Fizika-matematika fakulteti

5130100-matematika yo‘nalishi

4-bosqich 401-guruh bitiruvchisi

Tursunqulova Xatichaninh

bakalavr darajasini olish uchun yozgan

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

MAVZU: TENGLAMALARNI TAQRIBIY YECHISH

ILMIY RAHBAR: **f-.m.f.n. dotsent S.Murodhujayev**

NAMANGAN - 2016 YIL

MAVZU: TENGLAMALARNI TAQRIBIY YECHISH

R E J A:

I. KIRISH.

II. ASOSIY QISM.

1-BOB. TENGLAMALAR.

1.1. Tenglamalar haqida umumiy tushunchalar.

1.2. Tenglama turlari.

2-BOB. ALGEBRAIK TENGLAMALAR.

2.1. Algebraik tenglama tushunchasi.

2.2. Ikki hadli tenglamalar.

2.3. Uchinchi darajali tenglamalarni radikallarda yechish.

2.4. To’rtinchi darajali tenglamalarni radikallarda yechish.

3-BOB. ALGEBRAIK BO’LMAGAN TENGLAMALAR. (TRANSTSENDENT TENGLAMALAR).

3.1. Ko’rsatkichli tenglamalar.

3.2. Logarifmik tenglamalar.

3.4. Aralash tenglamalar sistemalar.

4-BOB. TENGLAMALARNI TAQRIBIY YECHISH.

4.1. Gorner sxemasi.

4.2.Xaqiqiy ildizlarni chegaralari.

4.3.Xaqiqiy ildizlarni ajiratish.

4.4. Xaqiqiy ildizlarni taqribiy xisoblash.

III. XULOSA.

IV. INTERNET MATERIALLARI.

V. FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR.

KIRISH

***Matematika fanining ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, differensial tenglamalar va matematik fizika, funksional tahlil sohasidagi yutuqlari respublikadan ancha uzoqda ham mashhur.*[1]**

I.A. Karimov

Bugun biz tarixiy bir davrda – xalqimiz o’z oldiga ezgu va ulug’ maqsadlar qo’yib, tinch – osoyishta hayot kechirayotgan, avvalambor o’z kuch va imkoniyatlariga tayanib, demokratik davlat fuqorolik jamiyati qurish yo’lida ulkan natijalarni qo’lga kiritayotgan bir zamonda yashamoqdamiz.[2]

Ma’lumki, O’zbekiston Mustaqillikka erishgan kunlardan boshlaboq Respublikamiz Prezidenti I.A.Karimov mamlakatimizdagi kadrlar tayyorlash masalasiga asosiy e’tiborni qaratib kelmoqda. Prezidentning deyarli har bir ma’ruzasida kadrlar masalasi – asosiy masala ekanligi, yosh malakali mutaxassislarni tayyorlamay turib mamlakatimizni rivojlanishida katta yutuqqa erishib bo’lmasligini ta’kidlaydilar, quyidagi so’zlar fikrimizning yaqqol dalilidir:

“ Biz oldimizga qanday vazifa qo’ymaylik, qanday muammoni yechish zarurati tug’ilmasin, gap oxir – oqibat, baribir kadrlarga va yana kadrlarga borib taqalaveradi. Mubolag’asiz aytish mumkinki, bizning kelajagimiz, mamlakatimizning kelajagi o’rnimizga kim kelishiga yoki boshqacharoq aytganda, qanday kadrlar tayyorlashimizga bog’liq”. (Karimov I. O`zbekiston XXI asrga intilmoqda. – T., “ O`zbekiston”, 1999-y., 18-b.)

Xususan, 1997-yilning 29-avgustida O`zbekiston Respublikasi Oliy Majlisining 9-sessiyasida ta’lim to`g`risidagi qonunga asoslangan “Kadrlar tayyorlash milliy dasturi” qabul qilindi. Bu dastur 3 bosqichdan iborat:

1 – bosqich: 1997 – 2001-yillar. Bunda kadrlar tayyorlash milliy dasturining amalga oshirish uchun zarur shart-sharoitlar yaratish.

---

[1] "O’zbekiston XXI asr bo’sag’asida", - T., "o`zbekiston", 1997y., 262-bet.
[2] I.A.Karimov “Yuksakma’naviyat – yengilmaskuch”. Toshkent “Ma’naviyat” 2005.

2 – bosqich: 2001 – 2005-yillar. Bunda huquqiy me'yoriy hujjatlar asosida barkamol avlodni Davlat ta'limi standartiga javob beradigan qilib tayyorlash maqsad qilib qo`yilgan.

3 – bosqich: 2005-yil va undan keyingi yillar. Bunda davr talabiga mos bo`lgan barkamol avlodni jamiyatimizning rivojlanishi darajasida tarbiyalab voyaga yetkazish maqsad qilib qo`yilgan.

Hozirgi paytda Respublikamizda "Kadrlar tayyorlash milliy dasturida" nazarda tutilgan barcha rejalar muvaffaqiyat bilan amalga oshirildi va davom etilmoqda. Tabiiyki, bu maqsadlarni yuqori saviyada amalga oshirish uchun oliygohlar, kollej va litseylarning bitiruvchilari har tomonlama yetuk kadrlar bo`lib yetishmog`i - zamon talabidir".

Muhtaram Prezidentimiz I.A.Karimov muntazam ravishda yosh avlodning barkamol bo`lib yetishishi va mustaqil O`zbekistonimizning fidoyi kadrlari bo`lmog`i uchun sharoitlar yaratib bermoqdalar, yoshlarning ta'lim-tarbiyasi, bilim saviyasi, dunyoqarashini shakllantirishdek dolzarb muammolarga alohida e'tibor bermoqdalar.

Kadrlar tayyorlash haqidagi fikrlari quyidagi so`zlaridan ham ko`rishimiz mumkin:

"... Hammamizga teran bir haqiqat ayon bo`lishi kerak - biz yurtimizning ertangi rivoji haqida qanday chuqur o`ylangan dasturlarni tuzmaylik, bu rejalarni bajarish uchun qanday moddiy baza va imkoniyatlar bermaylik, buning uchun qancha ko'p sarmoya safarbar etmaylik, ularning barchasini amalga oshiradigan, ro`yobga chiqaradigan qudratli bir omil borki, u ham bo`lsa, yuqori malakali ishchi kuchi va yurtimizning ertangi kuni, taraqqiyoti uchun mas'uliyatni o`z zimmasiga olishga qodir bo`lgan yetuk mutaxassis - yoshlarimiz, desak, o`ylaymanki, hech qanday xato bo`lmaydi". ("Barkamol avlod dasturi", - T., "O`zbekiston", 2010-y., 80-bet).

Yurtboshimiz ta'kidlayotgan maqsadlarni yuqori saviyada amalga oshirish uchun oliygohlar, kasb-hunar kollejlari va akademik litseylarning bitiruvchilari har tomonlama yetuk kadrlar bo`lib yetishmog`i, ularning har biriga ishonib topshirilgan ishlarni a’lo darajada uddalay olishi zarurligi - zamon talabidir.

“… Yoshlarni zamonaviy fan va texnikaning, umuman ilm - fanning yutuqlaridan bahramand qilmasdan turib, ularga yuqori malakali mutaxasis bo`lib yetishishiga sharoit tug`dirmay turib, biz Respublikamiz xalq xo`jaligini, sanoat ishlab chiqarish sohalarini tubdan o`zgartira olmaymiz, buni har doim yodda tutish kerak. Chunki ishsizlik, maosh kamligi, mutaxassislar yetishmasligi va boshqa ko'p yetishmovchiliklar ana shundan deb o`ylayman. … Demak, xalq saylab qo`ygan deputatlarning birinchi navbatdagi vazifalaridan biri - Yoshlarimiz tarbiyasi. Milliy siyosatning harakat dasturini ishlab chiqish masalasidir."

Yoshlarni ilm - fanga qiziqtirish, Respublikamiz hayotidagi dolzarb masalalarni hal etishga tayyorlab borish zarurdir. - "... Ayniqsa, o`sib-kelayotgan avlod taqdiriga hech kim befarq qaray olmaydi. Bunda oliy o`quv yurtlarining ahamiyati kattadir. Yoshlarni qay usulda o`qitish, ularni tarbiyalash mustaqil mamlakatning yetuk mutaxassislari bo`lishiga qayg`urish har birimizning muqaddas burchimizdir. Bunda Oliy va O`rta maxsus ta’lim tizimi saviyasini jahon andozalari darajasiga yetkazish, xalq xo`jaligida kadrlarga bo`lgan talab va ehtiyojlarni ilmiy tahlil asosida aniqlash horijiy mamlakatlar tajribasidan oqilona foydalanish shu kunning asosiy vazifalaridandir..." - deb ta’kidlagan muhtaram Prezidentimiz I.A.Karimov (“Ilm ziyo salohiyati – yurt boyligi ” nutqidan “Ma’rifat" gazetasi. 1993-yil, 21-iyul).

Kasb - hunar kollejlari, litsey talabalari, oliy o`quv yurtini tamomlayotgan har bir yosh mutaxassisni o`z kasbining bilimdoni va jonkuyari qilib tayyorlash - shu kunning eng birinchi vazifasidir. Bu o`rinda Prezidentimiz I . A. Karimovning ushbu so`zlarini keltirish joiz: - “... Hukumatimiz fan, ma'rifat va madaniyat sohasiga jiddiy e'tibor qaratmoqda. O`tish davrining eng qiyin va murakkab paytida ham davlat maorifni takomillashtirish, bilimli va har tomonlama barkamol avlodni voyaga yetkazish uchun hech narsani ayamayapti. Axir, o`ylab ko`raylik, birodarlar, biz bugun ne – ne mashaqqatlar bilan qurayotgan davlatimiz, mustaqil va har jihatdan mustahkam mamlakatimiz ertaga kimning qo`lida qoladi?

Bugungi katta islohotlar evaziga qo`lga kiritayotgan yutuqlarimizni ertaga farzandlarimiz davom ettirishga qodir bo`ladimi – yo`qmi?...

Islohotning taqdiri, uning qay darajada amalga oshirish, birinchi navbatda kadrlarning malakasiga, ularning o`z ishlarini qay darajada o`zlashtirib olganligiga, yurtparvarligi va fidoiyligiga bog`liq". (I.A.Karimovning xalq deputatlari Samarqand viloyati kengashi sessiyasida so`zlagan nutqidan, "Ma'rifat" gazetasi, 1995-yil 29-noyabr).

Oliygohni bitirayotgan talabalarimiz o`zlari egallagan mutaxassislik bo'yicha malakali mutaxassis bo`lishlari, ilm - fanning, xalq xo`jaligining turli jabhalaridagi o`rnini anglab olgan bo`lishlari kerak. Bu o`rinda I.A.Karimovning ushbu so`zlarini keltirish maqsadga muvofiqdir:

- "... Zero, ilmu tafakkur odamlar qalbiga nur, ongiga ziyo, xonadoniga fayz - baraka keltiradigan buyuk mo`jizadir. Ana shu nuqtai nazardan qaraganda, barkamol, tashkilotchi va zukko kadrlarni tayyorlash ishiga alohida ahamiyat berishimiz kerak. Binobarin, savodli xalq va ilmli rahbarlar bilan ishlash ham oson, ham zavqli…" (I. A.Karimov. "Istiqlol imkoniyatlaridan oqilona foydalanaylik " xalq deputatlari Qashqadaryo viloyati kengashi sessiyasida so`zlangan nutq. "Ma'rifat" gazetasi. 1995 yil, 6 dekabr).

Oliygohlardagi ta'lim va tarbiya jarayoni shunday tashkil etilishi lozimki, yosh kadrlar mustaqil ravishda ish yurita oladigan, o`z fikriga ega bo`lishi, o`zi egallagan mutaxassislik bo`yicha olgan diplomlarni oqlashlari lozim.

- "... Universitet diplomi darajasi va obro`sini oshirish zarur. Buning uchun o`quv muassasalari moddiy bazasini mustahkamlash, ularni zamonaviy o`quv va kompyuter texnikasi bilan jihozlash, zarur o`quv adabiyotlar bilan ta'minlash, o`quv dasturining turli shaklarini kengaytirish, o`qituvchilarning mehnatga rag`batini kuchaytirish kerak" - deb ta'kidlaydi Prezidentimiz I.A.Karimov. ("Ishlohotlar izchilligi - inson mafaatlari omili", "Ma'rifat" gazetasi. 1997-yil, 1-mart).

Oliygohlarda talabalarga bilim berish jarayonida zamonaviy ilm - fan yutuqlariga katta e'tibor berish bilan birga o`tmishdagi tarixiy merosimizni yaxshi o`rganishimiz va buyuk ajdodlarimizning ishlarini davom ettirishimiz lozim. Bu borada so`z yuritganda Prezidentimizning quyidagi fikrlari hamma vaqt yodimizda bo`lmog`i kerak: - "… Olimlarimiz eng yaxshi an'analarni o`zlashtirib, tarixiy merosimizni chuqur o`rganib, buyuk ajdodlarimizning ishlarini munosib davom ettirmoqdalar. Ilmli ziyolilarimizning munosib fazilati hamma vaqt ilmga, ilg`or ilmiy tafakkurning oldingi marralarida bo`lishga intilishdan iborat.

" O`zbekiston innovatsion rivojlanish turining hozirgi zamon modeliga o`tish uchun hamma zarur sharoitlarga ega. Bu model vujudga keltirilgan ilmiy - texnikaviy salohiyatdan keng va samarali foydalanishga, fundamental va amaliy fanning yutuqlarini, chuqur talab qiladigan texnologiyalarni amaliyotga keng joriy etishga, yuqori malakali, iqtidorli ilmiy kadrlar sonini ko`paytirishga asoslanadi. Bu - mamlakatimiz jahondagi iqtisodiyoti va sanoati rivojlangan mamlakatlar qatoriga kirib borishning zarur sharti va mustahkam poydevori bo`lib xizmat qiladi." (O`zbekiston XXI asr bo`sag'asida: Xavfsizlikka tahdid, barqarorlik shartlari va taraqqiyot kafolatlari". I.A.Karimov.Toshkent. "O`zbekiston" nashriyoti, 1997-yil).

Prezidentimizning kadrlar haqidagi ushbu fikrlari katta ahamiyatga ega: - "… Bu hayotimizning turli jabhalarida, xalq xo'jaligining barcha sohalarida tub islohotlarni amalga oshirib, yangilanish sari borar ekanmiz, ushbu islohotlarning turmush tarzimizni ijobiy tomonga o`zgartirishi, ma'naviy yuksalishimizga ko`mak berishi hamda milliy g`urur va iftixorlarimizni kuchaytirish ko`p jihatdan har tomonlama yetuk kadrlarga bog`liq ekanini unutmasligimiz kerak, Respublikamizning iqtisodiy, siyosiy va ma'naviy jihatdan ravnaq topishida, bu sohalardagi muammolarni hal qilishimizda ham milliy kadrlar - bosh omillardan biri bo`ladi" ("Zamonaviy kadrlar tayyorlash - islohotlar muvaffaqiyatining asosi" nutqidan. "Ma'rifat" gazetasi. 1998-yil 28-yanvar).

Respublikamizda amalga oshirilayotgan barcha islohotlarda ilm – fanning yutuqlaridan foydalanish nazarda tutilgandir. Oliygohda ta'lim olayotgan- barcha yoshlar asosiy e'tiborni fan asoslarini egallashga qaratmog`i kerak. Bu borada Prezidentimiz I.A.Karimovning` ushbu fikrlari dasturul - amal bo`lmog`i shart:

"… Umuman men, fanni ilg`or, taraqqiyot, progress degan so`zlar bilan yonma – yon qabul qilaman. Fanning vazifasi kelajagimizning shakl – tamoyilini yaratib berish, ertangi kunimizning yo`nalishlarini, tabiiy qonuniyatlarni, uning qanday bo'lishini ko`rsatib berishdan iborat, deb tushunaman. Odamlarga mustaqillikning afzalligini, mustaqil bo`lmagan millatning kelajagi yo`qligini, bu tabiiy qonuniyat ekanini isbotlab, tushuntirib berishi lozim. Fan jamiyat taraqqiyotining olg`a siljituvchi kuchi, vositasi bo`lmog`i lozim". ( I.A.Karimov, "Tarixiy xotirasiz kelajak yo`q". " Ma'rifat" jurnali, 1998-yil 5-son).

Endi, matematikaning o`tmishi, hozirgi kuni va kelajagi haqida biroz to`xtalib o`tamiz.

Matematika fani insoniyat hayotida eng asosiy ahamiyat kasb etuvchi fan ekanini butun dunyo tan olgandir. Uning har bir kishi uchun har soniyada zarur ekani ravshan, undan hamma u yoki bu darajada foydalanadi, lekin ushbu jarayonni o`zi anglab yetmaydi. Bunga misol qilib, vaqt o`lchovini, kundalik harajatlarni, o`qiladigan fanlar va darslar soni, mavzular, transport, yo`nalishlar nomeri va hokazolarni keltirish mumkin.

Matematikaning turli sohalarga: xalq xo`jaligiga, transportga, sanoatga, meditsinaga, biologiya, kimyo, fizika, genetika va boshqa o`nlab fanlarga tatbiqlari turmush darajasi va turli fanlarning shahdam qadamlar bilan olg`a ketishiga omil ekani ravshan.

Matematika, bir qarashda, matematikadan yiroq bo`lgan sohalarga, masalan
adabiyotga, tilshunoslikka, sport sohasiga, psixologiyaga, tarixga va boshqa sohalarga kirib bormoqda. Matematikaning insoniyat tarixida va rivojlanish jarayonida nechog`lik ahamiyatga ega ekanini juda ko`p allomalar munosib baholaganlar. Masalan, ulug` shoh va shoir, astronom, matematik alloma - Mirzo Ulug`bek matematika haqida shunday yozgan: - "Matematika g`oyat bir yuksak fanki, unda bir olam mo`jiza yotadi".

Haqiqatan ham, matematika ilmi - insoniyat uchun bebaho ekanligini tan olmaydigan aqlli odamni topish amri mahol, chunki har bir fanning rivojlanish darajasi - bu fan matematik bilimlardan qanchalik foydalana olishi bilan baholanadi.

Jonajon O`zbekistonimiz mustaqillikka erishgan kunlardan boshlaboq butun ta'lim tizimini tubdan isloh qilish rejalari ishlab chiqildi va bosqichma-bosqich amalga oshirilmoqda. Ushbu ta'lim tizimida aniq fanlarni, xususan, matematika fanini rivojlantirish va uning olamshumul yutuqlarini hayotning turli jabhalariga tatbiq etib, davlatimizni dunyoning – rivojlangan davlatlari qatoridan munosib joy olishiga erishish yo`lida tinmay ish olib borilmoqda.

O`tmishdagi har bir hukmdor, davlat boshliqlari - kim bo`lishidan qat'iy nazar – har bir ish uchun hisobga, aniq rejaga, zahira va imkoniyatlarni bilishga davlat miqyosida o'tkaziladigan tadbir, islohotga ketadigan harajat, olinadigan foyda miqdori, ko`riladigan talofat va ziyonlar hajmi haqida ma'lumotga ehtiyoj sezganlar.

Aytilgan muammolarni hal etishga olimlar, shoirlar, musavvir, muhandislar va boshqa mutaxassislar zarur bo`lgani sababli madrasa va universitetlar donishmandlik uylari, akademiyalar, maktablar tashkil etilgan va ularning faoliyatlari davlat tomonidan nazorat qilib borilgandir, allomalar, mutaxassislar davlat belgilagan maosh - oylik bilan muntazam ta'minlanib turilgan.

