

**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ
УЗБЕКИСТАН**

**ТАШКЕНТСКИЙ ФИНАНСОВЫЙ ИНСТИТУТ
КАФЕДРА «ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ»**

**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3
ПО КУРСУ
«ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И
МОДЕЛИ»**

Тузувчи: и.ф.д., проф. О.Кенжабоев

ТАШКЕНТ-2010

3. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3

“АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ОДНОИНДЕКСНЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ”

3.1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Приобретение навыков анализа чувствительности задач ЛП на основе различных типов отчетов, выдаваемых Microsoft Excel, о результат поиска решения.

3.2. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Для задачи, решенной в лабораторной работе № 2 (часть I) , получите в Excel все типы отчетов по результатам поиска решения, необходимые для анализа чувствительности.
2. Проанализируйте задачу на чувствительность к изменениям параметров исходной модели.
3. Результаты анализа задачи на чувствительность внесите в общий отчет по лабораторной работе № 2.

3.3. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ [5, 6, 7]

3.3.1. Задачи анализа оптимального решения на чувствительность

На практике многие экономические параметры (цены на продукцию и сырье, запасы сырья, спрос на рынке, заработная плата и т.д.) с течением времени меняют свои значения. Поэтому оптимальное решение задачи ЛП, полученное для конкретной экономической ситуации, после ее изменения может оказаться непригодным или неоптимальным. В связи с этим возникает задача **анализа чувствительности** задачи ЛП, а именно того, как возможные изменения параметров исходной модели повлияют на полученное ранее оптимальное решение.

Ограничения линейной модели классифицируются следующим образом (рис. 3.1). **Связывающие** ограничения проходят через оптимальную точку, например (1) и (2). **Несвязывающие** ограничения не проходят через оптимальную точку, например (3), (4) и (5). Аналогично ресурс, представляемый связывающим ограничением, называют **дефицитным**, а ресурс, представляемый несвязывающим ограничением, – **недефицитным**. Ограничение называют **избыточным** в том случае, если его исключение не влияет на область допустимых решений и, следовательно, на оптимальное решение, например, (5). Выделяют следующие три задачи анализа на чувствительность.

1. Анализ сокращения или увеличения ресурсов:

1) на сколько можно увеличить (ограничения типа \leq) или уменьшить (ограничения типа \geq) запас **дефицитного** ресурса для улучшения оптимального значения ЦФ?

2) на сколько можно уменьшить (ограничения типа \leq) или увеличить (ограничения типа \geq) запас **недефицитного** ресурса при сохранении полученного оптимального значения ЦФ?

2. **Увеличение (уменьшение) запаса какого из ресурсов наиболее выгодно?**

3. **Анализ изменения целевых коэффициентов:** каков диапазон изменения коэффициентов ЦФ, при котором не меняется оптимальное решение?

3.3.2. Графический анализ оптимального решения на чувствительность

Область допустимых решений задачи на рис. 3.1 – многоугольник OABCDE. Если *связывающее* ограничение (дефицитный ресурс) (2) передвигать до точки F, то это приведет к расширению области допустимых решений до многоугольника OABCFE и к получению нового оптимального решения в точке F. При этом ограничение (2) станет избыточным. Новое решение (F) лучше прежнего (C), поскольку для пересечения с точкой F линия ЦФ должна пройти по направлению вектора (выходящего из начала координат и показывающего направление максимизации ЦФ) дальше точки C (рис. 3.2).

