АШРАБОВ А. А., РАУПОВ Ч. С.

МЕТОДЫ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСЧЕТОВ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Ташкент – 2005

ГАЖК «УЗБЕКИСТОН ТЕМИР ЙУЛЛАРИ»

ТАШКЕНТСКИЙ ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРОВ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

Кафедра «Мосты и тоннели»

АШРАБОВ А. А., РАУПОВ Ч. С.

МЕТОДЫ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСЧЕТОВ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Учебное пособие

Ташкент – 2005

УДК 624. 046:5(075.8)

В учебном пособии рассмотрена вероятностная сущность расчетов надежности сооружений как сложных систем, дана полувероятностная интерпретация нормативных расчетов. Приведены статистические параметры нагрузок, воздействий среды и прочности материалов. Показано назначение нормативных нагрузок с учетом коэффициентов вариации временных автомобильных и железнодорожных нагрузок, коэффициенты вариации постоянных нагрузок и воздействий; даны статистические параметры прочности бетона. Показано взаимодействие элементов в строительных системах и изложены основы расчетов надежности с использованием математического аппарата теории вероятностей. Отдельно рассмотрены основы расчетов надежности конструкций с использованием метода статистических испытаний (метод Монте–Карло) с решением примеров из практики проектирования. Намечены перспективные тенденции на пути вероятностной интерпретации нормативных расчетов конструкций.

Учебное пособие предназначено для бакалавров направлений 5А580200-Строительство зданий и сооружений (Транспортное строительство), 5А580400 – Строительство инженерных сетей, 5580600 – Эксплуатация искусственных сооружений, 5140900 – Педагогическое образование и магистрантов специальностей 5А580212 –Мосты и транспортные тоннели, 5А580603 – Эксплуатация мостов и транспортных тоннелей, 5А580204 – Проектирование, строительство зданий и сооружений и аспирантов строительных факультетов и ВУЗов, и может быть использовано инженерно-техническими работниками научных и проектных организаций.

Рисунки – 20; таблицы – 10; библиографии – 14 наим.

Составители: **А.А.Ашрабов**, д.т.к, проф., **Ч.С.Раупов**, к.т.н, доц.,

Рецензенты: **А.А.Ишанходжаев** – д.т.н., проф. Каф. «Мосты и транспортные тоннели» ТАДИ, **Н.А.Красин** – к.т.н., доц. каф. «Мосты и тоннели» ТашИИТ.

Учебное пособие одобрено на заседании кафедры «Мосты и тоннели» и утверждено учебно–методическим советом Строительного факультета.

Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта , 2005 г.

1. Введение

Обычный, детерминистический подход к расчету конструкций состоит, в сущности, из двух этапов. На первом этапе вычисляются напряжения, деформации и перемещения в конструкциях, подверженных действию внешних нагрузок, или вычисляются некоторые предельные значения этих нагрузок. Решению этой задачи служат методы строительной механики, теории упругости, теории пластичности и т. п. Инженерный расчет на этом не заканчивается. Его конечной целью является решение вопроса о том, сможет ли конструкция достаточно надежно служить в течение установленного срока. Второй этап расчета состоит либо в сопоставлении вычисленных напряжений, деформаций и перемещений с некоторыми нормативно допустимыми значениями, либо в сопоставлении расчетных нагрузок с предельными нагрузками. Будучи элементарным, второй этап расчета является в то же время весьма важным. Именно на этом этапе косвенными и довольно примитивными методами выбирается достаточно надежная, долговечная и экономичная конструкция.

Статистическое истолкование коэффициентов запаса открывает возможности для более обоснованного и глубокого способа оценки надежности. При этом становится необходимой перестройка первого этапа расчета. Для суждения о надежности нужно знать характеристики поведения проектируемой конструкции в условиях эксплуатации. Это заставляет учитывать случайный характер внешних сил и других внешних условий, а во многих случаях и случайную природу физических и геометрических параметров конструкции. Возникают новые задачи, аналогичные задачам строительной механики, теории упругости, теории пластичности и других разделов механики твердого тела. Это задачи о нахождении вероятностных характеристик поведения конструкции по заданным вероятностным характеристикам случайных внешних условий и случайных параметров конструкции.

Хотя основы этой теории применительно к расчетам сооружений были сформулированы впервые в 20–х годах этого века, систематическая ее разработка началась лишь в 50–е годы. Впервые вопросы теории надежности были поставлены в строительной механике в работах М. Майера и Н. Ф. Хоциалова, относящихся к 1926 – 1929 гг. В противовес концепции допускаемых напряжений и коэффициентов запаса ими была выдвинута идея о применении статистических методов к расчетам на прочность. Первые публикации по надежности конструкций носили дискуссионный характер и не получили в свое время широкого одобрения. Выдающаяся роль в деле внедрения статистических методов в строительную механику принадлежит Н. С. Стрелецкому, который и дал систематическое изложение статистической концепции надежности сооружений; в неявной форме эта концепция нашла отражение в методике расчета конструкций по предельному состоянию. В послевоенные годы исследования были продолжены в СССР и в зарубежных странах. К этому периоду относятся работы А. Р. Ржаницына, работы А. Фрейденталя, А. Ионсона и др. Эти работы характеризуются стремлением к простейшим схемам расчета, не требующим сложного аналитического аппарата. Схемы позволили получить качественное описание явления, изучить влияние изменчивости нагрузок и изменчивости прочности на надежность, поставить задачу об оптимизации и т. д. Основные современные предпосылки проектирования сооружений с учетом надежности и вероятностных концепций заложены В. В. Болотиным, И. И. Гольденблатом, Л. И. Иосилевским, О. В. Лужиным, А. Р. Ржаницыным, А. Ф. Смирновым, Б. И Снарскисом, Н. С. Стрелецким, К. Э. Талем, В. П. Чирковым и др. Как общетехническая дисциплина теория надежности сформировалась 40–50 лет назад в первую очередь под влиянием развития радиоэлектроники, вычислительной техники и ракетной техники. Последние десятилетия характеризуются резким повышением объема и уровня исследований когда в основу теории надежности были заложены следующие важные концепции:

– внешние условия эксплуатации конструкции и ее поведение в процессе эксплуатации суть случайные процессы; правильное решение проблемы надежности и долговечности конструкции возможно лишь с привлечением теории случайных функций;

– за основной показатель надежности принимается вероятность пребывания параметров системы в некоторой допустимой области, нарушение нормальной эксплуатации интерпретируется при этом как выход из этой области;

– выход конструкции из строя, как правило, является следствием постепенного накопления повреждений: остаточных деформаций, износа и т. п; эти повреждения, достигнув определенной величины, начинают препятствовать нормальной эксплуатации конструкции.

Таким образом, свойственная ранним работам элементарная трактовка показателя надежности как вероятности выполнения некоторого неравенства, связывающего случайные величины, уступает место более углубленной и более адекватной трактовке на основе теории случайных функций. Такой подход к надежности конструкций впервые был предложен и развит Болотиным В.В. В последние годы широко развернулись работы по обоснованию и совершенствованию нормативных расчетов с использованием понятий и методов теории надежности при проектировании, строительстве и эксплуатации сооружений.

В дополнение к вышесказанному упомянем два основных возражения, выдвигаемых против применения статистических методов. Первое из них – сомнение в возможности получения опытных данных в количестве, достаточном для последующей их обработки методами теории вероятностей. Развитие средств измерительной и вычислительной техники и автоматики, обеспечивают автоматическую обработку данных и планирование эксперимента, позволяют весьма быстро статистически обрабатывать большие объемы информации. Для расчетов на основе статистических методов нужна не любая информация, а лишь информация, научно организованная и приспособленная для ее последующей обработки методами статистики и теории надежности. Второе соображение, выдвигаемое против статистических методов, состоит в том, что выводы вероятностного характера применимы лишь к массовым событиям и к конструкциям, которые создаются в большом количестве экземпляров и эксплуатируются в однородных условиях, т. е. лишь тогда, когда действуют статистическое истолкование вероятности к закону больших чисел. Между тем вероятность есть некоторая объективная мера возможности наступления события. Эта мера сохраняет свой смысл независимо от того, является это событие многократно воспроизводимым или нет. Такой подход получил научное закрепление в теории операций – прикладной дисциплине, назначение которой состоит в обоснованном планировании действий для достижения оптимального (по вероятности) эффекта. Вероятность надежной работы проектируемой конструкции в течение установленного срока эксплуатации остается объективным показателем надежности конструкции и в том случае, когда конструкция имеется в единственном экземпляре. Эта вероятность может быть использована, например, для сопоставления с некоторым нормативным показателем, полученным из анализа существующей практики проектирования, а также для сопоставления различных вариантов проектируемой конструкции.

Силы, действующие на конструкцию, как правило, многократно воспроизводятся или развертывают свои свойства во времени. Конструкционные материалы изготовляются в массовом количестве, и их механические свойства в различных партиях могут быть исчерпывающе изучены. Соединения, применяемые в конструкциях, как правило, являются массовыми элементами и во всяком случае могут быть испытаны в количестве, достаточном для статистических выводов. Таким образом, поведение самого уникального сооружения определяется случайными факторами массового характера, для каждого из которых допускаются статистическое толкование вероятности и закон больших чисел. Предсказать на основе этого статистического материала повеление конструкции, собственно, и есть цель теории надежности конструкций. Таким образом, применение методов теории надежности к расчетам и проектированию конструкций и сооружений требует значительных объемов информации о материалах, внешних силах и воздействиях. Чем больше объем необходимой информации, тем достовернее выводы о надежности и реальном поведении конструкции.

2. Вероятностная сущность расчетов надежности сооружений как сложных систем

Важной проблемой анализа конструкций и зданий являются регламентация и нормирование всех характеристик. Ее решение заключается в создании условий, при которых действительная надежность возведенных зданий соответствовала бы заложенной в проекте теоретической надежности, характеризуемой точными математическими количественными определениями, и осложняется многообразием факторов, влияющих на надежность при разных стадиях индустриального строительства.

Прежде всего, на надежность конструкций сборных зданий влияет степень соответствия выбранной расчетной схемы действительной работе конструкции. Наряду с совершенствованием методов расчета здесь необходимы обширные теоретико–экспериментальные исследования, направленные на установление четкой взаимосвязи между расчетными положениями и производственными условиями. Распределение расчетных усилий в узлах может существенно изменяться в зависимости от условий опирания, размеров зазора или натягов, от материала сопрягаемых элементов и способов их соединения. Степень защемления изменяется в зависимости от точности изготовления и монтажа, определяемой соответствующими классами (допусками). При современном многообразии применяемых материалов, конструктивных решений и методов производства работ степень защемления колеблется в довольно широких пределах. Очевидно, что традиционного разделения сопряжений на два основных типа – «шарнир» и «заделка» – совершенно недостаточно. Проектировщик должен учитывать действительную степень защемления элементов в узлах при расчете конструкций. Это особенно важно при анализе работы конструкции в эксплуатируемых сооружениях, которая зависит от точности изготовления составляющих элементов и качества монтажа, а все погрешности преимущественно сказываются на работе узлов сопряжения. Неправильное изготовление и некачественный монтаж вызывают: случайные дополнительные моменты, действующие на вертикальные конструкции; горизонтальные соответствующие усилия (сдвиг в пределах одной горизонтальной плоскости подобно ветровой нагрузке или снижающее усилие, действующее в пролете между вертикальными несущими элементами).

Все эти усилия определяются точностью сопряжений сборных элементов, зависят от типа стыка (лобовой, платформенный или сферический), качества монтажного раствора и т. д. Исследования показывают, что прочность узлов опирания стеновых панелей существенно снижается при некоторых погрешностях монтажа (смещении осей колонн, наклоне панелей и колонн, утолщении монтажных швов и др.). Для обеспечения надежности центрально–сжатых конструкций наиболее важно обеспечение однородности бетона при изготовлении, а для изгибаемых элементов – однородности арматуры. Все нагрузки – полезные, ветровые, снеговые – и воздействия – температурно–влажностные деформации, деформации усадки и ползучести бетона в несущих конструкциях, консолидационные и реологические процессы в грунтах оснований – являются временными процессами. За весь период эксплуатации под действием внешних факторов в элементах и конструкциях зданий имеются значительные изменения и колебания усилий, из–за чего происходит накопление остаточных деформаций.

Известно, что внешние воздействия на здания являются развертывающимися с течением времени случайными процессами [4]. Накопление повреждений в элементах приводит к отказам конструкций. Само накопление повреждений также является случайным процессом. Поэтому проектирование здания на расчетный срок эксплуатации необходимо вести с учетом вероятности случайных отклонений всех факторов от нормативных величин. Особенность вероятностных методов расчета, по сравнению с традиционными, состоит в ведении дополнительных условий, учитывающих неблагоприятную ситуацию с определенной вероятностью. Расчет в этом случае состоит в создании формул на основе уравнений регрессий, которые учитывают возможное распределение этих факторов. Вероятность безотказной работы конструкции *P(t)* за заданный срок службы *n* лет определяется как вероятность неравенства:

$$R - Q_n > 0, \qquad (1)$$

где: Q_n – нагрузка, которая может возникнуть в течение расчетного срока службы, Па; R – характеристика прочности конструкции; разность $S = R - Q_n$ определяет резерв прочности конструкции.

Тогда вероятность безотказной работы конструкции равна: $P(t) = \int_0^\infty P_S(t)dt$, где P_S – плотность распределения *S*. Если выразить P_S через плотность вероятности нагрузки P_{qn} и прочности P_r, то

$$P(t) = \int_0^\infty P_{qn}(t)\Phi(t)dt, \qquad (2)$$

где $\Phi(t) = 1 - P_r(t)$ и P_r – функции распределения характеристик прочности. Для упрощений расчетного анализа каждого звена конструкций зданий целесообразно уравнение связи между несущей способностью и исходными характеристиками представлять в виде произведения случайных функций, каждая из которых отражает влияние одного–двух параметров. Таким образом, формализованная задача позволяет путем замены двух случайных функций одной получить одну суммарную функцию вероятности разрушения рассматриваемого звена. Для приближенного решения целесообразно использовать простые параметрические зависимости. Так, безотказность можно определить как

$$P(t)=P_1(t)P_2(t), \qquad (3)$$

где: $P_1(t)$ – вероятность появления внезапного отказа, равная $e^{-\lambda t}$; λ – интенсивность отказа, равная $f(t)/P(t)$; $P_2(t)$ – вероятность появления постепенного отказа, которая равна:

$$P_2(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_0^\infty e^{-(t-T_{cp})^2/2\sigma^2} dt. \qquad (4)$$

Вероятность $P_1(t)$ представляет экспоненциальный закон надежности, вероятность $P_2(t)$ – нормальный закон. Важным свойством экспоненциального закона распределения отказов явля–ется отсутствие «последствия», т.е. если промежуточное время Δt уже длится некоторое время τ, то это никак не влияет на закон распределения оставшейся части промежутка времени. Он будет таким же, как и закон всего времени *T.* Отказы, возникающие в результате износа и необратимых физико–механических процессов, описываются нормальным законом распределения. Расчет конструкций по деформациям должен представлять собой вероятностный анализ их распределения с учетом возможного перераспределения усилий в системе и изменчивости всех включающих факторов.

Элементы неопределенности при традиционных методах расчетов заставляли проектировщиков вводить коэффициенты безопасности. Даже в сравнительно недавно действовавших нормах эти коэффициенты были достаточно велики. С быстрым развитием вероятностных методов и благодаря все большему внедрению вычислительных машин в будущем будут применены более сложные методы расчета, включая изучение работы уже существующих зданий. В настоящее время исследованиями на стадии проектирования могут быть выявлены и статистически оценены интенсивность нагрузки, изменение прочности материалов, поведение сооружений и нагрузок и степень приближения расчетных моделей к реальным. Надежность конструкции, коэффициенты запаса которой вычислялись детерминированным способом, снижается с увеличением числа параметров, т.е. выходит, что надежность – функция количества факторов, а не их важности, что кажется более логичным. При статистическом подходе понятие «коэффициент запаса» теряет смысл и полностью поглощается понятием «надежность».

Исследования по учету длительных деформаций в строительной механике показывают, что в результате развития деформаций ползучести бетона в готовом сооружении, статическая схема которого не совпадает со схемой, при которой прикладывались постоянно действующие нагрузки, и имеющего составное сечение, может происходить перераспределение усилий, как между элементами конструкции, так и между составными частями этих элементов. Следует отметить, что при линейной зависимости между напряжениями и деформациями ползучести в статически неопределимой конструкции, составленной из однородных элементов без изменения статической схемы, деформации ползучести, увеличивая смещения, не изменяют усилий. В то же время при переменной статической схеме и неоднородности сечений могут происходить значительные изменения усилий. Так как сооружение представляет собой сложную систему для упрощения анализа его надежности необходимо разбить его на ряд подсистем (элементов), которые могут самостоятельно характеризоваться входными и выходными параметрами. Тогда функция надежности всей системы будет определяться как произведение функций надежности, входящих в систему элементов. К элементам системы можно отнести грунтовое основание, фундаментную часть, несущие продольные и поперечные стены, самонесущие или навесные стены и перегородки, ограждающие конструкции, инженерное оборудование зданий. Долговечность системы должна оцениваться с учетом сроков службы отдельных элементов.

Предельное состояние всей системы определяется экономическими факторами – затратами, связанными с преодолением физического износа (и даже морального). Физический износ системы приводит к возрастанию затрат, связанных с ненадежностью выше допустимых значений, и обусловливает целесообразность эксплуатации системы. При оценке долговечности системы необходимо учитывать, что ее основным показателем будет срок службы системы $T_{ср}$, связанный с выходом за допустимые пределы (выбросом) выходных параметров элементов и наступлением предельного состояния, при котором дальнейшая эксплуатация элементов должна быть прекращена. Долговечность всей системы должна характеризоваться ее способностью нормально функционировать с минимальными затратами на ремонт и восстановление. Чем меньше суммарные затраты времени и средств, идущих на восстановление работоспособности системы в течение всего периода эксплуатации, тем она эффективнее.

При расчете надежности сооружения как системы нормирование функции надежности $P(t)$ необходимо производить при заданном $T_{ср}$. Значение $T_{ср}$ должно согласовываться со структурой и периодичностью ремонтных работ и технического обслуживания, а допустимая вероятность безотказной работы является мерой опасности последствий отказа. При назначении допустимого значения функции надежности $P(t)$ необходимо ее увязать с категориями отказов, т.е. еще дополнительно определить вероятность безотказной работы для различных категорий отказов элементов. Найти оптимальное решение для системы на стадии проектирования затруднительно, так как необходимо знать заранее зависимость между затратами на повышение надежности всех элементов системы и тем эффектом, который они дадут при эксплуатации с учетом ремонта. Однако если учесть, что в массовом жилищном строительстве в основном выполняются типовые проекты зданий или имеется накопление информации по аналогичным зданиям нетиповым, то нахождение оптимального решения сводится к сравнительной экономической эффективности элементов системы. Оптимальное значение функции надежности $P(t)$ определяют по минимуму затрат на весь дом или рассматриваемую систему (элемент). Таким образом, техническую сторону надежности конструкций можно разделить на три уровня безопасности, каждый из которых характеризуется своими параметрами для оценки надежности:

Уровни безозопасности	Параметры оценки надежности
Уровень I	Общий коэффициент безопасности Частные коэффициенты безопасности
Уровень II	Математическое ожидание Стандартное отклонение Индекс безопасности
Уровень III	Распределение вероятностей Вероятность отказа

Уровень III соответствует строгому решению при условии использования всех возможностей (и преимуществ) теории вероятности с учетом временных характеристик рассеянных величин. На уровне II используют некоторые установленные степени распределения, поэтому любая характеристика может быть представлена лишь средним значением и стандартным отклонением. При этом критерием безопасности служит так называемая оперативная вероятность выхода из строя, а надежность определяется индексом безопасности. Зона безопасности на этом уровне $Z = R - N$; $Z = 0$ – есть граничное условие. Состояние выхода из строя соответствует $Z \leq 0$ вероятности $P(f)$. Так как она зависит от состояния отношения между средним значением зоны безопасности m_Z и стандартным отклонением σ_Z , то оно называется индексом безопасности $\beta = m_{Zz}/\sigma_Z$. При нормальном распределении всех характеристик прочности и нагрузок, например $\beta = 4{,}7$, соответствует оперативной вероятности выхода из строя $P\ (f) = 10^{-6}$. Уровень I соответствует детерминированным расчетам.

Для всех точных анализов безопасности и надежности особое значение имеют статистически найденные вероятностные распределения факторов, оказывающих на них влияния. В практике встречаются распределения *непрерывные* – нормальное, экспоненциальное, Вейбула, гамма–распределение, логарифмически нормальное и *дискретные* – биноминальное и Пуассона. В зависимости от сопряжения элементов (последовательное, параллельное или смешанное), вида процесса и характера возможного разрушения материала (хрупкий или вязкий) выявляют иногда сильно отличающиеся друг от друга вероятности выхода из строя. На рис. 1 показаны возможные варианты прочностных моделей для параллельной и цепной системы. Применительно к конструкциям зданий и сооружений случайные значения, встречающиеся в задачах надежности, как правило имеют нормальное распределение.

3. Полувероятностная интерпретация нормативных расчетов

Даже при самых тщательно составленных нормативных документах проектирование строительной конструкции является процессом принятия решений в условиях неопределенности физических возможностей материалов с одной стороны и силовых воздействий – с другой. Такую неопределенность поведения железобетонной конструкции в эксплуатации можно объяснить следующим:

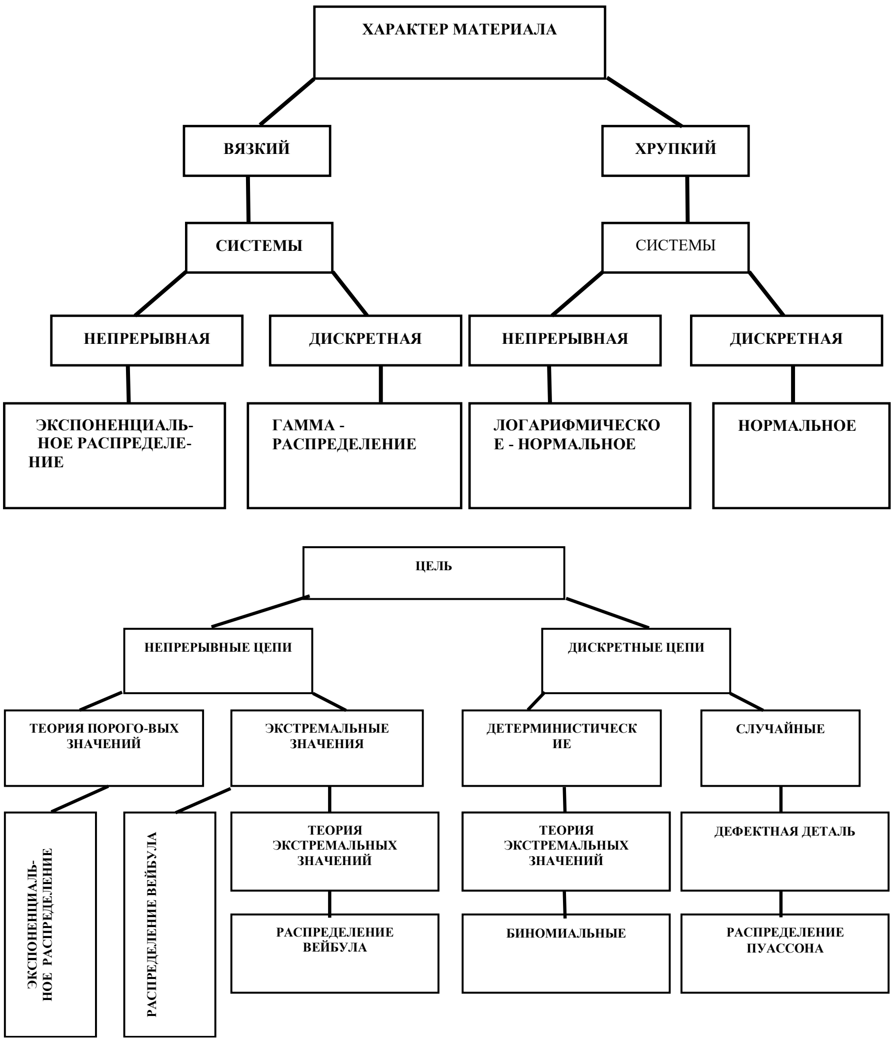


Рис. 1. Характер вероятностных моделей систем а – параллельная;
б – цепная

– трудно контролируемой изменчивостью нагрузок, действующих на сооружение (схемы, виды и режимы нагрузок, количество циклов воздействий, ветровое давление, сейсмическая нагрузка и т.д.);

– применением в расчетах идеализированных и упрощенных моделей, в которых не могут быть учтены все действующие на конструкцию силовые факторы;

– вероятностным характером физических процессов, протекающих в материалах при изготовлении и эксплуатации конструкций;

– статистическим разбросом прочностных и деформационных свойств материалов и нестабильностью и технологическими приемами при изготовлении и монтаже конструкций.

Первым звеном, определяющим необходимый уровень надежности на период установленного срока службы и экономическую целесообразность сооружения, являются национальные нормы проектирования. В них устанавливаются четыре важнейших исходных условия проектирования:

– принятие нормируемых расчетных моделей нагрузок и воздействий;

– соответствие материалов и конструкций нормируемым прочностным и деформационным характеристикам;

– правильный выбор расчетных схем, моделирующих работу материалов в конструкции;

– обеспечение нормируемой надежности по всем прогнозируемым отказам (при прямых вероятностных оценках надежности) или условия прочности, устойчивости, выносливости, трещиностойкости и жесткости, а также системы коэффициентов безопасности к нагрузкам и материалам (детерминированная форма оценки надежности).

Имея ввиду статистическую природу всех четырех условий, следует считаться с вероятностным характером их реализации. В процессе проектирования крайне важно уметь оценить остаточный уровень риска и предвидеть возможные последствия, если в эксплуатации установленные нормами уровни нагрузок и прочностные возможности материалов в рабочих сечениях не будут соблюдены. Остаточный уровень риска (или вероятность отказа) существенно зависит от умения инженера оценить отличие работы исследуемых отдельно образцов бетона и арматуры в лабораторных условиях от коллективной (совместной) работы материалов в составе конструкции. Здесь возможна реализация эффекта, значительно увеличивающего несущую способность (например, рост прочности бетона, хорошо армированный бетон, совместная работа большого количества арматурных стержней или пучков в рабочем сечении и др.). Возможен и обратный эффект: деградация структуры бетона из–за агрессии солей и воды в условиях попеременного замораживания и оттаивания воды в порах бетона. Рекомендации, основанные на этих принципах, должны задавать не только однозначный (детерминированный) предел какого–либо эксплуатационного параметра, но и устанавливать минимально допустимый уровень надежности данного параметра.

Существующие нормы строительных конструкций и мостовых сооружений по форме являются детерминированными. Расчеты сводятся к вычислению усилий, напряжений, деформаций, возникающих от действия некоторых детерминированных нагрузок, которые сопоставляются со значениями, зависящими от детерминированных характеристик материалов конструкций. Все значения такого рода имеют условный характер. В действительности соответствующие параметры являются случайными величинами. Случайная природа параметров отражается системой частных коэффициентов безопасности, учитывающих изменчивость нагрузок, механических свойств материалов, а также условий их работы в составе конструкции.

Рассмотрим приложения теории надежности к обоснованию и совершенствованию форм расчета строительных конструкций. Одной из главных целей этого расчета является получение гарантии того, что за время эксплуатации конструкции не наступит ни одно из недопустимых предельных состояний, а интенсивность отказов, требующих ремонта или временного прекращения эксплуатации, не будет слишком велика. Для определенности пока будем говорить о предельных состояниях по несущей способности, записывая «условие прочности» в виде

$$\boldsymbol{S} < \boldsymbol{R}. \tag{5}$$

Здесь в зависимости от методики расчета $\boldsymbol{S}$ – внешняя нагрузка, усилие или напряжение в элементе конструкции; R – несущая способность (сопротивление), измеряемая в тех же единицах, что и величина S.