Bu allomalar asarlarining izlab topilishi, tarjima qilinishi va tanqidiy ruhdagi o`rganib chiqilishi natijasida ilm - fanning turli sohalarida, xususan riyoziyot (matematika), hikmat (fizika), astronomiya (falakiyot), biologiya, jug'rofiya, kimyo va boshqa o`nlab sohalarning beqiyos darajada rivojlanishiga omil bo`ldi, insoniyatning hayoti, turmush tarzi tanib bo`lmas darajada o`zgardi, o`sdi, yuksaldi, qadimda aql bovar qilmaydigan ishlar - radio, telegraf, telefon, robotlar – texnikasi, televideniya, internet aloqalari, samolyotlar, kemalar, avtomobillarning minglab markalari, kosmik kemalar va ko`plab mo`jizalar yaratildiki, - bularning hammasi zamonamiz odamlariga xizmat qilmoqda.

Ushbu kunlarda biror yurtga o`qishga bormay, xonadan chiqmay ham dunyoning turli burchaklarida ro`y berayotgan ilm - fan yutuqlaridan, hodisalar tafsilotidan xabar topmoqdalar, fazoga uchish, oyga qo`nish, uzoq sayyoralarga samoviy kemalarni jo`natish jarayonlarini kuzatish imkoniyatlari paydo bo`ldi.

Eng yangi super EHM larning yaratilishi, murakkab agregat liniyalarni yaratish orqali mehnat unumdorligini beqiyos darajada o`stirish, yadro energiyasidan insoniyatning tinch maqsadlardagi muammolariga foydalanish, kosmik fazoni tinch maqsadda zabt etish, zamonaviy qurol - yaroqlar, harbiy texnikaning zamonaviy avlodini yaratish, tibbiyotda zamonaviy texnologiyalarni yaratish, cho`l - sahrolarda, tog` va dengizlar qo`ynidagi turli boyliklarni aniqlash va ularni qazib olish yo`llarini ishlab chiqishda - matematika fani asosiy omildir.

Bunday fikrlarning dalili sifatida Respublikamiz Prezidenti I.A.Karimovning quyidagi so`zlarini keltirishimiz maqsadga muvofiqdir:

“ ... Respublikamizda quyidagi yo`nalishlar bo`yicha jahon darajasidagi ilmiy maktablar yaratilgan bo`lib, ularda tadqiqotlar muvaffaqiyatli olib borilmoqda.

Birinchi: Matematika, Ehtimollar nazariyasi, tabiiy va ijtimoiy jarayonlarni modellash, informatika va hisoblash texnikasi sohasidagi tadqiqotlar ...” (I.A.Karimov "O`zbekiston XXI asr bo`sag`asida, xavfsizlikka tahdid, barqarorlik shartlari va taraqqiyot kafolatlari", 262-bet).

"Shundan kelib chiqqan holda, bizning yaqin istiqbolimizdagi eng muhim vazifamiz, boshlagan ishlarimizni izchil davom ettirish, iste'mol talabini kengaytirish maqsadida sotsial sohani rivojlantirish, mehnatga haq to`lashni yanada oshirish, xizmat ko`rsatish sektorini, infratuzilma ob’yektlarini rivojlantirishga, transport va komunikatsiya loyihalarini amalga oshirishga alohida e'tibor berishdir". ("Mamlakatimizda demokratik islohotlarni yanada chuqurlashtirish va fuqarolik jamiyatini rivojlantirish konsepsiyasi ", O'zbekiston Respublikasi Prezidenti Islom Karimovning O`zbekiston Respublikasi Oliy majlisi qonunchilik palatasi va Senatining qo`shma majlisidagi ma`ruzasi, Norin ovozi gazetasi, 2010-yil 19 – noyabr №46 (6747)- chi son).

Hozirgi zamon matematikasining barcha yutuqlari haqida batafsil so`zlash imkoni kichik bir ish ichida beimkon muammodir, chunki matematika fani shunchalik rivojlanib ketganki, uning yuzlab tarmoqlarida minglab ilmiy ishlar qilinmoqda, chop etilgan ishlarning bir necha foizigina o`rganilib, kundalik hayot ehtiyojlariga tatbiq etiladi, xolos.

Respublikamiz mustaqillikni qo'lga kiritib, bozor iqtisodiyoti asoslarini qurayotgan bir paytda, malakali mutaxassislarga bo'lgan ehtiyoj tobora dolzarb bo'lib bormoqda. Hozirda vujudga kelgan iqtisodiy sharoit yangicha tafakkurga ega bo'lgan dunyoga yangicha ko'z bilan qaraydigan,yangicha fikrlaydigan yangi avlodning ishtirokini taqozo etmoqda. Bu ish qanchalik tez amalga oshirilsa, mamlakatimizning iqtisodiy salohiyati shunchalik tez yuksaladi. Bu o'rinda yoshlarning matematik tayyorgarligiga qo'yiladigan talablar ham juda muhim masala hisoblanadi. Shu bilan birgalikda, ,,Kadrlar tayyorlash milliy dasturi"da ko'zda tutilgan rejalar ta'limni sifat va mazmun jihatidan yangi darajaga ko'tarish vazifasini keltirib chiqardi. Shu bois vatanimizning buyuk kelajagini yaratuvchi barkamol avlodni yangi zamon, yangi jamiyat kishisini tarbiyalashdek o'ta mashaqqatli va ayni zamonda sharafli ish shu kunning eng muhim vazifalaridan biri bo'lib qoldi. Uni amalga oshirish bizdek fidoyi o'qituvchilar zimmasiga yuklatiladi.

Respublikamizda boshlangan turli jabhalardagi islohotlar fuqarolarni istiqbolli jamiyat sari dadil odimlashiga sabab bo`lmoqda. Asrlar davomida yig`ilgan ilm – fan xazinasini bugungi yosh avlodga o`rgatish, ularni dunyodagi ilg`or va zamonaviy pedagogik texnologiya va yangi axborot tizimlari yordamida jahon standartlari darajasidagi mutaxassis kadrlar qilib tayyorlash bugungi davrning dolzarb vazifalaridan biriga aylandi.

Prezidentimiz I.A.Karimov ta'kidlaganlaridek: "Ta'lim O`zbekiston xalqi ma'naviyatiga yaratuvchilik faolligini baxsh etadi. O`sib kelayotgan avlodning barcha eng yaxshi imkoniyatlari unda namoyon bo`ladi, kasb – kori, mahorati uzluksiz takomillashadi, katta avlodlarning dono tajribasi anglab olinadi va yosh avlodga o`tadi".

Ana shu maqsadni amalga oshirish uchun ta’limning yangi modeli yaratildi va uning kelajakdagi istiqboli Prezidentimiz tomonidan ilmiy asoslab berildi. Modelni amaliyotga tadbiq etish o`quv jarayonini texnologiyalashtirish bilan uzviy bog`liqdir. Shu sababli “Kadrlar tayyorlash milliy dasturi”da “o`quv – tarbiyaviy jarayonni ilg`or pedagogik texnologiyalar bilan ta’minlash” uqtiriladi.

Ayniqsa, oliy ta’lim jarayonida zamonaviy o`qitish metodikasini yaratish, milliy va xorijiy axborot – pedagogik texnologiyalar yutuqlarini joriy qilish, innovatsiya loyihalarini shakllantirish hamda amalga oshirish respublikamiz ilmiy – texnik salohiyatini rivojlantirishga zamin yaratadi.

Prezidentimiz I.A.Karimovning 2002 yil 30-maydagi PF-3080-sonli “Kompyuterlashtirishni yanada rivojlantirish va axborot – kommunikatsiya texnologiyalarini joriy etish to`g`risida”gi Farmoni, Vazirlar Mahkamasining bu boradagi tegishli qarorlari va vazirliklarning ko`rsatma hamda tavsiyalari, “Ta’lim to`g`risida”gi qonun, “Kadrlar tayyorlash milliy dasturi” talablari asosida olib borilmoqda.

Ta’lim to’g’risidagi qonunning 5-moddasida tegishli ma’lumoti "kasb tayyorgarligi bor va yuksak axloqiy fazilatlarga ega bo’lgan shaxslar pedagogik faoliyat bilan shug’ullanish huquqiga ega" ekanligi ta’kidlanadi. Hozirgi kunning asosiy talablaridan yana biri – o`quv jarayonini to`liq kompyuter tarmoqlaridan foydalangan holda olib borishdir. Buning uchun kompyuter tarmoqlari, uni tashkil etuvchilari, fandagi o`rni nimalardan iborat, internet tizimi nima va o`qitishda hamda o`quv jarayonida nimalarga e’tibor bermoq kerak degan savollarga javob berish maqsadga muvofiqdir. Bu esa mazkur muammoning dolzarbligini isbot etadi.

Insoniyatning amaliy faoliyati kattaliklarni o`lchash natijasi bo`lgan son bilan bog’liqdir. Turlicha hisoblarda uchraydigan miqdorlarni o`lchash ko`pincha aniq bo`lmay, biror aniqlikda bo`ladi. Masalan, uzunliklar 1 mm yoki 1 sm, haroratni 0,1 gradusgacha, tezlikni 1 sm.s aniqlikda o`lchanadi. Bunday usullar bilan aniqlangan sonlar ustida turli amallar bajarishda xatoliklarga yo`l qo`yiladi.

Bunday xatoliklar darajasini aniqlash bilan taqribiy hisob shug'ullanadi. Biz shu nazariya bilan qisqacha tanihamiz.

Mavzuning dolzarbligi.

Matematika turmush masalalarini echishga bo`lgan ehtiyoj, ya`ni yuzalar va hajmlarni o`lchash, kema harakatini boshqarish, yulduzlar harakatini kuzatish va boshqalar tufayli vujudga kelganligi uchun ham u hisoblash matematikasi bo`lib, uning maqsadi masala echimini son shaklida topishdan iborat. Bu fikrga ishonch hosil qilish uchun matematika tarixiga nazar tashlash kifoya.

Bobil olimlarining asosiy faoliyati matematik jadvallar tuzishdan iborat bo`lgan. Shu jadvallardan bizgacha etib kelganlaridan biri miloddan 2000 yil avval tuzilgan bo`lib, unda 1 dan 60 gacha bo`lgan sonlarning kvadratlari keltirilgan. Miloddan avvalgi 747 yilda tuzilgan boshqa bir jadvalda Oy va Quyoshning tutilish vaqtlari keltirilgan. Qadimiy misrliklar ham faol hisobchilar bo`lganlar. Ular murakkab kasrlarni surati birga teng bo`lgan oddiy kasrlar yig'indisi (masalan: $\frac{3}{11}=\frac{1}{6}+\frac{1}{11}+\frac{1}{66}$) shaklida ifodalovchi jadvallar tuzishgan va chiziqli bo`lmagan algebraik tenglamalarni echish uchun vatarlar usulini yaratishgan. Yunon matematiklariga kelsak, miloddan avval 220 yillar atrofida Arximed p soni uchun $3\frac{10}{71}<p<3\frac{1}{7}$ tengsizlikni ko`rsatdi. Diofant III asrda aniqmas tenlamalarni echishdan tashqari kvadrat tenglamalarni sonli echish usulini yaratgan.

IX-X asrlarda O`rta Osiyoda matematika, astranomiya va boshqa tabiiy fanlar rivojlana boshladi. Bu erda al-Xorazmiydek buyuk alloma dunyoga keldi.

Hisoblash matematikasining mutaxassisi ingliz matematigi e.But o`zini «Sonli metodlar» kitobining kirish qismida «Hisoblash metodlarini sistemaga solganligi uchun birinchi arab matematigi Muxammad ibn – Muso al – Xorazmiydan minnatdormiz» deb yozgan edi.

Abu Abdullo Muxammad ibn-Muso al-Xorazmiy 780 yilda Xivada tug'ilib, 85 yilda Bog'dodda olamdan utgan yoshligidanoq ilm-fanga qiziqqan. O`sha davrda katta ilmiy va madaniy markaz hisoblangan Xalifatning poytaxti - Bog'dodga taklif qilingan. U Sharqning birinchi akademiyasi — Bog'doddagi "Bayt-ul xikmat" ("Donishmandlar uyi")da faol ish olib borgan. U "Donishmandlar uyi"ning kutubxonasini boshqargan. Bu erda uning raxbarligida arablar va boshqa xalqlar bilan bir qatorda Axmad Fargoniy va Axmad ibn Marvaziy kabi O`rta Osiyolik olimlar tadqiqot olib borishgan. Al-Xorazmiy O`rta Osiyoning islomdan oldingi o`ziga xos ilmiy merosiga, qo`shni Xindiston va Yaqin Sharqdagi ellinistik davlatlaridagi ilmiy g’oyalarga tayanib ishladi.

Al-Xorazmiy "Xind sanog’i to`g’risida"gi arifmetik risolasida o`nlik sanoq, sistemasini va bu sistemada to`rtta arifmetik amallarni bajarish qoidalarini birinchi bo`lib bayon qilgan. Bu risola XII asrda lotin tiliga tarjima qilingan va u Osiyoda ham, Evropada ham unlik sanok, sistemasini qo`llanilishiga va tarqalishiga poydevor bo`lgan.

Evropada bunday qoidalar al-Xorazmiy nomi bilan atalib, "Algorizmi" deyilgan. Keyinchalik u Algorithm va Algorithmus ko`rinishlarini olib, oxirida "algoritm" so`ziga aylangan.

Hozirgi vaktda *algoritm deb ma`lum bir tipga oid xamma masalalarni echishda qo`llaniladigan barcha amallar sistemasining muayyan tartibda bajarilishi haqidagi aniq qoidaga aytiladi.*

Al-Xorazmiyning "Kitob al-muxtasar fi hisob aljabr va muqobala" nomli algebraik risolasida birinchi marta algebra matematikaning mustaqil bo`limi sifatida qaraladi. Unda algebraik miqdorlar ustida amallar bajarish qoidalari, 1- va 2-darajali algebraik tenglamalarni echish usullari va bunday tenglamalarga keladigan hayotiy masalalar keltirilgan. Risola lotinchaga tarjima qilinganda "val-muqobala" tushurib qoldirilgan va "algebra" nomi bilan jahonga tarqalgan (shuning uchun bo`lsa kerak o’rta asrlarda Evropa davlatlarida singan qo`l-oyoqni tiklaydigan tabibni algebrist deb atashgan).

Xorazmiyning bizgacha etib kelgan ilmiy merosi, shu davrda Yaqin va O’rta Sharkda xalkaro til vazifasini bajargan **arab tilida** yozilgan. Shuning uchun ham Yaqin va O’rta Sharkdagi olimlarni Evropada arab olimlari deb bilishgan.

Ingliz matematigi e. But al-Xorazmiyni **arab matematigi** va Evropada hind raqamlari 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 larni **arab raqamlari** deyishga ham sabab shu.

Aytilganlardan tashqari, al-Xorazmiy $\pi = 3{,}1416$ qiymatni aniqladi, matematik jadvallar tuzishda faol qatnashdi.

Abul Vafo al-Bo`zjoniy 960 yilda sinuslar jadvalini hisoblash metodini ishlab chikdi, sin(l/2)° ning qiymatini tuqqizta ishonchli raqam bilan berdi. Bundan tashqari, u tg funksiyasidan foydalandi va uning qiymatlari jadvalini to`zdi.

XV asrda Amir Temur saltanatining markazi - Samarqandda ilm-fan, madaniyat yuqori darajada rivojlandi. Shu paytda Ulug'bekning madrasayu rasadxonasi barpo etildi. Bu erda Ulug'bek bilan bir qatorda Ulug'bekning ustozi - zamonasining mashhur matematigi va astronomi Qozizoda Rumiy hamda G'iyosiddin Jamshid Koshiy, Mansur Koshiy, Muxammad Birjondiy va Ulugbekning shogirdi Ali Kushchilar madrasada daryo berib, rasadxonada yuldo`zlarni ko`zatish va ilmiy izlanishlar olib borishgan. Ayrim tadqiqotchilar Ulugbek madrasasi bilan rasadxonasini birgalikda ***Ulugbek akademiyasi*** deyishsa, avstriyalik matematika tarixchisi X. Zemanek buni ***Hisoblash markazi*** (XM) deydi. U aytadiki, XM bo`lishi uchun ikkita shart: 1) olimlarning jamoa bo`lib birgalikda ishlashlari va 2) hisoblashning yuqori darajadagi aniqlikda olib borilishi zarur. Bu erda har ikkala shart bajariladi. Shunday qilib, jaxonda birinchi Hisoblash markazi (XM). Ulugbek raxbarligida Samarqandda barpo etildi. Bu XMda qilingan ishlar to`g'risida kiskacha to`xtalib o`tamiz:

1. Riyosiddin Koshiy unli kasrlar arifmetikasini yaratdi.

2. $ax^3 + bx + s = 0$ ko`rinishidagi uchinchi darajali algebraik tenglamani echishning iteratsion usuli ishlab chiqildi.

3. Trigonometrik funksiyalar jadvali 17 xona aniqdikda to`zildi.

4. G'iyosiddin Koshiy π sonining qiymatini 17 xona aniqlik bilan topdi, ya`ni

$$\pi = 3,14159265358927932$$

XVI-XVII asrlarda Evropada matematika, mexaniqa, astronomiya rivojlana boshladi va XIX asrga kelib hozirgi zamon matematikasining asosi yaratildi. Matematika bilan bir paytda hisoblash matematikasi ham rivojlandi.

Hisoblash matematikasining tarixida logarifmik jadvallarining tuzilishi katta axamiyatga ega edi. Ingliz matematigi U. Neper (1614,1619), shveytsariyalik I. Byurgi (1620), ingliz Brige (1617), gollandiyalik Vlakk (1628) va boshqalar tomonidan yaratilgan logarifmik jadvallar buyuk frantso`z matematigi va mexanigi P.S. Laplasning so`zi bilan aytganda: "...hisoblashlarni soddalashtirib, astronomlarning umrini o`zaytirdi". Laplas hozirgi zamon komp'yuterlarining ishlashini ko`rganda nima der ekan?

1845 yilda Adams va 1846 yilda Lever'elar hisoblashlar natijasida Neptun sayyorasining mavjudligi va fazodagi o`rnini oldindan aytishlari hisoblash matematikasining buyuk galabasi edi. Neptunii "qalam uchida topilgan sayyora" ham deyishadi.

Tatbiqiy masalalarni sonli echish matematiklar e`tiborini doim o`ziga tortar edi. Shuning uchun ham o`tgan zamonning buyuk matematiklari o`z tadqiqotlarida tabiat jarayonlarini o`rganish, ularning modellarini tuzish, modellarni tadqiq etish ishlarini birga kushib olib borishgan. Ular bu modellarni tekshirish uchun maxsus hisoblash metodlarini yaratishgan. Bu metodlarning ayrimlari N’yuton, Eyler, Lobachevskiy, Gauss, CHebishev, Ermit nomlari bilan bog’liqdir. Bu shundan dalolat beradiki, hisoblash metodlarini yaratish bilan o`z zamonasining buyuk matematiklari shugullanishgan.

Shuni ham aytish kerakki, limitlar nazariyasi yaratilgandan so`ng matematiklarning asosiy diqqat-e`tibori matematik metodlarga kat`iy mantiqiy zamin tayyorlashga, bu metod qo`llaniladigan ob`ektlar sonini orttirishga, matematik ob`ektlarni sifat jihatidan o`rganishga qaratilgan edi. Natijada, matematikaning juda muxim va ayni paytda ko`pincha kiyinchilik tugdiradigan soxasi: matematik tadqiqotlarni so`nggi sonli natijalargacha etkazish, ya`ni hisoblash metodlari yaratishga kam e`tibor berilar edi, bu soxa esa matematikaning tatbiqlari uchun juda zarurdir.

