	0,274	–2,60	0,005	1,50	0,933
–0,70	0,242	–2,80	0,003	1,60	0,945
–0,80	0,212	–3,00	0,001	1,70	0,955
–0,90	0,184	0,10	0,540	1,80	0,964
–1,00	0,159	0,20	0,579	2,00	0,977
–1,10	0,136	0,30	0,618	2,20	0,986
–1,20	0,115	0,40	0,655	2,40	0,9918
–1,30	0,097	0,50	0,691	2,60	0,995
–1,40	0,080	0,60	0,726	2,80	0,997
–1,50	0,067	0,70	0,758	3,00	0,999

Таблица 3

Значения χ^2 в зависимости от k и α

k	α								
	0,99	0,95	0,90	0,80	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05
1	0,000	0,004	0,016	0,064	0,455	1,074	1,642	2,71	3,84
2	0,020	0,103	0,211	0,446	1,386	2,41	3,22	4,60	5,99
3	0,115	0,352	0,584	1,005	2,37	3,66	4,64	6,25	7,82
4	0,297	0,711	1,064	1,649	2,36	4,88	5,99	7,78	9,49
5	0,554	1,145	1,610	2,34	4,35	6,06	7,29	9,24	11,07
6	0,872	1,635	2,20	3,07	5,35	7,23	8,56	10,64	12,59
7	1,239	2,17	2,83	3,82	6,35	8,38	9,80	12,02	14,07
8	1,646	2,73	3,49	4,59	7,34	9,52	11,03	13,36	15,51
9	2,09	3,32	4,17	5,38	8,34	10,66	12,24	14,68	16,92
10	2,56	3,94	7,86	6,16	9,34	11,78	13,44	15,99	18,31
15	5,23	7,26	8,55	10,3	14,3	17,3	19,3	22,3	25,0
20	8,26	10,9	12,4	14,6	19,3	22,8	25,0	28,4	31,4
30	15,0	18,5	20,6	23,4	29,3	33,5	36,3	40,3	43,8
40	22,2	26,5	29,1	32,3	39,3	44,2	47,3	52,0	55,8
42	23,7	28,1	30,8	34,2	41,3	46,3	49,5	54,1	58,1
44	25,1	29,8	35,5	36,0	43,3	48,4	51,6	56,4	60,5
50	29,7	34,8	37,7	41,4	49,3	54,7	58,2	63,2	67,5

Примечание. k – число степеней свободы, α –вероятность того, что $x^я$ принимает значение больше указанного в таблице.

Содержание

А. А.АШРАБОВ, Ч. С. РАУПОВ

Основные определения и
количественные показатели
надежности строительных систем

Редактор: **Т.И.Умурзакова**
Разрешено в печать ____________ Объём печ. л. 5,1
Формат бумаги 60х84 1/16, заказ №____ Тираж ____экз.
Тиражировано в типографии ТашИИТа.
Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта
Адрес: 700167, Ташкент–167, ул. Адылходжаева, 1, ТашИИТ.