Как нагрузка, так и несущая способность являются, вообще говоря, случайными величинами, законы распределения которых можно установить, систематически накапливая и изучая опытные факты, относящиеся к однородным условиям. Характер распределений таков, что в большинстве случаев не существует вполне определенного и имеющего практический смысл верхнего предела – для внешних нагрузок, равно как и нижнего предела – для несущей способности. Поэтому условие (5) не может быть заменено условием $\boldsymbol{S}_{max} < \boldsymbol{R}_{min}$, и абсолютное требование, чтобы выполнялось неравенство (5), лишено смысла. Можно лишь поставить условие, чтобы в течение срока службы сооружения оно было выполнено с вероятностью, достаточно близкой к единице. Таким образом, мы приходим к вероятностной трактовке расчетов строительных конструкций. Традиционные методы расчета, разумеется, содержат элементы статистического подхода, хотя бы в более или менее завуалированной форме. «Условие прочности» (5) заменяется условием

$$\boldsymbol{S}_{\text{Н}} \le R_{\text{Н}} / k \qquad (6)$$

где $\boldsymbol{S}_{\text{Н}}$ – нормативная нагрузка; $R_{\text{Н}}$ – нормативная несущая способность; k – коэффициент запаса.

Нормативные значения нагрузок и несущей способности входят в условие (6) как некоторые вполне определенные, детерминистические величины. По отношению к реальным величинам, имеющим случайный характер, они играют роль либо некоторых средних или наиболее вероятных значений, либо средних в группе наибольших (наименьших) значений. Нормативные значения нагрузок, несущих способностей и коэффициентов запаса взаимно обусловлены: для любой конструкции можно подобрать бесчисленное множество троек значений этих параметров, приводящих к одному и тому же расчетному результату. Значения коэффициентов запаса, а также тесно с ними связанные значения нормативных нагрузок и нормативных сопротивлений исторически вырабатывались, исправлялись и уточнялись главным образом эмпирическим способом, обобщением многолетнего опыта проектирования и эксплуатации конструкций. Между тем, как видно из существа задачи, здесь возможны в принципе и теоретические подходы с широким привлечением аппарата теории вероятностей и теории надежности. Применяемые совместно с технико–экономическим анализом и с учетом результатов инженерной практики вероятностные методы открывают возможности для теоретического обоснования существующих нормативных документов для разработки новых, более прогрессивных и экономичных инженерных методов расчета.

Основная формула метода расчета по предельному состоянию имеет вид рассмотренный в предыдущей лекции:

$$\sum n_j S_j \le m\Phi\,(\gamma_1 R_1,\, \gamma_2 R_2,\, \ldots). \qquad (7)$$

Здесь S_j – нормативные нагрузки, действующие на конструкцию; n_j – коэффициенты нагрузки; R_j – нормативные сопротивления (например, нормативные пределы прочности или пределы текучести материалов, из которых изготовлена конструкция); γ_j – коэффициенты материала; m – коэффициент условий работы сооружения.

Несмотря на то, что отдельные стороны метода предельных состояний нуждаются в уточнении и доработке, в целом он представляет собой более совершенный и прогрессивный метод, чем классический метод расчета. Оставаясь по форме детерминистическим, метод предельных состояний все же тесно связан с вероятностными методами и дает толчок целому ряду исследований, использующих аппарат теории вероятностей и математической статистики.

Расчет на прочность по 1–й группе предельных состояний производят на нагрузки чрезвычайного уровня в основных, дополнительных и особых сочетаниях. В простейшей интерпретации нормативных расчетов, использующей случайный характер нагрузок и сопротивлений, неравенства (5) заменяется на:

$$S_{\text{р}} <. R_{\text{р}}. \qquad (8)$$

Здесь $S_{\text{Р}}$ – внешний силовой расчетный фактор (момент, нормальная или поперечная сила, напряжения), т. е. достаточно редко встречающееся высокое значение параметра нагрузки; $R_{\text{р}}$ – несущая способность сечения (в предельном состоянии), т.е. достаточно редко встречающееся низкое значение соответствующего сопротивления. Эти значения являются расчетными. Для того чтобы обоснованно выбрать расчетные нагрузки и расчетные сопротивления, нужно иметь сведения о совместном распределении $p(R, S)$ или (в случае независимости нагрузок и сопротивлений) о распределениях *p(R)* и *p(S).* Тогда расчетные значения нагрузок и сопротивлений будут равны некоторым значениям соответствующих распределений. Соотношение (8) схематически иллюстрировано на рис. 2, где, помимо расчетных значений, показаны также средние значения (математические ожидания) $<R>$ и $<S>$, а так же нормативные значения $R_{Н}$ и $S_{Н}$.

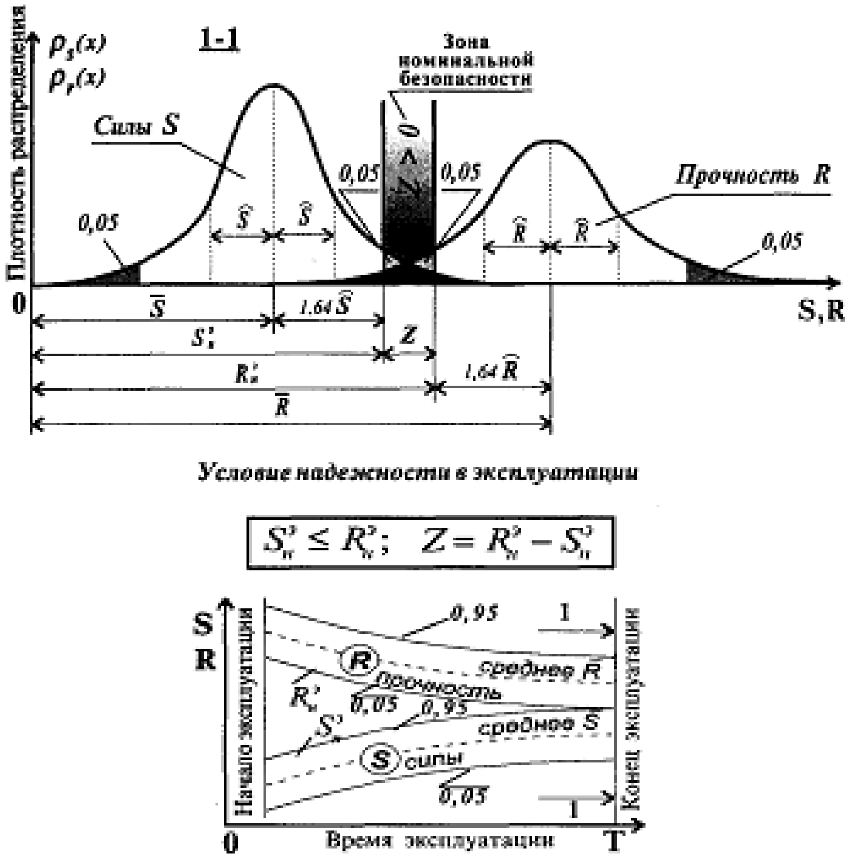


Рис. 2. Схематическая интерпретация условия надежности конструкций: Z – запас надежности; $\overline{S}$, $\overline{R}$ – математическое ожидание сил и прочности; $\widehat{S}$, $\widehat{R}$ – стандарт распределения сил и прочности; S_H^0, R_H^0 – характеристические значения сил и прочности

Информация о распределении *p(R)* как минимум должна содержать математическое ожидание $<R>$ и среднее квадратическое отклонение σ_R (или коэффициент изменчивости w_R = $=\sigma_R<R>$). Введем расчетное значение сопротивления $R_Р = <R> (1 - \gamma_R\, w_R)$, где $\gamma_R > 0$ – некоторый числовой коэффициент, косвенно связанный с требуемой надежностью. Например, если принять для R нормальный закон распределения, то $\gamma_R = 3$ будет соответствовать такому сопротивлению, что вероятность обнаружения меньшего значения будет примерно 0,00135. Такое сопротивление обычно считается редко встречающимся, и оно может быть принято за расчетное. При этом вероятность обнаружения большего значения (в данном примере эта вероятность равна 0,99865) обычно называют *обеспеченностью* расчетного сопротивления. Принимая среднее сопротивление за нормативное значение $R_{Н}$ и вводя коэффициенты материала в формулу (6) как $\eta = R_р / R_{Н}$, приходим к вероятностной интерпретации коэффициентов надежности по материалу:

$$\eta = 1 - \gamma_R\, w_R\,. \tag{9}$$

Из этой формулы непосредственно следует, что чем выше изменчивость механических свойств материала и чем выше требования к надежности, тем меньшим должен назначаться коэффициент материала. Если нормативное сопротивление отличается от среднего значения, что является типичным для нормативных документов, то его можно представить в виде $R_{Н} = \langle R \rangle\ (1 - \upsilon_R\ w_R)$, где $\upsilon_R > 0$ – некоторый коэффициент. В этом, более общем случае коэффициент материала вводится как:

$$\eta = (1 - \gamma_R\ w_R\ )\ /\ (1 - \upsilon_R\ w_R). \tag{10}$$

Как показано на рис. 2, условие надежности в детерминированной форме, но учитывающее статистический разброс нагрузок и прочности материалов, может быть записано:

$$\left.\begin{aligned} & S_{н}^{э} \le R_{н}^{э} \\ & Z = R_{н}^{э} - S_{н}^{э} \end{aligned}\right\} - \textit{запас надёжност.} \tag{11}$$

В большинстве случаев нормальные законы распределения достаточно надежно отражают статистическую природу нагрузки, воздействий и прочности материалов. Для таких условий характеристические значения сил *(N,* ***Q,*** *M)* или напряжений (σ,τ) – S_H^0 и прочности R_H^0 могут быть представлены по (12) и проиллюстрированы рис. 2.

$$\left.\begin{aligned} & S_H^0 = \sum\ (\bar{S}_{gi} - \bar{S}_{vi}\eta - \hat{S}_{vi}\eta) \\ & R_H^0 = \bar{R} - 1{,}64\hat{R}_b = \bar{R}_b(1 - 1{,}64V_R) \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Здесь: $\bar{S}_{gi}$, $\bar{S}_{vi}$ – среднее значение сил от i – ых постоянной и временной нагрузок; $\hat{S}_{vi}$ – среднеквадратичное отклонение сил от i – той нагрузки или воздействия; η – коэффициент комбинаций (сочетаний) нагрузок и воздействий; $\bar{R}_{н}$ – среднее значение прочности материала в сечении; $\hat{R}_{н}$ – среднеквадратичное отклонение прочности материала в сечении; $\bar{S}_{gi}$ – среднее значение постоянных нагрузок оценивается по весу конструктивных элементов, определяемых по проектным размерам; $\hat{S}_{gi}$ – среднеквадратичное отклонение постоянных нагрузок; $\hat{S}_{gi} = \bar{S}_{gi}\ V_g$ оценивается с учетом коэффициента вариации V_g; $\bar{S}_{vi}$ – среднее значение временных нагрузок; $\hat{S}_{vi}$ – среднеквадратичное отклонение временных нагрузок; $\hat{S}_{vi} = \bar{S}_{vi}\ V_v$; R_H^0 – характеристические сопротивления бетона и арматуры; $\hat{R}_b$ – среднеквадратичное отклонение, принятое в СНиП 2.05.03–84; $\hat{R}_b = 0{,}135\bar{R}_b$, где $V = 0{,}135$ – коэффициент вариации прочности бетона на сжатие; $\hat{R}_s = 0{,}12\bar{R}_s$, где $V = 0{,}12$ – коэффициент вариации прочности арматуры на растяжение.

При отсутствии данных по параметрам статистических распределений сил S и прочности R используются статистические параметры, принятые в действующих нормах. Силовой фактор S_H^0 **,** выраженный в *M, Q, N* или напряжениях σ, τ, функционально зависят от нагрузок S_{gi}, S_{vi}, параметров системы, жесткостных характеристик сечений *(I, W, A, E)* с учетом влияния трещин на эти характеристики. При этом расчет системы и сечений выполняется по правилам строительной механики упругих систем.

Коэффициент комбинаций (сочетаний) нагрузок η следует принимать по следующим рекомендациям. Вероятность одновременного совпадения максимальных значений различных независимых друг от друга временных нагрузок практически равна нулю. При учете совместного действия нескольких некоррелируемых временных нагрузок следует пользоваться корректирующим коэффициентом сочетаний η, который отражает вероятность (более 5%) совпадения во времени этих нагрузок. Впредь до накопления статистических данных рекомендуется пользоваться значениями коэффициентов сочетаний, установленными СНиП 2.05.03–84*, приложение 2:

а) к постоянным нагрузкам (собственный вес, воздействия предварительного натяжения арматуры, усадки и ползучести бетона и др.) $\eta = 1$;

б) при учете только одной из временных нагрузок $\eta = 1{,}0$;

в) при учете действия двух и более некоррелируемых временных нагрузок, считая условно вертикальные нагрузки, горизонтальные поперечные от центробежных сил, поперечные от ударов подвижного состава за одну нагрузку, к одной из временных нагрузок $\eta = 0{,}8$, к остальным $\eta = 0{,}7$;

г) к ветровой нагрузке при сочетании с временной вертикальной нагрузкой коэффициент η следует принимать в зависимости от вида подвижного состава, образующего нагрузку (при загружении железнодорожным подвижным составом $\eta = 0{,}5$; при загружении автотранспортными средствами и вагонами трамвая $\eta = 0{,}25$).

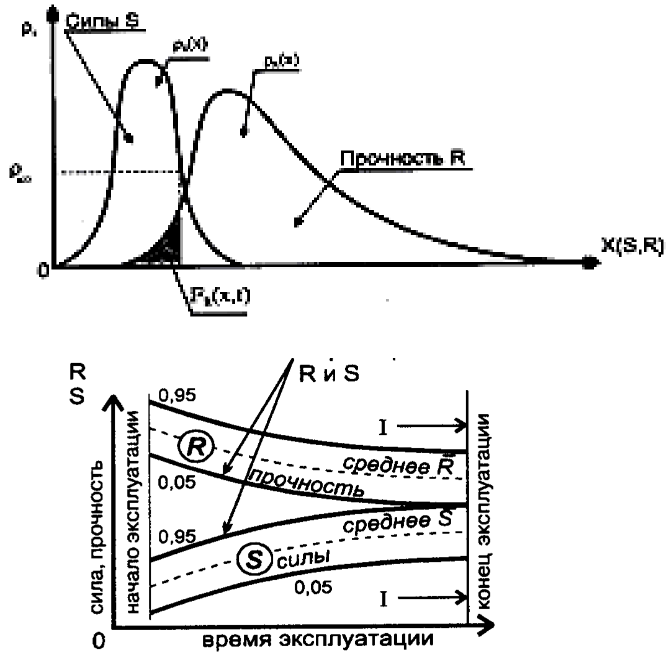
Выше для интерпретации коэффициента материала, в сущности, неявно использовалось нормальное распределение. Имея распределение, заданное с точностью до трех или четырех параметров, можно достаточно хорошо аппроксимировать эмпирическое распределение вблизи его центра. Однако для расчета на прочность основной интерес представляет возможность надежной экстраполяции выбранных кривых в сторону таких низких значений прочности, вероятность появления которых очень мала.

Для того чтобы на основании эмпирических данных с достаточной достоверностью получить отрезки кривой распределения, относящиеся к малым вероятностям (например, порядка 0,001), нужно располагать числом испытаний, во много раз превышающим реальные возможности массового эксперимента. Надежная экстраполяция эмпирических данных в область весьма малых вероятностей возможна лишь при условии, если из каких–либо общетеоретических соображений известны асимптотические свойства распределений в области малых вероятностей. Эти данные могут быть получены лишь на базе статистических теорий прочности. Для статистического истолкования коэффициентов нагрузки в нормативной формуле (6) необходимо обратиться к распределениям нагрузок. Среди различных типов нагрузок, действующих на сооружения и конструкции, наиболее изученными с точки зрения статистического распределения являются ветровая и снеговая нагрузки. Вообще поскольку нагрузки представляют собой случайные процессы, их вероятностное описание должно включать сведения о временных свойствах: спектральном составе, временной корреляции и т. п. К сожалению, многие эмпирические данные о нагрузках не только не содержат этой информации, но и не сопровождаются сведениями о том, как производились измерения и обработка результатов. Например, для правильного истолкования эмпирических распределений снеговой нагрузки нужно знать, с каким временным интервалом производились наблюдения над толщиной снегового покрова, измерялись ли значения в заранее выбираемые моменты времени или брались максимальные значения на заданном временном интервале. Во всяком случае, распределение $p(S)$ должно относиться к максимальным значениям нагрузки на отрезке времени T^*, равном установленному сроку службы сооружения.

Характерное отличие условия надежности в вероятностной форме от условий (5), (8) и (11) заключается в том, что величины обобщенной прочности конструкции $\widetilde{R}$ и обобщенное значение нагрузки $\widetilde{S}$ рассматриваются как случайные, с установленными экспериментально параметрами статистического распределения. Здесь $\widetilde{R}$ – несущая способность, выраженная в тех же единицах, что и обобщенная нагрузка и отвечающая предельному состоянию конструкции по прочности – предел прочности или текучести, пластический момент и др., а $\widetilde{S}$ – наибольшее значение усилия или напряжения в конструкции, выраженное через внешнюю нагрузку. Тогда условие безопасной работы конструкции примет вид:

$$\widetilde{Z} = \widetilde{R} - \widetilde{S} > 0 \tag{13}$$

Величина $\tilde{Z}$ представляет собой *резерв безопасности (*иногда называемый *резервом прочности)* конструкции или уровень ее надежности. Этот резерв безопасности зависит от класса безопасности сооружения. $\tilde{R}$ и $\tilde{S}$ могут зависеть от ряда детерминированных и случайных величин. В общем случае $\tilde{R}$ и $\tilde{S}$ являются случайными функциями во времени, но в рассматриваемой постановке это случайные величины с заданными законами распределения. Например, в ситуациях, когда установлен срок службы сооружения и надежность оценивается в конце этого срока, можно $\tilde{R}$ и $\tilde{S}$ рассматривать как случайные независимые величины с законами распределения, определенными так же на конец этого срока (рис. 3). Статистические характеристики величин $\tilde{R}$ и $\tilde{S}$ находятся самостоятельно, *независимо* друг от друга.



(а)

(б)

Рис. 3. Принципиальная схема вычисления интеграла надежности системы: (а) – плотности распределения силового и прочностного факторов; (б) – изменение сил $\tilde{S}$ и прочности $\tilde{\boldsymbol{R}}$ во времени

Неравенство (20) определяет *область допустимых состояний,* а уравнение $\tilde{R}-\tilde{S}=0$ *границу области допустимых состояний.* Вероятность выполнения неравенства $P(\tilde{R}-\tilde{S}>0)$ или $P(\tilde{Z}>0)$ называется *вероятностью, неразрушимости конструкции,* а вероятность $Q=P(\tilde{Z}<0)=1-P(\tilde{Z}>0)$ есть *вероятность отказа.* Очевидно, что (рис.3)

$$Q=\int_{-\infty}^{0} p(Z)dZ=P_Z(0), \tag{14}$$

где $p(Z)$ – плотность вероятности резерва безопасности (прочности); $P_Z(0)$ – функция распределения резерва безопасности (прочности).

Таким образом, условие (1) переходит в условие надежности:

$$P(x,t)>P_н, \tag{15}$$

где $P_н$ – уровень минимально требуемой (нормируемой) надежности сооружения по признакам несущей способности и эксплуатационной пригодности.

Расчетный уровень надежности $P(x, t)$ связан с вероятностью отказа $Q(x, t)$ зависимостью:

$$P(x,t) = 1 - Q(x,t) \tag{16}$$

Для реализации конкретных последних двух уравнений, отражающих уровни надежности, необходимо знать следующие параметры влияния (исходные данные):

– значения требуемого уровня безопасности и, соответственно, нормируемый уровень надежности $P_н$;

– количество основных влияющих величин;

– тип плотности распределения статистических величин, участвующих в расчетах (в т.ч. нагрузок, внутренних усилий, напряжений, геометрических характеристик, прочностных возможностей материалов в сечениях и др.);

– расчетные модели распределения внутренних усилий (напряжений) в сечениях в доверительных границах 0,95.

При любых законах распределения $\tilde{R}$ и $\tilde{S}$ выполняются зависимости

$$\bar{Z} = \bar{R} - \bar{S}, \; D_Z = D_R + D_S, \text{ или } \sigma_Z^2 = \sigma_R^2 + \sigma_S^2; \tag{17}$$

где $\bar{Z}, \bar{R}, \bar{S}$ – математические ожидания соответствующих случайных величин ($\bar{R}$ принимается по табл. 7); σ_Z^2, σ_R^2, σ_S^2 – их стандартные отклонения (для прочности бетона величина $\sigma_R^2 = V\bar{R}$, где коэффициент вариации v принимается по табл. 7) D_Z, D_R, D_S – их дисперсии. Значения $\bar{S}$ и σ_S^2, представляющие математическое ожидание и стандартное отклонение силового фактора вычисляют по правилам сопротивления материалов упругих систем с использованием параметров из табл. 4 – 6.

Число стандартов, укладывающихся в интервале [0, $\bar{Z}$] называется *характеристикой безопасности* β:

$$\beta = \frac{\bar{Z}}{\sigma_Z(Z)} = \frac{\bar{R} - \ddot{S}}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}. \tag{18}$$

Как следует из (18), значение характеристики безопасности β можно оценить с достаточной для практики точностью на основании только числовых характеристик случайных величин $\tilde{R}$ и $\tilde{S}$ – их математических ожиданий и дисперсий. Кроме того, при изменении значения нагрузки, например, в результате увеличения площади, с которой она собирается, равно как при изменении прочности несущих элементов, например, вследствие увеличения размеров поперечных сечений, значения изменчивости (коэффициентов вариации v_K и v_S остаются постоянными. Расчетная вероятность отказа по параметру x (напряжение, сила и др.) в интересующий момент времени t (рис 4). $P(x, t)$, необходимая для оценки $P(x, t)$ по (18), может быть получена в виде:

$$Q(x,t) = \int_0^{\infty} F_R(x,t)\rho_S(x,t)dx; \tag{19}$$

где: $F_R(x,t)$ – функция распределения прочности материала конструкции R; $\rho_S(x.t)$ – плотность распределения силового фактора S. Смысл интеграла (19) поясняет рис. 3.

Для получения достоверных оценок надежности конструкции с использованием функционала (19) необходимо:

– овладеть навыками расчетов со статистическими массивами входящих в (19) величин;

– иметь программное обеспечение всех расчетных операций и вычисление функционала надежности по (19);

– разработать методику приближенного расчета для определения (в условиях проектной организации) расчетной вероятности в зависимости от двух параметров статистического распределения силовых воздействий (математическое ожидание $\tilde{S}$ и коэффициент вариации V_S). Например, в уравнение (20), отражающее оценку растягивающих напряжений по нижним фибрам бетона предварительно напряженных пролетных строений от совместного воздействия усилий натяжения арматуры и изгибающего момента σ_{bt}, следует освоить ввод параметров статистических величин:

$$\tilde{\sigma}_{bt} = A_p \frac{\tilde{\sigma}_{pi}}{\bar{A}_{red}} \left(1 + \frac{e_x y_u}{i^2} \right) - \frac{\tilde{M}_{g+v}}{\bar{W}_{red}} \quad . \quad (20)$$

Отмеченные волнистой линией величины рассматриваются как случайные. В табл. 4 – приводятся рекомендуемые коэффициенты вариации для постоянных и временных нагрузок, а также создаваемых в арматуре напряжений. Разрешается (в первом приближении) в уравнениях типа (20), в которых случайные величины принимаются независимыми, пользоваться правилами «алгебры» случайных величин теории вероятностей. Таким образом, могут быть подготовлены данные для вычисления интеграла надежности (19), который представляет собой неполную гамма–функцию. Его вычисление аналитическими средствами затруднено, поэтому представляется более целесообразным заменить интегрирование по (19) суммированием по (21)

$$P(x,t) = \sum_{1}^{n} F_R(x,t) \rho_S(x,t) dx \quad . \quad (21)$$

Процедура численного интегрирования по (21) достаточно легко реализуется при использовании метода статистических испытаний (Монте–Карло) и прямым моделированием случайных процессов. Как следует из (18), значение характеристики безопасности β можно оценить с достаточной для практики точностью на основании только числовых характеристик случайных величин $\tilde{R}$ и $\tilde{S}$ – их математических ожиданий и дисперсий. Кроме того, при изменении значения нагрузки, например, в результате увеличения площади, с которой она собирается, равно как при изменении прочности несущих элементов, например, вследствие увеличения размеров поперечных сечений, значения изменчивости (коэффициентов вариации f_R и f_S остаются постоянными.

Соотношение между вероятностью разрушения Q и характеристикой безопасности β может быть проиллюстрировано, если предположить, что величины $\tilde{R}$ и $\tilde{S}$ подчиняются нормальному закону распределения. Тогда и случайная величина резерва прочности $\tilde{Z}$ также будет подчиняться нормальному закону. В этом случае вероятность отказа можно выразить в виде:

$$Q = P(\tilde{Z} < 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Z}} \int_{-\infty}^{0} \exp\left[-\frac{(Z - \bar{Z})^2}{2\sigma_Z} \right] dZ \,. \quad (22)$$

Выполнив замену переменной $u = \dfrac{Z - \bar{Z}}{\sigma_Z}$, получим:

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Z}} \int_{-\infty}^{0} \exp\left[-\frac{(Z - \bar{Z})^2}{2\sigma_Z} \right] d\left(\frac{Z - \bar{Z}}{\sigma_Z} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} \exp\left(-\frac{u^2}{2} \right) du. \quad (23)$$

где $\Phi(u)$ – интеграл вероятностей, значение которого для различных значений аргумента приведено в приложении 1. Функция (23) является функцией распределения для нормально распределенной случайной величины с параметрами $m = 0$ и $\sigma = 1$.

Используя (18) и (23), получим $P(Z > 0) = \Phi(\beta)$ и $Q = 1 - \Phi(\beta)$. Кроме интеграла (23, 24) для расчетов используется интеграл вероятностей:

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du. \tag{24}$$

В этом случае вероятность отказа Q и вероятность безотказной работы P вычисляются по формулам:

$$Q = 1/2 - \Phi(\beta); \qquad P(Z > 0) = 1 - Q = 1/2 + \Phi(\beta). \tag{25}$$

В табл. 1 приведены значения вероятности разрушения Q для некоторых величин характеристики безопасности β. Значения $\beta > 5$ считаются очень большими, соответствующими крайне малой вероятности разрушения.

Таблица 1

β	2,25	3,25	3,75	4,25	4,75	5,25
Q	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}

По сравнению с вероятностью разрушения Q характеристика безопасности β имеет то преимущество, что выражена небольшим числом, обычно больше единицы, в то время как VQ представляет собой очень малую дробь, поэтому в практических расчетах удобнее пользоваться именно характеристикой безопасности. Как следует из табл. 1, увеличение характеристики безопасности соответствует уменьшению вероятности отказа, или повышению вероятности безотказной работы конструкции. Иногда вместо резерва прочности Z используется величина, которая может рассматриваться как *интегральны1ёй коэффициент запаса*

$$\bar{\xi} = \bar{R} / \bar{S}. \tag{26}$$

Коэффициент запаса связан с характеристикой безопасности β и статистическими характеристиками обобщенной прочности и обобщенной нагрузки зависимостью:

$$\bar{\xi} = \frac{1 + \sqrt{\beta^2 (f_S^2 + f_R^2) - \beta f_S^2 f_R^2}}{1 - \beta^2 f_R^2}, \tag{27}$$

где f_R, f_S – коэффициенты вариации.

При проектировании строительных конструкций уровень безопасности их должен быть таким, чтобы исключить возникновение отказов, связанных с угрозой для здоровья и жизни людей, опасностью для окружающей среды, а также серьезным экономическим и моральным ущербом, либо уменьшить риск наступления таких ситуаций до значений, сопоставимых с приемлемыми значениями индивидуального естественного риска.