BMI ning maqsadi va vazifalari:

Ushbu ishda tenglama, algebraik tenglama, algebraik bo’lmagan, tenglamalarning taqribiy yechish kabi nazariy ma`lumotlar keltirilgan va qat`iy asoslangan holda berilgan bo`lib, ularning g’oyalari sodda misollarda tushuntiriladi.

Tanlangan ob’yektlar va tadqiqot usullari:

Ob’yekti: Matematikaning hozirgi zamon fan va texnikasining xilma-xil soxalaridagi tatbiqlaridan, odatda, shunday tipik matematik masalalarga duch kelinadiki, ularni klassik metodlar bilan echish mumkin emas yoki echish mumkin bo`lgan taqdirda ham echim shunday murakkab ko`rinishda bo`ladiki, undan samarali foydalanishning iloji bo`lmaydi.Ishda bunday tipik matematik masalalardan algebra (odatda, tartibi juda katta bo`lgan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini echish, matritsalarning teskarisini topish, matritsalarning xos sonlarini topish, algebraik va trantsendent tenglamalar hamda bunday tenglamalar sistemasini echish) matematik analiz (sonli integrallash va differentsiallash, funksiyani yaqinlashtirish masalalari) hamda oddiy va xususiy hosilaviy differentsial tenglamalarni echish masalalari va boshqalar kiradi.

Tadqiqot usullari: Ushbu ishda uchraydigan ko`p masalalarni $u = Ax$ shaklida yozish mumkin, bu erda *x* va *u* berilgan $R_1$ va $R_2$ funktsional fazolarining elementlari bo`lib, *A* — operator yoki xususiy holda funktsionaldir. Agar *A* operator va *x e*lement xaqida ma`lumot berilgan bo`lib, *u* ni topish lozim bo`lsa, bunday masala *to`g'ri masala* deyiladi. Aksincha, *A va u* xakida ma`lumot berilgan bo`lib, *x* ni topish kerak bo`lsa, bunday masala *teskari masala* deyiladi. Odatda, teskari masalani echish ancha murakkabdir. Bu masalalar har doim ham aniq, echilavermaydi. Bunday xollarda hisoblash matematikasiga murojaat qilinadi.

Ba`zan masalani aniq echish ham mumkin, lekin klassik matematika metodlari bilan kerakli sonli qiymat olish uchun juda ko`p hisoblashlar talab qilinadi. Shuning uchun ham hisoblash matematikasi zimmasiga konkret masalalarni echish uchun oqilona va tejamkor metodlar ishlab chiqishi yuklanadi (masalan, chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini echishda Kramer formulalariga nisbatan Gauss metodi ancha tejamkor metoddir). Hisoblash matematikasida yuqoridagi masalalarni hal qilishning asosiy moxiyati R_1, R_2 fazolarni va A operatorini hisoblash uchun qulay bo`lgan mos ravishda boshqa $\overline{R}_1, \overline{R}_2$ fazolar va $\overline{A}$ operatori bilan almashtirishdan iboratdir. Ba`zan faqat R_1 va R_2 fazolar yoki faqatgina ulardan birortasini, ba`zan esa fakdt A operatorni almashtirish kifoyadir. Bu almashtirishlar shunday bajarilishi kerakki, natijada hosil bo`lgan yangi

$$\overline{y} = \overline{A}\overline{x} \qquad (\overline{x} \in \overline{R}_1,\ \overline{y} \in \overline{R}_2)$$

masalaning echimi biror ma`noda berilgan (1) masalaning echimiga yaqin bo`lsin va bu echimni nisbatan ko`p mexnat sarflamasdan topish mumkin bo`lsin.

Bunga misol sifatida shuni ko`rsatish mumkinki, odatda matematik fizika tenglamalari u yoki bu strukturaga ega bo`lgan algebraik tenglamalar sistemasiga keltirilib echiladi.

BMI ning ilmiy yangiligi va amaliy ahamiyati:

Bu bitiruv malakaviy ishda oliy algebradagi algebraik tenglamalarning ba`zi xossalarini keltiramiz:

1) Har qanday algebraik tenglama juda bulmaganda bitta ildizga ega (haqiqiy yoki kompleks).

2) Har qanday *p* tartibli algebraik tenglamaning ildizlari soni *p* dan katta bo`lmaydi.

Algebraik tenglama ildizlarini qanday topamiz?

1-, 2-tartibli tenglamalar uchun tayyor hisoblash formulalari mavjud bo`lib, ular bizga o'rta maktab matematikasidan ma`lum. Bu formulalarda ildizlar tenglamaning koeffitsientlari orqali ifodalanadi (masalan kvadrat tenglamaning ildizlarini hoblashda). 3- va 4- tartibli tenglamalar uchun ham formulalar mavjud. Biroq bu formulalar murakkab ko`rinishda. 5- va undan yuqori darajali algebraik tenglamalar uchun bunday formulalarning bo`lishi mumkin emas. Buni Norvegiyalik matematik Abel' isbotlagan. Bunday tenglamalarni faqat xususiy xollardagina echish mumkin (masalan $ax^p=b$ ni).

Shu munosabat bilan bitiruv malakaviy ishida kator taqribiy usullar ishlab chikilgan. Bu usullar bilan istalgan darajali algebraik yoki transtsendent tenglamalarni berilgan aniqlikda echish mumkin. Shuning uchun taqribiy usullar yuqori darajali tenglamalarni echish uchun asos bo`ladi.

BMIning tuzilishi va tarkibi:

Bitiruv malakaviy ishi kirish, asosiy qism va xulosadan iborat. Kirish qismida: Mamlakatimizda ta'lim sohasida olib borilayotgan islohotlar haqida, Mavzuning dolzarbligi, BMI ning maqsadi va vazifalari, Tanlangan ob'yektlar va tadqiqot usullari, Ishning o'rganilish darajasining qiyosiy tahlili, BMI ning tuzilishi va tarkibi bayon etilgan.

BMIga foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati va internet manbalari ilova qilingan.

II.ASOSIY QISM.

1-BOB. TENGLAMALAR.

1.1.Tenglamalar haqida umumiy tushunchalar.

Ma’lumki, tarkibida noma’lum o‘zgaruvchi qatnashgan tenglik ***tenglama*** deyiladi. Noma’lum o‘zgaruvchining tenglikni ayniyatga aylantiradigan qiymatlari tenglamaning ***yechimlari*** (ildizlari) deyiladi.

Tenglamaning barcha yechimlari to‘plami tenglamaning ***yechimi*** deyiladi. Bu to‘plam bo‘sh to‘plam bo‘lishi ham mumkin. Bunday holatda tenglama yechimga ega emas deyiladi. Tenglamani shartli ravishda

$$h(x) = g(x) \qquad (1)$$

tenglik ko‘rinishida belgilab olaylik va

$$h_1(x) = g_1(x) \qquad (2)$$

undan farqli tenglama bo‘lsin. Agar (1) tenglamaning yechimi (2) tenglama yechimining to‘plamostisi bo‘lsa, (2) tenglama (1) tenglamaning *natijasi* deyiladi. Agar ikkala tenglama bir-birining natijasi bo‘lsa, bu tenglamalarni *teng kuchli* tenglamalar deyiladi. Demak, teng kuchli tenglamalarning yechimlari bir xil, ya’ni teng bo‘lar ekan.

(2) tenglama (1) tenglamaning natijasi bo‘lsa, u holda (1) tenglamaning yechimlari bo‘lmagan (2) tenglamaning yechimlari (1) tenglama uchun *chet ildizlar* deyiladi.

Barcha yechimlari to‘plamidan $y = f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasiga kirmagan barcha yechimlarini $f(x)= 0$ tenglamaga qo‘yib tekshirib chiqiladi va*f* *(x)= 0* tenglamani qanoatlantiradigan ildizlar to‘plamini tenglamaning yechimi sifatidaolainadi.

(1) tenglamaning aniqlanish sohasi. D sonli to‘plamdan iborat bo‘lsa, $D = M_1 \cap M_2$ bo’ladi. Bu yerda M_1 va M_2 mos ravishda $h(x)$ va $g(x)$ funktsiyalarning aniqlanish sohasidan iborat bo’lgan sonli to’plamdir. (1) tenglama D sohada ba’zi bir ayniy almashtirishlardan (umumiy maxrajga keltirish, qavslarni ochib chiqish, hadlarni tenglamaning bir qismidan ikkinchi qismiga olib o’tish, o’xshash hadlarni ixchamlashtirish va h.k) keyin $h_1(x) = g_1(x)$ ko’rinishni qabul qilish mumkin.

1.2.Tenglama turlari

Ta’rif. Agar (1) va (2) tenglamalarning ikkalasi ham bir xil yechimlarga ega bo’lsa, ya’ni yechimlar to’plami ustma-ust tushsa, bunday holda (1) va (2) tenglamalar teng kuchli tenglamalar deyiladi.

Masalan, $\frac{2x^2 + 2x + 3}{x+3} = \frac{3x^2 + 2x - 1}{x+3}$ va $2x^2 + 2x + 3 = 3x^2 + 2x - 1$

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0 = 0$ ko’rinishdagi tenglama yuqori darajali (butun ratsional) tenglama deyiladi.

$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ ko’rinishdagi tenglama kasr-ratsional tenglama deyiladi. Bu yerda $P(x)$ va $Q(x)$-ko’phadlar.

Ratsional tenglamalarni yechishda asosan quyidagi metodlardan foydalaniladi:

1) Ko’paytuvchilarga ajratish usuli.
2) Yangi o’zgaruvchilar kiritish usuli.

1. Misol. Tenglamani yeching. $x^3 + 2x^2 + 3x + 6 = 0$

Yechish. Tenglamani chap tomonini ko’paytuvchilarga ajratamiz. $x^2(x+2) + 3(x+2) = 0$ bundan $(x+2)(x^2+3) = 0$. Bu tenglama $x + 2 = 0$ yoki $x^2 + 3 = 0$ ga kelamiz. Birinchi tenglamadan $x_1 = -2$ ga ega bo’lamiz. $x^2 + 3 = 0$ $x \in R$ da yechimga ega emas. Javob: $x = -2$

2. Misol. $x^4+4x^3-10x^2-28x-15=0$ tenglamani yeching.

Yechish. To'la kvadratdan foydalanib tenglamani chap qismini ko'paytuvchilarga ajratamiz:

$$x^4+4x^3+4x^2-14x^2-28x-15=0$$

$$(x^2+2x)^2-14(x^2+2x)-15=0$$

Agar $x^2+2x=y$ deb belgilash kiritamiz. Y ga nisbatan, $y^2-14y-15=0$ tenglama hosil bo'ladi. Tenglamani yechib $y_1=-1,\ \ y_2=15$ ildizlarga ega bo'lamiz.

$y_1=-1$ bo'lganda $x^2+2x=-1,\ \ (x+1)^2=0$. Ildizi $x_{1,2}=-1$

$y_2=15$ bo'lganda $x^2-2x-15=0$. Ildizi $x_3=3\quad x_4=-5$

Javob: $x_1=x_2=-1\quad x_3=3\quad x_4=-5$

Modul qatnashgan tenglamalar.

Modul tushunchasi matematikaning muhim tushunchalaridan biri hisoblanadi.

Ta'rif. a sonining moduli deb, agar u son nomanfiy bo'lsa, a sonning o'ziga agar u son nomanfiy bo'lsa, $-a$ soniga aytiladi.

Ta'rifga ko'ra,

$$|a|=\begin{cases} a, \text{ agar } a\ge 0 \quad \text{bo'lsa,} \\ -a, \text{ agar } a<0 \quad \text{bo'lsa,} \end{cases}$$

O'zgaruvchisi modul ostida qatnashgan tenglamalarni yechish uchun quyidagi metodlardan foydalaniladi.

1) Ta'rifdan foydalanib yechiladi.
2) Tenglamani ikkala tomonini kvadratga oshiriladi.
3) Oraliqlarga ajratib yechiladi.

1-misol. Yechish. 1-usul. $|4x-1|=3$

Ta'rifga ko'ra

$$\begin{cases} 4x-1\ge 0 \\ 4x-1=3 \end{cases} \begin{cases} 4x-1<0 \\ 4x-1=-3 \end{cases}$$

Birinchi sistemadan $x_1=1$ yechimga keltiramiz.

Ikkinchi sistemadan $x_2 = -\frac{1}{2}$

2-usul. Tenglikni ikkala tomonini kvadratga oshiramiz.

$$|4x-1|^2 = 3^2$$

$$16x^2 - 8x - 1 = 9$$

$$16x^2 - 8x - 10 = 0$$

$$8x^2 - 4x - 5 = 0$$

Bundan $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{2}$ javobga keltiramiz.

2-misol. $|3x-4| = 4 - x$ tenglamani yeching.

Yechish. Bu tenglamani yechish uchun 2-usuldan foydalanib yechamiz. $4 - x < 0$ bo'lganda tenglama yechimga ega emas, chunki $|3x-4| \geq 0$ bo'lishi kerak. $4 - x \geq 0$ bo'lganda tenglamani ikkala tomoni nomanfiy. Shuning uchun kvadratga oshiramiz.

$$\begin{cases} 4 - x \geq 0 \\ (3x-4)^2 = (4-x)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x_1 = 0,\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Bu ildizlar aniqlanish sohasiga tegishli bo'lganligi uchun j: 0 va 2.

2-BOB ALGEBRAIK TENGLAMALAR

2.1. Algebraik tenglama tushunchasi.

Tarif. Chap tomoni R sonlar maydonidagi n-darajali ko'pxaddan Iborat ushbu:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (2.1)$$

Ifoda R sonlar maydonidagi bir nomalumli n-darajili **algebraik tenglama deyiladi.**

Agar (2.1)tenglamaning chap tomonidagi ko'phadni qisqacha f(x) shakilda belgilasak , bu tenglamani

$$f(x)=0$$

ko'rinishida xam yozish mumkin. (2.1)Algebraik tenglamani nol ko'had bilan aralashtirish yaramaydi.

Nol ko'phadda xamma koeffisentlar xar vaqt nolga teng ,(2.1) algebrik tenglamada esa $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ koeffisentlarning xammasi birdaniga teng bo'lolmaydi.Bunda xam $a_0, a_1, \dots, a_n$ - algebrik tenglamaning koeffisientlari , a_0 –bosh koeffisieit, a_n esa ozot xat deyiladi; $a_0x^n, a_1x^{n-1}, \dots, a_{n-1}x, a_n$ - tenglamaning xadlari va a_0x^n esa ($a_0 \neq 0$ *xolda*) bosh xad deb ataladi.

Ta'rif. f(x)=0 algebraik tenglamaning chap tomondagi f(x) ko'pxadni nolga aylantiruvchi x=α qiymat bu tenglamaning ildizi deyiladi.

Ta'rifdan ma'lumki f(x)=0 tenglamaning ildizlari - xuddi chap tomondagi f(x) ko'pxad ildizlaridan iborat . SHu sababli, n-darajali f(x)=0 algebraik tenglama xuddi n ta ildizga ega. Bunda xam f(x) ko'pxadning oddiy va karrali ildizlari f(x)=0 tenglamaning oddiy va karrali ildizlarini ifodalaydi.

Agebraik tenglama eng kamida birinchi darajali bo'lishi mumkun chunki nolinchi darajali f(x)=α$\neq$ 0 ko'pxadni nolga tenglashtirib bo'maydi. f(x)=0 algebraik tenglamaning x=α ildizi chap tomonni yoki 0=0 tenglik (ayniyat) kelib chiqadi. Bu xolda biz x=α son f(x)=0 tenglamani qanoatlantiradi deymiz. Agar x=β qiymat f(x)=0 tenglamaning (yoki, boshqacha aytganda, f(x) ko'pxadning) ildizlaridan farqlibo'lsa,f (β)$\neq 0$. Bu xolda, x=β son f(x)=0 tenglamani qanoatlantirmaydi, deymiz.

Masalan, x^3 - 6x^2 +11x-6=0 tenglamaning ildizlari 1, 2 va 3 dir, chunki bu qiymatlarda:

1- 6+11-6=0,

8-24+22-6=0,

27-54+33-6=0

ayniyatlar xosil bo'ladi; misol uchun x=4 qiymat tenglamani qanoatlan-tirmaydi,chunki bu qiymatda 64-96+44-6=6$\neq 0$ kelib chiqadi.

f(x)=0 nol – ko'xad - tenglama emas, balki 0=0 ko'rinishdagi ayniyatdir. Biz bu bobda ba'zi algebraik tenglamalarning ildizlarini toppish masalasi bilan shug'lanamiz. Algebrik tenglamalarning ildilarini toppish bu tenglamani yechish deb ataladi.

Elementar algebra kursidanoq ma'lumki, tenlamaning bir tomonidan ikkinchi tomoniga istalgan xadlarni teskari ishora bilan o'kazish malumki; (2.1) tenglamada xamma xadlar tenglamaning chap tomoniga o'tkazilgan.

Agar (2.1) algebraik tenglamaning ildizlari α_1, α_2, . . . , α_n bo'sa, un α_0 (x-α_1) (x-α_2) . . . (x-α_n) = 0

Yoki $\alpha_0 \neq$ 0 ga qisqartirib (x-α_1) (x-α_2) . . . (x-α_n) = 0 shakilda yozish mumkinligi ravshan.

2.2. Ikki hadli tenglamalar.

Algebraik tenglamalarning eng soddasi xisoblangan ikki xadli tenglamalarning yechish usuli bilan tanishamiz.

Ushbu:

$$u^n - \alpha = 0 \qquad (2.2)$$

Ko'rinishdagi algekaik tenglama **ikki xadli tenglama** deb ataladi, bunda α –noldan farqli istalgan son. Ravshanki bu tenglamani α ning n-darajali istalgan $\sqrt[n]{\alpha}$ ildizi qanoatlantiradi , chunki

$$(\sqrt[n]{\alpha})^n - \alpha = \alpha - \alpha = 0$$

Ikki xadli tenglama n-darajali bo'gani uchun, n ta ildizga ega. Bundan ma'lumki, (2.2) tenlamaning xamma ildizlari xuddi α ning n ta n-darajali ildizlaridan iborat. Endi, α ning n- darajali ildizlari xar xil bo'gani uchun, bu tenlamaning xam ildizlari xar xil, ya'ni ikki xadli tenglama karrali ildizlarga ega emas.

α ni trigometrik α= r (cos$\cos\beta$) ma'lum bo'gan kuydagi fomula bilan topamiz:

$$u_k = \sqrt[n]{\alpha} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi) + i\sin(\varphi)} = \sqrt[n]{r}\ (.$$

(k=0, 1, 2,. . . ,n-1) (2.3)

(2)tenglama bilan bir qatorda:

$$x^n - 1 = 0 \qquad (2.4)$$

Tenglamani xam teshiramiz. (2.2)tenglamaning ildizlaridan istalga1nini, masalan, u_k ni olib ,

$$u = u_k x$$

deymiz va bu qiymatni (2.2) ga qo'yamiz:

$$u_k^n x^n - \alpha = 0.$$

Bundan, u_k^n = α ga qisqartirib, xuddi (2.4) tenglamani xosil qilamiz. (2.4) tenglamaning ildizlari quydagi formula bilan topiladi:

$$x_k = \sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}.$$

(k=0,1,2, . . . n-1).

Agar bu qiymatlarni (2.3) ga x o'niga qo'ysak, u ning qiymatlarini xosil qilamiz.

Xaqiqatan, (2.4) tenglamaning istalgan x_i ildizini olib, u=$u_k x_i$ ni (2.2) ga qo'ysak, ayniyat xosil qilamiz:

$u_k^n x_i^n - \alpha = \alpha * 1 - \alpha = \alpha - \alpha = 0$

Demak, (2.2)tenglamaning xamma ildizlarini toppish uchun –uning bitta ildizlariga (2.4) tenglamaning xamma ildizlariga ko'paytirib chiqish kerak. Boshqacha aytganda, α ning n-darajali ildizlarini xosil qilish uchun uning Bitta ildizini 1 ning n-darajali xamma ildizlariga ko'paytirib chiqish lozim.