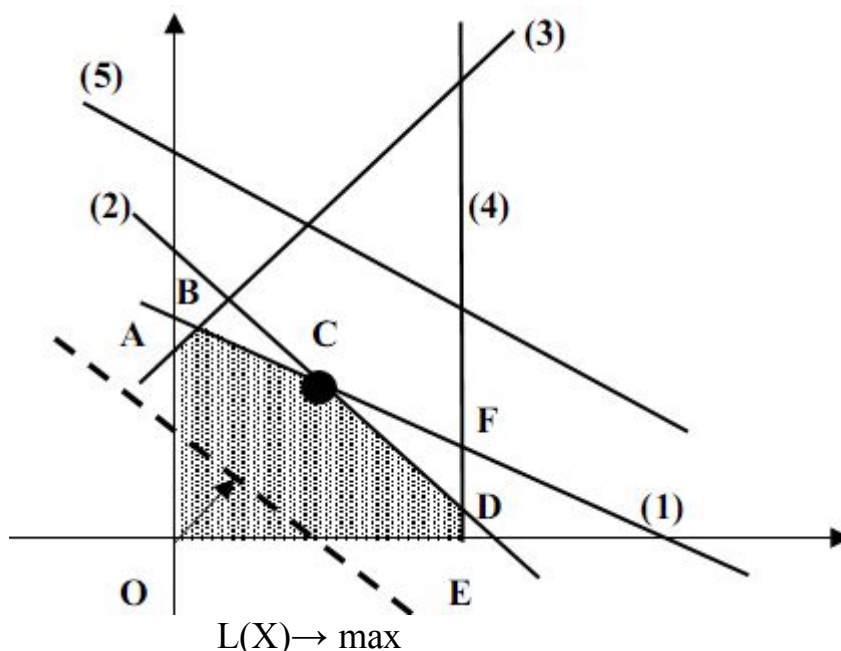


Рис. 3.1. Исходная задача ЛП для графического анализа чувствительности

(3)

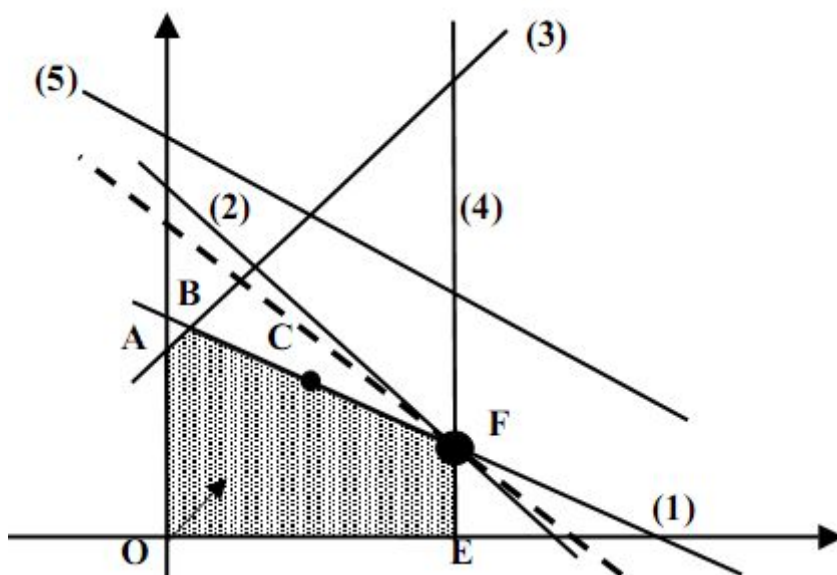


Рис. 3.2. Анализ максимального изменения запаса дефицитного ресурса (2) с целью улучшения оптимального решения $C \rightarrow F$

Таким образом, **чтобы** графически определить максимальное изменение запаса дефицитного ресурса, улучшающее оптимальное решение, **необходимо** передвигать соответствующую прямую в направлении улучшения ЦФ до тех пор, пока это ограничение не станет **избыточным**.

Графический анализ максимально возможного изменения запаса недефицитного ресурса показан на рис. 3.3. Передвинем несвязывающее ограничение (3) до пересечения с оптимальным решением в точке С.