Для строительных систем приемлемым уровнем риска считается риск при $\beta = 3$, что соответствует правилу трех стандартов для допустимых отклонений случайной величины от центра распределения (математического ожидания m_Z). Вероятность разрушения при этом для нормального распределения $\tilde{Z}$ равна $Q = 0{,}00137$.

Пример 1. Для прямоугольного железобетонного сечения определить характеристику безопасности *β*, вероятность безотказной работы *P(Z* < 0), вероятность разрушения *Q* = *P(Z* < 0), интегральный коэффициент запаса *ξ*.

Исходные данные: *Размеры сечения:* b =30 см; h = 80 см; a = 7см. *Арматура А–III:* A_s = 29,45 *см*^{2} *(*6 Ø 25*);* R_{sn} = 390 МПа; R_s = 365 МПа. *Бетон В20:* R_{bn} = 15 МПа; R_b = 10,5 МПа.

Изгибающий момент от внешней нагрузки: M = 540 кНм.

Коэффициент условий работы: $\gamma_c = \gamma_{b2}$= 0,9.

Случайные параметры системы: прочность бетона и стали соответственно $\tilde{R}_b$ и $\tilde{R}_s$.

Для вычисления значений параметров безопасности необходимо знать статистические характеристики случайных величин – математические ожидания $\overline{R}\,,\overline{S}$ и дисперсии (коэффициенты вариации f_R и f_S) обобщенной прочности R и обобщенной нагрузки S. Статистические характеристики обобщенной прочности – предельного изгибающего момента в сечении M – получены в примере 2.12: R = m_R = 777,85 кН м; коэффициент вариации: $f_R = \sigma_R / \overline{R} = \sigma_M / M_M$ = 33,14/777,85 = 0,05. Статистические характеристики обобщенной нагрузки – изгибающего момента в сечении от внешних нагрузок – необходимо найти по заданному коэффициенту вариации f_u. = 0,12 и расчетному изгибающему моменту M = 540 кНм. Принимаем, что обеспеченность расчетного момента M равна 3 стандартам, тогда математическое ожидание $\overline{S}$ = m_M = $M/(1+3f_M)$ = 397,1 кН м; стандарт $\sigma_S = \sigma_M = m_M f_M$ = 47,65 кНм.

Характеристика безопасности $\beta = \frac{777{,}85 - 397{,}1}{\sqrt{33{,}14^2 + 47{,}65^2}}$ = 6,56. По формуле (12) вероятность безотказной работы $P(S > 0) = \Phi(\beta)$ = 0,99999999997; риск Q = 0,310^{10}. Коэффициент запаса:

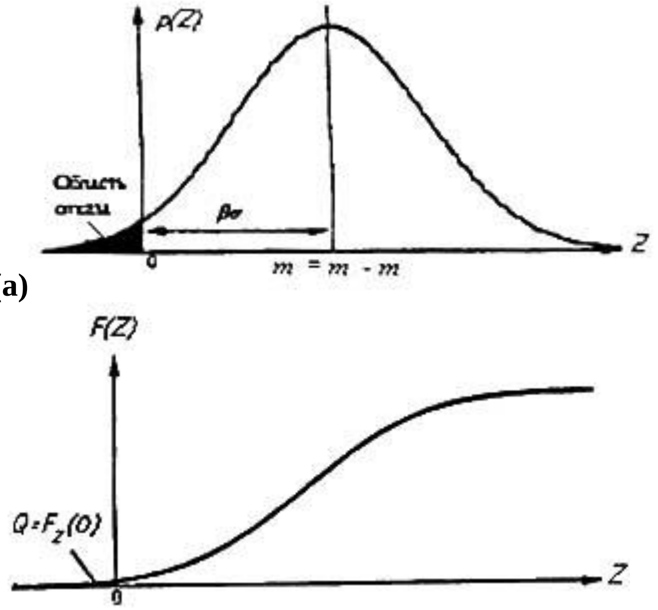
$$\bar{\xi} = \frac{1 + \sqrt{6{,}56^2 \times (0{,}12^2 + 0{,}05^2) - 6{,}56^4 \times 0{,}12^2 \times 0{,}05^2}}{1 - 6{,}56^2 \times 0{,}05^2} = 2{,}03.$$

Уровень безопасности при β = 6,56 является неоправданно высоким, это приводит к перерасходу материала и удорожанию конструкции в целом. Как показали результаты вычислений, расчет по нормам в детерминированной постановке не дает гарантии оптимального соотношения между надежностью и экономичностью, так как фактический уровень надежности в нормах не устанавливается. Содержащиеся в нормах проектирования нормативные значения нагрузок, сопротивления материалов, значения коэффициентов надежности, определяющие уровень надежности, назначены, в основном, из практического опыта, который свидетельствует о том, что повреждения и обрушения конструкций чаше всего связаны с допущенными ошибками при строительстве и эксплуатации, а не с недостаточным уровнем надежности, заложенным в проектные решения. Это послужило косвенным основанием для наметившейся за последние годы тенденции постепенного снижения расчетных значений нагрузок и повышения расчетных значений сопротивлений материалов.

Пример 2. Определить расчетные характеристики нагрузки и несущей способности сечения при заданном уровне безопасности β = 3,0; $P(Z > 0) = \Phi(\beta)$ = 0,9987 по результатам вычислений предыдущего примера и примера 2.12. При уменьшении β график плотности распределения резерва прочности *p(Z)* сдвигается по оси Z влево (рис. 4) на интеграл *(*$m_{Z1} - m_Z$), где m_s = $\overline{R} - \overline{S}$ = 777,85 – 397,1 = 380,75кНм – математическое ожидание резерва прочности Z при β = 6,56; m_{Z1} – то же для β =3,0 (рис. 4). Величина m_{Z1} находится из решения уравнения:

$$\frac{m_{Z1}}{\sqrt{\sigma_{Z1}^2 + \sigma_S^2}} = \frac{\overline{R}_1 - \overline{S}}{\sqrt{\overline{R}_1^2 \times f_R^2 + \sigma_S^2}} = 3{,}0. \qquad (28)$$

Корень уравнения $\overline{R}_1$ = 563,084 кНм – математическое ожидание обобщенной прочности при β = 3,0. Стандарт σ_{R1} = $\overline{R}_1 \times f_R$ = 563,084 x 0,05 = 28,154 кНм. Тогда m_{Z1}=563,084 – 397,1 = 165,984 кНм.



(а) **(б)**

Рис. 4. Плотность распределения (*а*) и функция распределения (*б*) случайной величины резерва прочности *Z*

Построим законы распределения *p*(*R*) и *p*(*S*) по имеющимся характеристикам m_S, m_{R1}, σ_{R1}, σ_S (рис. 5). Кривые распределения пересекаются в точке, соответствующей несущей способности сечения и обобщенной нагрузке S_0: $S_0 = R_0$ = 500 кНм. Точка пересечения отстоит от соответствующих центров распределения на n_R и n_S стандартов:

$n_R = \dfrac{\overline{R}_1 - R_0}{\sigma_{R1}} = \dfrac{563{,}084 - 500}{28{,}154} = 2{,}24$, что соответствует обеспеченности $P(R_l > R_0) = \Phi(n_R)$ = 0,9875.

$n_S = \dfrac{S_1 - S}{\sigma_S} = \dfrac{500 - 397{,}1}{47{,}65} = 2{,}16$, что соответствует обеспеченности $P(S < S_0) = \Phi(n_S)$ = 0,9846.

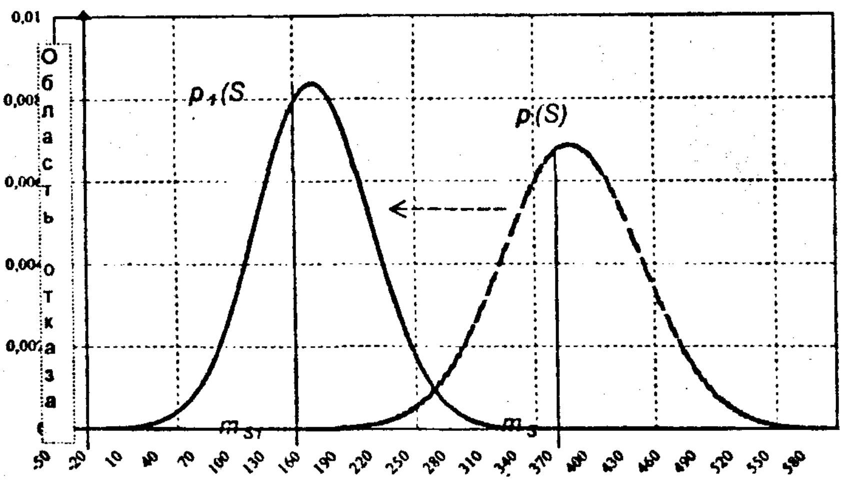


Рис. 5. Плотность вероятностей резерва прочности при уровне безопасности 6,56 – *p*(*Z*) и 3,0 – $p_1(Z)$

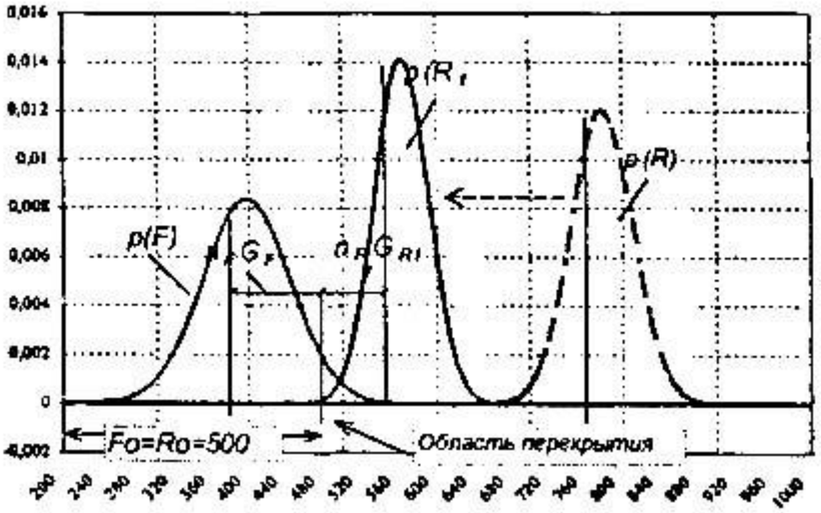


Рис. 6. Определение расчетных значений обобщенной прочности *R* и обобщенной нагрузки *S* при уровне безопасности 3,0

Хотя обеспеченность каждого из параметров R_1 *и S* меньше 0,9987, но отказ сечения в целом происходит только при одновременном выполнении двух событий:

- А: прочность равна R_0 , а нагрузка больше S_0;
- Б: *нагрузка равна* S_0, а прочность меньше R_0.

Вероятность совместного выполнения событий А и Б равна заданному уровню риска Q = = 1 – 0,9987 = 0,0013. Таким образом, приняв за расчетное значение прочности предельный моменг $M = R_0$, или за расчетное значение момента в сечении от действующей нагрузки $M^* = S_0$, можно запроектировать сечение с меньшим расходом материалов, а, следовательно, меньшей стоимости, при обеспечении достаточного уровня надежности. Расчетная надежность P связана с β зависимостью, представленной в табл. 2.Таблица 2

β	4,0	3,0	2,5	2,0	1,64	1,28
Вероятность отказа P_t	$3,2x10^{-5}$	$2x10^{-3}$	$5x10^{-3}$	10^{-2}	$5x10^{-2}$	10^{-2}
	0,000032	0,002	0,005	0,01	0,05	0,1
Надежность U_t=1-P_t	0,9997	0,998	0,995	0,99	0,95	0,9

В переходный период, пока действуют нормы СНиП 2.05.03–84, рекомендуемая методика расчета надежности, изложенная выше, дает лишь дополнительную информацию о достоверности детерминистических утверждений об условиях прочности, выносливости, трещиностойкости конструкции. При низкой достоверности (вероятности реализации) инженер принимает дополнительные конструктивные меры к увеличению надежности сооружения (конструкции).

При недостаточной статистической информации рекомендуется пользоваться характеристическими значениями нагрузок и прочности материалов. Под характеристическими значениями понимаются ощутимо реализуемые значения случайных величин; они определяются в доверительных границах до 3–х стандартов, т.е. получается широкая полоса статистических точек реально обозримых в границах 5...95%. В оценках прочности и выносливости материалов конструкции пользуются кривой снизу, отсекающей 5% статистических данных. В оценках нагрузок и воздействий – кривой сверху – 95% статистических наблюдений.

В оценках хорошо контролируемой расчетом трещиностойкости, т.е. отказов экономической ответственности, пользуются экономически оптимальными границами, соответственно 10% и 90%. Такой же подход распространяется и на выбираемые расчетные математические и физические модели законов распределения внутренних сил в сечениях. Эти модели с обеспеченностью не менее 95% должны быть близки к действительным условиям работы материалов в сечениях. Количественную оценку уровня надежности удобно выражать, используя понятие степени безопасности β, т.е. количество стандартов отклонений, откладываемых в большую или меньшую стороны от математического ожидания, чтобы обеспечить заданный (требуемый) уровень безопасности. Связь между β и вероятностью отказа P_f представлена в таблице 2. Требуемая (нормируемая) степень безопасности (как предел желаемой надежности) принимается с учетом опыта строительства и эксплуатации рассматриваемого типа конструкции, а также по экономическим критериям. Степень безопасности β должна устанавливаться и сохраняться на межремонтный период или на весь срок службы сооружения. Во избежание субъективизма при назначении нормируемой надежности, зависящей от тяжести последствий при наступлении тех или иных отказов, есть смысл установить классы безопасности и увязать их с минимально требуемым уровнем надежности или степенью безопасности (табл. 3).

Таблица 3

Класс безопасности	Возможные последствия повреждений и отказов
1	Нет опасности для жизни людей; повреждения или помехи эксплуатации устранены; экономические последствия незначительны
2	Опасность для жизни людей и значительные экономические последствия
3	Опасность для жизни многих людей; большое значение сооружения для населенного пункта (города); очень серьезные экономические и социальные последствия

При установлении класса безопасности учитываются следующие факторы:

– требования общественности к безопасности сооружения (критерии опасности для жизни людей, важности объекта);

– экономические соображения (стоимость восстановительного ремонта, реконструкции, замены).

К первому классу безопасности следует относить все расчеты, обеспечивающие эксплуатационную пригодность железобетонных конструкций (сооружений):

– по общим деформациям $\beta = 1{,}64$; $U_f = 0{,}95$);

– на продольную трещиностойкость ($\beta = 1{,}64$; $U_f = 0{,}95$);

– на поперечную трещиностойкость ($\beta = 1{,}28$; $U_f = 0{,}9$);

– трещиностойкость по наклонным сечениям $\beta = 1{,}28$; $U_f = 0{,}9$).

Ко второму классу безопасности относятся расчеты, обеспечивающие гарантии несущей способности локальной зоны конструктивного элемента, звена, сечения (по максимальному моменту, поперечной силе) без обрушения или потери устойчивости всей системы ($\beta = 3$; $U_f = 0{,}998$).

К третьему классу безопасности относятся расчеты, обеспечивающие гарантии общей устойчивости сооружения, геометрическую неизменяемость всей системы (пролетные строения плюс опоры) против обрушения ($\beta = 4{,}0$; $U_f = 0{,}9997$).

4. Статистические параметры нагрузок, воздействий среды и прочности материалов.

Реализация двух подходов к оценке надежности (в детерминированной и в вероятностной форме) возможна только при условии достаточно представительной статистической информации о нагрузках, воздействиях и прочностных возможностях материалов, а также – при соблюдении технологической дисциплины служб контроля – качества проектирования, строительства и содержания сооружений в эксплуатации. Характеристические (нормативные) сопротивления бетона устанавливают на основе экспериментальных данных, по которым построенные гистограммы частот аппроксимируются теоретическими законами распределения. Анализ многочисленных испытаний стандартных образцов бетона (кубов, призм, цилиндров) позволяет утверждать, что распределение прочности бетона на сжатие близко соответствует нормальному закону.

В высопрочных бетонах (В50...В800) часто замечалась асимметрия распределений прочности с большим отклонением статистических точек от их средних значений в сторону высоких значений прочности. Однако практически для всех задач, связанных с оценкой вероятности отказов, т.е. с анализом "перехлеста" на "хвостах" распределений R и S, имеют значения только те части распределений, которые лежат в стороне больших значений силовых воздействий и меньших значений прочности.

$$f(R)=\frac{1}{\hat{R}\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(R_i-\bar{R})^2}{2\hat{R}^2}\right], \qquad (28)$$

где: $\bar{R}$, $\hat{R}$ – математическое ожидание и стандарт кривой распределения прочности.

При достаточно большом числе испытаний среднее значение приближается к математическому ожиданию. Величины $\bar{R}$, $\hat{R}$ определяются по формулам:

$$\bar{R}=\sum_{i=1}^{n}\frac{R_i}{n}; \qquad \hat{R}=\frac{\sqrt{\sum_{1}^{n}\left(\bar{R}-R_i\right)^2}}{n-1}, \qquad (29)$$

где n – число испытаний.

Степень рассеивания прочности бетона характеризуется коэффициентом вариации $f_R = \hat{R}/\bar{R}$. (24)

Назначение характеристических (нормативных) сопротивлений бетона связано с требуемым уровнем обеспеченности против достижения предельных состояний различной ответственности. Характеристические сопротивления R_n назначаются по призменной прочности на сжатие с обеспеченностью не ниже 0,95 при нормальном законе распределения, что соответствует коэффициенту безопасности β = 1,64:

$$R_n=\bar{R}-1{,}64\hat{R} \text{ или } R_n=\bar{R}(1-1{,}64 f_R). \qquad (30)$$

Следует особо отметить, что назначение обеспеченности P = 0,95 основным нормируемым характеристическим сопротивлениям бетона справедливо, как часто реализуемый подход к назначению нормируемых (допускаемых) напряжений, который признан в отечественных и многих зарубежных нормах, а также отвечает рекомендациям Европейского Комитета по бетону. Как видно из (30), эта величина назначается с учетом статистической изменчивости свойств материалов. Чем больше рассеивание прочности бетона, т.е чем хуже качество бетона, тем больше коэффициент вариации, что влечет за собой снижение нормативных сопротивлений. Значение кубиковой прочности бетона (в МПа) с обеспеченностью P = 0,95 соответствует классу бетона по прочности на сжатие B. Из равенства (30) при фиксированном или заданном значении нормативного сопротивления следует:

$$\overline{R} = R_n/(1-1{,}64 f_R). \quad (31)$$

Необходимая средняя кубиковая прочность, бетона $\overline{R}$, как это следует из (31), при равных нормативных сопротивлениях зависит от коэффициента вариации прочности бетона V_R. С уменьшением коэффициента вариации $V_{R1} < V_{R2} < V_{R3}$, можно снизить среднюю кубиковую прочность бетона $\overline{R}_1 < \overline{R}_2 < \overline{R}_3$ (рис. 7). Соответственно можно уменьшить расход цемента, сохранив при этом требуемую обеспеченность нормативных сопротивлений (P = 0,95). Кубиковая прочность и коэффициент вариации f_R необходимы для производственного контроля качества бетона. Связь класса бетона (по СНиП 2.05.03–84) с маркой бетона на прочность по сжатию представлена в табл. 4 (по СНиП 82–02–95). Переход от нормативных (точнее характеристических) сопротивлений к расчетным (на прочность) производится с учетом заданных коэффициентов надежности по материалу с введением в необходимых случаях коэффициента условий работы.

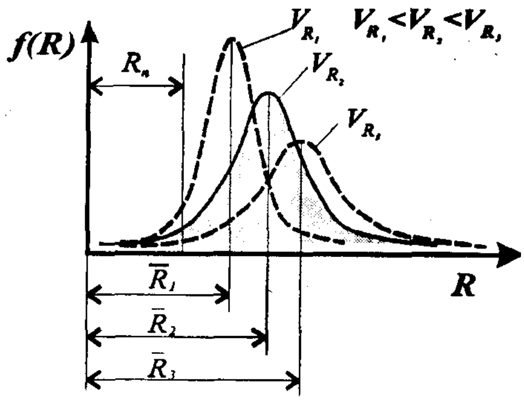


Рис. 7. Кривые распределения прочности бетона при различных коэффициентах вариации

Таблица 4

Класс бетона по прочности на сжатие	Средняя прочность бетона данного класса, кг/см^2 при коэффициенте вариации 13,5 %	Ближайшая марка бетона по прочности	Отклонение ближайшей марки бетона от средней прочности класса, %
В 2	26,2	М 25	-4,6
В 2,5	32,7	М 35	+7,0
В 3,5	45,8	М 50	+9,1
В 5	65,6	М 75	+14,5
В 7,5	98,2	М 100	+1,8
В 10	131,0	М 150	+14,5
В 12,5	163,7	М 150	-8,4
В 15	196,5	М 200	+1,8
В 20	261,9	М 250	-4,5
В 22,5	294,4	М 300	+1,9
В 25	327,4	М 350	+6,9
В 30	392,9	М 400	+1,8
В 35	458,4	М 450	-1,8
В 40	523,9	М 500	-4,8
В 45	589,4	М 600	+1,8
В 50	654,8	М 700	+6,9
В 55	720,3	М 700	-2,8

В 60	785,8	М 800	+1,8

Коэффициент надежности по материалу (γ_b) учитывает возможность снижения фактической прочности бетона и изменение его статистического разброса в конструкции по сравнению с прочностью испытанных в лабораторных условиях образцов бетона.

Как правило, учет коэффициента надежности γ_b и γ_{bt}, а так же коэффициента условий работы γ_m приводят к значениям расчетных сопротивлений R_b и R_{bt}, имеющим трехстандартное обеспечение (P = 0,997). Коэффициент условий работы m учитывает особенности действительной работы применяемых конструкций и материалов, имеющие систематический характер и не отраженные непосредственно в расчетных схемах. Таким образом, расчетные сопротивления бетона сжатию R_b (рис. 8) и растяжению R_{bt}, определяются по:

$$R_b = (R_{bn} / \gamma_b)m; \qquad (32)$$

$$R_{bt} = (R_{btn}\gamma_{bt})m \qquad (33)$$

где: γ_b и γ_{bt}, — коэффициент надежности по бетону при работе на сжатие и растяжение.

В частности, по действующим СНиП: γ_b =1,3; γ_{bt} =1,5. В стадии эксплуатации следует учитывать совместное воздействие силовых факторов и неблагоприятных влияний внешней среды, которые могут привести к продольному трещинообразованию и разрыхлению структуры бетона. В результате расчетное сопротивление в расчетах надежности по признаку сопротивления образованию продольных трещин в конструкции должны быть ниже нормативных значений.

$$R_b^T = R_{bn}^T(1 - \beta V_R), \qquad (34)$$

где: β – коэффициент безопасности, т.е. число стандартов, соответствующих необходимому уровню надежности; V_R – коэффициент вариации.

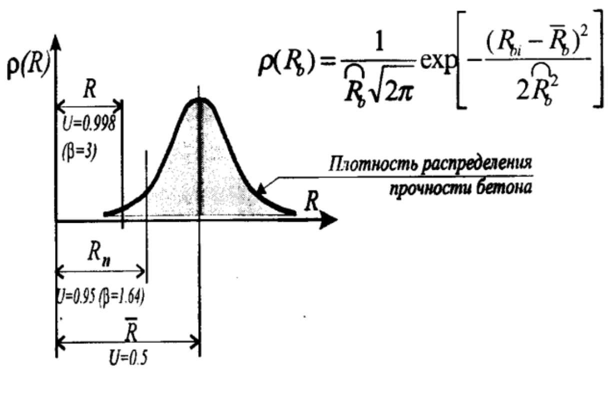


Рис. 8

В зависимости от класса бетона и ответственности расчета (прочностной или экономический) величина β принимается равной β = 2...3, что соответствует уровню обеспеченности $U(R)$ =

0,977 ... 0,998. Расчетное сопротивление R_{bf} бетона сжатию при расчете на выносливость определяется с учетом изменения прочности бетона во времени:

$$R_{bf} = m_{b1}R_b = R_b K_{bf} \beta_b, \quad (35)$$

где: m_{b1} – коэффициент условий работы бетона при воздействии многократно повторной нагрузки; K_{bf} – коэффициент выносливости, учитывающий снижение прочности бетона от воздействия многократно повторной нагрузки; β_b – коэффициент, учитывающий рост прочности бетона во времени. Все эти коэффициенты должны иметь статистическое обоснование. В целом расчетное сопротивление на выносливость R_{bf} назначается с позиций здравого смысла с обеспеченностью P_{bf} = 0,95, как это принято и в отечественных нормах, и в нормах западных стран. За нормативные сопротивления растяжению напрягаемой и ненапрягаемой арматуры R_{pn} и R_{sn} принимаются контрастные характеристики: (а) с ярко выраженной площадкой текучести; (б) не имеющие ярко выраженной площадки текучести – условный предел текучести, при котором остаточные относительные удлинения при снятии нагрузки равны 0,2%.

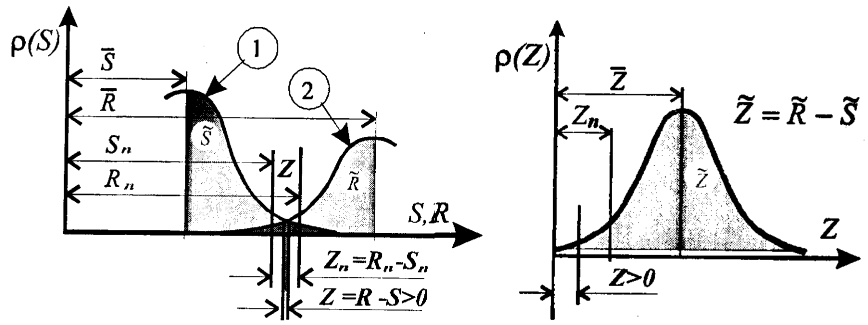
Нормативные сопротивления арматуры растяжению устанавливаются с учетом статистической изменчивости прочностных свойств. Доверительная вероятность нормативного сопротивления считается достоверной, если ее величина не менее 0,95. Расчетное сопротивление $\boldsymbol{R_p}$ напрягаемой арматуры растяжению, используемое в расчетах, определяется с учетом коэффициентов надежности по арматуре γ_p и условий работы мостовых конструкций ***m*,** т.е.:

$$R_p = (R_{pn} / \gamma_p) m \quad (36)$$

Аналогично определяют расчетное сопротивление ненапрягаемой арматуры. Коэффициент надежности по арматуре учитывает возможность изменения механических характеристик в процессе изготовления железобетонных конструкций и их эксплуатации, раннее, чем это предусмотрено СНиП, развитие пластических деформаций, возможность повышенной опасности коррозии проволочной арматуры и другие причины. Расчетные сопротивления R_p должны гарантироваться (в состоянии поставки) с обеспеченностью не менее 0,997, что при нормальном законе распределения прочностных характеристик арматуры соответствует условию (25).

$$R_p \le \overline{R}_p - 3\widehat{R}_p, \quad (37)$$

где R_p и R_p среднее и стандарт распределения прочностных характеристик арматуры. Коэффициент безопасности β = 3 соответствует трехстандартной обеспеченности (0,997) против опасности достижения предельного состояния по несущей способности. Условие надежности по своему стратегическому смыслу отражает результат «столкновения» сил ***S*,** имеющих трудно обозримую вероятностную природу, со столь же трудно контролируемым статистическим массивом прочностных возможностей материалов железобетонной конструкции ***R***. Как легко усматривается из рис. 9,а, «перехлест» статистического распределения сил за прочностные возможности бетона неизбежно влечет за собой большую или меньшую вероятность отказа.



а) б)

Рис. 9. Здесь $\tilde{Z}$, $\tilde{R}$, $\tilde{S}$ – запас, а также предельный и действующий факторы, как случайные величины.