Masalan, i ning uchinchi darajali ildizllaridan bittasi –i ga teng; i ning xamma uchunchi darajali ildizlarini toppish uchun,

x^3 -1=0

Tenglamani olamiz (2.4) formulaga muvofiq:

x_0 =cos+i sin 0=1,

x_1=cos +isin =- +i$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Demak, u^3 - i=0 tenglamaning xamma ildizlari quydagilardan iborat:

u_0=-ix_0=-i,u_1=-i$x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$

$u_2 = -ix_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$

(4) ikki xadli tenglamaning ildizlari bir necha xossaga ega:

1°. (2.2) tenglamaning istagan ikki ildizini bir-biriga ko'paytirsak, yana shu tenglamaning ildizi xosil bo'ladi.

CHindan xam, x_k va x_1 ni (2.2) tenglamaning ildizlari desak,x_k^n =1 va x_l^n=1 ga asosan, $(x_k x_l)^n = x_k^n * x_l^n$=1 bo'ldi.

2°.(2.4) tenglamaning istalgan ikki ildizini bir-biriga bo'lsak, yana shu tenglamaning ildizi xosil bo'ladi. Xaqiqatdan:

$$((x_k/x_l)^n = (x_k^n)/(x_l^n) =$$

3°. (2.4) tenglamaning istalgan ildizini xar qanday butun (musbat, nol va manfiy) darajaga ko'tarsak, yana tenglamaning ildizi xosil bo'ladi. CHindan xam, s ni xar qanday butun son deb xisoblab, ushbuni topamiz:

$$\left((x_k^s)\right)^n = \left((x)_k^n\right)^s = 1^s = 1.$$

4°. Darajalarning ushbu:

$x_k^0, x_k, x_k^2, x_k^3, \ . \ .$

Cheksiz ketma-ketligi (2.4) tenglamaning ildizlaridan iborat (3° - xossaga binoan). Lekin, (2.4) tenglama faqat n ta ildizga ega bo'lgani uchun, bu qatorda albatta bir-biriga teng darajalar bor. Masalan,

$$x_k^\alpha = x_k^\beta \quad (\alpha > \beta \geq 0)$$

Bo'sin bundan:

$$x_k^{\alpha-\beta} = 1 \qquad (\alpha\text{-}\beta)$$

Demak, shunday γ musbat solar mavjudki, ular uchun x_k^γ=1 tenglik o'rinli. Bu shartni qanoatlanlantiruvchi butun musbat sonlar cheksiz ko'p, chunki ð istalgan butun musbat sonni ifodalaydi, $x_k^{\delta\gamma} = 1$ tenglik xam bajariladi. Lekin,bunday butun musbat sonlar orasida albatta eng kichigi bor.

Ta'rif. Agar x_k^γ= 1 shartni qanoatlantiruvchi γ butun musbat sonlarning eng kichigi m bo'sa, x_k ildiz m ko'rsatkichga qarashli deyiladi.

SHunday qilib, x_k ildizni m ko'rsatkichga qarashli desak, ta'rifga asosan, x_k^m =1 tenglik bajarilib, lekin m dan kichik xar bir r musbat son uchun $x_k^r \neq 1.$

5°. Agar x_k ildiz m ko'rsatkichga qarashli bo'sa,

$$x_k^0, x_k, x_k^2, x_k^3, \quad . \ . \ x_k^{m-1} \qquad (2.7)$$

Qator xar xil darajalardan iborat bo'ladi.

Chindan xam $x_k^{\alpha} = x_k^{\beta}$ (m> α> β≥ 0) desak $x_k^{\alpha-\beta} = 1$ kelib chiqadi, ammo 0< α-β< m bo'lgani uchun, bunday tenglik bajarilishi mumkin emas.

6°. m ko'rsatkichga qarashli x_k ildizning istalgan butun (musbat, nol va manfiy) x_k^{γ} darajasi (7) darajalarning bittasiga teng.

Xaqiqatan, γ ni m ga bo'lib, ushbuni xosil qilamiz.

$$\gamma = mq + r. \ (0 \le r < m) \qquad (2.8)$$

Demak.

$$x_k^{\gamma} = x_k^{mq+r} = \left([\![x_k^m]\!] \right)^q * x_k^r = 1 * x_k^r = x_k^r \ ,$$

Bunda x_k^{γ} xuddi(2.7)darajalariningbittasidir.

Agar xususiy xolda x_k^{γ} =1 bo'sa γ albatta m ga bo'linadi. Xaqiqatan, x_k^{γ} =1 ga asosan $x_k^{\gamma} = x_k^r$ tenglikdan x_k^r=1 kelib chiqadi; ammo so'gi tenglik o< r< m shartda bajarilmaydi,

Shu sababli r = 0 bo'lishi kerak. Demak, (2.8) tenglikdan γ=mq ni xosil qilamiz.

(4) tenglamaning x_k ildizi m ko'rsatkichga qarashli deganimizda, m ning n dan katta bo'masligi ravshandir, chunki x_k^n=1, shu sababli m> n bo'sa x_k^{γ} =1 tenglikni
qanoatlantiruvchi butun musbat sonlarning eng kichigi m bo'lmas edi . Demak: xar vaqt m≤ n

Ta'rif.(2.2) tenglamaning n ko'rsatkichga, yani boshlang'ich n-darajali ildizi deb xam aytiladi. (2.2) tenglamaning x_1 ildizi – boshlang'ich ildiz. Xaqiqatan, (2.6) formulaga asosan,

$$x_1 = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)$$

Buni k-darajaga ko’tarsak,

$$x_1^k = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^n = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n} = x_k$$

Xosil bo’ladi. Ma’lumki, faqat k= o yoki eng kamida k=n kiymatda x_1^k = 1, yani x_1^k=1 bajariladi. Demak, bu so’ngi tenglikni qanoatlantiruvchi butun musbat sonlarning eng kichigi n ekan. SHu sababli, x_1 - boshlang’ ildiz.

(2.4) tenglamaning x_1^k dan boshqa boshqa yana boshlang’ich ildizjari bo’lishi mumkun.

Teorema. (2.4) tenglamaning:

$$x_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$$

Ildizi boshlang’ich bo’lishi uchun k va n sonlarning o’zaro tub bo’lishi zarur va yetarlidir.

Isbot. Faraz qilaylik $x_k$ildiz m ko’rsatkichga qarashli bo’lsin,ya’ni

$$x_1^m = 1$$

yoki , $x_k = x_1^m$ ga muofiq:

$$x_1^{mk} = 1$$

6

Endi ,x_1 ildiz n ko’rsatkichga qarashli bo’lgani uchun , xossaga muofiq, km albatta n ga bo’linadi:

$$mk=nq.$$

k va n ning eng katta umumiy bo'luvchisini d bilan belgilasak , k=k_1 va n=$n_1 d$ tengliklarga ega bo'lamiz ,bunda k_1 va n_1 - o'zaro tub sonlar.Bu qiymatlarni (10) ga qo'yib va d_1 ga qisqartirsak:

So'nggi tenglik $k_1 m$ $ning$ n_1 ga m $bo'li$nishi ko'rsatilgan, lekin k_1 ba n_1 o'zaro tub bo'lgani uchun , n_1 ga m bo'linadi.

Shunday qilib, m - bir tomondan, x_k^m = 1 tenlikni qanoatlantiruvchi va, ikkinchi tomondan, n_1 ga bo'linuvchi eng kichik son bo'lish kerak.Bu shatlarga bo'ysinadigan son , n_1 ning o'zidir , chunki u, o'z-o'ziga bo'linadi ba , $n_1 = m$ tenglikdan $x_k^{n_1} = x_k^m$ =1 tenglik chiqadi. Demak, m=n_1 ga asosan, n=$n_1 d$ tenglikdan:

$$n=md \qquad (2.11)$$

1. (Zarurligi.) Agar x_k boshlang'ich ildizni bildirsa, m=n bo'ladi. Bu xolda (11) tenglikdan d=1 kelib chiqdi ba, demak, k ba n o'zoro tub sonlarni ifodalaydi.

2. (Yetarliligi.) k va n o'zoro tub, yani d= 1 bo'sa, (2.11) tenglikdan m=n ni xosil qilamiz. Demak, x_k boshlang'ich ildiz bo'ladi.

K ning qiymatlari n dan kichik ekanini e'tiborga olib, quydagi xulosaga kelamiz:

n dan kichik va n bilan o'zoro tub nechta butun musbat son mavjud bo'lsa, (4) tenglamaning shuncha boshlag'ich ildizi bor. Bu boshlag'ich ildizlarning soni, odatda, φ (n) bilan belgilanadi. Sonlar nazaryasida φ (n) ifoda eyler funksiyasi deyiladi ba, n ning kanonik yoyilmasi n= $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ . \ . \ . \ p_s^{\alpha_s}$ bo'lsa,

$1 \ p_{\downarrow}1 \ )(1- \ 1/p_{\downarrow}2 \ ) \ . \ . \ . \ (1- \ 1/p_{\downarrow}s$

φ (n) =n(1-) (2.12)

formula isbot qilinadi.

Misol:

$x^{12}-1=0$ tenglamani boshlang'ich ildizlarini topaylik. Avval boshlang'ich ildizlarining sonini aniqlaymiz: 12= bo'lgani uchun, (12) ga asosan, φ (12) =12(1-

$1 \ 2)](1- \ 1/3) \quad 12\times \ 1/2\times =2/3= \ 4; \ 12$ *dan kichik*

va 12 bilan o'zaro tub sonlar 1,5,7,11 dir. Shu sababli , boshlang'ich ildizlar quydagilardan iborat:

$$x_1 = \cos\frac{2\pi}{12} + i\sin\frac{2\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2};$$

$$x_5 = \cos\frac{10\pi}{12} + i\sin\frac{10\pi}{12} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2};$$

$$x_7 = \cos\frac{14\pi}{12} + i\sin\frac{14\pi}{12} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2};$$

$$x_{11} = \cos\frac{22\pi}{12} + i\sin\frac{22\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$$

2.3.Uchinchi darajali tenglamalar radikallarda yechish.

Umumiy, kompleks sonlar maydonidagi uchunchi darajali tenglamaning ikkala tomonini bosh koeffisientga bo'lib uni:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \qquad (2.1)$$

ko'rinishga keltirish mumkin.

Bu tenglama quydagi metod bilan yechiladi.

xad ishtirok etmagan uchunchi darajali tenglamaga quydagicha

keltirish mumkin:

α ni (2.1) tenglamada $x=y+\alpha$ almashtirishni bajargandan keyin yuqoridagi shatni qanoatlantiruvchi uchinchi darajali tenglama xosil bo'ladigan qilib tanlaymiz .

(2.1) da x o'rniga $y+\alpha$ ni qo'yib y^2 ning koefficentini nolga tenglashdan $3\alpha+a=0$ tenglama kelib chiqadi. Bu tenglamadan $\alpha=-\frac{a}{3}$ topiladi.

Aytilganlarga asosan (2.1) tenglamada

$$x=y-\frac{a}{3} \qquad (2.2)$$

almashtirishni bajarsak,

$$y^3+py+q=0 \qquad (2.3)$$

xosil bo'ladi, bunda:

$$p=b-\frac{a^2}{3}, \qquad q=\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c \; . \qquad (2.4)$$

(2.1) - uchinchi darajali tenglamaning normal shakli deb ataladi.

(2.1) normal tenglamani yechish uchun

$$y=u+v \qquad (2.5)$$

deymiz, bunda u va v - ya'ni noma'lumlar. Bu ifodani (2.6) tenglamaga qo'ysak, quydagi kelib chiqadi:

$$(u+v)^3+p(u+v)+q=0,$$

bunda:

$$(u^3+v^3+q)+(3uv+p)(u+v)=0. \qquad (2.7)$$

Endi, u va v nomalumlarni shunday aniqlaylikki,

$$3uv+p=0 \;\; \text{yoki} \;\; uv=-\frac{p}{3} \qquad (2.8)$$

Bajarilsin. Bu vaqtda (2.7) va (2.8) dan;

$$u^3+v^3 = -q, u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}.$$

xosil bo'ladi . ko'ramizki, u^3 va v^3 ushbu :

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0$$

Kvadrat tenglamaning ildizlaridan iborat.Bu tenglamani yechib , quyidagini topamiz:

$$z_{1,2} = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Yoki

$$u^3 = z_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$ va

$$v^3 = z_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$,

Bundan,(2.8) ga ko'ra:

$$Y=u+v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \qquad (2.9)$$

(2.9) tenglik, odatda, kardona formulasi deb ataladi. Bu tenglik - ikkita ildizning yig'indisidan iborat bo'lib, xar bir ildiz uchta qiymatga ega; u ning xar bir qiymatini v ning xar bir qiymati bilan olsak, y= u+v uchun xammasi bo'lib to'qqista qiymatini xosil qilamiz. Ammo (2.4) tenlama faqat uchta ildizga ega; shu sababli, yuqoridagi tuqqista qiymatdan uchtasini, ya'ni y = u+ v yig'indining (2.8) shartni qanoatlantiruvchi qiymatlarini olishimiz kerak. SHu maqsadda avval:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Ildizning uchta qiymatini topamiz. Buning uchun, ma'lumki u ning bitta, masalan, u_1 ildizini 1 ning uchunchi darajali

$$\sqrt[3]{1} = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$

$$\sqrt[3]{1} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \qquad = \varepsilon,$$

$$\sqrt[3]{1} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = - \qquad = \varepsilon,$$

Ildizlariga ko'paytirishimiz lozim. Natijada u ning uchinchi darajali ildizlari $u_1, u_2, = \varepsilon u_1, u_3 = \varepsilon^2 u_1$ bo'ladi.

Endi v ning tegishli qiymatlarini (2.8) shartdan topamiz:

$$v_1 = -\frac{p}{3u_1}; v_1 = -\frac{p}{3u_2} = -\frac{p}{3\varepsilon u_1} = \varepsilon^2\left(-\frac{p}{3u_1}\right) = \varepsilon^2 v_1;$$

$$v_3 = -\frac{p}{3u_3} = -\frac{p}{3\varepsilon^2 u_1} = \varepsilon\left(-\frac{p}{3u_1}\right) = \varepsilon v_1,$$

Bunda $\varepsilon^3 = 1$ dan foydalandik. SHunday qilib, u n

ing xar bir qiymatini v ning mos qiymatiga qo'shsak, u uchun

quydagi ucht a qiymat kelib chiqadi:

$$y_1 = u_1 + v_1, y_2 = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2, y_3 = \varepsilon^2 u_1 + \varepsilon v_1.$$

Agar bu tengliklarga ε va ε^2 ning qiymatlarini qo'ysak, (2.4) normal tenglamaning ildizlari quydagilarga teng bo'ladi:

$y_1 = u_1 + v_1,$

$$y_2 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1),$$

$$y_2 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1), \qquad (2.10)$$

Endi, (14) tenglikdan foydalanib, (13) tenglamaning ildizlarini topamiz:

$$x_1 = u_1 + v_1 - \frac{a}{3}$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1) - \frac{a}{3},$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1) - \frac{a}{3} \qquad (2.11)$$

Misol:

$x^3+3x^2+15x+13=0$ tenglamani yechaylik. Bunda α = 3, b = 15 c= 13

bo'gan uchun, (16) tengliklarga asosan, 15- =12 va

q= $\frac{2*3^3}{27} - \frac{3*15}{3}$ +13=0. Endi

$$u = \sqrt[3]{0+\sqrt{0+\frac{12^3}{27}}} = \sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8}.$$

Agar u_1=2 desak, $v_1 = -\frac{12}{3*2} = -$ 2 xosil bo'ladi.

Demak, (2.21) ga binoan, berikgan tenglamaning ildizlari quydagilardan iborat:

x_1=2-2-1=-1;

$x_2 = i\frac{\sqrt{3}}{2}(2+2) - 1 = 2\sqrt{3}i - 1;$

$$x_3 = -i\frac{\sqrt{3}}{2}(2+2) - 1 = -2\sqrt{3}i - 1.$$

2.4. To'rinchi darajali tenglamalar radikallarda yechish.

Kompileks sonlar maydonidagi to'rtinchi darajali tenglamaning ikkala tomoni bosh koeffisentga bolib, uni

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

shakilga keltira olamiz.

p< 0 bolgani uchun – 0 va $\sqrt{-\frac{p}{3}} > 0.$

To'rinchi darajali tenglamani yechishning ko'pgina usullari bor.

Biz ularning bazilarini korib o'tamiz. 1^0. Ferrari usuli. (2.1) tengkamaning keying uchta xadini o'ng tomonga otkazib , ikkalatomonga $\frac{a^2x^2}{4}$ ni qo'shmiz. Natijada:

$$(a\uparrow 2 + ax/2\,)\uparrow 2 = (a\uparrow 2/4 - b)x\uparrow 2 \text{ -cx-d}$$

xosilboladi. Endi, songitenglamaningikkalatomoniga ($x^2 + \frac{ax}{2}$)y+$\frac{y^2}{4}$ yigindini qoshib (bunda y – yangi nomalum), ushbugaegabolamiz:

$$(x\uparrow 2 + ax/2 + y/2\,)\uparrow 2 = (\frac{a^2}{4} - b+y)x^2 + (\frac{ax}{2} - c)x + (\frac{y^2}{4} - d)$$

Yangi nomalum nitenglamaning o'ng tomoni to'liq kvadiratdan iborat bo'lib qoladigan qilibtanlaymiz.Buning uchun:

$$\frac{a^2}{4} - b + y = A^2, \frac{ay}{2} - c = 2AB, \frac{y^2}{4} - d = B^2$$

Deb olishimiz kerak.Ushbu:

$$4A^2B^2 = (2AB)^2$$

Ayniyatg aasosan, quydagi natijaga kelamiz:

$$4(\frac{a^2}{4} - b + y)(\frac{y^2}{4} - d) = (ay/2 - c)\uparrow 2 \,.$$

Qavislarni ochib, y ning darajalariga nisbatan o'xshash xadlarni yig'sak,

$$y^3 - by^2 + (ac - 4d)y - (d(a^2 - 4d) + c^2) = 0$$

Shakildagi uchinchi darajali tenlamaga kelamiz. Ko'ramizki, y nomalumning qiymatlari – shu tenglamaning ildizlaridan iborat. Bu tenglamaning xalqiluvchi tenglama yoki tenglamaning rezalvetasi deyiladi. Agar tenglamaning bironta ildizini y_0 bilan belgilasak, bu kiymatda tenglik bajarilib, tenliklarga asosan, tenglama quydagi:

$$(x\uparrow 2 + ax/2 + y_{\downarrow}0/2\,)\uparrow 2 = (Ax + B)\uparrow 2$$

Yoki:

$$x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y_0}{2} = \pm(Ax + B)$$

Ko’rinishini oladi va demak, berilgan to’rtinchi darajali tenglama ikkita:

$$x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y_0}{2} = Ax + B,$$

$$x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y_0}{2} = -Ax - B,$$

Kvadrat tenglamaning kupaytmasiga yoyilgan. Bu tenglamani yechib, berilgan to’rtinchi darajali tenglamaning to’rtta ildizini topamiz.