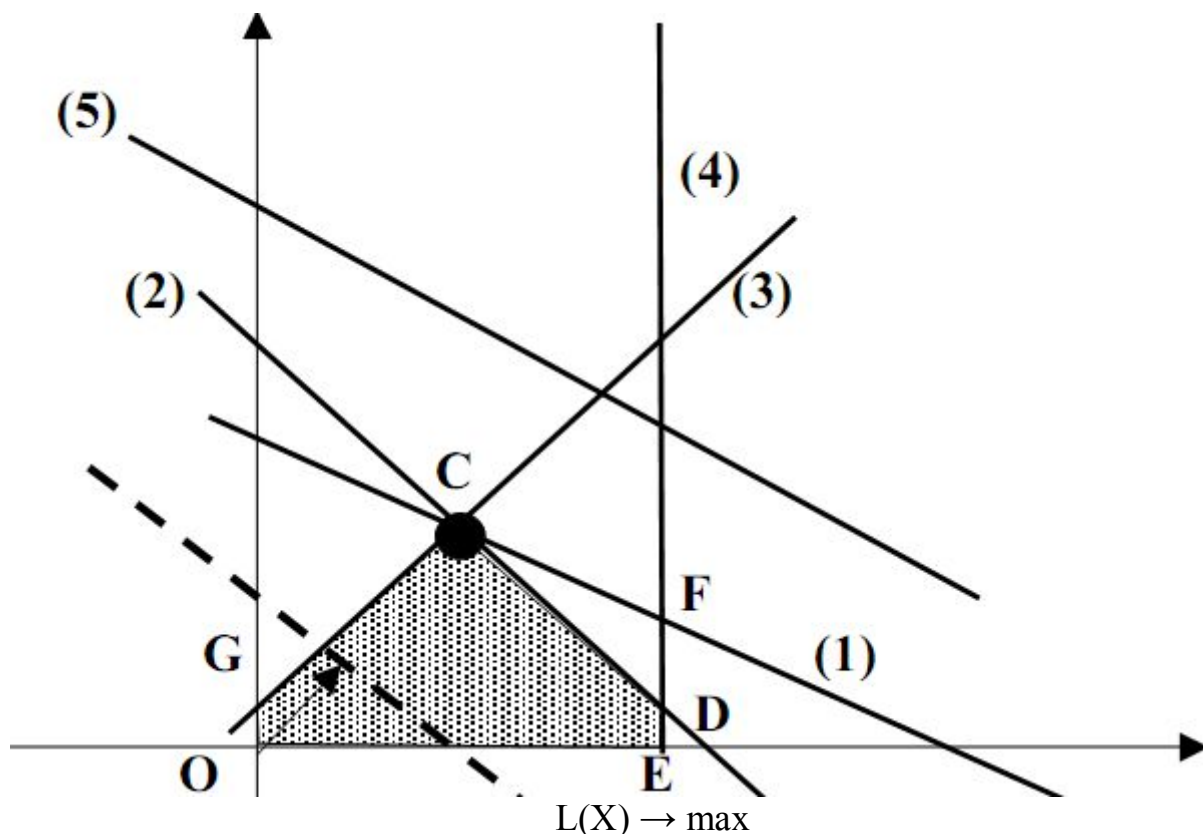


Рис. 3.3. Анализ максимального изменения запаса недефицитного ресурса (3), не изменяющего оптимальное решение С

Это соответствует уменьшению запаса недефицитного ресурса (3), который в оптимальной точке С исходной задачи (см. рис. 3.1) расходовался не полностью. Областью допустимых решений станет многоугольник OGCDE. Оптимальное решение останется прежним (точка С). Таким образом, **чтобы графически определить максимальное изменение запаса недефицитного ресурса, не меняющее оптимального решения, необходимо передвигать соответствующую прямую до пересечения с оптимальной точкой.**

Для того чтобы выяснить, запас какого из дефицитных ресурсов выгоднее увеличивать в первую очередь, необходимо определить, какую пользу (например, прибыль) принесет увеличение запасов каждого из них на единицу. Для этих целей вводится понятие **ценности дополнительной единицы i-го ресурса** (теневая цена):

$$y_i = \frac{\text{max приращение оптимального значения } L(X)}{\text{max допустимый прирост объема } i\text{-го ресурса}}.$$

То есть сначала наращивается запас ресурса, имеющего максимальное значение y_i , затем – второе по величине и т.д.