На рис. 9,а: 1 – плотность распределения действующего силового фактора $\tilde{S}$. Распределение $\tilde{S}$ слева от среднего значения не имеет практического значения, поскольку оценка вероятности отказа решается в зонах малых вероятностей (Z_n), т.е. на «хвостах» распределений S_{max} и R_{min}. 2 – плотность распределения прочностного фактора $\overline{R}$. Распределение $\overline{R}$ справа от среднего значения $\overline{R}$ практически не оказывает влияния на результат расчета. Заштрихованы те части распределений, которые реально влияют на оценки надежности Z; $\overline{R}$, R_n, R – среднее, нормативное и расчетное значения предельного фактора; $\overline{S}$, S_n, S – среднее, нормативное и расчетное значения действующего фактора; $Z_н$, Z – нормативный и расчетный запас по надежности в детерминированной форме.

При достаточно представительной статистике сил S – в обобщенном смысле силовые воздействия (N, M, Q, σ) и R в обобщенном смысле – предельные значения прочности и обоснованно (экономически) заданной надежности против реализации предусмотренных действующими СНиП предельных состояний можно обеспечить необходимые (оптимальные) гарантии неразрушимости и долговечности конструкции. Из рис. 6.4а видно, что, используя детерминированные формы оценки надежности, можно получать также оценки неразрушимости любых строительных конструкций в целом, и мостовых, в частности. Таким образом, по методике СНиП определяют отдельно нормативные и расчетные значения предельного R и действующего S фактора с заданным уровнем обеспеченности, а затем сравнивают их численно в детерминированном виде. Практически в реальных условиях проектирования при оценках прочностных возможностей действующих сооружений приходится оперировать достаточно малыми вероятностями отказов (0.01...0.1), т.е. определять вероятность реализации предельно низких прочностей материалов одновременно с наиболее высокими уровнями действующих нагрузок, т. е. в зонах "хвостов" распределений, крайне неустойчивых и статистически плохо обеспеченных. *Становится также очевидным, что в оценках надежности железобетонных конструкций в большинстве случаев практически теряет смысл оперировать в расчетах надежности несимметричными распределениями, фактически бесполезно осложняющими процесс вычислений.*

Если учесть низкую устойчивость и обусловленность статистических массивов, особенно на "хвостах" распределений, то "погоня" за более точными законами распределений прочности бетона создает лишь иллюзию точности, особенно на первых этапах вероятностного анализа состояния железобетонных конструкций. В прямой вероятностной постановке оценку надежности можно произвести путем вычисления запаса в вероятностной форме, рис. 9,б. Практическое решение такой задачи достаточно точно и просто реализуется на основе метода статистических испытаний (метод Монте–Карло).

По данным различных авторов на основании испытания образцов фактическая прочность бетона в интервале доверительных границ (т.е. за исключением случайных или ошибочных выбросов) в большинстве случаев достаточно достоверно может быть описана нормальным законом распределения. Такое утверждение справедливо еще и потому, что в наших расчетах используются лишь "хвостовые" участки распределений, статистически плохо обусловленные в любых статистических массивах.

Назначение нормативных нагрузок. Нагрузки разделяются на постоянные и временные в зависимости от продолжительности их действия. В частности, к постоянным нагрузкам железобетонных пролетных строений мостов относятся: собственный вес, воздействия от предварительного натяжения арматуры, усадки и перепада температуры воздуха. Нормативная нагрузка от собственного веса принимается по проектным значениям плотности и массам материалов. Нормативное значение предварительного напряжения устанавливается по предусмотренному проектом контролируемому усилию в арматуре с учетом нормативных потерь предварительного напряжения. Фактические предварительные напряжения в арматуре отклоняются от нормативных значений. Эти отклонения вызываются как изменчивостью физико–механических и реологических свойств бетона и стали, площади поперечного сечения арматуры, разного рода сил трения, обжатия анкеров и упоров, так и систематическими отклонениями контролируемых показателей, зависящих от технологической дисциплины людей.

Очень часто, особенно в железобетонных мостах относительно больших пролетов (более 50–60 м), постоянные нагрузки превышают 50–80% от суммарных нагрузок. В таких сооружениях постоянные нагрузки оказывают определяющее влияние на напряженное состояние, деформативность и долговечность железобетонных конструкций, если учесть значительное влияние в таких случаях ползучести и виброползучести на прочность и деформационные возможности бетона. Исчерпание запаса пластических свойств бетона очень опасно – нерасчетный перегруз или неожиданная концентрация напряжений могут повлечь за собой мгновенный отказ.

Нормативная вертикальная нагрузка от подвижного состава железных дорог установлена с учетом возрастания нагрузок от локомотивов и вагонов на перспективу. Объемлющие кривые от нормативных схем перспективных нагрузок послужили основой для назначения нормативных распределенных эквивалентных нагрузок в зависимости от длины загружения *(λ),* характера линий влияния и положения вершин линий влияния. Характер статистического разброса нагрузок получен по результатам анализа массового взвешивания локомотивов и вагонов.

Нормативная вертикальная подвижная нагрузка на автомобильных дорогах принимается от автотранспортных средств в виде полос с условным названием АК (А – автомобильная, К – класс). Введение этой нагрузки связано с тем, что последние годы характеризуются интенсивным развитием автомобильного транспорта и все более широкое применение находят тяжеловесные автопоезда. Общий вес автомобилей растет быстрее осевых нагрузок, что вызывает увеличение воздействия автомобильных нагрузок на пролетные строения сравнительно малых пролетов – 10...30 м. Анализ автопарка и весов обращающихся по мостам нагрузок позволил получить гистограммы распределения нагрузок. Если исключить из анализа основную массу легковых автомобилей, которые не оказывают сколько нибудь ощутимого влияния на режим загружения и несущую способность мостов, то гистограммы можно аппроксимировать нормальным законом распределения, тем более что, как было показано выше, закономерности распределения нагрузок слева от средних значений практически не оказывают влияния на вероятностные оценки надежности сооружения. Как показал анализ, постоянные, подвижные, ветровые, сейсмические нагрузки, а так же усилия от натяжения арматуры и др. имеют отчетливо выраженную статистическую природу. Для практических расчетов с достаточной точностью могут быть использованы законы нормального (усеченного) распределения, как показано на рис. 10. Расчетные (точнее – чрезвычайные) нагрузки по СНиП записывают как: $S = S_n \gamma_f \eta_f (1 + \mu)$, где: γ_f – коэффициент надежности учитывает разную вероятность отклонения от средних значений для различных - нагрузок в расчетных оценках надежности конструкций разной ответственности; η_f – коэффициенты совместной работы (многополосности, сочетаний) учитывают вероятность одновременной реализации максимальных значений различных расчетных нагрузок и воздействий; $(1 + \mu)$ – коэффициент для временных подвижных нагрузок, учитывающий динамический характер этих нагрузок, который также должен быть обоснован в результате вероятностно– статистического анализа.

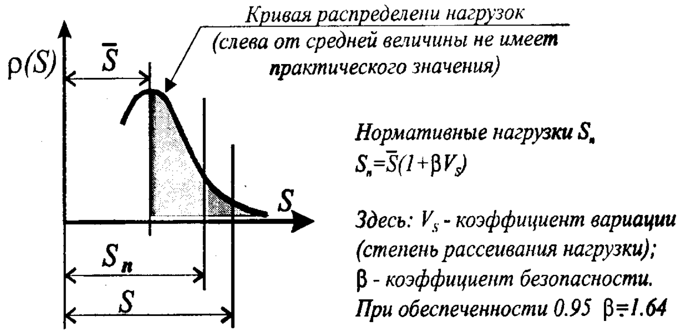


Рис. 10

Изменчивость нагрузок от собственного веса конструкции (кроме нагрузок от проезжей части автодорожных мостов) обусловлена отклонениями геометрических размеров и веса от номинальных значений 3–х стандартной обеспеченности соответствует коэффициент надежности по нагрузке от собственного веса $\gamma_f = 1,1$, если ее учет увеличивает расчетное суммарное воздействие, или же $\gamma_f = 0,9$ – в тех случаях, когда эта нагрузка его уменьшает. Вес мостового полотна железнодорожных мостов с ездой на балласте изменяется более значительно, т.к. проектную толщину балластного слоя под шпалой приходится менять при ремонте пути. Коэффициент надежности по нагрузке от веса мостового полотна на балласте принимается $\gamma_f = 1,3$ или $\gamma_f = 0,9$, а от веса элементов проезжей части автодорожных мостов по той же причине $\gamma_f = 1,5$ или $\gamma_f = 0,9$. При таком подходе в практических инженерных расчетах закономерности статистических совокупностей на первых порах достаточно характеризовать двумя параметрами: математическим ожиданием и коэффициентом вариации временных нагрузок.

Нормативная модель нагрузки АК на каждой полосе движения включает двухосную тележку весом 2,0К с расстоянием между осями 1,5 м, символизирующую одну тяжелую грузовую машину с давлением на ось Q = 1,0 К, и равномерно распределенную, как бы среднестатистическую автомобильную нагрузку, интенсивностью 0,1 К тс/пм. Класс нагрузки для капитальных мостов принимается равным К = 11. Уместно отметить, что при строительстве МКАД для московских мостов и путепроводов принята более высокая нормативная нагрузка А14, что отражает реальную тенденцию роста тяжелых автотранспортных средств, особенно ощутимых на малых участках линий влияния расчетных усилий (λ = 2,0...25,0 м). Кроме того, мосты расчитываются на пропуск одиночных тяжелых колесных экипажей НК – 80 так, как это рекомендуется СНиП 2.05.03–84.

На каждой полосе нагрузки АК одна тележка, символизирующая одну тяжелую грузовую машину, устанавливается в самое неблагоприятное (для оценки расчитываемого усилия) положение по длине пролета независимо от числа участков загружения, а равномерно распределенной нагрузкой загружаются все участки линии влияния одного знака. Расчетные (чрезвычайные) нагрузки определяют путем умножения нормативных на коэффициент надежности по нагрузке и в необходимых случаях – на динамический коэффициент $1 + \mu$. Коэффициент γ_f, учитывающий максимальное превышение редко обращающихся наиболее тяжелых нагрузок над их нормативными значениями, устанавливается статистическими методами на основе анализа наблюдаемой изменчивости нагрузок. Изменчивость временных подвижных нагрузок объясняется множеством причин: разнообразием конструкции, назначения и веса обращающегося подвижного состава, несовершенством распределяющей роли рессор локомотивов, внецентренным расположением грузов на вагонах, транспортерах, трейлерах, случайным превышением веса грузов вследствие изменчивости их объемного веса и др.

В железнодорожных мостах возможна случайная перегрузка одной из главных балок (ферм) за счет смещения оси пути относительно оси моста в плане. Все эти случайные факторы в большей степени отражаются на величине нагрузок в малых пролетах и уменьшают свое влияние в больших пролетах. Поэтому на коэффициентах надежности сказывается длина загружения *(λ)* (вследствие заметного и частого изменения конструкций и подвижного состава коэффициент надежности по нагрузке γ_f должен своевременно корректироваться с тем, чтобы не допустить опасного возникновения аварийных ситуаций при пропуске по мосту неожиданных сверхтяжелых нагрузок). Анализ статистических наблюдений показал, что статистическое рассеяние автомобильных нагрузок от средних значений на малых участках загружений значительно больше, чем на больших. Поэтому для автомобильной нагрузки АК коэффициент надежности при 3–х стандартной обеспеченности (U = 0,997) принимается равным γ_f = 1,5 к нагрузкам от тележек при расчете элементов проезжей части, а при расчетах других элементов γ_f = 1,5 при $\lambda = 0$ и γ_f = 1,2 при $\lambda > 30$ м, к равномерно распределенной нагрузке γ_f = 1,2. Для колесной нагрузки НК–80, вес которой достаточно устойчив, с отклонениями от номинальных значений в расчетах можно не считаться. При этом γ_f = 1,0. Динамическое воздействие нагрузки на железнодорожные мосты возникает вследствие ударов колесных пар на стыках рельсов и неровностях пути, из–за неравномерного износа бандажей, колебаний надрессорной массы локомотивов и вагонов и др. Динамическое воздействие нагрузки на мосты учитывается введением динамического коэффициента $1 + \mu$, который на основании расчетно–экспериментальных исследований с обеспеченностью 0,95 (1,64 стандарта) принимается равным: а) для железобетонных балочных пролетных строений железнодорожных мостов: $1 + \mu = 1 + 10/(20 + \lambda) \geq 1{,}15$; б) для автодорожных и городских мостов: $1 + \mu = 1 + (45 - \lambda)/135$, где λ – длина загружения, *м*.

Если на конструкцию воздействует сочетание нескольких нагрузок, то нельзя предположить, чтобы все они одновременно действовали в своих максимальных значениях. Определение научно обоснованных коэффициентов сочетаний представляет собой сложную задачу, которая решается методами теории вероятностей и математической статистики. При современном уровне знаний коэффициент сочетаний логично принять η = 1,0 при действии только одной временной нагрузки, а при действии двух и более временных нагрузок η = 0,8 для одной из нагрузок и η = 0,7 для остальных нагрузок. Если расчитываются элементы, воспринимающие не одну временную нагрузку с нескольких полос движения, то нагрузка с полосы, оказывающей меньшее воздействие, учитывается коэффициентом η < 1,0. Такие случаи характерны для мостов двухпутных и трехпутных, широких многополосных мостов под автодорогу, в совмещенных мостах под железнодорожное и автомобильное движение. Естественно, при изменении статистических параметров нагрузок и воздействий коэффициенты сочетаний η должны корректироваться. Важно только выдержать исходный критерий сочетаний – реализация сочетаний не должна быть выше 0,05, (критерий здравого смысла), т.е. реализация события, с которым следует считаться при решении вопроса оптимальной надежности сооружения.

Таблица 5

Нагрузки	Случай применения	Коэффициенты вариации
Тележка	При расчете элементов проезжей части мостов	0,17
	При расчете всех других элементов мостов	0,17 при $\lambda < 30$ м 0,07 при $\lambda < 30$ м
Равномерно распределения	При всех расчетах конструкций мостов на	0,24

	вертикальные нагрузки и горизонтальные воздействия	

Все эти обстоятельства должны учитываться проектировщиками и эксплуатационными службами при выборе и обосновании конструктивных решений и оценке надежности сооружений в эксплуатации. Статистические параметры воздействий и прочности материалов (закон распределения, коэффициенты вариаций, математические ожидания и др. параметры) должны быть достаточно представительными, накапливаться по целенаправленной методике и храниться в «банке» статистической информации. В расчетах надежности рекомендуется использовать параметры нагрузок, полученные в результате анализа накопленной статистической информации (см. табл.5, 6).

Математическое ожидание и правила загружения для нагрузок следует принимать по СНиП 2.05.03–84 п.2.12 [31].В отличие от характеристических значений временных нагрузок в табл. 5 представлены средние значения и коэффициенты вариации временных нагрузок. Характеристические значения (нормативные) используются в детерминистических расчетах по действующему СНиП. Параметры нагрузок по табл. 5 (v и V) используются в прямых вероятностных расчетах надежности железнодорожных мостов. На коротких участках линий влияния применение эквивалентных нагрузок искусственно усложняет расчет и часто искажает результат расчета. Поэтому при загружении участков линий влияния М и Q длиной l < 10м лучше пользоваться схемой сосредоточенных грузов от условных расчетных экипажей:

– для железной дороги — условная схема из двух вагонных тележек смежных вагонов с давлением на каждую ось $\overline{Q}$ = 27 т (среднее значение); V = 0,15 – 0,2 (коэффициент вариации) по интерполяции от l = 10 до l = 1,0 м ;

– для автомобильных дорог – группа расчетных автомобилей по схеме (рис. 11), где $\overline{Q}$ =11 т (среднее значение) и V = 0,17 – соответственно давление на задние оси и коэффициент вариации.

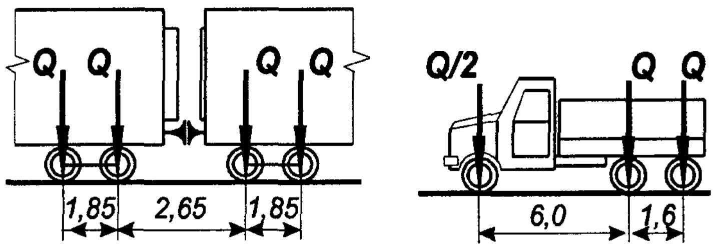


Рис. 11

Коэффициенты вариации и математические ожидания железнодорожных нагрузок. Динамические коэффициенты 1 + μ к нагрузкам от подвижного состава железных, автомобильных и городских дорог впредь до накопления новых статистических данных следует принимать по рекомендациям, полученным в результате статистической обработки экспериментальных наблюдений и экспертных оценок:

$1 + \mu = 1 + 10/(20 + \lambda)$ – для железобетонных балочных пролетных строений, рамных конструкций железнодорожных мостов, но не менее 1.15;

$1 + \mu = 1 + (45 - \lambda)/135$ – для автодорожных и городских мостов.

Во всех расчетах на трещиностойкость и общие деформации по рекомендациям СНиП динамический коэффициент 1 + μ принимается равным 1, хотя логически исключение динамического коэффициента в указанных расчетах трудно оправдать.

Статистические параметры прочности бетона и арматуры. При действии многократно повторной нагрузки характеристическое сопротивление бетона сжатию в расчетах на выносливость обычно определяют по рекомендациям СНиП, п.3.26 с использованием данных табл. 7.

Таблица 6

Длина загружения, м	$\bar{V}$ кН/м (тн/м) Среднее значение (математическое ожидание)		Коэффициент вариации V
	a=0	a=0,5	
10	208,82 (21,29)	197,78 (20,16)	0,114
12	197,62 (19,18)	188,18 (19,18)	0,112
14	189,69 (19,34)	180,94 (18,44)	0,109
16	186,42 (19,03)	173,97 (17,73)	0,107
18	179,73 (18,32)	167,54 (17,08)	0,104
20	173,06 (17,64)	161,61 (16,47)	0,102
25	166,63 (16,98)	155,64 (15,86)	0,090
30	161,14 (16,43)	149,08 (15,50)	0,084
35	155,34 (15,83)	135,94 (13,85)	0,077
40	150,71 (15,36)	131,89 (13,55)	0,071
45	147,11 (14,99)	128,66 (13,11)	0,064
50	144,31 (14,71)	126,31 (12,87)	0,058
60	138,48 (14,19)	126,20 (12,86)	0,056
70	134,77 (13,73)	125,79 (12,82)	0,054
80	132,38 (13,49)	125,66 (12,81)	0,051
90	130,77 (13,33)	125,55 (12,81)	0,049
100	129,98 (13,25)	125,47 (12,80)	0,047
110	129,53 (13,21)	125,43 (12,80)	0,045

в) Коэффициенты вариации постоянных нагрузок и воздействий

Характеристическое сопротивление бетона растяжению в расчетах на выносливость изгибаемых элементов труднее поддается статистическому обоснованию. В первом приближении его можно получать по формуле:

$$R'_{btu} = 1{,}7\,K_{\rho b} m_b\, 0{,}5 R_{bt}\,, \qquad (38)$$

где: $K_{\rho b}$ – коэффициент усталостной прочности определяют по рис. 10 в зависимости от асимметрии цикла ρ_b; m_b – коэффициент условий работы принимают по рис. 9 в зависимости от начального уровня обжатия; R_B – по табл. 8

В табл. 7 приведены расчетные показатели прочности бетона для расчета преднапряженных пролетных строений. Для этого вида железобетонных конструкций применение бетонов классов В < 30 не рекомендуется и в табл. 8 не приводятся.

Таблица 7

Нагрузки воздействия	Коэффициенты вариации V
Собственный вес (g)	0,033
Площадь сечения конструкций (A_{red})	0,0237
Момент сопротивления сечения (W_{red})	0,0229
Эксцентриситет приложения преднапряжения (e_n)	0,0167
Вес мостового полотна с ездой на балласте под железную дорогу	0,10
Вес покрытия ездового полотна и	0,17

тротуаров автодорожных мостов	
Воздействие ползучести	0,03

Примечания к табл. 7:

1. Средние значения (математическое ожидание) принимают по проектным размерам и массам.
2. Коэффициенты вариации вычислены Н.В.Шишовой и В. А. Евдокимовым в МИИТе по результатам измерений натурных конструкций.

Прочностные и деформативные характеристики высокопрочной арматуры, полученные испытаниями на разрыв контрольных образцов на заводах ЖБК, должны соответствовать требованиям соответствующих ГОСТов. Коэффициент вариации прочности высокопрочной проволочной арматуры должен быть не выше нормативного значения V_n= 0,066, установленного многочисленными испытаниями. Если на заводы ЖБК или непосредственно на строительство поставляется напрягаемая арматура с высокой степенью однородности, при которой фактический коэффициент вариации прочности получается ниже нормативного f_n = 0,066, разрешается устанавливать уточненные значения нормативных и расчетных сопротивлений арматуры в соответствии с фактическими статистическими характеристиками прочности так, чтобы нормативная надежность (обеспеченность) была не менее P_n > 0,998 (на уровне трех стандартов).

Таблица 8

Характеристические значения прочности бетона

Вид сопротивления	Обозначение	Классы бетона					
	Среднее значение прочности (кг/см^2)						
Сжатие	$\overline{R}_b$	265	300	340	375	425	465
Растяжение осевое	$\overline{R}_{bt}$	18	20	21,5	22,5	23,5	24,5
Характеристические значения прочностей							
а) в расчетах несущей способности (на чрезвычайные нагрузки) $R = \overline{R}_b (1 - \beta_1 V_1)$							
Сжатие осевое	R_b	160	180	205	225	255	280
Растяжение осевое	R_{bt}	11	12	13	14	15	16
б) в расчетах по эксплуатационной пригодности (на рабочие нагрузки) $R = \overline{R}_b (1 - \beta_2 V_1)$							
Сжатие осевое	R_b	205	235	265	293	332	363
Растяжение осевое	R_{bt}	14	15	16	17	18	19
Сжатие в расчетах на продольную трещиностойкость (на рабочие нагрузки):							
при создании преднапряжения	$R_{bmc,1}$	170	200	235	265	305	335
на стадии эксплуатации	$R_{bmc,2}$	150	170	200	225	255	280

Примечание к таблице 7: β – степень безопасности, V– коэффициент вариации, β_1 =3. V, = 0,135 (второй класс безопасности); β_2 = 1.64 (первый класс безопасности).

Основными причинами статистического разброса контролируемых напряжений арматуры являются неоднородность деформативных свойств отдельных проволок, разная их начальная длина, возможность проскальзывания в инвентарных захватах, износ технологического оборудования для натяжения арматуры, а также – человеческий фактор (технологическая дисциплина). При натяжении пучковой арматуры предварительно напряженных железобетонных элементов напряжения в отдельных проволоках и пучках распределены неравномерно. Статистический разброс контролируемых напряжений в арматуре уменьшает надежность ее работы в процессе натяжения; при эксплуатации возрастает вероятность образования трещин по нормальным и наклонным сечениям.

При изготовлении конструкций пролетных строений мостов как на заводах МЖБК, так и непосредственно на месте строительства рекомендуется определять характеристики статистических распределений контролируемых напряжений в отдельных проволоках пучковой арматуры и полных (суммарных) усилий натяжения в балках пролетных строений мостов. Статистические распределения контролируемых напряжений в отдельных проволоках используются для расчетов надежности работы арматуры в стадии натяжения; распределения полных усилий обжатия в балках необходимы для расчета вероятности трещинообразования бетона в стадии эксплуатации пролетного строения. При отсутствии экспериментальных данных о величинах и характере статистических разбросов предварительных напряжений в арматуре можно принимать нормальные законы их распределения с коэффициентом вариации f_{sp} = 0,05 – 0,06 для отдельных проволок (в расчетах на выносливость) и с f_{sp} = 0,04 – 0,05 во всех расчетах на прочность. В результате пластических деформаций ярко проявляется эффект совместной работы всех проволок в пучках, поэтому фактические коэффициенты вариаций усилий в пучках могут оказаться и значительно меньшими, например, порядка f = 0,03.

Сформулируем некоторые рекомендации, которые желательно соблюдать в дополнение к действующим нормативным документам для проектирования и эксплуатации мостовых сооружений. Обосновать уровень нормируемой надежности мостовой конструкции так, чтобы он был оптимальным по всем прочностным и экономическим критериям почти невыполнимо, используя детерминированные математические модели. Такой уровень обусловлен как многочисленными требованиями безопасной эксплуатации, так и социальной и экономической ответственностью перед обществом.

Во всех областях жизнедеятельности человека назначение степени оптимальной надежности против реализации какой–либо опасности, которая грозит здоровью и жизни людей или разрушению механизмов и сооружений – многоплановая трудно разрешимая задача. В условиях большого количества неопределенных, как правило, изменяющихся во времени факторов, имеющих отчетливо статистическую природу, решение этой задачи, думается, еще долгое время будет опираться на экспертные оценки, здравый смысл и интуицию специалистов. В обозримом будущем при постановке такого рода задач с большим количеством неопределенностей в исходных данных и граничных условиях трудно расчитывать на точный математический расчет (расчетные модели).

Необходимая надежность транспортного сооружения не может быть обеспечена только в рамках требований норм проектирования. Нормы лишь устанавливают минимальный уровень надежности и долговечности сооружения (нижнюю границу), основанный на здравом смысле и накопленном опыте. Проект закладывает в конкретную конструкцию нормативную (или при необходимости более высокую) надежность. В процессе строительства следует добиваться реализации этого важнейшего качества, а службам эксплуатации – сохранять и поддерживать в течение нормируемого или расчетного срока службы, заложенные в проекте долговечность и необходимую работоспособность. Первым документом, во многом определяющим длительную надежную эксплуатацию, являются

СниПы и ГОСТы. В них регламентируются четыре важнейших фактора: расчетные нагрузки и воздействия, прочностные и деформативные характеристики материалов, расчетные схемы и минимальный уровень надежности по всем прогнозируемым расчетом предельным состояниям.

Бесспорно, что нормируемые рекомендации, обеспечивающие эти требования, должны давать не только и не столь однозначный (детерминированный) предел какого–либо параметра,, но прежде всего устанавливать необходимый уровень надежности данного параметра, т.е. любое утверждение (требование) должно быть обязательно подкреплено (обосновано) информацией об уровне вероятностно–статистической обеспеченности (или вероятности реализации) этих утверждений. Без такой вероятностной поддержки (оценки) детерминированные, по существу, взятые интуитивно из ряда неустойчивых статистических совокупностей разного рода нагрузок, воздействий и прочности материалов, расчетные величины теряют необходимую информативность и убедительность, что лишает инженера уверенности в надежности принимаемых решений.

Недостаток статистической информации вынуждает составителей норм формировать требования, выполнение которых, как показал опыт, часто приводит либо к преждевременной потере необходимых эксплуатационных качеств сооружения, либо к другой крайности – перерасходу материалов.

Более чем десятилетний опыт работы с действующим нормативным документом СНиП 2.05.03.–84, а также анализ особенностей проектирования по нормам Западных стран, позволяют сформулировать принципиальные подходы и конкретные рекомендации, направленные на совершенствование нормативных требований к проектированию железобетонных мостовых сооружений. Главнейшие из них следующие:

1. Необходимо осознать, что при оценке допускаемых при проектировании и строительстве ошибок, а иногда и аварийных ситуаций, инженер не имеет права относить вину за допущенные ошибки только на несовершенство действующих нормативных документов. Нормы, так же как и основы и правила строительной механики, и компьютерная техника, являются всего лишь инструментом в руках инженера для решения соответствующих задач проектирования. Ответственность за правильное и умелое использование норм и принимаемые проектные решения, бесспорно, лежит на инженере. Во всех нормативных стандартах Западных стран это требование к творческой ответственности инженера за принимаемое решение является первостепенным и провозглашается как основополагающее требование.

2. Необходимо совершенствовать сами нормы проектирования так, чтобы уменьшить вероятность ошибочных решений, вызванных неточностями и ошибочными рекомендациями самих нормативных документов. Такая задача может быть решена только при условии, если установленные нормами требования к нагрузкам, материалам и правилам расчета, структура системы коэффициентов условий работы и надежности будут иметь вероятностно–статистическое обоснование, будут достаточно убедительны и понятны для пользователей (проектировщиков, строителей, эксплуатационников), несущих ответственность за надежность и экономичность создаваемых и эксплуатируемых сооружений.