Misol:

$x^4 + 3x^2 - 5x = 0$ tenglamani yechaylik bunda a=3, b=0,c=-5d=-3. Avval tenglamani tuzamiz; a,b,c,d ning qiymatlariga qo’yib, ushbuni topamiz: $y^3 - 3y + 2 = 0.$

Bu tenglamani yechamiz:

$$U=\sqrt[3]{-1+\sqrt{1-1}} = \sqrt[3]{-1}.$$

Bundan $u_1 = -1; u_1 = -\frac{-3}{3(-1)} = -1;$ demak, $y_0 = -1 - 1 = -2.$

Tengliklardan A va B ni aniqlaymiz: $A^2 = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4}$

A=$\pm\frac{1}{2}$; masalan, A= ni olsak,2AB=$\frac{3(-2)}{2}$+5=2 dan B= 2 ni xosil qilamiz. Shunday kilib:

$$x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = \frac{1}{2}x + 2,$$

$$x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = -\frac{1}{2}x - 2.$$

Bu tenglamani yechib, berilgan tenglamani topamiz:

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}, \quad x_3 = x_4 = -1 .$$

3-BOB. ALGEBRAIK BO’LMAGAN TENGLAMALAR. (TRANSTSENDENT TENGLAMALAR).

3.1. Ko’rsatkichli tenglamalar.

Agar *f (x)* ifoda tarkibida transsendent (trigonometrik, logarifmik va boshqa) funksiyalar qatnashgan bo‘lsa, u holda $f(x) = 0$ tenglamani *transsendent tenglama* deyiladi.

$3^{x} + 3^{-x} = 2$; $2^{x} = 8x$; $\lg x = \frac{1}{3}x$; $\sin x = \frac{1}{2}$ ko‘rinishdagi tenglamalar transsendent tenglamalarga misol bo‘la oladi. Umumiy holda transsendent tenglamalarni yechish usulini oldindan ko‘rsatish mumkin emas. Lekin, ba’zi xususiy hollarda transsendent tenglamalarni yechish mumkin.

Birdan farqli musbat haqiqiy a son uchun $y = a^{x}$ ko‘rinishdagi funksiya *ko‘rsatkichli funksiya* deyiladi.

Agar $a > 1$ bo‘lsa, u holda $y = a^{x}$ $(0,1)$ nuqtadan o‘tuvchi monoton o‘suvchi funksiya bo‘ladi.

Ma’lumki, tenglama tarkibida noma’lum o‘zgaruvchi faqat daraja ko‘rsatkichidagina qatnashsa, bunday tenglama *ko‘rsatkichli tenglama* deyiladi.

Bir hil noma’lum qatnashgan bir nechta tenglamalar berilgan bo‘lib, noma’lumning berilgan tenglamalardan hech bo‘lmaganda bittasini qanoatlantiradigan barcha qiymatlari to‘plamini topish talab qilinsin. Hosil bo‘lgan to‘plamni *berilgan tenglamalar birlashmasining echimi* deyiladi.

$a^{f(x)} = a^{g(x)}$ ko‘rinishdagi tenglamalar

$a^{f(x)} = a^{g(x)}$, $a > 0$, $a \neq 1$ ko‘rinishdagi tenglamalarni yechishda ularning $f(x) = g(x)$ ko‘rinishdagi tenglamaga teng kuchli ekanligidan foydalaniladi.

1 - m i s o l. $2^{x^2-4} = 1$.

Y e c h i s h. $1 = 2^0$ bo‘lganligi uchun berilgan tenglamani $2^{x^2-4} = 2^0$ ko‘rinishda yozib olinadi. U holda $x^2 - 4 = 0$, bundan $x_{1,2} = \pm 2$.

2 - m i s o l. $3^{x^2-\frac{1}{2}x} = \sqrt[3]{9}$.

Y e c h i s h. Berilgan tenglamani $3^{x^2-\frac{1}{2}x} = 3^{\frac{2}{3}}$ ko‘rinishida yozib olinadi. U holda $x^2 - \frac{1}{2}x = \frac{2}{3}$ yoki $6x^2 - 3x - 4 = 0$ tenglama hosil bo‘ladi. Kvadrat tenglamani yechib , $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{105}}{12}$ topiladi.

3.2 LOGARIFMIK TENGLAMALAR

Noma’lum o‘zgaruvchi faqat logarifm belgisi ostida qatnashgan tenglamalarni biz *logarifmik tenglamalar* deb tushunamiz. Masalan,

$log_a x = b$ *yo*ki $log_x c = d$ ko‘rinishdagi tenglamalar logarifmik tenglamalardir. $log_e x = x^2$ kabi tenglamalar esa logarifmik tenglamalarga misol bo‘la olmaydi.

Quyida biz logarifmik tenglamalarning ba’zi bir turlari bilan tanishib chiqamiz. Logarifm ta’rifidan foydalanib yechiladigan logarifmik tenglamalar.

Ma’lumki, $a > 0, a \neq 1, \ b > 0, b \neq 0$ sonlar uchun $log_a b$ ifoda b sonini hosil qilish uchun a sonni ko‘tarish kerak bo‘lgan daraja ko‘rsatkichidir. Ya’ni, agar $a^c = b$ bo‘lganda $c = log_a b$ bo‘ladi. U holda $a^{\log_a b} = b$. Bu tenglikni *asosiy logarifmik ayniyat* deb ataymiz.

Ta’rifdan foydalanib yechiladigan misollar namunalari bilan tanishib chiqamiz.

1 - m i s o l. $\log_2(-x) = 3$ tenglamani yeching.

Y e c h i s h. Logarifm ta’rifiga ko‘ra $2^3 = -x$, bundan $x = -8$ kelib chiqadi.

2 - m i s o l. $\log_{\frac{1}{2}} x^2 = 4$ tenglamani yeching.

Y e c h i s h. Ta’rifga ko‘ra $2^{-4} = x^2$, bundan $x = \pm\frac{1}{4}$ yechimlarni hosil qilamiz.

Algebraik tenglamalarga keltiriladigan logarifmik tenglamalarni yechishda logarifmning asosiy xossalaridan foydalanishga to’g’ri keladi. Bu xossalarni eslatib o‘tamiz.

Algebraik tenglamalarga keltiriladigan logarifmik tenglamalarning ko‘p uchraydigan turlari bilan tanishib chiqamiz.

1. $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ (1)

ko‘rinishdagi tenglamalar berilgan bo‘lsin. Bu tenglamani yechish uchun x ning yo‘l qo‘yiladigan qiymatlari sohasini topib olishimiz lozim. Buning uchun

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \quad (2)$$

tengsizliklar sistemasining yechimlarini topish kerak bo‘ladi. Lekin (1) tenglamadagi logarifmlarning asoslari bir xil bo‘lganligi sababli, $f(x) = g(x)$ tenglamani hosil qilamiz. Shuning uchun, (2) tengsizliklar sistemasidagi bitta tengsizlikni yechimlarini topib, so‘ngra $f(x) = g(x)$ tenglamani yechish yetarli.

2. Agar $\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a j(x)$ (2) ko‘rinishdagi tenglama berilgan bo‘lsa, bu tenglamani $(f(x) > 0)$ Ù $(g(x) > 0)$ Ù $(j(x) > 0)$ shartni hisobga olgan holda, logarifmning xossalaridan foydalanib $\log_a f(x) \cdot g(x) = \log_a j(x)$ ko‘rinishga keltirib olamiz va (1) tenglama kabi yechimlari topiladi.

3. $\log_a f(x) - \log_a g(x) = \log_a j(x)$ (3) ko‘rinishdagi tenglama berilgan bo‘lsa, *(f(x) > 0) Ù (g(x) > 0) Ù (j (x) > 0)* shartni hamda logarifmning xossalaridan foydalanib $\log_a \dfrac{f(x)}{g(x)} = \log_a j(x)$ ko‘rinishga keltirib, (1) tenglama kabi yechamiz.

4. $p \cdot \log_a f(x) = \log_a g(x)$ (4) ko‘rinishdagi tenglama ham *f(x) > 0* va *g(x) > 0* shartlarni hisobga olgan holda $\log_a (f(x))^p = \log_a g(x)$ ko‘rinishga keltirib (1) tenglama kabi yechiladi.

Algebraik tenglamalarga keltiriladigan logarifmik tenglamalar namunalari bilan tanishib chiqamiz.

1 - m i s o l. $\dfrac{\log_2(\sqrt{x+1}+1)}{\log_2\sqrt{x-1}} = 2$ tenglamani yeching.

Y e c h i s h. Avval berilgan tenglamaning qiymatlar sohasini topamiz:

$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-1 > 0 \\ x-1 \neq 1 \end{cases}$ sistemadan $\begin{cases} x \geq -1 \\ x > 1 \\ x \neq 2 \end{cases}$ ni hosil qilamiz. Ya’ni, *x Î (1, 2) È (2, +¥)*.

Endi *x Î (1, 2) È (2, +¥)* tasdiq o‘rinli bo‘ladi deb hisoblab, tenglamani teng kuchli almashtirishlar orqali $\log_2(\sqrt{x+1}+1) = 2 \cdot \log_2 \sqrt{x-1}$ tenglamani hosil qilamiz. Logarifm xossalariga ko‘ra $\log_2(\sqrt{x+1}+1) = \log_2\left(\sqrt{x-1}\right)^2$ tenglamani, undan esa $\sqrt{x+1}+1 = \left(\sqrt{x-1}\right)^2$ tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamaning $x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$ yechimlaridan $x_1 = \dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$ gina x ning yo‘l qo‘yiladigan qiymatlari sohasiga kiradi: $\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}+1} = \sqrt{\dfrac{7+\sqrt{13}}{2}}$.

$x_1 = \dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$ ildizni berilgan tenglamani qanoatlantirishini tekshiraylik: $\log_2(\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}+1}+1) = 2 \cdot \log_2 \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}-1}$ dan logarifm xossalariga ko‘ra

$\sqrt{\frac{5+\sqrt{13}}{2}+1}+1=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ ni va undan $\sqrt{\frac{7+\sqrt{13}}{2}}=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$, $\frac{7+\sqrt{13}}{2}=\frac{\left(1+\sqrt{13}\right)^2}{4}$ larni va nihoyat $7+\sqrt{13}=\frac{1+2\sqrt{13}+13}{2}$ tenglikdan $7+\sqrt{13}=7+\sqrt{13}$ ayniyatni hosil qilamiz. Demak, $x=\frac{5+\sqrt{13}}{2}$ tenglamaning ildizi ekan.

3.4. Aralash sistemalar.

Logarifmik va ko‘rsatkichli tenglamalar sistemasini yechish uchun odatda berilgan sistema algebraik tenglamalar sistemasiga keltiriladi.

Bunday sistemalarning ba’zi turlarini ko‘rib chiqamiz.

I. Bitta tenglamasi algebraik, ikkinchisi ko‘rsatkichli yoki logarifmik tenglama bo‘lgan sistemalar.

1 – m i s o l. $\begin{cases} \log_y x+\log_x y=2, \\ x^2-y=20. \end{cases}$

Y e c h i s h. Berilgan sistemada $x > 0$, $y > 0$, $x \neq 1$, $y \neq 1$ deb faraz qilamiz. $\log_y x=\frac{1}{\log_x y}$ bo‘lishini hisobga olib, $\log_x y$ ni t orqali belgilab olamiz. U holda $\log_y x=\frac{1}{t}$ bo‘ladi. Belgilashlar natijasida $t+\frac{1}{t}=2$ tenglama hosil bo‘ladi. Undan $t^2-2t+1=0$ va $t_{1,2}=1$ larga ega bo‘lamiz.

Demak, $\log_x y=1$. U holda $x = u$ ekanligini hisobga olsak, sistemadagi ikkinchi tenglama $x^2 - x = 20$ *yoki* $x^2 - x - 20 = 0$ ko‘rinishga kelib,

$x_1 = -4$, $x_2 = 5$ yechimlarni hosil qilamiz. Natijada $x > 0$, $y > 0$ ni e’tiborga olib, sistemaning $\begin{cases} x=5, \\ y=5. \end{cases}$ yechimi hosil bo‘ladi.

II. Bitta tenglamasi logarifmik, ikkinchi tenglamasi ko'rsatkichli bo'lgan tenglamalar sistemasi.

<u>1 – m i s o l.</u> $\begin{cases} 3^{y}\cdot 9^{x}=81, \\ \lg(x+y)^{2}-\lg x=\lg . \end{cases}$

<u>Y e c h i s h.</u> $\begin{cases} 3^{y}\cdot 3^{2x}=81, \\ \lg\dfrac{(x+y)^{2}}{x}=\lg 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{y+2x}=3^{4}, \\ \dfrac{(x+y)^{2}}{x}=9, \\ x>0, \\ x+y\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+2x=4, \\ (x+y)^{2}=9x, \\ x>0, \\ x+y\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-2x, \\ (x+4-2x)^{2}=9x, \\ x>0, \\ x+y\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-2x, \\ 16-8x+x^{2}=9x, \\ x>0, \\ x+y\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=4-2x, \\ x^{2}-17x+16=0, \\ x>0, \\ x+y\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=4-2x, \\ x=1, \\ x>0, \\ x+y\neq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} y=4-2x, \\ x=16, \\ x>0, \\ x+y\neq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=3, \\ x=1; \end{cases} \\ \begin{cases} x=16, \\ y=28. \end{cases} \end{array}\right.$$

<u>2 – m i s o l.</u> $\begin{cases} 3^{x}\cdot 2^{y}=972, \\ \log_{3}(x-y)^{2}=2. \end{cases}$

<u>Y e c h i s h.</u> $\begin{cases} 3^{x}\cdot 2^{y}=972, \\ \log_{3}(x-y)^{2}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x}\cdot 2^{y}=972, \\ (x-y)^{2}=9 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}3^x\cdot 2^y=972,\\ x-y=3;\end{cases}\\ \begin{cases}3^x\cdot 2^y=972,\\ x-y=-3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}3^x\cdot 2^y=972,\\ y=x-3;\end{cases}\\ \begin{cases}3^x\cdot 2^y=972,\\ y=x+3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}3^x\cdot 2^{x-3}=972,\\ y=x-3;\end{cases}\\ \begin{cases}3^x\cdot 2^{x+3}=972,\\ y=x+3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}3^x\cdot 2^x=8\cdot 972,\\ y=x-3;\end{cases}\\ \begin{cases}3^x\cdot 2^x=\frac{1}{8}\cdot 972,\\ y=x+3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}6^x=8\cdot 972,\\ y=x-3;\end{cases}\\ \begin{cases}6^x=\frac{1}{8}\cdot 4\cdot 243,\\ y=x+3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\log_6 2^5\cdot 3^5,\\ y=x-3;\end{cases}\\ \begin{cases}x=\log_6 2^{-1}\cdot 3^5,\\ y=x+3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=5,\\ y=2;\end{cases}\\ \begin{cases}x=5\log_6 3-\log_6 2,\\ y=5\log_6 3-\log_6 2+3.\end{cases}\end{array}\right.$$

Hosil bo‘lgan yechimlarning ikkalasi ham *x-u ≠ 0* shartni qanoatlantiradi. Shuning uchun ham ular berilgan sistemaning yechimlari bo‘ladi.

3– m i s o l. $\begin{cases}(x+y)\cdot 3^{y-x}=\dfrac{5}{27},\\ 3\log_5(x+y)=x-y.\end{cases}$

Y e c h i s h: $\begin{cases}(x+y)\cdot 3^{y-x}=\dfrac{5}{27},\\ 3\log_5(x+y)=x-y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+y)=5\cdot 3^{x-y-3},\\ (x+y)=5^{\frac{x-y}{3}},\\ x+y>0\end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x+y)=5\cdot 3^{x-y-3},\\ 3^{x-y-3}=5^{\frac{x-y}{3}-1},\\ x+y>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+y)=5\cdot 3^{x-y-3},\\ (x-y-3)\lg 3=\dfrac{x-y-3}{3}\lg 5,\\ x+y>0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x+y)=5\cdot 3^{x-y-3},\\ (x-y-3)(\lg 3-\lg\sqrt[3]{5})=0,\\ x+y>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+y)=5\cdot 3^{x-y-3},\\ (x-y-3)=0,\\ x+y>0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)=5\cdot 3^{x-y-3}, \\ x=y+3, \\ x+y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y+3=5\cdot 3^{0}, \\ x=y+3, \\ x+y>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=1, \\ x=4, \\ x+y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4, \\ y=1. \end{cases}$$

4-BOB. TENGLAMALARNI TAQRIBIY YECHISH .

4.1. Gorner sxemasi

Bu yerda biz doim R ni ixtiyoriy maydon deb faraz qilamiz, ya`ni u, nolli va shuningdek chekli r xarakteristikali bo'lishi mumkin.

$P[x]$ dan olingan $n\geq 1$ darajaga ega bo'lgan harqanday ko'phad birgina usulda (R maydonda) keltirilmaydigan ko'phadlar ko'paytmasiga ajraydi:

$$f(x)=cp_1^{a_1}(x)P_2^{a_2}(x)...P_r^{a_r}(x).$$

Lekin bu yoyilma tarkibiga chiziqli $x-a$ ko'phad kirib qolishi ham mumkin. Savol tug'iladi, qachon shunday bo'ladi? Boshqa so'z bilan aytganda, $f(x)$ qachon $x-a$ ga qoldiqsiz bo'linadi?

$f(x)$ ko'phadni $x-a$ ga bo'lamiz. Umuman bo'lish natijasida qoldiq r va bo'linma $q(x)$ xosil bo'lishi kerak, bo'luvchi birinchi darajali bo'lgani uchun qoldiq nol darajali ko'phad yoki nol bo'ladi. Shunday qilib,

$$f(x)=(x-a)q(x)+r \qquad (1)$$

($r-$maydon R ning elementidir).

$x-a$ ga bo'lish amali ayniqsa quyidagidan iborat bo'lgan Gorner usuli yordami bilan juda oson bajariladi. Faraz qilaylik,

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n.$$

Ochiq ma`lumki, $f(x)$ ning $x-a$ ga bo'linmasi ($n-1$) nchi darajali ko'phaddan iborat bo'ladi:

$$q(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+b_2x^{n-3}+...b_{n-1}.$$

Mana shu $f(x)$ va $q(x)$ ning qiymatlarini (1) tenglikka qo'yish bilan quyidagi natijaga erishamiz:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_n=$$
$$=(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+...+b_{n-1})(x-a)+r.$$

So'nggi tenglikning o'ng tomonidagi hamma amallarni bajarish natijasida ushbu xosil bo'ladi:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n=b_0x^n+(b_1-ab_0)x^{n-1}+$$
$$+(b_2-a\,b_1)x^{n-2}+...+(b_{n-1}-a\,b_{n-2})x+(r-ab_{n-1}).$$

Ikkita ko'phadning teng bo'lishi uchun faqat birxil darajalarga ega bo'lgan x ning koeffisientlari teng bo'lishlari kerak, demak:

$$a_0=b_0,\ a_1=b_1-a\,b_0,\ a_2=b_2-a\,b_1...$$
$$...,a_k=b_k-a\,b_{k-1},...,a_{n-1}=b_{n-1}-a\,b_{n-2},$$

bulardan biz bo'linmaning koeffisientlarini va qoldiqni osongina aniqlayolamiz:

$$b_0=a_0,b_1=a_1+ab_0,b_2=a_2+ab_1,...$$
$$...b_k=a_k+ab_{k-1},...,b_{n-1}=a_{n-1}+ab_{n-2},$$
$$r=a_n+ab_{n-1}.$$

Yuqoridagi hamma hisoblash ishlarini quyidagicha Gorner sxemasi shaklida yozish mumkin:

	a_0	a_1	a_2	a_3	...	a_{n-1}	a_n
a	a_0	$a\,b_0+a_1$	$a\,b_1+a_2$	ab_2+a_3	...	$ab_{n-2}+a_{n-1}$	$ab_{n-1}+a_n$

Gorner sxemasining pastki yo'lida $q(x)$ ko'phadning izlanayotgan b_i koeffisientlari ketma-ket turipti.