Графический анализ изменения целевых коэффициентов (например, цен на производимую продукцию), не приводящих к изменению

оптимального решения, проводится путем вращения линии ЦФ. При увеличении коэффициента ЦФ c_1 или уменьшении коэффициента c_2 целевая прямая на графике вращается вокруг оптимальной точки по часовой стрелке. Если c_1 уменьшается или же увеличивается c_2 , то целевая прямая вращается вокруг оптимальной точки против часовой стрелки (рис. 3.4).

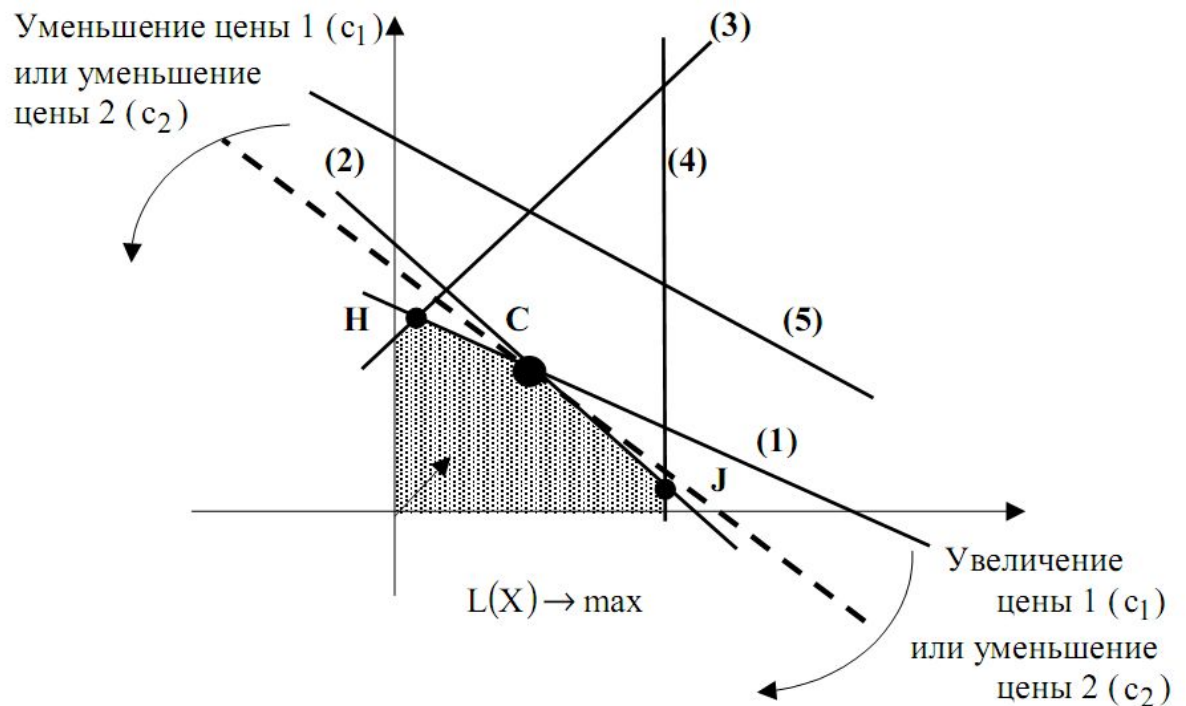


Рис. 3.4. Анализ изменения коэффициентов c_1 и c_2 ЦФ

Зафиксируем значение c_2 . Оптимальное решение в точке C не будет меняться при увеличении c_1 до тех пор, пока целевая прямая не совпадет с прямой (2). Аналогично оптимальное решение в точке C не будет меняться при уменьшении c_1 до тех пор, пока целевая прямая не совпадет с прямой (1).

При таких поворотах точка C будет оставаться оптимальной до тех пор, пока наклон целевой прямой не выйдет за пределы, определяемые наклоном прямых ограничений (1) и (2). Если целевая прямая выйдет за пределы наклона (1) или (2), то оптимальной станет соответственно точка H или J.