3. Исходя из характера воздействия на конструкцию и сопротивления материалов этим воздействиям, из всех вероятностно–статистических совокупностей постоянных и временных (обращающихся и перспективных) нагрузок следует выделить три уровня расчетных нагрузок: первый – собственный вес и усилия, создаваемые преднапряженной арматурой (постоянно действующие нагрузки), второй – рабочие, регулярно обращающиеся массовые нагрузки, охватывающие 95% всей статистической совокупности, и третий уровень – редко обращающиеся (тяжелые) нагрузки, вероятность реализации которых очень мала, она лежит в пределах 1…2% от всей статистической совокупности нагрузок.

4. Расчетные сопротивления материалов, необходимые коэффициенты условий работы и надежности должны быть неразрывно связаны и соответствовать принятым уровням нагрузок, их повторяемости так, чтобы фактическая надежность сооружения против

наступления возможных (предсказуемых нормами) предельных состояний была не ниже установленных нормативными документами. Например, в моделях противостояния материалов в расчетных сечениях постоянно действующим нагрузкам, имеющим малый статистический разброс (т.е. надежно предсказуемые) расчетные сопротивления могут иметь достаточно большой запас надежности и учитывать при этом интенсивно и длительно протекающий процесс расходования ресурса деформативности бетона на разного рода пластические деформации (ползучесть, виброползучесть, внутриструктурные сдвиговые деформации).

При оценке реальной надежности железобетонной мостовой конструкции против наступления разного рода отказов следует помнить, что бесконтрольное расходование запаса деформативности бетона столь же опасно, как и потеря ресурса прочности. Запас пластической деформативности является спасительным средством для выживания конструкции, и когда возникают зоны непредвиденных опасных концентраций напряжений, конструкция приобретает и сохраняет свойство саморегулирования.

5. Закономерности распределения внутренних напряжений в поперечных сечениях конструкции и вероятности их реализации (вероятностные параметры) тесно связаны и зависят от характера и уровня нагрузок и прочностных возможностей материалов (рис.4, 6). Чем реже реализуется тот или иной вид временных нагрузок, и чем меньше вероятность реализации самой величины (уровня) принятой (нормированной) нагрузки, тем выше должен быть принят уровень расчетных сопротивлений материалов. В этом кроется суть разумного сопротивления опасностям и выживания механических систем. К сожалению, стратегические принципы защиты мостовых конструкций от разного рода опасностей, указанных в действующих нормах проектирования мостов, сформулированы «с точностью до наоборот». Этот вывод достаточно ясно усматривается также из анализа интеграла надежности (39), (рис. 3):

$$P(x,t) = \int_0^\infty F_R(x,t)\rho_S(x,t)dx \quad . \tag{39}$$

Расчетная вероятность отказа $P(x,t)$ или расчетная надежность $U(x,t) = 1 - P(x,t)$ зависят от соотношений F_R (x,t) – функции распределения прочности и $p(x,t)$ – плотности распределения силового фактора.

В расчетах на прочность, т.е. на чрезвычайно высокий уровень эксплуатационных нагрузок, $p_s(x,t)$, соответственно, так же чрезвычайно мала (порядка 0,01…0,005). Следовательно, обеспечить 3х– стандартную надежность сооружения $U(x,t) > 0{,}998$ можно путем увеличения другой подинтегральной величины – $F_R(x,t)$ – функции распределения прочности, т.е. путем увеличения расчетного сопротивления бетона. При этом результаты интегрирования должны давать величину отказа $P(x,t)$ не более 0,002, т.е. должна быть обеспечена надежность сооружения $U(x,t) = 1 - P(x,t)$ не менее $U(x,t) = 0{,}998$ (3–х – стандартная надежность).

6. Указанные требования приводят к важному выводу: при проектировании определяющую роль в выборе основных параметров конструкции и назначении необходимого количества и качества материалов играют расчеты в эксплуатационной стадии, прогнозирующие грузоподъемность и долговечность под реально обращающимися и перспективными нагрузками.

Со стратегических позиций принятые в действующих нормах расчеты на прочность по моделям предельного равновесия органически не вписываются в концепции контроля железобетонных конструкций в эксплуатационной стадии. Эти модели должны давать оценку работе элементов не под расчетными эксплуатационными нагрузками, а в ситуации, практически никогда не реализуемой. Модели предельного равновесия носят характер оценки предельных (но не эксплуатационных) возможностей конструкции перед разрушением. Этот расчет не может иметь даже статистического обоснования. Он может рассматриваться как выброс за разумные доверительные границы. Такой расчет следовало бы оставить в инженерной практике, но придать ему другой смысл и совершенно другие цели, как это очень разумно делалось в расчетах по допускаемым напряжениям. Предельное равновесие (пластический шарнир) реализуется только в опытной и только простейшей балочной однопролетной конструкции и только тогда, когда выполняются стендовые испытания с доведением ее до разрушения. Необходимость в таком испытании может возникнуть в ситуации, когда потребуется выявить и установить фактическую предельную прочность материалов, работающих в составе конструкции, и характер разрушения. Но делать расчет конструкций по модели предельного равновесия более сложных статических схем под эксплуатационными нагрузками, подчинять этому расчету, лишенному даже вероятностно–статистического смысла, распределение материалов в сечениях и размеры самого сечения – значит вводить в заблуждение инженера о возможных условиях работы конструкций под эксплуатационными нагрузками и превращать расчет в абсурдное и алогичное манипулирование данными, не имеющими ничего общего с логикой прогнозирования надежности. Кроме того, такой прогноз отвлекает внимание инженера от реальных опасностей.

7. Многолетние наблюдения выявили недостаточную надежность и крайне низкую долговечность плит проезжей части автодорожных мостов и плит балластного корыта железнодорожных мостов.

Практически в абсолютном числе случаев работоспособность и долговечность железобетонной конструкции любой конструктивной формы определяют прочностные возможности плиты проезжей части, в то время, как состояние других элементов конструкции (ребра–стенки, бетон нижних поясов, арматура) обладают и сохраняют более высокий, чем установленный нормами, уровень надежности. Причины создавшейся очень серьезной ситуации – исключительно неблагоприятное, далекое от нормативного сочетание воздействий на бетон влаги с солями в условиях попеременного замораживания воды в порах бетона, высокого уровня многократно повторяемых динамических нагрузок. Ситуация усугубляется отсутствием в нормативных документах специальных (существенно повышенных) требований к качеству бетона плит, их конструкции, материалам гидроизоляции. Условия расчета на надежность и долговечность плит проезжей части резко и принципиально отличны от работы других элементов, требования расчета и конструирования плит должны быть коренным образом пересмотрены, специально оговорены и ужесточены по сравнению с другими элементами пролетных строений.

5. Вероятностные процессы

Свойства вероятностей. Вероятность достоверного события равна единице. Если событие достоверно, то каждый элементарный исход испытания должен благоприятствовать этому событию. По-видимому, для получения гарантии того, что каждая наудачу взятая со склада панель будет годной, необходимо, чтобы все находящиеся на хранении панели были доброкачественными. Тогда N – общее количество панелей на складе; m – количество доброкачественных панелей. По условию $m = N$, или по формуле (3): $P(A) = m/N = 1$. Вероятность невозможного события равна нулю, т. е. ни один из элементарных исходов не благоприятствует событию. Для того чтобы иметь уверенность, что при погрузке партии в N панелей со склада на панелевозы ни одно из изделий не окажется дефектным, необходимо, чтобы вся партия состояла только из доброкачественных панелей, т. е. количество дефектных изделий $m = 0$. Тогда: $P(A) = m/N = 0$.

Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей. Если считать, что в партии панелей N имеется некоторое число дефектных изделий m, то извлечение из партии дефектной или годной панели будет случайным событием, которому благоприятствует лишь часть из общего числа элементарных исходов испытания. Тогда истинное значение вероятности события A будет заключено между установленными выше крайними пределами: $0 < P(A) < 1$.

Классическое определение вероятности не всегда может быть использовано при решении практических задач, так как оно предполагает, что количество элементарных исходов испытания конечно, в то время как оно чаще всего оказывается бесконечным. Так, например, нельзя рассматривать находящуюся на складе партию панелей в отрыве от непрерывного производственного процесса их изготовления. Естественно, что нас будет интересовать не количество дефектных изделий в данной партии, а качество всей продукции завода. Невозможно также заранее оценить изменчивость производственных условий, влияющих на качество продукции, и указать основания, позволяющие считать элементарные события равновозможными. На практике часто приходится ограничиваться приближенной оценкой вероятности, получаемой статистическим путем. При статистическом определении вероятности за вероятность события принимается относительная частота или число, близкое к ней. *Относительной частотой*, или *частостью*, события называется отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу фактически произведенных. Относительная частота события A:

$$W(A) = M/N, \tag{6}$$

где M - число появлений события; N - общее число испытаний.

Пример 3. В партии из 100 сборных железобетонных мостовых балок 5 оказались дефектными. Тогда относительная частота появления дефектных балок будет:

$$W(A) = 5/100 = 0{,}05, \text{ или } 5\%.$$

Опыт показывает, что при проведении достаточно большого количества испытаний в одинаковых производственных условиях относительная частота некоторого события A обнаруживает свойство устойчивости. Если значение $W(A) = 5\%$ окажется устойчивым, то оно и может быть принято за статистическую оценку вероятности данного события (появления дефектных деталей). Эта оценка может служить характеристикой совершенства соответствующих технологических процессов производства. Существенное различие между вероятностью и относительной частотой состоит в том, что для оценки вероятности не требуется в действительности натурных испытаний (вероятность вычисляется до опыта), в то время как определение относительной частоты производится на основании серии действительных испытаний (относительная частота определяется на основании опыта).

Изучение вероятностных процессов занимает большое место в анализах и обеспечении надежности сооружений, так как их функционирование представляет собой реализацию вероятностных процессов. Понятие «поток событий» и «процесс» взаимосвязаны. Процесс смены состояний объекта вызывается потоками отказов и потоками восстановлений. В общепризнанных литературных источниках понятия «поток» и «процесс» не только взаимосвязаны, но и идентичны. Чтобы охарактеризовать вероятностный процесс, необходимо указать тип процесса и его числовые характеристики. Существует большое число различных типов вероятностных процессов.

Теорема сложения вероятностей несовместимых событий. *Вероятность появления одного из ряда несовместимых событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей каждого из этих событий в отдельности.*

$$P(A + B + \ldots + K) = P(A) + P(B) + \ldots + P(K). \tag{40}$$

Отсюда вероятность наступления одного из нескольких попарно несовместимых событий (из одной и той же генеральной совокупности) равна сумме вероятностей этих событий.

Пример 4. Известно, что в партии из 75 изготовленных железобетонных балок находятся две, не соответствующие стандартным размерам, и три другие балки, не отвечающие требованиям прочности бетона. Определим, какова вероятность того, что случайно взятая из партии балка окажется некондиционной. Назовем событием *A* появление балки, некондиционной по геометрическим параметрам качества, а событием *B* – появление балки некондиционной по прочности. Тогда вероятность события *A* будет *P(A)*= 2/75, а вероятность события *B* соответственно будет *P(B)* = 3/75. Так как извлечение из партии какой–либо одной некондиционной детали исключает возможность одновременного наступления событий *A и B,* то эти события несовместимы. Значит, в данном случае применима теорема сложения вероятностей несовместимых событий: $P(A + B) = P(A) + P(B)$ = 2/75 + 3/75 = 5/75, или 6,7%.

Два несовместимых и единственно возможных события называются *противоположными.* Так, например, если партия в 100 деталей состоит из 95 стандартных и 5 некондиционных элементов, то появление стандартной (событие *A)* или некондиционной (событие $\overline{A}$) детали будет противоположным событием.

Теорема о вероятностях противоположных событий. *Сумма вероятностей противоположных событий, равна единице.*

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1. \qquad (41)$$

Если вероятность одного из противоположных событий обозначить через *P,* а вероятность другого – через *Q*, то:

$$P + Q = 1. \qquad (42)$$

Если известно, что вероятность извлечения из партии некондиционной детали Р = 5/100, или 5%, то вероятность извлечения стандартной детали будет: *Q* = l – Р = l – 5/100 = 95/100, или 95%. Выражение *Q* = l – *P* иногда называют вероятностью ненаступления данного события.

При решении практических задач встречаются случаи (сложные события), в которых трудно заметить, совместимы или несовместимы рассматриваемые события. Для генеральной совокупности сложных событий, среди которых могут оказаться совместимые, следует пользоваться общей теоремой сложения вероятностей. Вероятность наступления по крайней мере одного из двух совместимых событий равна сумме вероятностей каждого события минус вероятность совместного наступления обоих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ и } B). \qquad (43)$$

Пример 5. В арматурном цехе завода железобетонных конструкций каркасы для настилов междуэтажных перекрытий изготовляются на двух однотипных машинах – № 1 и №2. Известно, что в каждой партии из 100 каркасов, изготовленных на машине № 1 или 2, имеется один некондиционный каркас. Допустим, что мы взяли на сборку один каркас из партии в 100 штук, изготовленных на машине № 1 (событие *A),* и другой каркас из такой же партии, изготовленный на машине № 2 (событие *B).* Какова вероятность того, что хотя бы один из этих каркасов окажется некондиционным?

Из выражения (10): *P(A* или B) = 1/100 + 1/100 – 1/(100 х 100) = 0,0199, или ~2%.

Третий член выражения (43) в нашем примере вычисляется при следующих условиях: а) число различных комбинаций из двух каркасов, взятых из разных партий, составляет 100×100 = 10000; б) только одна из этих комбинаций дает благоприятный (искомый) результат; оба каркаса, извлеченных из двух партий, окажутся некондиционными. Таким образом, вероятность того, что оба каркаса окажутся некондиционными, будет: *P (A* и *B)* = 1/10000.

Принцип практической достоверности для маловероятных событий. В практике строительства часто имеют место случаи, когда вероятность наступления некоторого события очень мала, т. е. близка к нулю. Однако на вопрос о возможности наступления этого события не может быть дан однозначный ответ. Так, например, авария жилого дома явление чрезвычайно редкое, но оно не исключено; одно из многих построенных зданий в силу крайне неблагоприятного стечения обстоятельств может неожиданно разрушиться. Однако оценить вероятность наступления аварии путем наблюдения за одним из серии построенных зданий невозможно, так как эта вероятность практически равна нулю. Иными словами, если случайное событие имеет очень малую вероятность, то практически можно считать, что в единичном испытании это событие не наступит. Соответственно, если случайное событие имеет вероятность, очень близкую к единице, то практически можно считать, что в единичном испытании оно наступит.

Этот принцип основан на абстрагировании реальных статистических закономерностей, свойственных случайным явлениям. Весьма важно знать, каково должно быть численное значение вероятности маловероятного события, чтобы его появление в единичном испытании можно было считать невозможным. Ответ на этот вопрос зависит от существа рассматриваемого явления. Допустим, что вероятность события A будет $P\ (A) =$ 0,001. Если этой вероятностью оценить аварийность жилых домов, то следует считать недопустимым такое качество строительства, при котором каждый тысячный дом может разрушиться. Напротив, если вероятностью $P\ (A) = 0{,}001$ оценить возможность появления .армоцементного элемента кровли жилого дома, изготовленного из полимербетона недостаточной плотности (водопроницаемым), или тротуарной плиты недостаточной прочности, то практически можно считать, что предприятие, изготавливающее эти элементы, выпускает продукцию удовлетворительного качества. Аналогичные рассуждения относятся не только к событиям, имеющим малую вероятность, но и к событиям, вероятность которых близка к единице.

Полная система событий. Систему событий $(A_1\ , A_2, \ldots, A_n)$ называют полной, если в испытании обязательно наступит одно и только одно из этих событий. Примером полной системы может служить система, состоящая из двух противоположных событий. Так, например, если в партии находится часть стандартных и часть дефектных изделий, то при извлечении одного из них изделие окажется либо стандартным, либо дефектным, т. е. произойдет одно и только одно из двух возможных событий. В равной степени это относится и к системе из нескольких событий.

Теорема. *Сумма вероятностей событий, образующих полную систему, равна единице.*

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1. \tag{44}$$

Пример 6. В партии из 100 панелей имеется 10 изделий, изготовленных по 5 классу точности, 60 – по 7 классу и 30 – по 9 классу точности. Из партии отбирается одна панель.

Событие A_1 – выбранная панель имеет 5 класс точности,

» A_2 » » » 7 » »

» A_3 » » » 9 » »

Очевидно, эти события образуют полную систему попарно несовместимых событий. Имеем:

$$P(A_1) = 10/100; \qquad P(A_2) = 60/100; \qquad P(A_3) = 30/100$$

Тогда: $P\ (A_г) + P\ (A_2) + P\ (A_3) = 1/100\ (10 + 60 + 30) = 1$, что соответствует формуле (44).

Теорема умножения вероятностей. *Вероятность совместного наступления двух событий равна произведению вероятности первого события на условную вероятность второго, вычисленного в предположении, что первое событие состоялось.*

$$P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A), \tag{45}$$

где $P_A(B)$ – условная вероятность события B в случае, если состоялось событие A.

Следовательно, если событие A не зависит от события B, то и событие B не зависит от события A; вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий, т. Е.

$$P\ (A \text{ и } B) = P(A) \bullet P(B). \tag{46}$$

Заметим, что два события называются независимыми, если появление одного из них не изменяет вероятности появления другого. При произвольном числе событий несколько событий называются независимыми, если каждое из них не зависит от любой совокупности остальных.

Пример 7. Строп для монтажа сборных конструкций состоит из двух тросов. Надежность одного из них составляет p_1 = 0,99992, а другого – p_2 = 0,99998. Каждый из тросов может отказать в работе независимо от другого, причем отказ стропа происходит при выходе из строя любого из его тросов. Определим вероятность отказа стропа при заданных условиях. Обозначим: A–безотказная работа стропа;

A_1 – безотказная работа первого троса;

A_2 – безотказная работа второго троса.

По теореме умножения для независимых событий $P\ (A\ ) = P\ (A_1$ и $A_2) = P\ (A_1) \times P\ (A_2)$ = $p_1 \times p_2$ = = 0,99992 × 0,99998 = 0,99990. *События называются зависимыми друг от друга, если вероятность появления одного из них зависит от того, состоялось или не состоялось другое событие.*

Пример 8. Из каждых 100 стеновых панелей, изготовляемых домостроительным комбинатом, кондиционными по всем характеристикам качества оказываются в среднем 98. Из этих 98 панелей 80 изделий имеют 7–й класс точности. Определим вероятность того, что случайно отобранная из партии панель окажется кондиционной, изготовленной по 7 классу точности. Вероятность того, что панель окажется кондиционной (событие A): $P(A)$ = 98/100. Вероятность того, что панель окажется изготовленной по 7 классу точности (событие B) при условии ее кондиционности, будет: $P_A(B)$ = 80/98, где $P_A(B)$ – условная вероятность события B в предположении, что событие A совершилось. По теореме умножения вероятностей имеем:

$$P\ (A \text{ и } B) = P(A) \times P_A(B) = 98/100 \times 80/98 = 80/100,$$

т. е. 80% панелей окажутся кондиционными и изготовленными по 7 классу точности.

Теорема полной вероятности. *Вероятность события равна сумме произведений вероятностей гипотез на условные вероятности события при соответствующих гипотезах.* Эта теорема справедлива тогда, когда событие может произойти с одним из полной группы несовместимых событий, называемых гипотезами. Обозначая гипотезы через $H_1, H_2, \ldots, H_n$, а событие через A, имеем:

$$P(A) = P() \bullet P_{H1}\ (A) + P(H_2) \bullet P_{H2}(A) + \ldots + P(H_n) \bullet P_{Hn}(A), \tag{47}$$

где: $P(A)$ – вероятность события A; $P(H_1)\ .\ .\ .\ P(H_n)$ – вероятности соответствующих гипотез; $P_{H1}(A)\ \ldots\ P_{Hm}(A)$ – условные вероятности события A при соответствующих гипотезах. Выражение (47) называется *формулой полной вероятности.*

Пример 9. Начальная безотказность узла сопряжения звеньев сборной колонны существенно зависит от методов производства монтажных работ. Тогда безотказная работа узла является интересующим нас событием, а выбор одного из методов монтажа – соответствующей гипотезой. Допустим, что в нашем случае возможно применение одного из трех способов монтажа, причем вероятность применения свободного монтажа будет $P(H_1)$ = 0,2; вероятность применения монтажа при помощи кондуктора – $P(H_2)$ = 0,7; вероятность применения рамно–шарнирных индикаторов – $P(H_3)$ = 0,1. Пусть начальная безотказность при применении первого метода будет $P_{H1}(A)$ = 0,9992, при применении второго метода – $P_{H2}(A)$ = 0,9998, при применении третьего метода P_{H3} = 0,9999. Тогда, если заранее неизвестно, который из методов будет применен, при проектировании узла теоретическая начальная безотказность может быть вычислена по формуле (47):

$$P\,(A) = 0{,}2 \times 0{,}9992 + 0{,}7 \times 0{,}9998 + 0{,}1 \times 0{,}9999 = 0{,}99969, \text{ или } 99{,}97\%.$$

Наиболее подходящим для описания процессов, происходящих во многих областях науки и техники, является *марковский процесс*. Он назван так в честь выдающегося русского математика конца XIX – начала XX столетия А. А. Маркова. *Марковский процесс* – процесс, у которого для каждого момента времени вероятность любого состояния объекта в будущем зависит только от состояния объекта в настоящий момент времени и не зависит от того, каким образом объект пришел в это состояние. Характеристику процесса полезно сопровождать графическим изображением. На рис. 12,а показан процесс изменения состояний N некоторого объекта. Число возможных состояний – три. В момент времени t_1 объект переходит из состояния 1 в состояние 2, в момент времени t_2 – из состояния 2 в состояние 1 и т. Д. На рис. 13,б вероятностный процесс представлен графом состояний с указанием на ребрах графа интенсивностей переходов из одного состояния в другое. Возможно также представление вероятностного процесса матрицей переходов. Матрица переходов для графа, изображенного на рис. 12,б, имеет вид:

$$P_{ij} = \begin{vmatrix} P_{00}P_{01}P_{02} \\ P_{10}P_{11}P_{12} \\ P_{20}P_{21}P_{22} \end{vmatrix}, \qquad (48)$$

где P_{ij} – вероятность перехода из i – го в j – е состояние; P_{ii} – вероятность сохранения i –го состояния.

В исследованиях надежности теория марковских процессов получила весьма широкое применение, так как процесс функционирования различных объектов, как правило, сопровождается простейшими потоками отказов и восстановлений. Экспоненциальное распределение времени работы объекта до отказа и времени восстановления его работоспособности – необходимое условие для марковского процесса. Важнейшая характеристика марковского процесса – вероятность перехода объекта в то или иное состояние за заданный промежуток времени. Информация о вероятностях перехода объекта в различные состояния позволяет определить вероятности каждого из возможных состояний процесса.

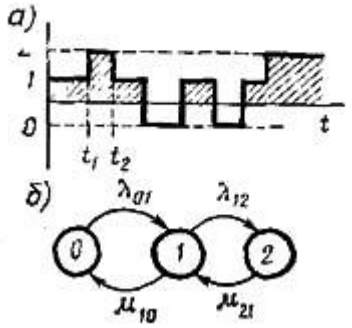


Рис.12. Схемы представления вероятносгного процесса: *а* – временной последовательностью смены состояний; б – графом

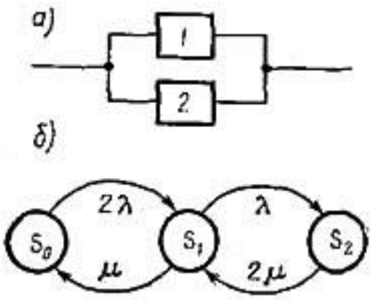


Рис.13. Схема резервированного изделия (а) и граф его состояний *(б)*

состояний

Определение вероятностей состояний марковского процесса. Рассмотрим кратко методику определения вероятностей состояний марковского процесса. Пусть объект исследования может находиться в некоторых состояниях, число которых конечно (равно n). Номера состояний: 0, 1, 2, …, n из i – го состояния в j–ой объект переходит с постоянной интенсивностью γ_{ij} , обратно – с постоянной интенсивностью μ_{ji}. Граф состояний процесса, когда число состояний равно 3, изображен на рис. 13,б. Акад. А. Н. Колмогоров предложил систему дифференциальных уравнений для определения вероятностей каждого из состояний. Применение дифференциальных уравнений для определения вероятностей состояний объекта рассмотрим на примере объекта, изображенного на рис. 13,а. Число состояний объекта – три. Состояние S_0 – два элемента, входящие в объект, работоспособны. Состояние S_1 – один из элементов, входящих в объект, в отказовом состоянии. Состояние S_2 – оба элемента, входящие в объект, в отказовом состоянии. Вероятность того, что объект на интервале времени Δt, примыкающем к времени t, находится в состоянии S_0, равна произведению вероятности того, что объект в момент времени t находился в нулевом состоянии, на вероятность того, что он не перейдет на интервале Δt из состояния S_0 в состояние S_1, плюс произведение вероятности того, что объект в момент времени t находится в состоянии S_b на вероятность того, что он перейдет в состояние S_0 из состояния S_0 за время Δt. Эту формулировку можно записать следующим образом:

$$P_0 (t + \Delta t) = P_0 (t) \{1 – [P_{01} (\Delta t)]\} + P_l (t) P_{10} (\Delta t). \quad (49)$$

Аналогично записываются уравнения для вероятностей того, что объект на интервале времени Δt, примыкающем к времени t, находится в состояниях S_1 и S_2. В результате получается система уравнений

$$\left.\begin{array}{l} P_0(t+\Delta t) = P_0(t)\{1-[P_{01}(\Delta t)]\} + P_1(t)P_{10}(\Delta t); \\ P_0(t+\Delta t) = P_1(t)\{1-[P_{12}(\Delta t) + P_{10}(\Delta t)]\} + P_0(t)P_{01}(\Delta t) + P_2(t)P_{21}(\Delta t); \\ P_2(t+\Delta t) = P_2(t)\{1-[P_{21}(\Delta t)]\} + P_1(t)P_{12}(\Delta t) \end{array}\right\} \quad (50)$$

Запишем выражения, связывающие P_{ij} и λ_{ij} . Вероятность перехода объекта из состояния S_i в состояние S_j вследствие отказа с интенсивностью λ_{ij} равна:

$$P_{ij} (\Delta t) = 1 – t^{-\lambda_{ij}\Delta t} = 1-(1-\lambda_{ij}\Delta t) . \quad (51)$$

Вероятность перехода объекта из состояния S_i в состояние S_j вследствие восстановления с интенсивностью μ_{ij} равна $\mu_{ij}\ \Delta t$. Вероятность отсутствия переходов из состояния S_1 в состояния S_2 или S_0:

$$1 – [P_{12}(\Delta t) + P_{10}(\Delta t)] = 1– (\lambda_{12}\ \Delta t + \mu_{10}\ \Delta t). \quad (52)$$

Подставим полученные выражения в (50):

$$\left\{\begin{array}{l} P_0(t+\Delta t) = P_0(t) - P_0(t)\lambda_{01}\Delta t + P_1(t)\mu_{10}\Delta t; \\ P_0(t+\Delta t) = P_1(t) - P_1(t)[\lambda_{12} + \mu_{10}]\Delta t + P_{01}(t)\lambda_{10}\Delta t - P_2(t)\mu_{21}\Delta t; \\ P_2(t+\Delta t) = P_2(t) - P_2(t)\mu_{21}\Delta t + P_1(t)\mu_{12}\Delta t. \end{array}\right\} \quad (53)$$

Из правой части уравнений (2) перенесем в левую часть $P_i(t)$, разделим правую и левую части уравнений на Δt и учтем, что $P_i(t + \Delta t) – P_i(t)= \Delta P_i$; $\Delta P_i /\Delta t = dP_i /dt$.. В результате указанных действий система уравнении (2) примет вид:

$$\left\{\begin{array}{l} dP_0/dt = -\lambda_{01}P_0(t) + \mu_{10}P_1(t); \\ dP_1/dt = -\lambda_{01}P_0(t) - (\lambda_{12} + \mu_{10})P_1(t) + \mu_{21}P_2(\Delta t) \\ dP_2/dt = -\mu_{21}P_2(t) + \lambda_{12}P_1(t) \end{array}\right\}, \qquad (54)$$

Получить систему уравнений (54) можно непосредственно по виду графа состояний, если пользоваться следующим правилом: *для каждого из возможных состояний объекта записывается уравнение, в левой часта которого dP_i / dt, а справа – столько слагаемых, сколько стрелок графа соприкасается с данным состоянием.* Если, стрелка направлена в данное состояние, то перед слагаемым ставится плюс, если стрелка направлена из данного состояния – минус. Каждое из слагаемых будет равно произведению интенсивности перехода из данного состояния (либо в данное состояние) на вероятность состояния, из которого выходит стрелка.