Gorner usulini misollar bilan anglatamiz.

Misol 1. Ratsional sonlar maydoniga murojaat qilib shu maydon ustida tubandagi ikkita ko'phadni olaylik:

$$f(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^2 - x + 7, \quad g(x) = x - 2$$

$f(x)$ ni $g(x)$ ga bo'lamiz.

Amallarni Gorner sxemasi bo'yicha yozamiz:

	1	-2	0	3	-1	7
2	1	$2\cdot1-2=0$	$2\cdot0+0=0$	$2\cdot0+3=3$	$2\cdot3-1=5$	$2\cdot5+7=17$

Binobarin, bo'linma

$$q(x) = x^4 + 3x + 5,$$

qoldiq esa 17 ga teng.

Misol 2. Endi ratsional sonlar maydoni ustida boshqa ko'phadlar olamiz:

$$f(x) = x^7 - 2x^6 + x^5 - 3x^4 + 4x^3 - x^2 + 6x - 1, \quad g(x) = x + \frac{3}{2}$$

va $f(x)$ ni g(x) ga bo'lamiz.

Yana Gorner sxemasidan foydalanamiz, shu bilan birga amallarni chetda ishlab sxemaga faqat so'nggi natijalarni yozamiz:

	1	2	1	-3	4	-1	6	-1
$-\frac{3}{2}$	1	$-\frac{7}{2}$	$\frac{25}{4}$	$-\frac{99}{8}$	$\frac{361}{16}$	$-\frac{1115}{32}$	$\frac{3729}{64}$	$-\frac{11315}{128}$

Shunday qilib, tubandagi bo'linma va qoldiq kelib chiqdi:

$$q(x) = x^6 - \frac{7}{2}x^5 + \frac{25}{4}x^4 - \frac{99}{8}x^3 + \frac{361}{16}x^2 - \frac{1115}{32}x + $$
$$+ \frac{3729}{64}, \quad r = -\frac{11315}{128}.$$

Endi (1) tenglikka qaytamiz. Biz yuqoridan bilamizki, agar ko’phadlar teng bo’lsalar, ularning qiymatlari ham noma`lumning harqanday qiymatida teng bo’lishlari shart.

Demak, biz (1) tenglikni buzmasdan undagi x ni a bilan olmoshtiraolamiz. Natijada ushbuga erishamiz

$$f(a)=r$$

Biz Bezu teoremasi degan nomni olgan ushbu jumlaga ega bo’ldik.

Ko’phad $f(x)$ ni $x-a$ ga bo’lishdan hosil bo’lgan qoldiq, $\boldsymbol{f(x)}$ ning $x=a$ dagi qiymatiga teng.

Masalan, $f(x)=x^3-x^2+1$ ni x-1 ga bo’lishda Bezu teoremasi bo’yicha $f(1)=1-1+1=1$ ga teng bo’lgan qoldiq kelib chiqishi kerak. Xaqiqatan ham, bo’lish amalini bajarish natijasida 1 qoldiqqa ega bo’lamiz.

Faraz qilaylik, endi *f(x)* ko’phad $x-a$ ga qoldiqsiz bo’linsin, u holda $r=f(a)=0$ bo’ladi. Aksincha, agar $f(a)=0$ bo’lsa, Bezu teoremasi bo’yicha qoldiq nolga teng bo’lishi kerak: $r=f(a)=0$, shuning uchun $x-a$ ga f(x) butunlay bo’linadi.

Biz algebraik tenglama va ildiz tushunchalariga yaqin keldik.

$P[x]$ dan olingan $f(x)$ ko’phadning *ildizi* deb *R* maydonning shunday a elementiga aytamizki, $f(x)$ ko’phadning unga tegishli $f(a)$ qiymati nolga teng bo’lsin.

Binobarin, *a son* f(x) *ko’phadning ildizi bo’lgan holda va faqat shy holdagina x- a ga* $f(x)$ *qoldiqsiz bo’linadi.* Ba`zan f(x) ko’phad $x-a$ gagina emas, balki $(x-a)^2$ ga ham umuman $(x-a)^k$ ga ham bo’linishi mumkin, bundagi *k* - biror natural son. Agar $f(x)$ ga $x-a$ *k* marta kirsa, *a* ildizni biz f(x) ko’phadning *k-karrali ildizi* deb ataymiz, masalan, ratsional sonlar maydoni ustida berilgan ushbu

$$f(x)=(x-1)(x+1)^2(x-3)^3$$

ko'phadning $a_1=1$ birkarrali ildizidir, $a_2=-1$esa ikkikarrali ildizi va $a_3=3$ uchkarrali ildizidir.

R maydon ustidagi bitta *x* noma`lumdan tuzilgan n-nchn darajali ***algebraik tenglama*** deb biz chap tomoni $P[x]$dan olingan n-nchi darajali f(x) ko'phaddan iborat bo'lgan ushbu

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_n=0 \qquad (a_0\neq 0) \qquad (2)$$

tenglamani aytamiz.

(2) tenglama yozuvidagi tenglik ishorasini ko'phadlarning tengligi bilan aralashtirib yuborilmasin: (2) tenglamada x deb boshqa bir narsani tushunish kerak, ya`ni uni f(x) ko'phadning harqanday ildizi deb tushunish kerak. Shu bilan birga f(x) ko'phadning ildizlarini biz (2) tenglamaning ham ildizlari deb ataymiz.

Ko'phad (tenglama) *R* maydonda nechta ildizga ega bo'lishi mumkin? Agar karrali ildizlarning takrorlanishi nechta bo'lsa ildizlarning sonini ham shuncha hisoblasak, u holda javob quyidagi teoremadan iborat bo'ladi.

Teorema. Agar $P[x]$ dan olingan *f(x)* ko'phadning darajasi *n* bo'lsa, u holda $f(x)$ ko'phadning *R* maydondagi ildizlarining soni *n* tadan ortiq bo'lmaydi.

Chunonchi, $f(x)=x^2-2$ ko'phad ratsional sonlar maydonida hechqanday ildizga ega emas, haqiqiy sonlar maydonida esa u, ikkita $\sqrt{2}$ va $-\sqrt{2}$ ildizga ega; birinchi holda ham, ikkinchida ham ildizlarning soni ko'phad darajasidan ortiq emas.

Ko'phadni *R* maydonda ko'paytiruchilarga ajratish bilan bog'liq bo'lgan yana bitta isbotini beramiz.

I s b o t . Avval $n \geq 1$ bo’lgan holni ko’rib chiqamiz. Aksincha faraz qilaylik: bu holda $f(x)$ ko’phad ildizlarining soni p dan ortiq bo’lsin. U vaqtda $f(x)$ ko’phad R maydonda quyidagi ko’paytiruchilarga ajraladi:

$$f(x) = (x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2}...(x - a_s)^{k_s} j\,(x) \qquad (3)$$

Biz bu joyda $a_1, a_2, ..., a_s$ orqali $f(x)$ ko’phadning ildizlarini belgiladik. Bizning faraziyamiz bo’yicha ildizlarning soni n dan ortiq bo’lgani u c h u n , $k_1 + k_2 + ...k_s > n$ bo’ladi. Agar shunday bo’lsa, (3) tenglikning o’ng tomoni n dan yuqori darajaga ega bo’lgan ko’phaddan iborat bo’lib qoladi. Biz bema`nilikka uchradik; n-nchi darajali $f(x)$ ko’phad shu bilan birga n dan yuqori darajaga ega bo’lgan ko’phadkdan iborat bo’ldi.

Agar $f(x)$ ko’phadning n darajasi nolga teng bo’lsa, $f(x)$ ning butunlay ildizi y o ’ q ekanligi aniq. Shunday qilib, teorema bu hol uchun ham to’g’ri.

4.2.Xaqiqiy ildizlarni chegaralari.

Endi biz $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ (1) ko‘rinishda berilgan $f(x)$ ko‘pxadning ko‘effitsientlari $Q-$ ratsional sonlar maydonining elementlaridan iborat bo‘lgan holni ko‘ramiz. Ushbu $f(x)$ ko‘pxadning ratsional ildizlarini topish masalasi bilan shug‘ullanamiz.

Ratsional ildizlarni izlashda ularning qaysi chegaralar orasida ekanligini bilish foydalidir. Quyida biz chegaralarni topishning bir nechta usullarini ko‘rib chiqamiz.

Birinchi usul.

Bizning maqsad ushbu

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a^n$$

ko‘pxadning ratsional ildizlarni topish bo’lgani uchun ildizning ta’rifiga ko’ra, uni nolga tenglab, quyidagi algebraik tenglamani hosil qilamiz:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a^n = 0 \qquad (1)$$

Bu tenglamaning a_0 bosh koeffitsiyentini musbat deb faraz qilishga haqlimiz, chunki aks holda tenglamaning ikki tomonini -1 ga ko'paytirgan bo'lar edik. Faraz qilaylik, a_0 dan boshlaganda, a_k birinchi manfiy koeffitsiyent bo'lsin. B esa manfiy koeffitsiyentlarning absolyut miqdorlaridan eng kattasi bo'lsin. U vaqtda x ni musbat deb faraz qilsak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{k-1}x^{n-k+1} + a_kx^{n-k} + a_{k+1}x^{n-k-1} + ... + a_n \geq$$
$$\geq a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{k-1}x^{n-k+1} - B(x^{n-k} + x^{n-k-1} + ... + 1).$$

Agar $x > 0$ bo'lganda musbat bo'lib qoladigan $a_1x^{n-1}, a_2x^{n-2}, ..., a_{k-1}x^{n-k+1}$ xadlarni tashlab yuborilsa, tengsizlik kuchayadi.

Shunday qilib,

$$f(x) \geq a_0x^n - B(x^{n-k} + x^{n-k+1} + ... + 1)$$

yoki geometrik progressiyani yig'sak:

$$f(x) \geq a_0x^n - B\frac{x^{n-k+1} - 1}{x-1}$$

bo'ladi. Agar $x > 1$ deb faraz etilsa,

$$f(x) > a_0x^n - B\frac{x^{n-k+1}}{x-1},$$

yoki

$$f(x) > \frac{x^{n-k+1}}{x-1}[a_0x^{k-1}(x-1) - B]$$

hosil bo'ladi. Kvadrat qavs ichidagi x^{k-1} ni $(x-1)^{k-1}$ ga almashtirsak, tengsizlik yanada kuchayadi:

$$f(x) > \frac{x^{n-k+1}}{x-1}[a_0(x-1)^k - B].$$

Agar

$$a_0(x-1)^k - B > 0$$

bo'lsa, $f(x)$ ko'pxadning musbat qiymatga ega bo'lishi aniq. Mana shu tengsizlikni x ga nisbatan yechsak, quyidagiga erishamiz:

$$x > \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}} + 1 \qquad (2)$$

Binobarin, (2) shartni qanoatlantiradigan x ning qiymatlari uchun $f(x)$ nolga aylana olmaydi, boshqacha aytganda

$$\sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}+1$$

sonni musbat ildizlarning yuqori chegarasi deb qabul qilish mumkin.

Musbat ildizlarning quyi chegarasini topish uchun, yuqoridagi kabi x ni $\frac{1}{y}$ bilan alishtirib, mana bu

$$g(y)=y^{n} f\left(\frac{1}{y}\right)=0$$

tenglamani tekshiramiz. Agar $g(y)$ ning musbat ildizlarining yuqori chegarasi a gat eng bo'lsa, $f(x)$ ning quyi chegarasi $\frac{1}{a}$ bo'ladi.

Manfiy ildizlarning yuqori chegarasini topish uchun $x=-\frac{1}{z}$ faraz qilib, ushbu

$$h(z)=(-z)^{n} f\left(\frac{1}{z}\right)=0$$

tenglamani tekshiramiz. Agar $h(z)$ ning musbat ildizlarining yuqori chegarasi b ga teng bo'lsa, $f(x)$ ning manfiy ildizlarining yuqori chegarasi $-\frac{1}{b}$ bo'ladi.

Nihoyat, manfiy ildizlarning quyi chegarasini topish uchun $x=-u$ deb faraz qilib, ushbu

$$k(u)=(-1)^{n} f(-u)=0$$

tenglamani tekshiramiz. Agar $k(u)$ ning musbat ildizlarining yuqori chegarasi c bo'lsa, $-c$ son $f(x)$ ning manfiy ildizlarining quyi chegarasi bo'ladi.

Misol. Birinchi usulni

$$f(x)=2x^5+100x^2-5x-40=0 \quad (3)$$

tenglamaga tadbiq etamiz, bu yerda $a_0=2,\ k=4,\ B=40,$ shulardan mana bu

$$\sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}+1=\sqrt[4]{\frac{40}{2}}+1<3{,}3$$

kelib chiqadi.

Shunday qilib, $3{,}3$ ni musbat ildizlarning yuqori chegarasi deb qabul qilish mumkin.

Endi $x = \dfrac{1}{y}$ faraz qilib, quyidagiga erishamiz:

$$g(y) = 40y^5 + 5y^4 - 100y^3 - 2 = 0$$

Mana shu tenglama uchun $a_0 = 40,\ k = 2,\ B = 100$ bo'ladi, bulardan

$$\sqrt[k]{\frac{B}{a_0}} + 1 = \sqrt{\frac{100}{40}} + 1 < 2{,}6$$

kelib chiqadi.

Demak, $\dfrac{1}{2{,}6} \approx 0{,}3$ ni (3) tenglamaning musbat ildizlarining quyi chegarasi deb qabul qilish mumkin.

Manfiy ildizlarning yuqori chegarasini topaylik, uning uchun $x = -\dfrac{1}{z}$ deb faraz qilsak, quyidagiga erishamiz:

$$h(z) = 40z^5 - 5z^4 - 100z^3 + 2 = 0;$$

bu yerda $a_0 = 40,\ B = 100,\ k = 1,$ shulardan

$$\sqrt[k]{\frac{B}{a_0}} + 1 = \frac{100}{40} + 1 = \frac{7}{2}$$

kelib chiqadi.

Demak, $-\dfrac{2}{7} \approx 0{,}2$ son (3) tenglamaning manfiy ildizlarining yuqori chegarasidir. Nihoyat, $x = -u$ faraz qilsak, ushbu hosil bo'ladi:

$$k(u) = 2u^5 - 100u^2 - 5u + 40 = 0.$$

bu joyda $a_0 = 2,\ k = 3,\ B = 100,$ shuning uchun ham

$$\sqrt[k]{\frac{B}{a_0}} + 1 = \sqrt[3]{\frac{100}{2}} + 1 \approx 4{,}7.$$

Shunday qilib, $-4{,}7$ ni (3) tenglama manfiy ildizlarining quyi chegarasi deb qabul qilish mumkin.

Binobarin, musbat ildizlarni $0{,}3$ va $3{,}3$ sonlari orasidan, manfiy ildizlarni $-4{,}7$ va $-0{,}2$ orasidan izlashga to'g'ri keladi.

Ikkinchi usul (Nyuton usuli). Bu quyidagi jumlaga asoslangan.

Agar $x=a$ $(a>0)$ *bo'lganda* n*-inchi darajali* $f(x)$ *ko'pxad va uning hamma* $f'(x),\ f''(x),\ ...,\ f^{(n)}(x)$ *hosilalari musbat bo'lsalar, u holda* a *ni* $f(x)=0$ *tenglamaning musbat ildizlarining yuqori chegarasi uchun qabul qilish mumkin.*

Haqiqatan ham, $x-a$ ning darajalariga nisbatan $f(x)$ ni yoyib olaylik:

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+...+ +\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) \qquad (4)$$

Buning o'ng tomoni, shubhasiz, $x\geq a$ bo'lganda musbat, chunki shartimiz bo'yicha $f(a),\ f'(a),\ ...,\ f^{(n)}(a)$ lar noldan katta; demak, $x\geq a$ bo'lganda ko'pxad nolga aylana olmaydi. Shu sababli a son $f(x)=0$ tenglamaning musbat ildizlarining yuqori chegarasi bo'ladi.

Yuqoridagi kabi, $x=\frac{1}{y},\ x=-\frac{1}{z},\ x=-u$ faraz etib, boshqa hamma chegaralarga ega bo'lamiz.

Ushbu tajribada uchraydigan ko'rsatmani nazarda tutish zarar qilmaydi. Birinchidan, $f(a),\ f'(a),\ ...,\ f^{(n)}(a)$ qiymatlarni Gorner metodi bilan hisoblash qulaydir. Gap shundaki, (16) Teylor formulasini quyidagicha yozish mumkin:

$$f(x)=f(a)+(x-a)j_1(x),$$

bundagi

$$j_1(x)=f'(a)+\frac{x-a}{2!}f''(a)+...+\frac{(x-a)^{n-1}}{n!}f^{(n)}(a);$$

bundan ochiq ko'rinadiki, $f(x)$ ni $(x-a)$ ga bo'lishdan hosil bo'lgan qoldiq $f(a)$, bo'linma esa $j_1(x)$ dan iborat. O'z navbatida

$$j_1(x)=f'(a)+(x-a)j_2(x)$$

bo'lib, undagi

$$j_2(x)=\frac{1}{2!}f''(a)+\frac{(x-a)}{3!}f'''(a)+...+\frac{(x-a)^{n21}}{n!}f^{(n)}(x).$$

Shunday qilib, $f'(a), j_1(x)$ ni $(x-a)$ ga bo’lishdan hosil bo’lgan qoldiq, $j_2(x)$ esa bo’linmadir. Yana quyidagiga erishamiz:

$$j_2(x) = \frac{1}{2!} f''(a) + (x-a) j_3(x)$$

Bundan ochiq ko’rinadiki, $j_2(x)$ ni $(x-a)$ ga bo’lishdan hosil bo’lgan qoldiq $\frac{1}{2} f''(a)$ dan iborat va hokazo.

Misol. Misol sifatida ushbu

$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 6x - 8$$

va uning hamma $f(x)$ hosilalarining $x = 2$ dagi qiymatini hisoblab chiqamiz. Gorner sxemasini tuzamiz:

	1	0	-5	6	-8
2	1	2	-1	4	0
2	1	4	7	$\underline{18}$	
2	1	6	$\underline{19}$		
2	1	$\underline{8}$			
2	1				

Bundan biz ko’ramizki,

$$f(2) = 0, \quad f'(2) = 18, \quad f''(2) = 2 \cdot 19 = 38$$
$$f'''(2) = 3! \cdot 8 = 48, \quad f^{IV}(2) = 4! \cdot 1 = 24.$$

Agarda Nyuton usulini tatbiq etish jarayonida Gorner sxemasining biror yo'lidagi hamma sonlar musbat bo'lsa, keyingi amallarni ishlab o'tirishning hojati yo'q, chunki sxemaning keyingi hamma yo'llari faqat musbat sonlardan iborat bo'lib qoladi.

Misol tariqasida yana (15) tenglamani olamiz. $x=\frac{1}{2}$ qiymat yaramaydi, chunki $f(\frac{1}{2})<0$. Shuning uchun biroz kattaroq qiymqtni, $x=1$ ni olamiz. Gorner sxemasidan foydalansak:

	2	0	0	100	-5	-40
1	2	2	2	102	97	57

Hisoblash ishini davom ettirishning hojati yo'q, chunki musbat sonlardan iborat bo'lgan yo'l hosil bo'ldi. Demak, $f(1),\ f'(1),\ f''(1),\ ...$ larning hammasi musbat, shuning uchun 1 ni musbat ildizlarning yuqori chegarasi deb qabul qilinsa bo'ladi.

Musbat ildizlarning chegaralari $\frac{1}{2}$ va 1 ga teng, manfiy ildizlarning chegaralari esa -4 va $-\frac{1}{2}$ ga teng. Ko'ramizki, oldingi usullarga qaraganda Nyuton usuli qulaydir.