Таким образом, нижний и верхний пределы изменения цены 1 определяются значениями коэффициента c_1 , при которых наклон целевой прямой совпадает соответственно с наклонами прямых ограничений (1) и (2).

3.3.3. Анализ оптимального решения на чувствительность в Excel

Проведем анализ чувствительности задачи о мебельном комбинате из лабораторной работы №2 (часть I). Для этого необходимо после запуска в Excel задачи на решение в окне "Результаты поиска решения" выделить с помощью мыши два типа отчетов: "Результаты" и "Устойчивость" (рис. 3.5).

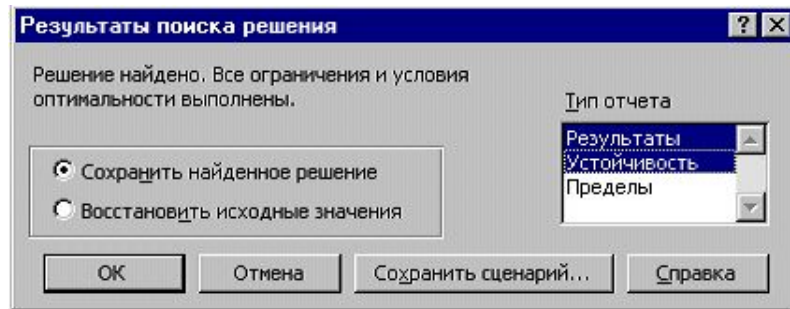


Рис. 3.5. Выделение типов отчетов требуемых для анализа чувствительности

3.3.3.1. Отчет по результатам

Отчет по результатам состоит из трех таблиц (рис. 3.6):

- 1) таблица 1 содержит информацию о ЦФ;
- 2) таблица 2 содержит информацию о значениях переменных, полученных в результате решения задачи;
- 3) таблица 3 показывает результаты оптимального решения для ограничений и для граничных условий.

Microsoft Excel - Пример_4.xls

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно ?

| A | B | C | D | E | F | G |
|----|---------------------------|--------------------------------------|-------------|------------------|------------|-------------|
| 1 | Целевая ячейка (Максимум) | | | | | |
| 2 | Ячейка | Имя | Исходно | Результат | | |
| 3 | \$F\$6 | Козф. ЦФ Значение | 0 | 106200 | | |
| 4 | Изменяемые ячейки | | | | | |
| 5 | Ячейка | Имя | Исходно | Результат | | |
| 6 | \$B\$3 | Значение XA | 0 | 1100 | | |
| 7 | \$C\$3 | Значение XB1 | 0 | 0 | | |
| 8 | \$D\$3 | Значение XB2 | 0 | 120 | | |
| 9 | Ограничения | | | | | |
| 10 | Ячейка | Имя | Значение | формула | Статус | Разница |
| 11 | \$F\$21 | Заказ на полки B2 Лев. часть | 120 | \$F\$21>=\$H\$21 | не связан. | 70 |
| 12 | \$F\$22 | Доля продаж Лев. часть | 488 | \$F\$22>=\$H\$22 | не связан. | 468 |
| 13 | \$F\$10 | ФВ по столярн. раб. Лев. часть | 4400 | \$F\$10<=\$H\$10 | не связан. | 2640 |
| 14 | \$F\$11 | ФВ по упаковке Лев. часть | 93,33333333 | \$F\$11<=\$H\$11 | не связан. | 2370,666667 |
| 15 | \$F\$12 | ФВ по покрыт. лаком Лев. часть | 110 | \$F\$12<=\$H\$12 | не связан. | 44 |
| 16 | \$F\$13 | ФВ по раскрою стекла Лев. часть | 12,2 | \$F\$13<=\$H\$13 | не связан. | 152,8 |
| 17 | \$F\$14 | ФВ по произв. компл. B Лев. часть | 40 | \$F\$14<=\$H\$14 | не связан. | 122,8 |
| 18 | \$F\$15 | По компл. раскрою ДСП (Y) Лев. часть | 120 | \$F\$15<=\$H\$15 | не связан. | 3267 |
| 19 | \$F\$16 | Расход ДВП Лев. часть | 120 | \$F\$16<=\$H\$16 | не связан. | 3100 |
| 20 | \$F\$17 | Расход стекла Лев. часть | 2440 | \$F\$17<=\$H\$17 | не связан. | 160 |
| 21 | \$F\$18 | Емкость сушилки Лев. часть | 1100 | \$F\$18<=\$H\$18 | связанное | 0 |
| 22 | \$F\$19 | Емкость склада Лев. часть | 1220 | \$F\$19<=\$H\$19 | связанное | 0 |
| 23 | \$F\$20 | Емкость рынка Лев. часть | 1220 | \$F\$20<=\$H\$20 | не связан. | 4080 |
| 24 | \$B\$3 | Значение XA | 1100 | \$B\$3>=\$B\$4 | не связан. | 1100 |
| 25 | \$C\$3 | Значение XB1 | 0 | \$C\$3>=\$C\$4 | связанное | 0 |
| 26 | \$D\$3 | Значение XB2 | 120 | \$D\$3>=\$D\$4 | не связан. | 70 |