Решение системы уравнений (54) осуществляется по известным правилам решения системы дифференциальных уравнений. Однако его можно существенно упростить, если учесть, что рассматриваемый процесс – процесс марковский (стационарный), для которого производные $dP_i(t)/dt$ можно принять равными нулю (т. е. вероятности состояний не меняются с течением времени). Система дифференциальных уравнений (3) переходит при этом в систему алгебраических уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} 0 = -\lambda_{01}P_0 + \mu_{10}P_1; \\ 0 = -\lambda_{01}P_0 - (\lambda_{12} + \mu_{10})P_1 + \mu_{21}P_2; \\ 0 = -\mu_{21}P_2 + \lambda_{12}P_1; \\ P_0 + P_1 + P_2 = 1 \end{array}\right\} \qquad (55)$$

Четвертое уравнение для этой системы (при трех неизвестных) становится необходимым потому, что первые три уравнения сводятся к двум. Решение системы уравнений (55) дает

$$P_0 = 1/[1 - \lambda_{01}/\mu_{10} + \lambda_{01}\lambda_{12}/(\mu_{21}\lambda_{10})]\ P_{10}(\Delta t)];$$
$$P_1 = P_0\lambda_{01}/\mu_{10};\ P_2 = P_0\lambda_{01}/(\mu_{21}\mu_{10}). \qquad (56)$$

Результаты решения системы уравнений (3а) могли бы быть получены также непосредственно по виду графа состояний, если пользоваться следующим правилом: вероятность нулевого состояния определяется выражением:

$$P(S_0) = 1/[1 + \lambda_{01}/\mu_{10} + \lambda_{01}\lambda_{12}/(\mu_{21}\mu_{10}) + $$
$$+ \ldots \lambda_{01}\lambda_{12}\ldots\lambda_{n-1;n}/\mu_{n;n-1}\ldots\mu_{21}\mu_{10})], \qquad (57)$$

где числитель правой части – всегда единица; знаменатель – сумма, состоящая из единицы и дробей, числители которых – произведения интенсивностей, изображенных на верхних стрелках, знаменатели – произведения интенсивностей на нижних, стрелках (произведения формируются с последовательным увеличением числа множителей от одного до n в соответствии с переходами $S_0 \leftrightarrow S_1$, $S_1 \leftrightarrow S_2$, …, $S_{n-1} \leftrightarrow S_n$.

Вероятность состояния S_1 равна вероятности состояния S_0, умноженной на коэффициент, равный второму слагаемому в знаменателе для $P(S_0)$, т. Е. $P(S_1) = P(S_0)\lambda_{01}/\mu_{10}$. Вероятность состояния S_2 равна вероятности состояния S_0, умноженной на коэффициент, равный третьему слагаемому в знаменателе для $P(S_0)$, т. Е. $P(S_2) = P(S_0)\lambda_{01}\lambda_{12}/(\mu_{n;n-1}\ldots\mu_{21}\mu_{10})$. Вероятность n–го состояния равна вероятности состояния S_0, умноженной на коэффициент, равный последнему (n–му) слагаемому в знаменателе для $P(S_0)$, т. Е. $P(S_n) = P(S_0)(\lambda_{01}\lambda_{12}\ldots \lambda_{n-1;n})/(\mu_{21}\mu_{10})$.

Пример 10. Определить вероятности состояний объекта, схема и граф состояний которого изображены на рис. 9, если интенсивности отказов λ_0 элементов 1 и 2 равны 0,02, а интенсивности восстановления μ_0 = l,0. Интенсивности переходов, объекта в состояния S_0; S_1; S_2 равны:

$\lambda_{01} = 2\ \lambda_0 = 2 \cdot 0{,}02 = 0{,}04$; $\lambda_{12} = \lambda_0 = 0{,}02$; $\mu_{21} = 2\ \mu_0 = 2 \cdot 1{,}0 = 2{,}0$; $\mu_{10} = \mu_0 = 1{,}0$.

Вероятность состояния S_0 равна: $P_0 = 1/[1 + \lambda_{01}/\mu_{10} + \lambda_{01}\lambda_{12}/(\mu_{21}\mu_{10})] \approx 0.9612$.

Вероятность состояния S_1 равна: $P_l = P_0\lambda_{01}/\mu_{10} \approx 0{,}0384$.

Вероятность состояния S_2 равна: $P_2 = P_0\ \lambda_{01}\lambda_{12}/(\mu_{21}\mu_{10}) \approx 0{,}0004$.

6. Взаимодействие элементов в системах

Одной из основных задач является оценка показателей надежности системы сооружения по известным законам распределения надежности её элементов. Способ вычисления показателей надежности и долговечности существенно зависит от того, как взаимодействуют между собой элементы с точки зрения обеспечения безотказности всей системы. Пусть, например, система состоит из m элементов, вероятности безотказной работы которых P_1, P_2, …, P_m заданы. При этом элементы взаимодействуют между собой таким образом, что их отказы – стохастические независимые события, а отказ хотя бы одного из элементов приводит к отказу системы в целом. Такое соединение называется *последовательным* (рис. 14,*а*). Примером этого соединения может служить последовательное включение измерительных приборов, аппаратов и т. g. в электрическую цепь. Если хотя бы один из элементов выйдет из строя, цепь будет разомкнута, и произойдет отказ системы в целом. В качестве примера из строительной механики можно привести статически определимую стержневую систему. Для того чтобы такая система разрушилась, достаточно разрушиться хотя бы одному из ее элементов.

Безотказная эксплуатация системы из последовательно соединенных элементов есть случайное событие, равное пересечению независимых случайных событий – безотказных эксплуатаций каждого из ее элементов. Показатель надежности – вероятность безотказной работы системы – определяется перемножением соответствующих вероятностей :

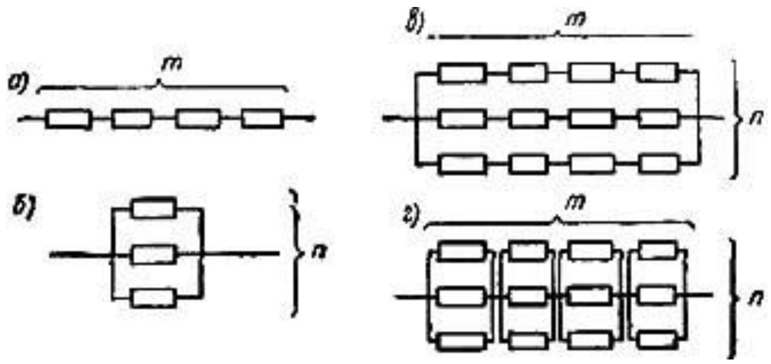


Рис. 14. Некоторые простейшие способы взаимодействия элементов в системе

$$P = \prod_{k=1}^{m} P_k . \qquad (58)$$

Если показатели надежности всех элементов равны между собой, т. е. если $P_1 = P_2 = \ldots P_m = P_0$, то показатель надежности системы вычисляется так:

$$P = P^m_0 \qquad (59)$$

Как видно из формул (8) и (9), показатели надежности систем из последовательно соединенных элементов меньше показателей надежности каждого из элементов, взятых в отдельности. С увеличением числа элементов надежность системы быстро падает. Если число m достаточно велико, то практически невозможно получить систему, обладающую удовлетворительной надежностью. Пусть, например, $m = 1000$, $P_0 = 0{,}99$. Тогда по формуле (9) получаем, что показатель надежности системы $P < 10^{-4}$. Практически система оказывается абсолютно ненадежной.

Покажем, как вычисляется срок службы системы из последовательно соединенных элементов. Пусть функции надежности всех элементов одинаковы и имеют вид (4). Тогда по формуле (9) получим:

$$P = e^{-m\lambda t}, \tag{60}$$

а математическое ожидание срока службы системы вычислим по формуле (3):

$$\langle T \rangle = \int_0^\infty P(t)dt = \frac{1}{m\lambda}. \tag{61}$$

Выражая интенсивность отказов λ через математическое ожидание срока службы одного элемента $\langle T_0 \rangle$ получим окончательно

$$\langle T \rangle = \frac{1}{m} \langle T_0 \rangle. \tag{62}$$

Таким образом, средний срок службы системы уменьшается обратно пропорционально числу ее элементов.

Рассмотрим другой способ взаимодействия элементов, который в некотором смысле противоположен только что рассмотренному (рис. 14,б). Пусть система состоит из n элементов с вероятностями безотказной работы $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Пусть по-прежнему отказы элементов – независимые случайные события; однако отказ системы происходит только в том случае, если откажут все ее элементы. Такое соединение называется *параллельным*. Примером может служить параллельная работа генераторов, мощность каждого из которых достаточна для обеспечения установленной потребности: система энергоснабжения откажет только тогда, когда выйдут из строя все генераторы. Другим примером служит стрельба по одной цели несколькими снарядами, если для поражения цели достаточно попадания одного из снарядов.

Труднее привести пример из теории сооружений. На первый взгляд, с параллельным соединением мы встречаемся при рассмотрении статически неопределимых систем, выход из строя которых требует разрушения всех избыточных связей. Однако здесь сложность заключается в том, что выход из строя одного из элементов системы приводит к перераспределению усилий в остальных элементах. Таким образом, одно из усилий, при которых мы трактуем соединение как параллельное, а именно – независимость отказов отдельных элементов – здесь не выполняется.

В случае последовательного соединения вероятность безотказной работы системы определялась как произведение вероятностей безотказной работы всех ее элементов. В случае параллельного соединения, наоборот, теорема умножения применяется к вероятности наступления хотя бы одного отказа каждого из элементов. Обозначая эти вероятности через $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$, получим:

$$Q = \prod_{k=1}^{m} Q_k. \qquad 63)$$

Отсюда показатель надежности системы из параллельно соединенных элементов определяется как

$$P = 1 - \prod_{k=1}^{m} (1 - P_k) . \qquad (64)$$

Если показатели надежности всех элементов одинаковы, то вместо формулы (64) имеем

$$P = 1 - (1 - P_0)^n. \qquad (65)$$

Надежность системы оказывается здесь выше, чем надежность любого из ее элементов. Пусть, например, $n = 2$, $P_0 = 0{,}99$. Тогда вероятность безотказной работы системы составляет $P = 0{,}9999$. Способ повышения надежности путем параллельного подключения дублирующих элементов широко применяется повсюду. В теории надежности этот способ называется *резервированием*. Принимая, что надежность каждого из элементов следует экспоненциальному закону (55), вычислим по формуле (54) средний срок службы системы. С учетом формул (54), (55) и (65) получим:

$$<T> = \int [1 - (1 - e^{-\lambda t})^n] dt \, , \qquad (66)$$

Интеграл в правой части вычисляется при помощи подстановки $1 - e^{-\lambda t} = x$ и приводится к виду

$$<T> = \frac{1}{\lambda} \int_0^1 \frac{1 - x^n}{1 - x} dx \, , \qquad (67)$$

откуда после интегрирования находим:

$$<T> = <T_0> \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} . \qquad (68)$$

Пусть, например, $n = 10$. Тогда по формуле (13) $<T> = 2{,}929 <T_0>$.

Аналогично вычисляются показатели надежности систем при более сложном взаимодействии элементов. На рис.14,в показана блок–схема общего резервирования, в которой каждая из подсистем дублируется n раз. Формула для вероятности безотказной работы системы имеет вид

$$P = 1 - (1 - \prod_{k=1}^{m} P_k)^n . \qquad (69)$$

Способ образования системы, показанный на рис. 13, носит название раздельного резервирования. При этом каждый из элементов дублируется n раз, после чего подсистемы соединяются последовательно. Показатель надежности системы вычисляется к А

$$P = \prod_{k=1}^{m} [1 - (1 - P_k)^n] . \qquad 70)$$

В литературе по теории надежности [8] большое место занимают методы вычисления показателей надежности систем при различных способах взаимодействия элементов, способах резервирования и т. д. К другим задачам теории надежности относятся формулировка принципов синтеза систем, обладающих заданными показателями надежности, разработка методов повышения надежности и долговечности, определение экономически обоснованных нормативных показателей надежности и долговечности, обоснование методов контроля качества и методов испытаний, обеспечивающих заданный уровень надежности, обоснование методов индикации и профилактики отказов и т. д.

7. Основы расчетов надежности с использованием математической логики

Расчет надежности сложного изделия, по существу, является определением истинности сложного высказывания. Приведем пример высказывания: «изделие находится в работоспособном состоянии, если в работоспособном состоянии находится его элемент *а* и один из следующих элементов: элемент *б,* или *d*, или оба элемента вместе взятых». Такое высказывание является сложным, состоящим из простых высказываний, связанных между собой логическими операциями *конъюнкции* (связка «и», обозначается знаком $\wedge$) и *дизъюнкции* (связка «или», обозначается знаком $\vee$). На языке математической логики оно может быть записано следующим образом:

$$c = a \wedge [b \vee d \vee (b \wedge d)] = a \wedge (b \vee d). \qquad (71)$$

Главное в такой записи состоит не только в том, что существует возможность записать условие работоспособности изделия в виде математической (логической) формулы и преобразовать эту запись, а в том, что такие формулы можно подвергать математической обработке: соединять их в более сложные структуры, разлагать, преобразовывать, оптимизировать, находить по ним значения исследуемых величии, переходить от формул к схемам и наоборот и т.д.

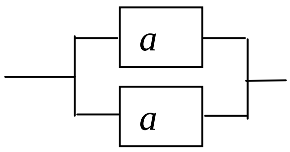


Рис. 15,а. Схема параллельного соединения элементов (операция дизъюнкции)

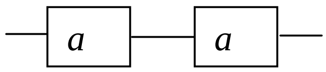


Рис. 15,б. Схема последовательного соединения элементов (операция конъюнкции)

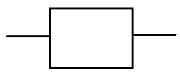


Рис. 15,в. Схема инвертирования входной величины

Таким образом, использование аппарата математической логики позволяет формализовать условия работоспособности сложных структур и получать формулы для расчета надежности. Чтобы понять, как все это делается, рассмотрим вначале некоторые самые необходимые шесть положений математической логики.

1. Если о некотором высказывании *С* можно утверждать, что оно истинно, если истинны высказывания *А* или *В,* тогда делается вывод о том, что высказывание *С* равно высказываниям *А* и *В,* связанным между собой *логической операцией дизъюнкции:*

$C = A \vee B.$

Точно так же, если об изделии можно утверждать, что оно работоспособно, если работоспособен его элемент *а* или *b,* можно сделать вывод о том, что работоспособность изделия (событие *с)* и работоспособности элементов *а* и *b* (событие *а* и событие *b)* связаны между собой логическим уравнением работоспособности:

$$c = a \vee b. \qquad (72)$$

Логическая операция дизъюнкции может быть представлена схемой параллельного соединения элементов *a* и *b*, входящих в это уравнение (рис. 15,а).

2. Если о некотором высказывании *С* можно утверждать, что оно истинно тогда, когда истинны высказывания *А* и *В*, то делается вывод о том, что высказывание *С* равно высказываниям *А* и *В,* связанным между собой *логической операцией конъюнкции:*

$$C = A \wedge B.$$

Точно так же, если об изделии можно утверждать, что оно работоспособно, если работоспособны элемент *a* и элемент *b,* можно сделать вывод о том, что работоспособность изделия (событие *c)* и работоспособности элементов *a* и *b* (событие *a* и событие *b)* связаны между собой логическим уравнением работоспособности:

$$c = a \wedge b. \tag{73}$$

Логическая операция конъюнкции может быть представлена схемой последовательного соединения элементов *a* и *b,* входящих в это уравнение (рис. 15,б).

3. Если некоторое высказывание *А* отрицается высказыванием *b*, тогда говорят, что высказывание *А* и высказывание *В* связаны между собой *логической операцией отрицания:*

$\ddot{B} = A$. (Эта формула читается так: *В* есть не *А*.)

В теории надежности она может, например, найти такое применение. Если работоспособное состояние элемента *a* обозначить *a*, то неработоспособное состояние элемента *a* обозначается *a* с верхним штрихом. На рис. 15,в изображено устройство (инвертор), преобразующее высказывание *А* в высказывание не *А.* Таким устройством может быть устройство, преобразующее «1» в «0», в схеме расчета надежности – переход в отказное состояние.

4. Логические операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания – основные операции, используемые в прикладной теории надежности, так как к ним могут быть сведены все другие логические операции.

5. Сложную логическую функцию можно минимизировать, т. е. преобразовать ее таким образом, что она будет содержать наименьшее число членов или в ней не будет повторяющихся членов. Для минимизации функций и для исключения повторяющихся членов рекомендуются следующие формулы:

$$\begin{array}{ll} 1.\ a \cdot a = a. & 5.\ (a \vee \bar{a}) = 1. \\ 2.\ a \vee a = a. & 6.\ (a \cdot b) \vee (a \cdot \bar{b}) = a. \\ 3.\ a \vee ab = a. & 7.\ a\,(a \vee b) = a. \\ 4.\ (1 \vee a) = 1. & 8.\ (a \vee b)(a \vee c) = a \vee bc. \end{array} \tag{74}$$

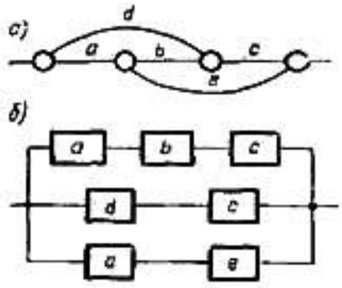
$$9.\ F_л(a,\ b,\ c, \ldots) = aF_л(1,\ b,\ c, \ldots) \vee \bar{a}F_л(0,\ b,\ c, \ldots).$$

Преобразование логической функции к такому виду, когда в ней нет повторяющихся членов, совершенно необходимо при расчетах надежности. Если функция имеет вид $F_л = a \cdot a$ *(a* – событие), то ее нельзя непосредственно использовать для расчета вероятности сложного события. Замена событий вероятностями приведет к формуле $P(a \cdot a) = P(a) \cdot P(a) = P^2(a)$. На самом же деле $F_л = a \cdot a = a$. Поэтому $P(a \cdot a) = P(a)$.Особого внимания заслуживает формула разложения $F_л$ на две составляющие. Она используется тогда, когда все остальные формулы не позволяют исключить повторяющиеся члены.

Пример 11. Исключить повторение членов а и с функции работоспособности $F_л$, если дана структурная схема расчета, рис. 16,а (б) и $F_л = (a \cdot b \cdot c) \vee (d \cdot c) \vee (a \cdot e)$.

Применение формул 1 – 8 из (74) поставленную задачу не решает. Поэтому используем формулу 9 – формулу разложения логической функции по *a*:

$$F_л = a\{c(b \vee d) \vee e\} \vee \bar{a}\,\{d \cdot c\} = aF_{л1} \vee \bar{a}F_{л2}. \tag{75}$$



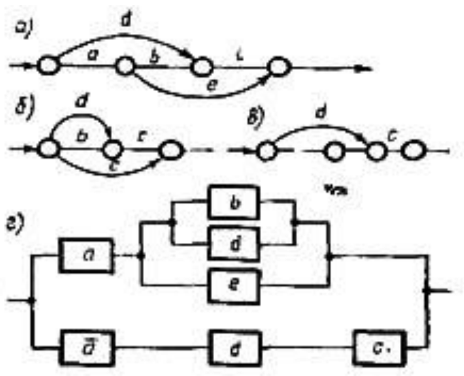


Рис. 16,а. Структура тракта *(а)* и вариант схемы расчета надежности *(б)*

Рис. 16,б. Преобразование исходной структуры тракта в соответствии с преобразованием логической структуры работоспособности

Фигурным скобкам функции $F_{л1}$ соответствует исходная схема (рис. 16,а), у которой вместо элемента a – короткое замыкание (рис. 16,*б)*. Фигурным скобкам функции $F_{л2}$ соответствует исходная схема, у которой вместо элемента a – обрыв (рис. 16,в). Структурная схема расчета надежности тракта изображена на рис. 16,г, где $a = a{\cdot}c$ для верхней цепи схемы.

6. Логические функции можно преобразовать в функции алгебраические, если заменить все логические операции арифметическими по следующим правилам:

$$a = a, + b - a{\cdot}b; \quad a \wedge b = a{\cdot}b; \quad \overline{a} = 1 - a. \quad (76)$$

Логическую функцию работоспособности, у которой все логические операции заменены арифметическими, будем называть *функцией работоспособности, представленной в арифметическом виде.*

Последовательность расчета надежности. Чтобы получить формулу для вероятности работоспособного состояния сложного изделия, необходимо:

1) сформулировать словесно условие работоспособности изделия;

2) на основании формулировки об условии работоспособности изделия записать логическую функцию работоспособности $F_л$;

3) преобразовать в случае необходимости логическую функцию работоспособности (минимизировать, исключить повторяющиеся члены);

4) в логической функции работоспособности заменить логические операции арифметическими, т. е. получить $F_а$;

5) в арифметической функции работоспособности заменить (простые события, простые высказывания) их вероятностями;

6) в полученную формулу, устанавливающую связь между вероятностями состояний элементов изделия и вероятностью состояния сложного изделия, подставить числовые значения вероятностей состояний элементов. Решением полученного уравнения определить числовое значение вероятности работоспособного состояния сложного изделия.

8. Расчет надежности с использованием математического аппарата теории вероятностей

Выше уже отмечалось, что события и величины, исследуемые в теории и практике надежности, имеют, как правило, случайный характер. Естественна поэтому тесная связь теории вероятностей и теории надежности. Специалисты по теории вероятностей используют различные области исследования надежности для развития теории вероятностей. Очень часто их работы направлены на решение инженерных задач надежности. Приведем некоторые из положений теории вероятностей, которые могут быть непосредственно использованы для решения задач, возникающих в прикладной теории надежности.

Определение наработки системы на отказ (использование системы уравнений Колмогорова). Система дифференциальных уравнений Колмогорова может быть использована для определения наработки системы на отказ, которая является суммой времени нахождения системы в работоспособных состояниях. Предлагаемую методику рассмотрим на примере системы, изображенной на рис. 13,*а.* Системой дифференциальных уравнений для этой системы является (4). Исключим из системы уравнений все неработоспособные состояния (в данном случае $P_2\,(t)$):

$$\left.\begin{aligned} dP_0(t)/dt &= -\lambda_{01}P_0(t) + \mu_{10}P_1(t); \\ dP_1(t)/dt &= \lambda_{01}P_0(t) - (\lambda_{12} + \mu_{10})\,P_1(t). \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

К системе (5) применим преобразования Лапласа:

$$\begin{aligned} &dP_i(t)/dt \to zP_i(z) - P_i(t)_{\text{при } t=0}; \\ &P_i(t) \to P_i(z) = \int_0^\infty P_i(t)\,\mathrm{e}^{-zt}dt. \end{aligned} \tag{78}$$

В результате получим:

$$\left.\begin{aligned} zP_0(z) - P_0(t)_{\text{при } t=0} &= -\lambda_{01}P_0(z) + \mu_{10}P_1(z); \\ zP_1(z) - P_1(t)_{\text{при } t=0} &= \lambda_{01}P_0(z) - (\lambda_{12} + \mu_{10})\,P_1(z). \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

Введем допущения: $z = 0$; $P_o(t)_{\text{при } t=0} = 1$; $P_1\,(t)_{\text{при } t=0} = 0$. Тогда

$$P_i(z) = \int_0^\infty P_i(t)\,\mathrm{e}^{-zt}dt = \int_0^\infty P_i(t)\,dt = T_{0i}. \tag{80}$$

Система (79) приобретает вид

$$\left.\begin{aligned} -1 &= -\lambda_{01}T_o(0) + \mu_{10}T_o(1); \\ 0 &= \lambda_{01}T_o(0) - (\lambda_{12} + \mu_{10})\,T_0(1). \end{aligned}\right\} \tag{81}$$

Решая систему (80), получим: $T_0\,(0) = (\lambda_{12} + \mu_{10})\,/\,(\lambda_{01}\lambda_{12})$; $T_0\,(1) = T_0\,(0)\,\lambda_{01}/(\lambda_{12} + \mu_{10})$.
Если $\lambda_{01} = 2\lambda_{12} = 2\lambda_o$, $\mu_{01} = \mu_0$. Тогда: $T_0(0) = (\lambda_o + \mu_0)\,/\,(2\lambda_0^2) \approx \mu_0\,/(2\,\lambda_0^2)$.
Средняя наработка системы на отказ: $T_0 = T_0(0) - T_0(1) = (\mu_0 + 2\lambda_0)\,/\,(2\,\lambda_0^2) = \mu_0\,/\,(2\,\lambda_0^2)$.
Пример 12. Определить среднюю наработку на отказ изделия, схема которого изображена на рис. 10,а. Интенсивности отказов λ_0 каждого элемента равны 0,01; интенсивности восстановлений μ_0 каждого из элементов равны 2. Средняя наработка изделия на отказ $T_0 = \mu_0\,/(2\lambda_0^2) = 10000$ ч.

Типовые случаи расчетов надежности. Рассмотренные выше методы расчета надежности являются универсальными. Пользуясь ими, можно получить расчетные формулы для расчета надежности объекта некоторого конкретного вида. Укажем без вывода справочные расчетные формулы для типовых случаев расчета надежности, которые часто встречаются в инженерной практике. Для формул, требующих учета характера закона распределения, он принимается экспоненциальным.

Расчет надежности изделия без резервирования и восстановления работоспособности элементов (элементы соединены последовательно) (рис. 17). *Возможные исходные данные* – показатели надежности элементов λ_i; T_{1i}; $P_i(t)$.

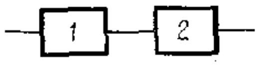


Рис. 17. Схема нерезервированого изделия с последовательно соединенными элементами

Расчетные формулы:
– интенсивность отказов изделия: $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$
– среднее время работы изделия до отказа: $T_1 = 1/\lambda = 1/(1/T_{11} + 1/T_{12}) = T_{11}T_{12}/(T_{11} + T_{12})$;
– вероятность безотказовой работы изделия на протяжении t часов: $P(t) = P_1(t)\, P_2(t)$.

Расчет надежности изделия без резервирования, с восстановлением работоспособности элементов (элементы соединены последовательно) (рис. 12). *Возможные исходные данные* – показатели надежности элементов λ_i; μ_i; T_{0i}; $T_{вi}$; $K_{гi}$.

Расчетные формулы:

– коэффициент готовности элемента: $K_{гi} = \mu_i /(\mu_i + \lambda_i) = T_{0i}(T_{oi} + T_{вi})$;

– коэффициент готовности изделия и интенсивность отказов изделия:

$$К_г = \prod_{1}^{n} K_{гi};\ \lambda = \sum_{1}^{n} \lambda_i;$$

– среднее время работы изделия на отказ: $\lambda = 1/\sum \lambda_i$;
– среднее время восстановления изделия: $T_в = T_{в1}\lambda_{1\sum} + T_{в2}\lambda_{2\sum}$.

Расчет надежности изделия с восстановлением и постоянным нагруженным резервированием основного элемента. Возможные исходные данные – показатели надежности элементов λ_i; μ_i; T_{0i}; $T_{вi}$; $K_{гi}$.