Uchinchi usul.

Faraz qilaylik, darajani kamayib borish tartibida yozilgan $f(x)$ ko'pxadda avval musbat xadlari ($x>0$ bo'lganda), so'ngra manfiy xadlari yozilgan bo'lsin. Boshqacha qilib aytganda, $f(x)$ quyidagi ko'rinishda bo'lsin:

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_kx^{n-k}-a_{k+1}x^{n-k-1}-...-a_n \qquad (5)$$

bundagi $a_i\geq 0\ \ (i=0,1,2,\ ...,\ n)$. Quyidagi jumlani bayon etish mumkin.

Agar (5) ko'rinishdagi $f(x)$ ko'pxad $x=a\ (a>0)$ bo'lganda manfiy bo'lmasa, u holda $x>a$ bo'lganda ham u musbat bo'ladi.

Haqiqatdan ham, $f(x)$ ko'pxadni quyidagicha yozish mumkin:

$$f(x)=x^{n-k}\left[\ (a_0x^k+a_1x^{k-1}+\ldots+a_k)-(\frac{a_{k+1}}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n})\ \right]$$

Birinchi yumaloq qavs ichidagi ko’pxad $x>0$ ning o’sishi bilan o’sa boradi, ikkinchi yumaloq qavs ichidagi ko’pxad esa x o’sishi bilan kamayadi. Shunday qilib, x o’sishi bilan $f(x)$ o’sadi. Demak, agar $f(x)\geq 0$ bo’lsa, $x>a$ bo’lganda $f(x)$ albatta, musbat bo’ladi.

Har qanday $f(x)$ ko’pxadni (xadlarning o’rnini almashtirmasdan) mana bunday yig’indi shaklida yozish mumkin:

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_k(x),$$

bundagi $f_i(x)$ - (4) tarkibidagi ko’pxadlardir. Agar $x=a$ da $f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_k(x)$ lar manfiy bo’lmasalar, u holda, shubhasiz, a ni musbat ildizlarning yuqori chegarasi deb qabul qilish mumkin. Qolgan chegaralar

$$x=\frac{1}{y},\ x=-\frac{1}{z},\ x=-u$$

almashtirishlar yordami bilan topiladi.

4.3.Xaqiqiy ildizlarni ajiratish.

I. Ko’pxad va uning hosilasi uzliksizdir.

Matematik tahlil fanidan ma’lumki, agar oldindan berilgan harqanday (haqiqiy) $e>0$ son uchun shunday $h>0$ sonni topish mumkin bo’lsaki, $|h|<h$ bo’lganda

$$|j\,(a+h)-j\,(a)|<e$$

bo’lsa, barcha haqiqiy x lar uchun aniqlangan bir qiymatli $j\,(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada uzluksiz deyiladi. Har bir nuqtada uzluksiz bo’lgan funksiya uzluksiz funksiya deyiladi. $f(x)$ ko’pxadning uzluksiz ekanligini isbot qilamiz. Shu maqsadda Teylor formulasini tatbiq qilamiz:

$$f(a+h)=f\ (a)+h\ f^1(a)+\ldots+\frac{h^n}{h!}f^{(n)}(a)$$

bundan

$$f(a+h)-f(a)=hf^1(a)+\ldots+\frac{h^n}{h!}f^{(n)}(a)$$

hosil bo'ladi.

Yig'indining absolyut miqdori absolyut miqdorlarning yig'indisidan kichik yoki unga teng, shuning uchun :

$$|f(a+h)-f(a)| \leq \left|h\ f^{1}(a)\right|+\ldots+|h|^{n}\left|\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)\right|.$$

Endi,

$$\left|f^{1}(a)\right|,\ .\ \ .\ \ .\ ,\left|\frac{1}{n!}\ f^{(n)}(a)\right|$$

larni ularning eng katta A miqdori bilan almashtirilsa, tengsizlik kuchayadi:

$$|f(a+h)-f(a)| \leq A(|h|+\left|h^{2}\right|+\ldots+|h|^{n}).$$

Orttirma h ni shunchalik kichik qilib olish mumkinki, natijada $|h|<1$ bo'ladi. U vaqtda o'z-o'zidan ma'lumki, agar $|h|^{2}$, ..., $|h|^{n}$ darajalarni eng katta $|h|$ miqdor bilan alishtirsak, tengsizlik kuchayadi. Shunday qilib, quyidagi tengsizlik hosil bo'ladi:

$$|f(a+h)-f(a)|<A(|h|+|h|+\ldots+|h|)=|h|\,n\,A.$$

Bundan darhol ko'rinadiki,

$$|h|\geq h=\frac{e}{nA} \qquad \text{va} \qquad |h|<1$$

bo'lganda

$$|f(a+h)-f(a)|<e$$

bo'ladi. a - har qanday haqiqiy son bo'lgani uchun shu bilan ko'pxadning uzluksizligi isbot bo'ldi.

Hosilaning uzluksizligi ravshan, chunki ko'pxadning hosilasi yana ko'pxaddir.

II. Agar $f(a)$ *va* $f(b)$ *qiymatlarning ishoralari har xil bo'lsa, u holda* (a,b) *oraliqda* $f(x)$ *ko'pxad kamida bitta ildizga ega*[3].

Aniqlik uchun faraz qilaylik, $f(a)>0$ va $f(b)<0$ bo'lsin. Ko'pxad uzluksiz bo'lgani uchun, x miqdor a dan b gacha o'zgargan vaqtda, u musbat $f(a)$ dan

[3] Bu bobning butun davomida biz "ildiz" deganda haqiqiy ildizni nazarda tutamiz.

manfiy $f(b)$ ga oradagi hamma qiymatlar orqali o'tishga, shu jumladan nol orqali o'tishga majbur. Demak, bizning funksiyamiz oraliqda kamida bir marta nolga aylanadi[4].

II xossani biroz oydinlashtirish mumkin. Gap shundaki, absissalar o'qi XOY tekislikni ikki qismga ajratadi: yuqori va quyi yarim tekisliklar. Agar $f(a)$ va $f(b)$ har xil ishoralarga ega bo'lsa, u holda A va B nuqtalar har xil yarim tekisliklarda yotadi. Agar $f(a)$ va $f(b)$ dagi ishoralar bir xil bo'lsa, A va B nuqtalar bitta yarim tekislikda yotadi. Ikkinchi tomondan, yarim tekislikning bittasidan ikkinchisiga o'tish uchun OX o'qni bir marta, uch marta va umuman toq marta kesib o'tishga to'g'ri keladi. Aksincha, OX o'qni juft marta kesish bilan biz yana aslidagi o'zimiz chiqqan tekislikka qaytamiz.

Shunday qilib, quyidagi natija hosil bo'ladi: *agar $f(a)$ va $f(b)$ larning ishoralari har xil bo'lsa, $f(x)$ ko'pxadning (a,b) oraliqdagi ildizlarining soni toq bo'ladi. Agarda $f(a)$ va $f(b)$ lar bir xil ishorali bo'lsa, u holda (a,b) oraliqda haqiqiy ildizlar mutlaqo yo'q, yoinki ildizlarning soni juft.*

Tenglamalarning ildizlarini hisoblashda II xossa bilan Roll teoremasi birlikda g'oyat darajada foydalidir. Roll teoremasi matematik tahlildan ma'lum, ammo shunga qaramasdan biz ko'pxadlarga muvofiqlashtirib uning ifodasini keltiramiz.

Roll teoremasi. *Ko'pxadning ikkita ildizi orasida uning hosilasining kamida bitta ildizi yotadi.*

Muayyan misolda biz II xossa yordami bilan ildizlarni qanday hisoblashni ko'rsatamiz. Masalan, ushbu

$$f(x) = x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$$

tenglamani olaylik. Dastlab ildizlarning chegaralarini topamiz, IV xossa vositasi bilan, barcha haqiqiy ildizlarning -1 va 1 orasida yotganligini aniqlaymiz. Undan tashqari, bizning tenglamamiz uchtadan ortiq haqiqiy ildizga ega bo'la olmaydi, chunki u uchinchi darajalidir. Yana ham takomillashgan natijalarga erishish uchun ko'pxadlarning II xossasidan foydalanamiz.

[4] Biz bu yerda asoslanayotgan uzluksiz funksiyalarning asosiy xossalarini matematik tahlil kursidan ma'kum, deb hisoblaymiz.

$$f(-1) = -3 \quad \text{va} \quad f(1) = 3$$

ekanligini topish oson, shuning uchun bitta haqiqiy ildizning borligi shubhasiz. Ehtimol boshqa ildizlar ham bordir? Tenglamamizning chap tomonidan olingan hosila quyidagiga teng:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + 2$$

bundan $f'(x)$ ning hech qanday haqiqiy ildizi yo'qligini aniqlash qiyin emas. Chunki

$$3x^2 - 2x + 2 = 0$$

kvadrat tenglamaning diskriminanti $D = -20 < 0$.

Demak, (6) tenglama bittadan ortiq haqiqiy ildizga ega bo'la olmaydi. Darhaqiqat, agarda $f(x)$ ko'pxadning ikkita ildizi bor bo'lsa edi, u vaqtda Roll teoremasiga ko'ra uning $f'(x)$ hosilasida kamida bitta haqiqiy ildiz mavjud bo'lar edi, haqiqatda esa shunday emas.

Binobarin, bizga faqat birdan-bir ildiznigina topishgina qoladi. Yana II xossa yordamga keladi. Ildizning quyi va yuqori chegaralaridan biz $\frac{-1+1}{2} = 0$ o'rta arifmetik qiymatini topib, uni (21) ning chap tomoniga qo'yamiz. Ko'ramizki,

$$f(0) = 1 > 0, \qquad f(-1) = -3 < 0,$$

demak, ildiz -1 va 0 orasida yotar ekan: ildizning yana ham yaqinroq chegaralari kelib chiqdi. Shu chegaralardan yana o'rta arifmetikni tuzamiz: $\frac{-1+0}{2} = -\frac{1}{2}$. Ko'ramizki,

$$f(-\frac{1}{2}) < 0, \quad f(0) > 0.$$

Demak, ildiz $-\frac{1}{2}$ va 0 orasida yotadi. Chegaralarni yana toraytiramiz.

$$\frac{-\frac{1}{2}+0}{2} = -\frac{1}{4}, \qquad f(-\frac{1}{2}) < 0, \qquad f(-\frac{1}{4}) = -\frac{1}{64} - \frac{1}{16} - \frac{1}{2} + 1 > 0 \ .$$

Oldingilardan torroq $-\frac{1}{2}$ va $-\frac{1}{4}$ chegaralar hosil bo'ldi. Ravshanki, shunday hisoblash jarayonini cheksiz davom ettirish mumkin. Buning natijasida biz ildizga istagancha yaqinlashgan bo'lamiz. Shuni aytish kerakki, hozirgi kunda ildizlarni taqribiy hisoblashning yana ham takomillashgan metodlari mavjud.

Ko'pxadlarning yuqorida tahlil qilingan II xossasi haqiqiy koeffitsiyentli ushbu

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,\ a_0 \neq 0$$

tenglama haqiqiy ildizlarining soni haqida ba'zi natijalarni chiqarishga imkoniyat yaratadi.

Dastlab shunday yordamchi jumlani isbot qilamiz: *absolyut miqdori bo'yicha* x *ning qiymati yetarli darajada katta bo'lganda* $f(x)$ *ko'pxadning ishorasi uning* a_0x^n *bosh xadi ishorasi bilan bir xilda bo'ladi.*

I s b o t i. $|x| > \frac{A}{|a_0|} + 1$ bo'lganda (A - $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n$ koeffitsiyentlarning absolyut miqdorlaridan eng kattasi) ushbu

$$|a_1x^{n-1} + \ldots + a_n| < |a_0x^n| \qquad (7)$$

tengsizlikning o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz.

Haqiqatan ham,

$$|a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n| \le |a_1||x|^{n-1} + |a_2||x|^{n-2} + \ldots + |a_n|$$

yoki $|a_1|, |a_2|, \ldots. |a_n|$ larni A ga almashtirsak,

$$|a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n| \le A(|x|^{n-1} + |x|^{n-2} + \ldots + 1) = A\frac{|x|^{n-1}}{|x| - 1} \qquad (8)$$

hosil bo'ladi. Lekin

$$|x| > \frac{A}{|a_0|} + 1.$$

Demak,

$$\frac{A}{a_0} < |x| - 1 \quad \text{va} \qquad A < |a_0|\ (|x| - 1)$$

bundan, (7) tengsizlikning o'ng tomonidagi A o'rniga undan katta bo'lgan $|a|(|x|-1)$ ni qo'yilsa, quyidagi tengsizlik kelib chiqadi:

$$\left|a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_n\right| < |a_0|\,(|x|-1)\frac{|x|^{n-1}}{|x|-1} = |a_0|\,(|x|^n-1) < \left|a_0x^n\right|$$

ya'ni biz (7) tengsizlikka keldik.

Endi teorema ravshan bo'lib qoladi: agar a_0x^n bosh xad absolyut miqdor tomonidan boshqa hamma xadlarning birga olinganidan katta bo'lsa, u holda $f(x)$ ko'pxadning ishorasi bosh xad ishorasi bilan bir xilda bo'ladi.

Shundan keyin quyidagi teoremani tahlil qilishga o'tish mumkin.

Teorema. *Koeffitsiyentlari haqiqiy bo'lgan toq darajali tenglama kamida bitta haqiqiy ildizga ega.*

I s b o t i. Yuqorida isbot qilinishiga ko'ra, x qiymatining absolyut miqdori yetarli darajada katta bo'lganda

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n=0,\ a_0\neq 0$$

ko'pxad o'zining bosh xadi ishorasiga ega bo'ladi. Ammo, n toq bo'lgani uchun $x>0$ va $x<0$ bo'lganda a_0x^n xad har xil ishoralarga ega bo'ladi. Shunday qilib, agar M yetarli darajada katta musbat son bo'lsa, $f(M)$ ning ishorasi $f(-M)$ ning ishorasiga qarama-qarshi bo'ladi. Shu sababli, II xossaga asosan $-M$ va M orasida shunday $x=x_0$ haqiqiy son mavjud bo'lishi kerakki, natijada $f(x_0)=0$ bo'ladi.

Natija. *Haqiqiy koeffitsiyentli tenglamaning haqiqiy ildizlarining soni bilan tenglama darajasi bir xil toq juftlikka egadirlar*.

Darhaqiqat, agar n- darajali $f(x)=0$ tenglama s ta $a_1,a_2,...,a_s$ haqiqiy ildizlarga ega bo'lsa, u holda

$$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)...(x-a_s)\,f_1(x)$$

bo'lib, $f_1(x)$- koeffitsiyentlari haqiqiy bo'lgan $(n-s)-$ darajali hamda haqiqiy ildizlari yo'q ko'pxaddir. Hozirgina isbot qilingan teoremaga ko'ra $f_1(x)$ ko'pxadning $(n-s)-$ darajasi toq bo'la olmaydi, ya'ni $n-s$ juft sondir, bizga huddi shuni isbot qilish kerak edi.

Shunday qilib, to’rtinchi darajali tenglama to’rtta, yo ikkita, yoinki butunlay haqiqiy ildizga ega emas, beshinchi darajali tenglamaning esa beshta, yo uchta, yoki bitta ildizi bor.

Elementar algebradan ma’lumki,

$$x^2 + px + q = 0$$

kvadrat tenglamaning ildizlari

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

formula bo’yicha osongina topiladi. Ammo, yuqori darajali tenglamalarni yechish ancha murakkab ish. To’rtinchidan yuqori darajali tenglamalarning hammasini ham algebraik yechib bo’lavermaydi. Shuning uchun ildizlarni taqribiy hisoblash metodlariga murojaat qilishga to’g’ri keladi. Buning ustiga, taqribiy yechish metodlari tajriba nuqtai nazaridan, formula bo’yicha aniq hisoblab o’tirishga qaraganda yana ham qulayroq ekan.

Haqiqiy ildizlarni taqribiy hisoblash jarayoni uch qismdan iborat:

1) Haqiqiy ildizlarning chegaralarini topish. Bu masalani hal qilingan deb hisoblansa bo’ladi.
2) Haqiqiy ildizlarni ajratish, ya’ni shunday oraliqni topishki, ularning har biri orasida berilgan ko’pxadning bitta va faqat bittagina haqiqiy ildizi yotsin.
3) Haqiqiy ildizlarni taqribiy hisoblash.

Haqiqiy ildizlarni ajratishning juda ko’p usullari bor, ammo nazariy tomondan eng takomillashgani Shturm usulidir.

Dastlab bir nechta izoh berib o’tamiz.

1. Faraz qilaylik, haqiqiy sonlarning tartibga solingan tizimi berilgan bo’lsin, masalan:

$$5,\ -8,\ -7,\ 1. \qquad (8)$$

Ko’ramizki, bu sonlarning ishoralari quyidagi tartib bilan kelib,

$$+ \quad - \quad - \quad +$$

ikki marta o'zgaradi: boshida bir marta plusdan minusga va bir marta oxirida minusdan plusga o'tadi, ya'ni sonlarning (24) qatorida ishoralarning ikki marta almashganini ko'ramiz.

2. Faraz qilaylik, $f(x)$ - haqiqiy koeffitsiyentli ko'pxad bo'lsin. Biz $f(x)$ ko'pxadning karrali ko'paytuvchilari yo'q deb faraz qilishimiz mumkin, ya'ni u o'zining $f'(x)$ hosilasi bilan o'zaro tub. Haqiqatan ham, agarda $f(x)$ karrali ko'paytuvchilarga ega bo'lganda edi, biz ularni oldinroq ajratib qo'ygan bo'lar edik.

Endi $f(x)$ va $f'(x)$ larga Evklid algoritmini ozgina chekinish bilan tatbiq qilamiz, ya'ni har safar biz qoldiqning ishorasini qarama-qarshisiga o'zgartiramiz. Masalan, $f(x)$ ni $f'(x)$ ga bo'lishdan hosil bo'lgan qoldiq $r(x)$ bo'lsa, uning o'rniga biz $f_1(x) = -r(x)$ ni olamiz. Shunday qilib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = g(x) f'(x) - f_1(x) \\ f'(x) = g_1(x) f_1(x) - f_2(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_{m-2}(x) = g_{m-1}(x) f_{m-1}(x) - f_m(x) \end{array}\right\} \qquad (9)$$

bunda $f_m(x)$ ifoda $f(x)$ ko'pxad bilan uning $f'(x)$ hosilasining eng katta umumiy bo'luvchisidir. Quyidagi $m+2$ ta ko'pxaddan tuzilgan

$$f(x),\ f'(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ \dots,\ f_{m-1}(x),\ f_m(x)$$

tartibga solingan tizim Shturm funksiyalarining qatori deyiladi. Ravshanki, Shturmning so'nggi $f_m(x)$ funksiyasi nolinchi darajali ko'pxaddan iborat bo'lishi kerak, chunki $f(x)$ va $f'(x)$ lar o'zaro tub.