Лист1 Отчет по результатам 8 Отчет по устойчивости 5

Рис. 3.6. Лист отчета по результатам

Если ресурс используется полностью (то есть ресурс дефицитный), то в графе "Статус" ("Состояние") соответствующее ограничение указывается как "связанное"; при неполном использовании ресурса (то есть ресурс недефицитный) в этой графе указывается "не связан". В графе "Значение" приведены величины использованного ресурса.

Для граничных условий (строки 24, 25, 26 на рис. 3.6) в графе "Разница" показана разность между значением переменной в найденном оптимальном решении и заданным для нее граничным условием.

Таблица 3 отчета по результатам дает информацию для анализа возможного изменения запасов *недефицитных* ресурсов при сохранении полученного оптимального значения ЦФ. Так, если на ресурс наложено ограничение типа \geq , то в графе "Разница" дается количество ресурса, на которое была превышена минимально необходимая норма. Например, анализ строки 26 (см. рис. 3.6) отчета по результатам для задачи о мебельном комбинате показывает, что полок выпущено на 70 шт. больше, чем было заказано. То есть из 120 полок только 70 шт. пойдут в свободную продажу. Таким образом, можно дать следующий ответ на вопрос об изменении запаса недефицитного ресурса "Значение XB2": *обязательный заказ на производство полок B_2 можно увеличить на 70 шт., то есть заказывать до 120 шт., и при этом оптимальное решение (2.20) задачи не изменится.*

Если на ресурс наложено ограничение типа \leq , то в графе "Разница" дается количество ресурса, которое не используется при реализации оптимального решения. Так, анализ строки 13 (см. рис. 3.6) отчета по результатам для задачи о мебельном комбинате показывает, что время столярных работ составило 4440 ч. Неизрасходованным остается 2640 ч из общего фонда времени, отведенного на столярные работы. Из этого следует, что запас недефицитного ресурса "Фонд времени по столярным работам" *можно уменьшить на 2640 ч и это никак не повлияет на оптимальное решение (2.20).* Отсюда следует, что количество столяров можно уменьшить на 15 человек

$$\frac{2640 \text{ ч./мес.}}{8 \text{ ч./чел.см} \cdot 1 \text{ см./дн.} \cdot 22 \text{ дн./мес.}} = 15 \text{ чел.}$$

или перевести их на выпуск другой продукции.

Анализ строки 23 показывает, что общее количество выпускаемых полок составляет 1220 шт., что меньше предполагаемой емкости рынка на 4080 шт. *То есть запас недефицитного ресурса "Емкость рынка" может быть уменьшен до 1220 полок и это никак не повлияет на оптимальное решение (2.20).* Другими словами, уменьшение спроса до 1220 полок в месяц никак не скажется на оптимальных объемах выпуска полок.

На основании проведенного анализа можно сделать вывод о том, что существуют причины (ограничения), не позволяющие мебельному комбинату выпускать большее количество полок и получать большую прибыль. Проанализировать эти причины позволяет отчет по устойчивости.