Расчетные формулы:
– коэффициент готовности элемента: $K_{гi} = \mu_i /(\mu_i + \lambda_i) = T_{0i}(T_{oi} + T_{вi})$;
– коэффициент готовности изделия: $K_г = K_{г1} + K_{г2} – K_{г1} K_{г2}$;
– средняя наработка изделия на отказ (при $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$; $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$): $T_о = \mu_0 / (2\lambda_0^2)$;
– среднее время восстановления изделия $T_В = T_0(1 – K_Г)/ K_Г$.

Пример 13. Определить $K_г$,, T_1 и $T_в$ изделия с постоянным нагруженным резервированием, если $T_{01} = T_{02} = 100$ ч; $T_{в1} = T_{02} = 0{,}5$ ч. Коэффициент готовности элемента $K_{гi} = 0{,}995$. Коэффициент готовности изделия $K_г = 0{,}999975$. Средняя наработка изделия на отказ $T_о = 10000$ ч. Среднее время восстановления изделия $T_В = 0{,}25$ ч.

Определение средней наработки сложного изделия на отказ. *Исходные данные:* граф работоспособных состояний изделия с указанием интенсивностей переходов. *Расчетная формула:* средняя наработка на отказ изделия: $T_0 = T(0) + T(1) + T(2) + \ldots + T(n)$, где: n – число работоспособных состояний изделия; $T(i)$ – среднее время пребывания изделия в i–м работоспособном состоянии.

Пример 14. Определить среднюю наработку изделия на отказ, граф работоспособных состояний которого изображен на рис. 18. Интенсивность отказов $\lambda = 0{,}01$, интенсивность восстановлений $\mu = 2$. Среднее время пребывания изделия в состояниях S_0, S_1, S_2 соответственно равно 1666,41 и 0,4 ч. Средняя наработка изделия на отказ $T_0 = 1707$ ч.

Определение $K_г$ изделия с восстановлением и временным резервированием. *Исходные данные:* T_0 и T_E изделия, резерв времени на восстановление работоспособности .

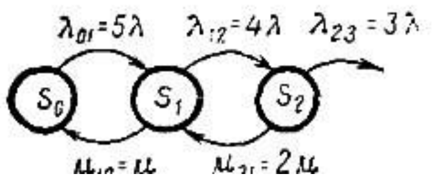


Рис. 18. График работоспособных состояний изделия

Расчетная формула: коэффициент готовности изделия: $К_г = T_0/ [(T_0 + (T_а - t_{рез})]$. *Исходные данные:* λ и μ, продолжительность времени использования изделия по назначению t и резерв времени на применение изделия $T_{рез}$.

Расчетные формулы:

– коэффициент разрежения интенсивности отказов: $k = t / (t + t_{рез})$;

– коеффициент готовности изделия: $К_г = \mu / (\lambda k + \mu)$.

9. Основы расчетов надежности конструкций с использованием метода статистических испытаний (метод Монте–Карло)

Как уже отмечалось, при расчете на надежность элементов строительных конструкций используются различные методы. В случаях, когда задача имеет линейный характер, оценить надежность можно достаточно простыми аналитическими способами с приемлемой для практических целей точностью. Однако при наличии геометрической или физической нелинейности применение аналитических методов связано со значительными, а иногда и непреодолимыми, математическими трудностями. Это приводит к необходимости вводить такие упрощения и допущения, которые существенно сказываются на достоверности получаемых результатов. В этом случае при расчете на надежность становится целесообразным применение численных методов расчета. В связи с бурным развитием вычислительной техники и резким повышением быстродействия ЭВМ наиболее перспективным для решения широкого класса вероятностных задач становится метод статистических испытаний (метод Монте–Карло). Этот мощный метод, в отличие от аналитических методов, позволяет применить для расчета на надежность общий подход независимо от исходных условий, т. е. является более универсальным.

Метод Монте–Карло позволяет моделировать любой процесс, на протяжение которого влияют случайные факторы. Основная идея метода – установление связи между вероятностными характеристиками различных случайных процессов и величинами, являющимися решениями задач математического анализа (значениями интегралов, решениями дифференциальных уравнений и т.д.). Вместо вычисления ряда сложных аналитических выражений можно экспериментально определить значение соответствующих вероятностей или математических ожиданий. Этот метод получил широкое распространение в связи с новыми возможностями, которые дают персональные ЭВМ и коммерчески доступные программы. Необходимо отметить особенность метода, состоящую в том, что оценка погрешности вычислений носит вероятностный характер. В этом методе нельзя утверждать, что ошибка превысит какое–либо значение, а можно только указать границы, за которые ошибка не выйдет с вероятностью близкой к единице. При использовании ЭВМ это принципиальное отличие метода Монте–Карло от остальных методов в каком–то смысле сглаживается, т.к. в любом из них существует отличная от нуля вероятность появления ошибки из–за сбоя компьютера.

Пусть $(\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2,\ldots, \tilde{Y}_n) = H\ (\ddot{X}_1, \ddot{X}_2,\ldots, \ddot{X}_n)$, где $(\ddot{X}_1, \ddot{X}_2,\ldots, \ddot{X}_n)$ – входные случайные параметры системы (нагрузка, прочность материалов и др.), а $(\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2,\ldots, \tilde{Y}_n)$ – реакция системы (перемещения, напряжения, усилия и др.); H – оператор системы, представляющий собой уравнение, систему уравнений (алгебраических дифференциальных и др.), либо другие соотношения, с помощью которых описывается работа системы.

Для определения статистических характеристик реакции системы необходимо знать статистические характеристики входных параметров: математического ожидания – m_x , дисперсии – D_x и корреляционного момента K_{xy} либо коэффициента корреляции r_{xy}. Кроме того, оператор H должен быть представлен в виде моделирующего алгоритма. Общая схема реализации метода статистических испытаний на ЭВМ представлена на рис. 19.

На схеме представлены три основных блока. *Первый блок* – это генератор входных воздействий. Любой современный язык программирования содержит специальную стандартную функцию – датчик случайных чисел с равномерным распределением, генерирующую при каждом обращении к ней квазислучайное число. На основе этой программы строятся датчики случайных чисел с любым законом распределения, моделирующие случайные величины, а также случайные вектора (системы случайных величин) и случайные функции (случайные величины, изменяющиеся во времени или по координате) по их заданным вероятностным характеристикам. Блок «Генератор входных воздействий» содержит комплекс программ моделирования реализаций входных случайных параметров. *Второй блок* представляет собой детерминированную модель системы (уравнения, описывающие ее работу). Модель системы должна быть выбрана таким образом, чтобы скорость реализации базового детерминированного алгоритма на ЭВМ была достаточно высока. *Третий блок* вычисление статистических оценок реакции системы математических ожиданий, дисперсий, законов распределения, корреляционных и спектральных характеристик обычными методами теории вероятностей.

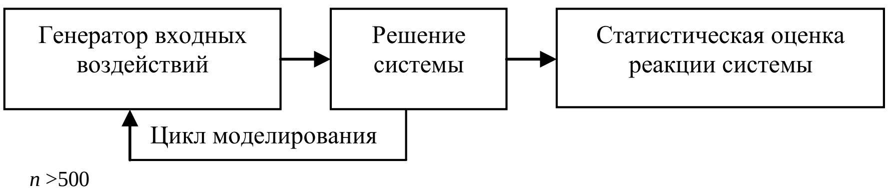


Рис. 19. Схема метода статистических испытаний

Состояние конструкции в условиях эксплуатации можно охарактеризовать конечным числом независимых случайных параметров, представляющих характеристики нагрузок и материалов либо отклонение реальных условий работы конструкции от принятой расчетной схемы. Все расчетные величины можно разделить на две основные группы, первая включает характеристики, относящиеся к свойствам самой конструкции (несущая способность R); вторая характеризует внешние условия (например, нагрузки и воздействия). Тогда условие непревышения границы области допустимых состояний ($x_1, x_2,\dots, x_n$) конструкций может определяться как:

$$\tilde{R}(x_1, x_2,\dots, x_m) - \tilde{S}(x_1, x_2,\dots, x_n) \text{ или } G = R - S > 0. \qquad (82)$$

Здесь и далее знак (~) обозначает случайную величину. Для вероятности отказа конструкции можно записать:

$$Q = P_{соб}\{R - S < Q\} = \int_0^{\infty} P_R(x)\, p_S(x)dx\,, \qquad (83)$$

где Q – вероятность отказа; $P_{соб}\{A\}$ – вероятность реализации события A; $P_R(x)$ – функция распределения величины R; $p_S(x)$ – плотность распределения вероятностей величины S.

Выражение (83) может быть представлено в виде:

$$Q = P_{соб}\{g(R, S) < 0\} = \iint_{\Omega} P_R(x_1, x_2)\, p_S(x_1, x_2) dx_1\, dx_2 \qquad (84)$$

где $g(R,S) = R - S$ – функция работоспособности; Ω – область отказового состояния в пространстве (x_1, x_2), граница которой является условием $g = 0$.

Поскольку величины R и S могут быть функциями нескольких переменных (нагрузок, характеристик прочностных и жесткостных свойств материалов, геометрических параметров), то интеграл (84) в более общем виде будет:

$$P_{соб}(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0\} = \int_{\Omega_n} \ldots \int P_R(x_1, \ldots, x_n)\, p_S(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_2\,, \quad (85)$$

где Ω_n – область отказных состояний в n – мерном пространстве ($x_1, x_2, \ldots, x_n$), граница которой определяется условием $g = 0$.

Для решения данной задачи, т.е. для вычисления вышеуказанного интеграла существует ряд методов, в том числе и метод статистического моделирования. Этот метод достаточно прост и универсален, легко может быть алгоритмизирован для решения на ЭВМ. Идея метода заключается в следующем: проводится достаточно большое число испытаний по схеме Бернулли, т.е. на каждом испытании производится генерирование тем или иным способом случайных реализаций всех исходных величин, выполняется детерминированный расчет значений R и S как функций этих реализаций и проверяется условие $R - S < 0$. Если условие выполняется, то исходом испытания считается отказ. При этом частота появления отказа v рассматривается как оценка вероятности отказа конструкции:

$$v = k / n \approx Q\,, \qquad (86)$$

где k – число отказов; n – общее число испытаний.

Как видно данный метод прост и универсален, однако он требует обязательного анализа близости полученной оценки и к искомой вероятности Q, которая зависит от числа испытаний n.

Метод статистических испытаний основан на ряде теорем: (а) теореме Бернулли, утверждающей, что при $n \to \infty$, $v = Q$, случайная величина Q имеет асимптотически нормальное распределите; (б) теореме Хинчина (закон больших чисел), утверждающей, что среднее значение частоты v при $n \to \infty$ стремится к ее математическому ожиданию; (в) теореме Линдеберга–Леви (центральная предельная теорема), утверждающей, что среднее значение частоты v имеет асимптотически нормальное распределение. Однако теоремы сложения утверждают, что биномиальное распределение, по которому распределяется число отказов, устойчиво при сложении независимых величин. Кроме того, эти теоремы утверждают, что сумма взаимно независимых случайных величии имеет нормальное распределение только тогда, когда все они нормально распределены. Исходя, из этих утверждений при проведении статистических испытаний возникает вопрос, при каком общем числе испытаний можно пользоваться предельными теоремами и принимать асимптотические распределения для построения практических процедур проверки точности и достоверности полученных оценок? Ответить на этот вопрос практически невозможно. Кроме того, большинство существующих процедур имеют своей целью построение доверительного интервала для математического ожидания частоты отказов v, а не искомой вероятности отказа Q. Процедуры эти достаточно сложны и не всегда достаточно убедительны, и поэтому, имея в своем арсенале эти процедуры, проектировщику иногда вообще приходится отказываться от анализа близости оценки.

Используем процедуру построения доверительного интервала для вероятности отказа, разработанную в [17]. Согласно этой процедуре доверительные коэффициенты η_j зависят только от числа отказов k, происшедших в серии и не зависят от числа испытаний n. Тогда анализ результатов статистического моделирования становится крайне простым и выражается формулой:

$$P_{соб}\{Q \le \eta_j\, \nu\} = j, \qquad (87)$$

где $\eta_j\, \nu$ – граница доверительного интервала, соответствующая достоверности j.

В табл. 9 приведены значения коэффициентов $\eta_{0,95}$ и $\eta_{0,99}$ в зависимости от числа отказов k.

Можно показать применение данного метода на практике. Допустим, нами проведено 5000 испытаний, из которых в k = 20 произошли отказы. Частота отказов, таким образом, составила ν=0.004.

Тогда с доверительной вероятностью 0.95 можно утверждать, что:

$$Q < \eta_{0,95}\, \nu = 1{,}453 – 0.004 = 0{,}005812\ , \qquad (88)$$

Таблица 9

Значения доверительных коэффициентов $\eta_{0,95}$ и $\eta_{0,99}$

k	**$\eta_{0.95}$**	**$\eta_{0.99}$**	**k**	**$\eta_{0.95}$**	**$\eta_{0.99}$**
1	4.74390	6.63900	31	1.34961	1.50353
2	3.14790	4.20300	32	1.34320	1.49419
3	2.58460	3.34850	33	1.33714	1.48532
4	2.28840	2.90137	34	1.33134	1.47688
5	2.10261	2.62200	35	1.32583	1.46884
6	1.97375	2.42850	36	1.32058	1.46117
7	1.87832	2.28579	37	1.31556	1.45382
8	1.80435	2.17537	38	1.31076	1.44683
9	1.74503	2.08717	39	1.30615	1.44012
10	1.69623	2.01450	40	1.30174	1.43370
11	1.65524	1.95368	41	1.29750	1.42756
12	1.62025	1.90175	42	1.29343	1.42161
13	1.58990	1.85688	43	1.28951	1.41593
14	1.56332	1.81768	44	1.28574	1.41044
15	1.53981	1.78290	45	1.28211	1.40513
16	1.51884	1.75191	46	1.27862	1.40005
17	1.49996	1.72412	47	1.27522	1.39513
18	1.48288	1.69900	48	1.27197	1.39039
19	1.46733	1.67613	49	1.26880	1.38582
20	1.45312	1.65525	50	1.26574	1.38135
21	1.44002	1.63600	51	1.26279	1.37706
22	1.42795	1.61823	52	1.25992	1.37290
23	1.41676	1.60180	53	1.25714	1.36888
24	1.40636	1.58656	54	1.25445	1.36500
25	1.39664	1.57236	55	1.25185	1.36118
26	1.38756	1.55902	56	1.24929	1.35750
27	1.37906	1.54656	57	1.24683	1.35389
28	1.37105	1.53488	58	1.24443	1.35045
29	1.36350	1.52379	59	1.24210	1.34705
30	1.35635	1.51340	60	1.23983	

и с вероятностью 0.99:

$$Q < \eta_{0,99}\, \nu = 1{,}655–0{,}004=0{,}00622. \qquad (89)$$

Как известно, теоретически истинное значение любой характеристики, определяющей случайную величину, может быть учтено при бесконечно большом n числе экспериментов. В инженерных исследованиях строительных конструкций, где требуются высокие уровни надежности порядка 0.995–0.9999, приходится иметь дело с очень малыми значениями вероятности отказа и исследовать «хвосты» функций распределения параметров. Эти «хвосты» определяются с достаточной точностью при n не менее $10^6 - 10^9$ (в зависимости от типа задачи).

Таким образом основная сложность задачи, решаемой методом статистических испытаний, заключается в длительности проводимых расчетов. Однако уже сейчас бурное развитие вычислительной техники и увеличение быстродействия ЭВМ ведет к сокращению длительности расчетов. Общий алгоритм расчета строительных конструкций на надежность следующий. Все параметры конструкции $x_1, x_2,..., x_n$ и нагрузки $q_1, q_2,..., q_n$, обладающие изменчивостью, считаем случайными величинами с известными законами распределения. Законы распределения задаются численно с помощью генераторов случайных чисел. Предполагается известным также детерминированный метод расчета конструкции. Отказом конструкции считается невыполнение принятого основного расчетного условия.

В общем случае расчет конструкции на надежность с заданной вероятностью отказа Q осуществляется по следующему алгоритму:

1. Методом статистического моделирования, согласно известным законам распределения, назначаем n реализаций случайных величин – параметров конструкции и нагрузок $x_{ji},\ldots,x_{ni}$, $q_{ji},\ldots,q_{ni}$ (i = 1,...,n). Количество испытаний n назначаем, исходя из затрат машинного времени.

2. Проводим n детерминированных расчетов конструкции согласно Выбранному методу. В результате расчетов n раз определяем значение функции работоспособности g по формуле(1).

3. При значении $G < 0$ фиксируем отказ. Частоту отказов вычисляем по формуле (5).

4. Далее сравниваем полученную частоту отказов с наперед заданной вероятностью отказа Q. Изменяем один из параметров, например высоту сечения (для внецентренно сжатого стержня), и возвращаемся к шагу 2.

Методом итераций повторяем вычисления до достижения нужной частоты отказов.

Метод статистических испытаний с достаточной точностью позволяет определить оценку вероятности наступления отказа различных строительных конструкций. При этом расчет может осуществляться эффективным образом на современных компьютерах. Описанный метод определения верхней границы доверительного интервала для величины оценки вероятности отказа является достаточно простым и эффективным. Данный метод позволяет производить нормирование не необходимого числа испытаний, а необходимого числа отказов. Затем по этому числу отказов по табл. 9 можно получить коэффициент $\eta_{0{,}95}$ и $\eta_{0{,}99}$, на который нужно умножить полученную вероятность отказа, чтобы получить верхнюю границу доверительного интервала вероятности отказа, которая не будет превышена с вероятностью соответственно 0.95 и 0.99. Следует отметить, что при очень малых вероятностях отказа конструкции (если они запроектированы с большим запасом надежности), данный метод статистических испытаний может оказаться недостаточно эффективным. В таком случае необходимо применение других более сложных методов определения вероятности отказа, таких как «частный» метод Монте–Карло или его модификации. Однако, и в этом случае отдельные части предлагаемого метода могут найти свое применение.

Рассмотрим простейший пример использования метода статистических испытаний.

На отрезке [0; 1] наудачу выбрана точка таким образом, что ее положение равновероятно по всей длине отрезка. Требуется определить вероятность того, что координата точки ξ будет принадлежать отрезку [0; 0.2].

Воспользуемся подпрограммой генерирования случайной равномерно распределенной величины на отрезке [0; 1], которая имеется в библиотеке любого алгоритмического языка программирования. Зададимся числом испытаний, например, равным n = 1000. Проводим первое испытание, т.е. условно бросаем точку на заданный отрезок, при этом координата точки ξ будет равна величине, полученной с помощью генератора случайных чисел. Если $\xi < 0.2$, то фиксируем попадание на отрезок [0; 0.2] и увеличиваем значение k на 1 (изначально $k = 0$). Данную процедуру проделываем n = 1000 раз. В результате получили, что из 1000 испытаний 205 раз точка попала на отрезок [0; 0.2]. Определяем частоту попаданий: $\nu = k / n$ = 205 / 1000 = = 0,205, которая служит оценкой вероятности попадания Q на заданный отрезок. Очевидно, что в рассматриваемом примере вероятность попадания может быть определена аналитически:

$$Q = 0{,}2 / 1{,}0 = 0{,}2. \tag{90}$$

Выбор точки случайным образом

При решении более сложных вероятностных задач, например при определении вероятности отказа строительных конструкций, аналитические методы становятся очень громоздкими, требуют значительных упрощений, а в некоторых случаях вообще не удается преодолеть математические трудности. Это в основном касается нелинейных (физически и геометрически) задач, динамических расчетов и накопления повреждений. В этих случаях метод статистических испытаний становится эффективной альтернативой грубой и неточной механической идеализации, которой соответствуют практически приемлемые аналитические решения.

Рассмотрим задачу расчета простой балки, лежащей на двух опорах по схеме на рис. 20 в детерминированном и вероятностном вариантах. Балка статически определима, имеет постоянное сечение и нагружена сосредоточенной силой в середине пролета.

Детерминированный расчет балки. Максимальное напряжение возникает в точке приложения силы и определяется по известной формуле: $\sigma = M_x/W_x$,

где M_x – максимальный изгибающий момент. В нашем случае: $M_x = N\,l / 4$; $W_x = bh^2/ 6$ – момент сопротивления сечения.

Тогда расчетная формула прочности стальной балки будет иметь вид: $\sigma = \dfrac{3Nl}{2bh^2} \le \sigma_T$,

где σ_T – предел текучести стали.

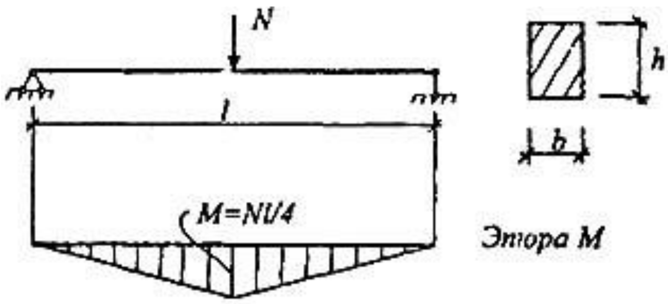


Рис. 20. Балка на двух опорах

Вероятностный расчет балки. С учетом последнего уравнения функция работоспособности будет иметь вид: $g = \sigma_T - \dfrac{3Nl}{2bh^2}$. В качестве отказа балки будем считать невыполнение условия $g > 0$. Примем внешнюю нагрузку N в качестве случайной величины, распределенной по нормальному закону с функцией распределения:

$$F(x) = \frac{1}{S_N\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-m_N)^2}{2S_N^2}} d\xi \qquad (91)$$

и плотностью распределения:

$$f(x) = \frac{1}{S_N\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_N)^2}{2S_N^2}}, \qquad (92)$$

где m_N – математическое ожидание случайной внешней нагрузки; S_N – стандарт распределения случайной внешней нагрузки.

Пример 15. Дана стальная балка прямоугольного поперечного сечения, лежащая на двух опорах и нагруженная случайной сосредоточенной силой N в середине пролета.

Исходные данные: длина балки $l = 2$ м; сечение b x h=0.15 x 0.26 м; предел текучести материала $\sigma_T = 240$ МПа; модуль упругости $E = 2 \times 10^5$ МПа. Внешняя случайная нагрузка N , распределенная по нормальному закону, имеет следующие параметры распределения: математическое ожидание, $m_N = 2.9 \times 10^6$ Н; стандарт распределения, $s_N = 2.9 \times 10^5$ Н.

Здесь и далее программы расчета выполнены в среде программирования MathCAD для Windows 95. При использовании ПК на базе процессора Pentium–4 и задаваясь количеством испытаний $n = 10^6$, получаем: число отказов $k = 34$; частота отказов $\nu = 0.000034$; время расчета $t = 3$ секунды.

Применим описанную выше процедуру оценки точности полученных результатов при использовании метода статистических испытаний. С доверительной вероятностью 0.95 можно утверждать, что $Q \le \eta_{0.95}\, \nu = 1.33134 \times 0.000034 = 0.0000452$; и с вероятностью 0.99: $Q \le \eta_{0.99}\, \nu = 1,47688 \times 0.000034 = 0.0000502$.

Рассмотренная задача является линейной и ее можно также успешно решить аналитическим методом, например методом статистической линеаризации.

Как было отмечено выше, при решении нелинейных задач аналитические методы определения вероятности отказа часто приводят к значительным погрешностям. Поэтому использование метода статистических испытаний становится наиболее целесообразным.

Далее рассмотрим более сложную нелинейную задачу вероятностного расчета железобетонного внецентренно сжатого стержня.

А. Детерминированный расчет. Основная формула при расчете внецентренно сжатого железобетонного элемента прямоугольного сеченмя (рис. 20) согласно СНиП 2.03. 01–84 [31]:

B.

$$Ne < R_b bx(h_0 - 0.5x) + R_{sc\,f} A'_s (h_0 - a'), \qquad (91)$$

где $e = e\eta + h/2 - a$; R_b – расчетное сопротивление бетона сжатию; R_{SC} – расчетное сопротивление арматуры сжатию; A_S' – площадь поперечного сечения сжатой или наименее растянутой арматуры; η – коэффициент, учитывающий продольный изгиб.

Высоту сжатой зоны x определяют из следующих уравнений:

$$\text{при } \xi = x/h_0 \le \xi_R, \quad N = R_b xb + R_{SC} A_S' - R_S A_S, \qquad (92)$$

$$\text{при } \xi = x/h_0 > \xi_R \quad N = R_b xb + R_{SC} A_S' - \sigma_S A_S \qquad (93)$$

где R_S – расчетное сопротивление арматуры растяжению; A_S – площадь поперечного сечения растянутой арматуры; σ_S – напряжение в растяуетой или наименее сжатой арматуре, при использовании бетонов классов не выше В 30 и ненапрягаемой арматуры классов А–I, А–II, А–III:

$$\sigma_S = [2(1-\xi)/(1-\xi_R)-1]R_S\,; \qquad (94)$$

где: $\xi_R = \dfrac{\omega}{1+\dfrac{\sigma_{SR}}{\sigma_{SCu}}\left(1-\dfrac{\omega}{1{,}1}\right)}$ – граничная относительная высота сжатой зоны бетона; (95)

где ω – характеристика сжатой зоны бетона: $\omega = 0.85 - 0.008R_b$; для выполняемого нами расчета по $\sigma_{sR} = R_s$, $\sigma_{SCu} = 500$Мпа.

Для элементов из бетона классов выше В30 с арматурой классов выше А–III (напрягаемой и ненапрягаемой) напряжение σ_S следует определять по зависимости:

$$\sigma_S = \sigma_{SP} + \sigma_{SCu}\left(\frac{\omega}{\xi}-1\right)\left(1-\frac{\omega}{1{,}1}\right), \qquad (96)$$

Гибкий внецентренно сжатый элемент под влиянием момента прогибается, вследствие чего начальный эксцентриситет e_0 продольной силы N увеличивается. При этом возрастает изгибающий момент и разрушение происходит при меньшей продольной силе N в сравнении с коротким (негибким) элементом. Нормами рекомендуется расчет таких элементов выполнять по деформированной схеме. Допускается гибкие внецентренно сжатые элементы при гибкости $l_0/i > 14$ рассчитывать с учетом эксцентриситета, получаемого умножением начального его значения e_0 на коэффициент $\eta > 1$. Значение коэффициента η устанавливается по зависимости:

$$\eta = 1/(1 - N / N_{cr}). \qquad (97)$$

Выражение для критической продольной силы N_{cr} при прямоугольном сечении с симметричным армированием $A_S = A_S'$ (без предварительного напряжения) имеет вид:

$$N_{cr} = \frac{6{,}4E_bA}{l^2}\left[\frac{r^2}{\varphi_1}\left(\frac{0{,}11}{0{,}1+\delta}+0{,}1\right)+\alpha\mu_1\left(\frac{h}{2}-a\right)^2\right], \qquad (98)$$

где E_b – начальный модуль упругости бетона; $A = bh$ – площадь поперечного сечения колонны; l_0 – расчетная длина элемента; r –радиус ядра сечения (для прямоугольного сечения $r = = 0.289h$; φ_1 – коэффициент, учитывающий влияние длительного действия нагрузки на прогиб элемента в предельном состоянии (для тяжелого бетона $\varphi_1 = 1 + M_l / M$; M_l и M – моменты соответственно от длительной и полной нагрузок относительно оси, проходящей через центр тяжести наименее сжатой (растянутой) арматуры; δ принимают наибольшим из двух значений: $\delta = e_o/h$ и $\delta = 0.5 - 0.01l_0 - R_b$; $\alpha = E_S / E_b$ – отношение модулей упругости арматуры и бетона; $\mu_1 = 2A_S / A$ – коэффициент армирования.

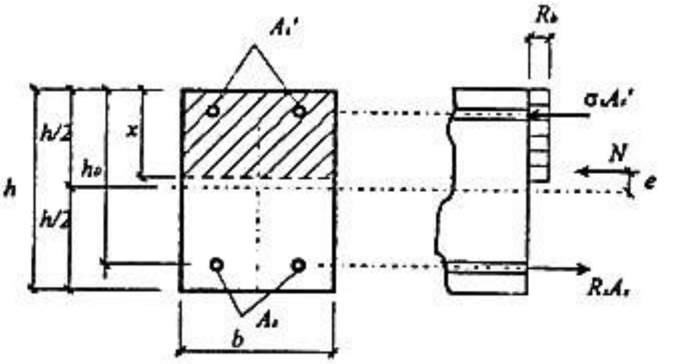


Рис. 20. Расчетная схема сечения железобетонного элемента

Предельную несущую способность железобетонного элемента определяем по следующему алгоритму. Предполагаем, что $\xi \leq \xi_R$ тогда предельную несущую способность N определяем нз совместного решения уравнений (91) и (92). Далее проверяем условие $\xi \leq \xi_R$. Если это условие не выполняется, значит N необходимо определять из условия $\xi > \xi_R$. Здесь следует учитывать напряжение в растянутой или наименее сжатой арматуре $\sigma < R_b$. Для этого решаем систему из уравнений (91), (93) и (94) или (96).

В. Вероятностный расчет. При анализе надежности внецентренно сжатого элемента средние значения сопротивления бетона R_b и средние квадратические отклонения $\hat{R}_b$, призменной прочности бетона определяются по формулам:

$$\bar{R}_b = \frac{R_b^н}{1{,}07(1-2\nu_b)}; \qquad \hat{R}_b = \bar{R}_b \nu_b \tag{99}$$

где $R_b^н$ – нормативная призменная прочность; ν – коэффициент вариации, характеризующий однородность прочности.

При вычислении средних значений и средних квадратических отклонений сопротивления арматуры использовали требования СНиП [31]:

$$\bar{R}_S = \frac{R_S^н}{1{,}07(1-2\nu_S)}; \qquad \hat{R}_S = \bar{R}_S \nu_S \tag{100}$$

Зададимся целью определить обеспеченность несущей способности железобетонного внецентренно сжатого стержня прямоугольного поперечного сечения, запроектированного по действующим нормам. Определим по СНиП величину предельной несущей способности из совместного решения уравнений (92) и (95) и уравнения:

$$Ne = R_b bx(h_0 - 0{,}5x) + R_{SC} A_S^/ (h_0 - a^/), \tag{101}$$

полученного заменой знака неравенства в выражении (91) на знак равенства. Значение φ_1в формуле (98) примем равным $\varphi_1 = 1$ (т.е. предположим отсутствие длительно действующих нагрузок), случайный эксцентриситет приложения продольной силы принимаем, согласно СНиП, равным минимальному допустимому значению e_o= 1см. Обозначим полученное значение несушей способности $N_{СНиП}$. Произведем вероятностный расчет данного стержня методом статистических испытаний (см. п. 1) и определим величину обеспеченности несущей способности. В качестве случайных величин принимаем: прочность бетона $\tilde{R}_b$, прочность арматуры $\tilde{R}_S$, и эксцентриситет приложения продольной силы $\tilde{e}_0$. За отказ принимаем невыполнение основного расчетного положения:

$$N_{СНиП} \leq \widetilde{N}_{вер} \ (9\text{–}4) \qquad (102)$$

Т.е. отказ фиксируется при величине несущей способности меньшей чем та, что получена при расчете по нормам. Значение $\widetilde{N}_{вер}$ получаем из совместного решения уравнений (92), (95), (97), (98), (101). При этом значение *S* в формуле (98) принимаем равным: $\widetilde{\delta} = \widetilde{e}_0 / h.$ Примем полученную в результате вероятностного расчета частоту отказов ν в качестве оценки вероятности отказа конструкции *Q*, тогда обеспеченность несущей способности *P* можно определить как Р = 1 – *Q*.

Пример 16. Определить обеспеченность несущей способности шарнирно опертого железобетонного стержня, запроектированного по действующему СНиП. Расчет производится в соответствии с изложенным выше алгоритмом.

Возьмем стержень квадратного поперечного сечения: $h = b = 30$см (рис. 20). Длину стержня примем равной $l = 480$см. Коэффициент армирования $\mu_1 = 0.025$.. В результате произведенного расчета по [31]получим предельную несущую способность, которая составляет для данного стержня $N_{СНиП}$ =1718,25 кН. Произведем вероятностный расчет и определим частоту отказов в соответствии с выбранным критерием отказа. Для случайного сопротивления бетона и арматуры принимаем нормальный закон со следующими параметрами распределения. Для арматуры класса А–III: $\overline{R}_S$ = 466.5МПа; $\widehat{R}_S$ = 46.7МПа; для класса бетона по прочности на сжатие В20: $\overline{R}_b$= 19.2МПа; $\widehat{R}_b$= 2.59МПа. Случайный эксцентриситет также принимаем распределенным по нормальному закону. Математическое ожидание эксцентриситета принимаем равным $\bar{e}_0$= 0. В работе [21] приводятся статистические данные по наблюдаемым значениям относительных эксцентриситетов: $s_{e,отн}$ = 0.34. Относительный эксцентриситет равен $e_{отн} = e_0 / \rho$ (ρ – ядровое расстояние сечения). Тогда стандарт случайного эксцентриситета можно определить как $s_{e,o} = s_{e,отн}\,\rho$. Количество испытаний назначаем равным 10000. Вычисленная частота отказов составляет ν = 0.0042. Таким образом, обеспеченность несущей способности запроектированного по нормам железобетонного стержня составит *P* = 1 – 0.0042 = 0.9958.

Ниже приводится порядок расчета, позволяющий определять требуемое для данного стержня значение несущей способности *N* при заданной обеспеченности $P_{зад}$. Основное расчетное условие вероятностного расчета:

$$N \leq \widetilde{N}\,, \qquad (103)$$

В качестве критерия отказа принимаем невыполнение условия (103). Методом статистических испытаний определяем частоту отказов ν. Принимаем частоту отказов ν равной вероятности отказа *Q* (см. п.1) и определяем обеспеченность несущей способности *P* = 1 – *Q*. Сравниваем полученное значение *P* с $P_{зад}$. Изменяем значение *N* и методом итераций продолжаем расчет до выполнения условия $P = P_{зад}$. Полученное значение *N* является искомой величиной несущей способности при заданной обеспеченности $P_{зад}$.

Пример 17. Определить величину несущей способности стержня заданной обеспеченности. Все исходные данные примем такими же как и в предыдущем примере. В результате расчетов получили, что для рассматриваемого стержня обеспеченности $P_{зад}$ = 0.9999 соответствует несущая способность *N* = 1540 кН.

Используя приведенный выше алгоритм, можно решить обратную задачу, когда для заданной несущей способности $N_{зад}$ определяется ее обеспеченность *P*. Для этого последовательно задаваясь различными значениями $N_{зад}$, каждый раз определяем соответствующую этой несущей способности обеспеченность. В табл. 10 показаны результаты расчетов для принятого к рассмотрению стержня.

Таблица 10

Несущая способность, $N_{зад}$, кН	Обеспеченность несущей способности, P.	Несущая способность, $N_{зад}$, кН	Обеспеченность несущей способности, P.
1550	0,9999	1850	0,9844
1600	0,9993	1900	0,9774
1650	0,9986	1950	0,9661
1700	0,9959	2000	0,9496
1750	0,9943	2500	0,4365
1800	0,9909	3000	0,0135

Ниже приводится алгоритм, позволяющий определять коэффициент армирования железобетонного стержня μ_1, соответствующий заданной обеспеченности несущей способности $P_{зад}$. Значение самой несущей способности остается постоянным. В качестве критерия отказа принимаем невыполнение условия (103).

1. Задаемся коэффициентом армирования $\mu_1 = 2A_S / bh$.
2. Методом статистических испытаний определяем частоту отказов v.
3. Принимаем $v = Q$ (см. п. 1).
4. Определяем обеспеченность несущей способности Р = $1 - Q$.
5. Сравниваем полученное значение P с $P_{зад}$.
6. При расхождении изменяем значение μ_1, возвращаемся к п. 2 и методом итераций продолжаем расчет до выполнения условия $P = P_{зад}$.

Полученное значение μ_1 является искомой величиной коэффициента армирования, соответствующей заданной обеспеченности $P_{зад}$.

10. Перспективные тенденции на пути вероятностной интерпретации нормативных расчетов конструкций.

Следующий шаг по пути вероятностной интерпретации нормативных расчетов основан на моделях, использующих элементарные понятия теории вероятностей без привлечения теории случайных процессов. Эти модели будут вполне применимы, если нагружение представляет собой единичный дискретный акт или их последовательность, если исключить из рассмотрения процессы накопления повреждений и т. п. С некоторыми оговорками эти модели могут быть использованы также и для нагрузок, непрерывно развертывающихся во времени, если в расчеты ввести распределения максимальных значений нагрузок на всем рассматриваемом отрезке времени.

Допустим, что состояние конструкции в условиях эксплуатации может быть охарактеризовано конечным числам независимых параметров $q = \{ q_1 , q_2 , ..., q_n\}$. Одни из этих параметров характеризуют внешнюю нагрузку, другие – прочность материала, третьи – отступление условий работы конструкции от расчетной схемы и т. д. В число параметров q_1 , q_2 , ..., q_n мы не будем включать те величины, которые в конструкции реализуются в точном соответствии с расчетом или с малыми допусками, влиянием которых на работу конструкции можно пренебречь. Например, в их число не включаются параметры, характеризующие размеры и форму сооружения (за исключением, может быть, задач устойчивости и родственных им, где малые отступления от проектных размеров приобретают важное значение). Таким образом, все параметры q_1 , q_2 , ..., q_n мы будем считать случайными, предполагая, что известна их совместная плотность вероятности $p(q)$. Для краткости эти параметры мы будем называть определяющими параметрами. Основная задача расчета состоит в определении вероятности того, что недопустимое предельное состояние не будет достигнуто, и в сопоставлении найденной вероятности с некоторым нормативным значением. Запишем условие недопустимости предельного состояния (1) в виде:

$$\psi(q) = R(q) - S(q) > 0. \tag{104}$$

Вероятность случайного события, состоящего в том, что это неравенство будет выполнено, есть не что иное, как мера надежности системы:

$$P = \int_{\Psi(q)>0} p(q)dq. \tag{105}$$

Задача определения надежности P сводится, таким образом, к интегрированию плотности вероятности p(q) по той части пространства определяющих параметров q_1 , q_2 , ..., q_n, где выполняется условие (50) (т. е. «область безопасности»). Поскольку вероятность P должна быть весьма близка к единице, то удобнее вычислять вероятность Q = 1– P:

$$Q = \int_{\Psi(q)>0} p(q)dq. \tag{106}$$

Тогда основное расчетное условие примет вид:

$$Q \le Q^*. \tag{107}$$

Здесь Q^* – нормативное значение вероятности достижения предельного состояния. Это достаточно малое число, которое устанавливается на основании технико–экономических соображений, опыта строительства и эксплуатации и т. д. Формулы (103), (106) и (107) дают принципиальное решение задачи расчета конструкций на надежность. Необходимо отметить, что для их применения требуется знать не только совместную плотность вероятности $p(q)$, но и решение соответствующей детерминистической задачи для всей интересующей нас области изменения параметров q_1 , q_2 , ..., q_n. Решение этой задачи дается обычными методами строительной механики. Таким образом, вероятностный подход не может заменить решения детерминистической задачи. Напротив, он предполагает решение этой задачи в объеме, нередко большей, чем классические методы расчета.

Достигнутый к настоящему времени уровень теоретических исследований позволил разработать принципиально новые предложения по основным положениям вероятностного расчета строительных конструкций. В этом подходе принятие решений, определяющих надежность несущих конструкций на основе расчетного анализа, представляет собой совокупность двух задач: установления целесообразного уровня надежности объекта проектирования и реализации этого уровня в проекте объекта и в натуре. Процесс принятия решений является, как правило, поэтапным и итерационным. В качестве первого этапа этого процесса следует выделять выбор надежностных требований, т.е. выбор характеристик, с той или иной степенью достоверности определяющих уровень надежности объекта, и установление их целесообразных значений. Степень конкретности и детализации расчетных процедур выбора надежностных требований устанавливается различной в зависимости от:

- уровня практически доступного информационного обеспечения;
- экономической значимости объекта и эффективности детализации процедур;
- уникальности либо массовости рассматриваемой ситуации;
- строгости последующих этапов принятия решений и контрольных мероприятий;
- степени сложности объекта.

Таким образом в отличие от существующего положения проектировщику предоставляется большая или меньшая свобода выбора расчетных средств. Целью нормативных процедур выбора надежностных требований является оптимальное согласование экономичности объектов с их потребительскими качествами, включая безопасность. Выбор надежностных требований производится с учетом случайностей реализаций объекта и его возможных отказов. Различным видам отказов соответствуют различные виды и уровни ущерба от отказа определенного вида, который существенно зависит от реализуемых внешних случайностей. В пространстве переменных, соответствующих случайностям, каждому состоянию объекта соответствует точка этого пространства, а множеству ущербных состояний – область отказа. Состояния, которым соответствует множество точек на границе области отказа, называются предельными.

Фундаментальными показателями надежности объекта, определяющими выбор надежностных требований, являются *вероятности отказов*, т.е. вероятности того, что за время жизни объекта возникает отказ того или иного вида. Ситуации выбора надежностных требований в зависимости от последствий отказов, управляемых принимаемым решением, подразделяются на следующие типы: *а) с экономической ответственностью* решения, когда последствия отказов, управляемых решением, поддаются экономической оценке (т.е. возможность оценки не вызывает принципиальных возражений); *б) с неэкономической ответственностью* решения, когда среди последствий отказов, управляемых решением, существенно преобладают экономически неоценимые, например гибель, ранение или другое причинение ущерба здоровью людей, уничтожение уникальных культурных и исторических ценностей, ущерб для политической и социальной деятельности и т.п; *в) со смешанной ответственностью* решения, когда последствия отказов, управляемых решением, включают как экономический ущерб, так и экономически неоценимые последствия, причем оба вида последствий существенно влияют на выбор надежностных требований.

Для каждой ситуации выбора надежностных требований устанавливается нормативный показатель тяжести последствий отказов, который представляет собой усредненную по вероятности оценку внешних случайностей. Эта оценка для различных ситуаций в большей или меньшей степени субъективна и зависит от технико–экономических и социальных возможностей заказчика. В качестве заказчика может выступать как общество в целом, так и отдельные организации и группы его членов.

Для оптимизации экономического ущерба и анализа риска неэкономических последствий при выборе целесообразного уровня надежности используется целевая функция стоимости, состоящая из начальной стоимости объекта и стоимости потерь при вероятных отказах. Требования норм проектирования к расчету конструкции в предельном состоянии должны учитывать ситуацию, в которой это состояние реализуется. Для рассмотрения при проектировании нормами устанавливаются формальные характерные ситуации, называемые расчетными. Расчетная ситуация определяется сочетанием следующих факторов: стадия существования конструкции; природные условия; условия эксплуатации; возможность грубых ошибок в деятельности людей.

При разработке норм проектирования должны рассматриваться следующие типы расчетных ситуаций:

установившиеся – имеющие продолжительность реализации того же порядка, что и срок службы конструкции (например, эксплуатация между двумя капитальными ремонтами или изменениями технологического процесса);

переходные – имеющие небольшую по сравнению со сроками службы продолжительность реализации (например, возведение здания, капитальный ремонт, реконструкция);

аварийные – имеющие небольшую продолжительность и малую вероятность появления, но являющиеся важными с точки зрения последствий отказов, возможных при этой ситуации (например, ситуации, возникающие во время взрывов, столкновений, аварий оборудования, пожаров, а также непосредственно после отказов каких–либо элементов конструкций).

Все конструкции подразделяются по целесообразному уровню их надежности на несколько классов. Каждому классу конструкций предписывается несколько целесообразных уровней надежности в зависимости от расчетной ситуации и вида предельного состояния. Целесообразный уровень надежности характеризуется целесообразным значением вероятности отказа. Целесообразные значения уровней надежности для заданного сочетания **"класс ситуаций–отказ"** устанавливаются путем обобщения информации, полученной из оптимизационных расчетов, анализа уровня надежности эксплуатируемых объектов, относящихся к данному сочетанию, и последствий их аварий (реальных и прогнозируемых).

Для реализации такого подхода в проектировании необходимо провести комплекс научно–исследовательских работ по пересмотру норм проектирования конструкций из разных материалов и различного назначения. Сложную задачу будет представлять подготовка необходимых исходных данных по нагрузкам и материалам. Основным содержанием СНиП "Нагрузки и воздействия" должны стать данные о средних значениях нагрузок (что само по себе представляет в ряде случаев новый вопрос, например, для крановых нагрузок, нагрузок на перекрытия промышленных и общественных зданий и др.) и коэффициентах вариации для них. Потребуется разработка "карт" коэффициентов вариации для нагрузок климатического типа: снеговых, ветровых, гололедных, температурных климатических воздействий. Будут необходимы также новые данные по средней прочности применяемых материалов и коэффициентов вариации для них, а также решение вопроса о браковочных значениях в условиях перехода к прямому расчету на надежность. Предлагаемый подход потребует проведения опытного проектирования широкой номенклатуры зданий и сооружений из разных видов материалов. При этом особое внимание должно быть уделено наиболее сложным условиям работы конструкций, например: поперечному изгибу, внецентренному сжатию с изгибом, кручению, предварительно напряженным конструкциям, работе конструкций в условиях образования и раскрытия трещин и т.д.

В настоящее время достаточно трудно оценить, даже ориентировочно, экономический эффект от внедрения вероятностного метода нормирования. Его основной эффект будет заключаться в знании уровня надежности проектируемых конструкций, что само по себе является весьма важным обстоятельством. При назначении этого целесообразного уровня наряду с оптимизационными процедурами будут учитываться наиболее смелые, прогрессивные решения, оправдавшие себя практикой. Поэтому окажется возможным изъять излишние резервы в сооружениях.

Проектирование и текущее содержание по своему стратегическому смыслу близки к профилактике возникновения дефектов и прогнозированию поведения сооружения в эксплуатации в течение расчетного срока службы. Следовательно, определяющую роль в выборе основных параметров системы и расхода материалов должны играть *расчеты в эксплуатационной стадии,* когда фактически контролируется реальное эксплуатационное состояние в любой фиксированный момент времени. При этом в целом общепринятый метод расчета сечений на прочность не может быть определяющим для конструкции, так как он противоречит смыслу расчетов в стадии эксплуатации, т. е. носит аварийный характер оценки предельного (практически никогда не реализуемого) сопротивления сечений. При строительстве и эксплуатации сооружения нельзя допускать даже малой вероятности (более 0,001) достижения внезапных мгновенных отказов, т. е. наступления предельного состояния по несущей способности. Это может быть достигнуто назначением при проектировании высоких коэффициентов безопасности β. При значениях $\beta \geq 3$ прямые вероятностные оценки отказов этой категории теряют практический смысл вследствие низкой точности вероятностных оценок на «хвостах» статистических распределений. В этих ситуациях достаточно пользоваться в расчетах детерминированными значениями нагрузок и предельными значениями прочностных характеристик материалов, вводя в расчет соответствующие коэффициенты безопасности или надежности, отражающие необходимый уровень защиты от аварии.

Расчеты эксплуатационной пригодности предотвращают деградационные повреждения и чрезмерные общие деформации, которые не приводят к мгновенным отказам конструкции (коррозия бетона и арматуры, трещинообразование, прогибы, колебания), а лишь затрудняют эксплуатацию и снижают долговечность. Такие повреждения обычно легко могут быть обнаружены и быстро устранены. Поэтому уровень вероятности таких отказов носит экономическую ответственность и может быть относительно высоким (порядка 0,05–0,3). Ранее в разделе 1.6. Лекции 1 и в Лекции 3 было отмечено, что вероятность надежной работы проектируемой конструкции в течение установленного срока службы остается *объективной мерой надежности* даже и в том случае, если конструкция реализуется в единственном экземпляре. Эта вероятность ***P(t)*** может быть использована для сопоставления с нормативной (заранее заданной) вероятностью $P_н$, принятой по предшествующему опыту проектирования и эксплуатации в форме:

$$P(t) \geq P_н , \qquad (108)$$

В некоторых последних работах [6, 13, 26] рекомендуется принимать следующие значения вероятности безотказной работы $P_н$:

а) в расчетах по *несущей способности*:

– на общую устойчивость: $P_н$ = 0,9997 (коэффициент безопасности β = 4 при нормальном законе распределения);

– на прочность в сечениях (по M, Q, N): $P_н$ = 0,998 (β = 3 – трехстандартная обеспеченность);

– на местную устойчивость: $P_н$ = 0,998 (β = 3);

– на выносливость: $P_н$ = 0,98 (β = 2).

б) в расчетах эксплуатационной пригодности:

– по общим деформациям: $P_н$ = 0,95 (β = 1,64);

– на продольную трещиностойкость: $P_н$ = 0,95 (β = l,64)

– на поперечную трещиностойкость и трещиностойкость по наклонным сечениям: $P_н$ = 0,9 (β = 1,28).

Здесь в качестве исходных данных принимались следующие характеристики: а) статистическое распределение нагрузок и воздействий; б) статистическое распределение прочностных возможностей бетона и арматуры; в) расчетная модель распределения внутренних усилий (напряжений) в сечениях; г) расчетный функционал надежности.

Методы теории вероятностей и теории надежности позволяют надлежащим образом истолковать нормативные нагрузки и коэффициенты запаса и открывают пути для их более глубокого изучения. Дальнейшее развитие статистических методов позволит, несомненно, делать различные качественные, а иногда и количественные выводы о закономерностях, лежащих в основе нормативных расчетов. Наконец, статистические методы и методы теории надежности дают теоретическую основу для правильной постановки сбора и обработки статистических сведений, относящихся к нагрузкам, характеристикам материала и другим расчетным параметрам.

Вместе с тем было бы неправильно придавать этим методам абсолютное значение и противопоставлять статистические методы обычным нормативным методам. По своему назначению строительные конструкции должны обладать высокой степенью надежности. Наступление предельного состояния для конструкций, работающих в нормальных условиях, не может рассматриваться как массовое событие. При этом оказывается неприменимыми закон больших чисел и статистическое истолкование вероятности. Кроме того, мы почти нигде не располагаем настолько обширными статистическими материалами, чтобы с уверенностью судить о столь малых вероятностях. Поэтому при использовании статистических методов приходится прибегать к недостаточно обоснованной экстраполяции эмпирических распределений в области малых вероятностей. Ввиду этого условный характер вычисляемых вероятностей усугубляется. Наконец, имеется еще одно соображение. Вероятностное описание условий работы конструкции под нагрузкой является более полным, чем чисто детерминистическое описание, но все же остается теоретической схемой. Ряд эксплуатационных и технологических (притом случайных) факторов приходится исключать из рассмотрения. Между тем в обычных расчетах они неявно учитываются при выборе расчетных коэффициентов.

Таким образом методы теории вероятностей и теории надежности, несомненно, являются мощным и весьма полезным средством теоретического истолкования, исследования и совершенствования нормативных методов расчета. Подчеркивая их значение для исследования и уточненного расчета, следует в то же время высказать мнение, что нормативные методы расчета конструкций по своей форме должны все же оставаться детерминистическими, а соответствующие расчетные величины и нормативные коэффициенты должны назначаться и корректироваться в первую очередь на основании опыта проектирования, возведения и эксплуатации конструкций.

Успешное развитие нормативных методов расчета конструкций требует дальнейших исследований в области теории и практики надежности конструкций. В частности, к перспективным направлениям относятся накопление экспериментальных данных о нагрузках, об отказах сооружений и конструкций, о величине ущерба, связанного с отказом конструкции, о надежности массовых конструкций, находящихся в типичных условиях эксплуатации, развитие методов статистического контроля качества материалов и изделий заводского изготовления, изучение экономики проектирования, строительства и эксплуатации с целью разработки более совершенных экономических моделей и уточнения их числовых характеристик. Наряду с методами оценки надежности на стадии проектирования важное практическое значение имеют методы и средства профилактики отказов, повышения и сохранения надежности, совершенствование которых требует осуществления широкой программы натурных наблюдений, разработки приборов и аппаратуры, создания научно обоснованных программ исследования и математического обеспечения к ним.

Методам теории надежности принадлежит видная роль в ускорении технического прогресса, в повышении эффективности, качества и экономичности технических разработок и их осуществлений. Экономический эффект от применения методов теории надежности к расчетам сооружений и машин складывается не только из возможной экономии материалов и средств, но и из предупреждения возможных потерь вследствие отказов, повреждений и катастроф. Помимо основной области применения, теория надежности оказывает сильное влияние на общее повышение качества проектирования и изготовления, на совершенствование технологических процессов. Так, теория указывает на существенный резерв повышения экономической эффективности, который скрыт в возможности уменьшить статистический разброс прочностных характеристик. Создавая более высококачественную и стабильную технологию, совершенствуя методы и технические средства контроля качества, мы можем снизить разброс прочности и получить таким образом значительную экономию материалов. Например, более дифференцированное деление материалов по их механическим характеристикам, обеспеченное надлежащими средствами контроля, позволит повысить допустимые напряжения и снизить общие запасы прочности. Статистический анализ нагрузок, их изменчивости и их сочетаний во времени указывает пути для выбора более совершенных схем сооружений и конструкций, наилучшим образом приспособленных к сочетанию нагрузок. Одним из наиболее убедительных примеров может служить современное развитие антисейсмического строительства, которое в известной степени обязано успехам инженерной сейсмологии и теории сейсмостойкости. Но даже и в тех приложениях, где методы теории вероятностей и теории надежности непосредственно еще не применяются, они служат основой для формирования общей системы понятий и комплекса технических требований, позволяющих инженерам различных специальностей находить пути для повышения эффективности и качества.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Авиром Л. С. Надежность конструкций сборных зданий и сооружений. Л.: Стройиздат, 1971. – 215 с.

2. Ашрабов А. А. Моделирование свойств и процессов разрушения легкого бетона и железобетона. Ташкент,: «ФАН» , 1988. – 128 с.

3. Болотин В. В. Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. – М.: Стройиздат, 1982. – 351 с.

4. Болотин В. В., Гусенков А. П., Нефедов С. В., Тананов А. И. Надежность в технике. Научно–технические, экономические и правовые аспекты надежности. Методическое пособие. Под ред. В. В. Болотина. М.: МНТК «Надежность машин», 1993.

5. Бондаренко В. М., Иосилевский Л. И., Чирков В. П. Надежность строительных конструкций и мостов. – Изд. Академии Архитектуры и Строительных Наук, М., 1996. – 220 с.

6. Иосилевский Л. И. Практические методы управления надежностью железобетонных мостов.–М.: Науч. – изд, центр «Инженер», 1999, – 295 с.

7. Кудзис А. П. Оценка надежности железобетонных конструкций.– Вильнюс: Маклас, 1985. – 156с.

8. Лужин О. В. Вероятностные методы расчета сооружений. – М.: Стройиздат, 1983. – 94 с.

9. Саргсян А. Е., Райзер В. Д., Мкртычев О. В. Метод статистических испытаний при расчете строительных конструкций на надежность. М.: РГОТУПС, 1999.

10. Райзер В. Д. Теория надежности в строительном проектировании. – М.: Изд. АСВ, 1998. – 304 с.

11. Ржаницин А.Р.Теория расчета строительных конструкций на надежность.– М.Стройиздат, 1978. 239 с.

12. Ройтман А. Г. Надежность конструкций эксплуатируемых зданий. – М.: Стройиздат, 1985. – 175 с.

13. Чирков В. П. Вероятностные методы расчета мостовых железобетонных конструкций, – М.: Транспорт, 1980. – 128с.

14. Надежность в технике. Основные понятия. Термины и определения. – ГОСТ 27.002 – 89.

Содержание

А. А.АШРАБОВ, Ч. С. РАУПОВ

Методы вероятностных расчетов строительных конструкций

Редактор: **Т.И.Умурзакова**
Разрешено в печать ___________ Объём печ. л. 6,94
Формат бумаги 60х84 1/16, заказ №____ Тираж ____экз.
Тиражировано в типографии ТашИИТа.
Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта
Адрес: 700167, Ташкент–167, ул. Адылходжаева, 1, ТашИИТ.