3.3.3.2. Отчет по устойчивости

Отчет по устойчивости состоит из двух таблиц (рис. 3.7).

Таблица 1 содержит информацию, относящуюся к переменным.

1. Результат решения задачи.

2. Нормированная стоимость, которая показывает, на сколько изменится значение ЦФ в случае принудительного включения единицы этой продукции в оптимальное решение. Например, в отчете по устойчивости для рассматриваемой задачи (см. рис. 3.7) нормированная стоимость для полок B_1 равна -20 сум./шт. (строка 5). Это означает, что если мы, несмотря на оптимальное решение (2.20), потребуем включить в план выпуска 1 полку B_1 , то новый план выпуска ($x_A = 1100$; $x_{B_1} = 1$; $x_{B_2} = 119$) принесет нам прибыль 106 180 сум./мес., что на 20 сум. меньше, чем в прежнем оптимальном решении.

3. Коэффициенты ЦФ.

4. Предельные значения приращения целевых коэффициентов Δc_j , при которых сохраняется первоначальное оптимальное решение. Например, допустимое увеличение цены на полки B_1 равно 20 сум./шт., а допустимое уменьшение – практически не ограничено (строка 5 на рис. 3.7). Это означает, что если цена на полки B_1 возрастет более чем на 20 сум./шт., например станет равной 61 сум./шт., то оптимальное решение изменится: станет целесообразным выпуск B_1 в количестве 70 шт. А если их цена будет снижаться вплоть до нуля, то оптимальное решение (2.20) останется прежним.

| Изменяемые ячейки | | Результ. значение | Нормир. стоимость | Целевой Коэффициент | Допустимое Увеличение | Допустимое Уменьшение |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|---------------------|-----------------------|-----------------------|
| Ячейка | Имя | | | | | |
| \$B\$3 | Значение x_A | 1100 | 0 | 90 | 1E+30 | 30 |
| \$C\$3 | Значение x_{B1} | 0 | -20 | 40 | 20 | 1E+30 |
| \$D\$3 | Значение x_{B2} | 120 | 0 | 60 | 30 | 20 |

| Ограничения | | Результ. значение | Теневая Цена | Ограничение Правая часть | Допустимое Увеличение | Допустимое Уменьшение |
|-------------|--------------------------------------|-------------------|--------------|--------------------------|-----------------------|-----------------------|
| Ячейка | Имя | | | | | |
| \$F\$21 | Заказ на полки B2 Лев. часть | 120 | 0 | 90 | 70 | 1E+30 |
| \$F\$22 | Доля продаж Лев. часть | 468 | 0 | 20 | 468 | 1E+30 |
| \$F\$10 | ФВ по столари. раб. Лев. часть | 4400 | 0 | 7040 | 1E+30 | 2640 |
| \$F\$11 | ФВ по упаковке Лев. часть | 93,33333333 | 0 | 2464 | 1E+30 | 2370,666667 |
| \$F\$12 | ФВ по покр. лаком Лев. часть | 110 | 0 | 154 | 1E+30 | 44 |
| \$F\$13 | ФВ по раскрою стекла Лев. часть | 12,2 | 0 | 165 | 1E+30 | 152,8 |
| \$F\$14 | ФВ по произв. компл. В Лев. часть | 40 | 0 | 162,8 | 1E+30 | 122,8 |
| \$F\$15 | По компл. раскрою ДСП (Y) Лев. часть | 120 | 0 | 3387 | 1E+30 | 3267 |
| \$F\$16 | Расход ДВП Лев. часть | 120 | 0 | 3220 | 1E+30 | 3100 |
| \$F\$17 | Расход стекла Лев. часть | 2440 | 0 | 2600 | 1E+30 | 160 |
| \$F\$18 | Емкость сушилки Лев. часть | 1100 | 30 | 1100 | 70 | 368,4 |
| \$F\$19 | Емкость склада Лев. часть | 1220 | 60 | 1220 | 80 | 70 |
| \$F\$20 | Емкость рынка Лев. часть | 1220 | 0 | 5300 | 1E+30 | 4080 |

Рис. 3.7. Отчет по устойчивости для задачи о мебельном комбинате

Примечание 3.1. При выходе за указанные в отчете по устойчивости пределы изменения цен оптимальное решение может меняться как по номенклатуре выпускаемой продукции, так и по объемам выпуска (без изменения номенклатуры).

Таблица 2 (см. рис. 3.7) содержит информацию, относящуюся к ограничениям.

1. Величина использованных ресурсов в колонке **"Результ. значение"**.

2. Предельные значения приращения ресурсов Δb_i . В графе **"Допустимое Уменьшение"** показывают, на сколько можно уменьшить (устранить излишек) или увеличить (повысить минимально необходимое требование) ресурс, сохранив при этом оптимальное решение. Рассмотрим анализ дефицитных ресурсов, так как анализ недефицитных ресурсов был дан в подразд. 3.3.3.1. Анализируя отчет по результатам, мы установили, что существуют причины (ограничения), не позволяющие мебельному комбинату выпускать большее, чем в оптимальном решении, количество полок и получать более высокую прибыль. В рассматриваемой задаче (вариант 0) такими ограничениями являются дефицитные ресурсы "Емкость сушилки" и "Емкость склада готовой продукции". Поскольку знак ограничений этих запасов имеет вид \leq , то возникает вопрос, на сколько максимально должна возрасти емкость этих помещений, чтобы обеспечить увеличение выпуска продукции. Ответ на этот вопрос показан в графе **"Допустимое Увеличение"**. Емкость сушилки имеет смысл увеличить самое большее на 70 полок, а емкость склада готовой продукции – на 80 полок. Это приведет к новым оптимальным решениям, увеличивающим прибыль по сравнению с (2.20). Дальнейшее увеличение емкостей сушилки и склада сверх указанных пределов не будет больше улучшать решение, т.к. уже другие ресурсы станут связывающими.

3. Ценность дополнительной единицы i -го ресурса (теневая цена) рассчитывается только для дефицитных ресурсов. После того как мы установили, что увеличение емкостей сушилки и склада приведет к новым планам выпуска, обеспечивающим более высокую прибыль, возникает следующий вопрос. Что выгоднее в первую очередь расширять: сушилку или склад? Ответ на этот вопрос дает графа **"Теневая цена"**. Для емкости сушилки она равна 30 сум./шт., а для склада – 60 сум./шт. (см. рис.3.7), то есть каждая полка, которую дополнительно можно будет поместить в сушилку, увеличит прибыль на 30 сум., а каждая полка, которую дополнительно можно будет поместить на склад, увеличит прибыль на 60 сум. Отсюда вывод: в первую очередь выгодно увеличивать емкость склада готовой продукции.

3.4. ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ НА ЗАЩИТЕ РАБОТЫ

1. Что такое связывающие, несвязывающие, избыточные ограничения; дефицитные и недефицитные ресурсы?
2. Каковы предпосылки и основные задачи анализа оптимального решения на чувствительность?
3. Как графически проводится анализ изменения запаса дефицитных ресурсов?
- 4*. Каким образом, опираясь на результаты графического анализа, можно численно рассчитать новый (улучшенный) запас дефицитного ресурса?
5. Как графически проводится анализ изменения запаса недефицитных ресурсов?
- 6*. Каким образом, опираясь на результаты графического анализа, можно численно рассчитать новый запас недефицитного ресурса?
7. Что такое ценность дополнительной единицы i -го ресурса?
8. Как проводится графический анализ изменения коэффициентов ЦФ?
- 9*. Как численно определить диапазон изменения коэффициентов ЦФ, не изменяющий оптимального решения?
10. Какую информацию о чувствительности оптимального решения задачи ЛП можно получить из отчета по результатам и отчета по устойчивости?
11. Проанализируйте на чувствительность задачу о производстве полок (согласно своему варианту)?