Misol. Quyidagi kopxadni ko'rib chiqaylik:

$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 8x - 8.$$

Dastlab $f(x)$ ko'pxadning karrali ko'paytuvchilari yo'qligiga ishonch hosil qilish kerak edi, lekin biz birdaniga Shturm funksiyalarining qatorini tuzishni boshlay ham olamiz; agar Shturm qatoridagi so'nggi funksiyaning darajasi noldan yuqori bo’lsa, u vaqtda $f(x)$ karrali ildizlarga ega va shuning uchun ularni ajratib olishga to’g’ri keladi. $f(x)$ ko’pxadning hosilani topamiz:

$$f'(x) = 4x^3 - 10x + 8.$$

so’ngra $f(x)$ ni $f'(x)$ ga bo’lamiz. Bu yerda $f_i(x)$ funksiyalarning ishoralari katta ahamiyatga ega bo’lgani uchun, Evklid algoritmidan farq qildirib, faqat musbat sonlargagina ko’paytirish va qisqartirish mumkin. Binobarin, kasrli koeffitsiyentlardan qochish maqsadida, $f(x)$ ni 4 ga ko’paytirib, $f'(x)$ ga bo’lamiz:

$$\begin{array}{r|l}
4x^4 - 20x^2 + 32x - 32 & 4x^3 - 10x + 8 \\ \cline{2-2}
4x^4 - 10x^2 + 8x & x \\ \cline{1-1}
-10x^2 + 24x - 32 &
\end{array}$$

$(2$ ga qisqartiramiz)

$$-5x^2 + 12x - 16$$

Demak, qoldiqdagi ishoralarni o’zgartirib, $f_1(x) = 5x^2 - 12x + 16$ ga erishamiz. $f'(x)$ ni $f_1(x)$ ga bo’lamiz, uning uchun avval $f'(x)$ ni 25 ga ko’paytirib olamiz:

$$\begin{array}{r|l}
100x^3 \qquad\qquad - 250x + 200 & 5x^2 - 12x + 16 \\ \cline{2-2}
100x^3 - 240x^2 + 320x & 20x + 48 \\ \cline{1-1}
240x^2 - 570x + 200 & \\
240x^2 - 576x + 768 & \\ \cline{1-1}
6x - 568 &
\end{array}$$

bundan $f_2(x) = -3x + 284$. Nihoyat, $9f_1(x)$ ni $f_2(x)$ ga bo’lamiz:

$$\begin{array}{r|l}
45x^2 - 108x + 144 & -3x + 284 \\ \cline{2-2}
45x^2 - 4260x & -15x - 346 \\ \cline{1-1}
4152x + 144 &
\end{array}$$

(4 ga qisqartiramiz)

$$\begin{array}{r}
1038x + \quad 36 \\
1038x - 98264 \\ \hline
98300
\end{array}$$

Qoldiq musbat sondan iborat bo'lgani uchun $f_3(x)$ manfiy son bo'ladi. Shu sababli to'g'ridan-to'g'ri $f_3(x) = -1$ desa bo'ladi. Natijada quyidagi Shturm funksiyalarining qatori hosil bo'ladi:

$$\left.\begin{aligned} & f(x) = x^4 - 5x^2 + 8x - 8, \\ & f'(x) = 4x^3 - 10x + 8, \\ & f_1(x) = 5x^2 - 12x + 16 \\ & f_2(x) = -3x + 284, \\ & f_3(x) = -1 \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Shturm funksiyalarining qatori quyidagi muhim xossalarga ega:

a) Shturmning har qanday ikkita qo'shni funksiyasi umumiy ildizlarga ega emas.

Isbot qilish uchun (5) tengsizliklar sistemasiga murojaat qilamiz.

Faraz qilaylik, $f_k(x)$ va $f_{k+1}(x)$ lar umumiy $x = a$ ildizga ega bo'lsinlar. U holda $f_k(x)$ va $f_{k+1}(x)$ lar $x - a$ ga bo'linishlari kerak. Endi quyidagi tenglikni ko'raylik:

$$f_{k-1}(x) = g_k(x)\, f_k(x) - f_{k+1}(x)$$

Ravshanki, bu tenglikning o'ng tomoni $x - a$ ga bo'linadi, demak, chap tomonidagi $f_{k-1}(x)$ ham $x - a$ ga bo'linadi. Yuqoridagi tenglikka o'tib, xuddi shu usulda ko'rsatish mumkinki, $x - a$ ga $f_{k-1}(x)$ ham bo'linadi va hokazo. Yuqoriga qadamba-qadam ko'tarilib, nihoyat biz $f'(x)$ va $f(x)$ ga yetamiz hamda $f'(x)$ va $f(x)$ larning $x - a$ ga bo'linishini ko'ramiz. Ammo bunday bo'lishi mumkin emas, chunki $f(x)$ va $f'(x)$ o'zaro tub.

Shturm funksiyalari qatoridagi birinchi va oxirgidan boshqa har bir funksiyani Shturmning oraliqdagi funksiyasi deyiladi.

b) Agar a Shturmning oraliqdagi biror $f_k(x)$ funksiyasining haqiqiy ildizi bo'lsa, u holda Shturmning ikkita qo'shni $f_{k-1}(x)$ va $f_{k+1}(x)$ funksiyasi $x = a$ da qarama-qarshi ishoralarga ega bo'ladi.

Bu xossa deyarli ravshan: ushbu

$$f_{k-1}(x) = g_k(x)\, f_k(x) - f_{k+1}(x)$$

tenglikdan $x = a$ bo'lganda

$$f_{k-1}(a) = -f_{k+1}(a)$$

hosil bo'ladi, chunki shartimizga ko'ra $f_k(a) = 0$.

c) Agar x ning qiymati o'sib borib, Shturmning oraliqdagi biror funksiyasining haqiqiy ildizidan o'tsa, u bilan Shturm funksiyalarining qatoridagi ishora almashinishlar soni o'zgarmaydi.

Faraz qilaylik, a ko'pxad $f_k(x)$ ning haqiqiy ildizi bo'lsin. a) va b) xossalarga binoan $f_{k-1}(a)$ va $f_{k+1}(a)$ larning har biri nolga teng emas hamda qarama-qarshi ishoralarga ega. Shunday kichik $(a-e,\ a+e)$ oraliq tanlab olamizki, uning ichida va chegaralarida $f_{k-1}(x)$ hamda $f_{k+1}(x)$ larning haqiqiy ildizlari bo'lmasin, ya'ni o'z ishorasi saqlanib qolsin. Aniqlik uchun faraz qilaylik, x ning $(a-e,\ a+e)$ oraliqdagi hamma qiymatlarida $f_{k-1}(x) < 0$ va $f_{k+1}(x) > 0$ bo'lsin. Natijada ishoralarga tegishli ushbu kichkina jadval kelib chiqadi:

a	f_{k-1}	f_k	f_{k+1}
$x < a$	-		+
$x > a$	-		+

Bo'sh kataklarga qanday ishora qo'yilmasin $x < a$ da ham $x > a$ bo'lganda ham faqat bitta ishora almashinish bo'ladi. Demak, $x = a$ ildizdan o'tishda $f_{k-1},\ f_k,\ f_{k+1}$ lar orasidagi ishora almashinishlar soni o'zgarmaydi. Shturm qatorining boshqa qismlarida, ya'ni $x = a$ da nolga aylanmaydigan funksiyalarda almashinishlar sonining o'zgarishi mumkin emas, $x = a$ da ba'zi oraliqdagi funksiyalar nolga aylanadigan joylarda ham almashinishlar soni o'zgarmaydi.

d) Agar x ning qiymati o'sib borib, $f(x)$ ko'pxadning haqiqiy a ildizidan o'tsa, u holda $f(x)$ ko'pxad bilan uning hosilasi orasida bitta ishora almashinishi yo'qoladi.

Avvalgidek, shunday kichik $(a-e,\ a+e)$ oraliq tanlab olamizki, uning ichida $f'(x)$ hosila ildizlarga ega bo'lmasin, $f'(x)$ esa faqat bitta $x=a$ ildizga ega bo'lsin. $f(x)$ ildizdan o'tishda $f(x)$ o'z ishorasini o'zgartiradi. Faqat ikki holning bo'lishi mumkin: $(a-e,\ a+e)$ oraliqda yo $f'(x)$ musbat, yoki $f'(x)$ shu oraliqda manfiy. Misol uchun $f'(x)>0$ bo'lsin. Buning ma'nosi shundan iboratki, biz tekshirayotgan oraliqda $f(x)$ ko'pxad o'sib boradi, shuning uchun ham $f(x)$ manfiy qiymatlardan musbatga o'tishi kerak.

Ishoralarning almashinishini ko'rsatadigan quyidagi jadvalga ega bo'lamiz:

x	$f(x)$	$f'(x)$	*almashinish soni*
$x<0$	-	+	1
$x>0$	+	+	0

Shunday qilib, $f(x)$ va $f'(x)$ lar orasida avval ishora almashinish bor edi, lekin ildizdan o'tishda o'sha yo'qolib qoldi. $f'(x)<0$ bo'lganda ham huddi shunday natija kelib chiqadi (bu yerda $f(x)$ ko'pxad kamayib boradi).

Funksiyalarning (23) qatoriga qaytamiz. Agar $x=0$ bo'lsa,

$$f(0)=-8,\quad f'(0)=8,\quad f_1(0)=16,\quad f_2(0)=284,\quad f_3(0)=-1$$

bo'ladi, agar $x=2$ bo'lsa, u holda

$$f(2)=4,\quad f'(2)=20,\quad f_1(2)=12,\quad f_2(2)=278,\quad f_3(2)=-1$$

bo'ladi. Mana bunday jadval kelib chiqadi:

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	*almashinish soni*
0	-	+	+	+	-	2
2	+	+	+	+	-	1

Ko’ramizki, $x=0$ dan $x=2$ ga o’tishda almashinishlar soni bitta kamaydi, boshqacha qilib aytganda, bitta almashinish yo’qoldi. Bu hodisaning siri Shturm teoremasidadir.

Shturm teoremasi. *Faraz qilaylik,* $a<b$ *lar* $f(x)$ *ko’pxadning ildizlaridan boshqa haqiqiy sonlar bo’lsin. U holda* $f(x)$ *ko’pxadning* $[a,b]$ *kesmadagi haqiqiy ildizlarining soni,* x a *dan* b *gacha o’sganda, Shturm funksiyalari qatoridagi yo’qotilgan ishora almashinish soniga teng.*

I s b o t i. Darhaqiqat, x o’sganda qanday hodisa ro’y beradi? Agar x oraliqdagi funksiyaning haqiqiy ildizidan o’tsa, c) xossaga ko’ra Shturm funksiyalarining qatoridagi almashinishlar soni o’zgarmay qoladi. Agarda x ko’pxad $f(x)$ ning haqiqiy ildizidan o’tsa, u holda d) xossaga ko’ra $f(x)$ va $f'(x)$ orasida, demak, Shturm funksiyalarining butun qatorida, bitta almashinish yo’qoladi. Shunday qilib, x a dan b gacha o’sganda $[a,b]$ kesmada nechta ildiz bo’lsa, ishora almashinishlari soni ham shuncha dona kamayishi kerak.

I z o h. Shturmning oraliqdagi funksiyalarning bittasi yoki bir nechtasi a yoki b da nolga aylanib qolishi ham mumkin. Bunday holda ishoralarning almashinishlar sonini sanash vaqtida nolga teng bo’lgan hamma oraliqdagi funksiyalarni tashlab yuborish mumkin. Haqiqatan ham, $x=a$ da $f_i(x)$ nolga teng bo’lsin. b) xossaga binoan $x=a$ da $f_{i-1}(x)$ va $f_{i+1}(x)$ lar qarama-qarshi ishoralarga ega bo’lishlari kerak, shu sababli, $f_i(a)$ ga qanday ishora qo’yilsa ham doim $f_{i-1}(a),\ f_i(a),\ f_{i+1}(a)$ lar bitta almashinishni beradi.

Misol. Quyidagi ko’pxadni olaylik:

$$f(x)=3x^4-4x^3-6x^2-12x+1.$$

Bu ko’pxad uchun Shturm funksiyalari qatorini tuzamiz:

$$f(x)=3x^4-4x^3-6x^2-12x+1$$
$$\frac{1}{12}f'(x)=x^3-x^2-x-1$$
$$f_1(x)=2x^2+5x$$
$$f_2(x)=-31x+4$$
$$f_3(x)=-1.$$

Dastlab, haqiqiy ildizlarning sonini topamiz. Absolyut miqdori jihatidan x ning qiymati yetarli darajada katta bo'lganda har bir Shturm funksiyasining ishorasi o'zining bosh xadi ishorasi bilan bir xilda bo'ladi. Demak, x ning yetarli darajadagi katta musbat qiymatini $+\infty$ bilan va absolyut miqdori yetarli darajada katta bo'lgan manfiy qiymatini $-\infty$ bilan belgilansa, shunday jadval hosil bo'ladi:

<table>
<tr><td>x</td><td>$f(x)$</td><td>$f'(x)$</td><td>$f_1(x)$</td><td>$f_2(x)$</td><td>$f_3(x)$</td><td colspan="2">almashinish soni</td></tr>
<tr><td>$-\infty$</td><td>+</td><td>-</td><td>+</td><td>+</td><td>-</td><td colspan="2">3</td></tr>
<tr><td>0</td><td>+</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>-</td><td>3</td><td rowspan="2">Ikkita almashinish yo'qoldi</td></tr>
<tr><td>$+\infty$</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>-</td><td>-</td><td>1</td></tr>
</table>

x o'zgaruvchi $-\infty$ dan 0 gacha o'sganda almashinishlar soni o'zgarmay qoladi, demak, bizning ko'pxadimiz butunlay manfiy ildizlarga ega emas. So'ngra, x ning 0 dan $+\infty$ gacha o'sishida ikkita almashinish yo'qolib qoldi. Shuning uchun ko'pxad ikkita musbat ildizga ega. Shularni ajratib olishga harakat qilib ko'ramiz. Nyuton usuli yordami bilan, musbat sonlar yuqori chegarasining 3 ga tengligini ko'rish qiyin emas. Shturm teoremasini tatbiq qilamiz:

<table>
<tr><td>x</td><td>$f(x)$</td><td>$f'(x)$</td><td>$f_1(x)$</td><td>$f_2(x)$</td><td>$f_3(x)$</td><td colspan="2">almashinishlar soni</td></tr>
<tr><td>0</td><td>+</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>-</td><td>3</td><td rowspan="2">bitta almashi-nish yo'qoldi</td></tr>
<tr><td>1</td><td>-</td><td>-</td><td>+</td><td>-</td><td>-</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>-</td><td>+</td><td>+</td><td>-</td><td>-</td><td>2</td><td rowspan="2">bitta almashi-nish yo'qoldi</td></tr>
<tr><td>3</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>-</td><td>-</td><td>1</td></tr>
</table>

Nihoyat, ldizlar ajratildi: birinchi ildiz $(0, 1)$ oraliqda, ikkinchisi esa $(2, 3)$ oraliqda yotadi.

Shturm metodining kamchiligi uning og'irligidir.

Ko'pincha quyidagi jumla ham foydalidir.

Dekart teoremasi. *Haqiqiy koeffitsiyentli quyidagi*

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad (a_0 > 0) \qquad (27)$$

tenglamaning musbat ildizlari soni uning koeffitsiyentlaridan tuzilgan qatordagi ishora almashinishlar soniga teng yoki undan juft soncha kamdir[5].

Masalan, ushbu

$$f(x) = x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 4x - 1 = 0$$

tenglamada uchta o’zgarish bor, demak, tenglama uchta yoki bitta musbat ildizga ega.

Oldin ba’zi izohlarni berib o’tamiz.

I z o h 1. $f(x)$ ko’pxadning $f'(x)$ hosilasi 5 ta musbat ildizga ega bo’lsin. U holda $f(x)$ ko’pxad musbat ildizlarining soni $s+1$ dan oshmasligi kerak.

Darhaqiqat, agarda $f(x)$ ning musbat ildizlari $s+2$ ta bo’lsa edi, Roll teoremasiga ko’ra, uning hosilasi s ta emas, balki $s+1$ ta ildizga ega bo’lib qolar edi.

I z o h 2. Haqiqiy sonlarning ushbu

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$$

tartibga solingan tizimida almashinishlar soni juft bo’lishi uchun albatta, a_0 va a_n larning ishoralari bir xil bo’lishi kerak. Aksincha, a_0 va a_n ning ishoralari har xil bo’lganda almashinishlar soni toq bo’ladi.

Chunonchi, sonlarning mana bu

$$1,\ -2,\ 3,\ -5,\ 6$$

qatorida to’rtta almashinish bor, quyidagi

$$-5,\ 1,\ 2,\ -7,\ 1$$

sonlar qatorida esa uchta almashinish bor.

I z o h 3. (27) Tenglama koeffitsiyentlaridagi almashinishlar sonini p bilan belgilaylik. Biz tasdiqlaymizki, tenglama musbat ildizlarining soni p dan faqat juft soncha farq qiladi.

---

[5] ishora almashinishlar sonini sanab chiqishda nolga teng bo’lgan koeffitsiyentlarni tashlab yuborish kerak.

Haqiqatan ham, p juft son bo'lsa, izoh 2 ga ko'ra a_n ning ishorasi a_0 niki bilan bir xilda bo'lishi kerak. Ma'lumki, yetarli darajada katta musbat $x = M$ qiymatda ko'pxadning ishorasi o'zining $a_0 x^n$ bosh xadi ishorasi bilan bir xilda bo'ladi, demak, $f(0) = a_n$ va $f(M)$ larning ishorasi bir xil. Shunday qilib, biz ko'ramizki, tekshirilayotgan tenglamaning barcha musbat ildizlarini o'z ichiga oladigan $(0, M)$ oraliqda yotadigan ildizlarning soni juft ekan.

Agar p toq bo'lsa, izoh 2 ga ko'ra a_0 va a_n lar har xil ishoralarga ega bo'lishlari kerak, shu sababli, $f(0) = a_n$ ham, $f(M)$ ham har xil ishoralarga ega bo'lishi kerak, bundan esa $(0, M)$ oraliqda yotadigan ildizlar soni toq bo'lishi kerak, degan ma'no chiqadi.

Binobarin, musbat ildizlarning soni va p bir vaqtda juft yoki toq bo'lishlari kerak, ya'ni ular bir-birlaridan juft soncha farq qilishlari kerak.

Dekart teoremasining i s b o t i:

Birinchi darajali

$$f(x) = ax + b = 0$$

tenglama uchun teoremaning to'g'riligi o'z-o'zidan ravshan: uning birdan –bir $x = -\frac{b}{a}$ ildizi, a, b larning ishoralari har xil , ya'ni $a \; va \; b$ koeffitsientlar bitta almanish hosil qilganidagina musbat bo'la oladi.

Induksiya metodi bilan isbot o'tkazamiz: faraz qilaylik, teorema $(n-1)$-darajali tenglamalar uchun isbot qilingan bo'lsin, endi uning n- darajali tenglamalar uchun to'g'riligini isbot qilamiz.

(10) tenglamadagi almanishlar sonini p bilan belgilaylik. U holda ushbu

$$f'(x) = na_0 x^{n-1} + (n-1)a_1 x^{n-2} + ... + a$$

hosilaning koeffitsietlaridan tuzilgan qatordagi almashinish p dan ko'p bo'lmaydi. Ammo $f'(x)$ hosila $(n-1)$- darajali ko'pxaddan iborat bo'lgani uchun unga teoremamiz to'g'ri keladi. Demak, $f'(x)$ ning musbat ildizlari soni p dan ko'p bo'lmaydi, shu sababli izoh 1 ga asosan, (10) tenglama $p+1$ dan ortiq musbat ildizlarga ega emas. Biroq izoh 3 ga binoan, (10) tenglama musbat ildizlarining soni $p+1$ ga teng bo'la olmaydi. Chunki p bilan $p+1$ ning toq-juftligi har xil. Yana shu xossaga asoslanib, musbat ildizlarning soni p ga teng yoki undan juft soncha kam, degan xulosaga kelamiz.

Shunday qilib, Dekart teoremasini $(n-1)$- darajali tenglamalar uchun to'g'ri, deb faraz qilib, n - darajali tenglamalar uchun ham to'g'riligini isbot qildik.

Jumladan $n=1$ uchun teorema to'g'ri edi, demak, $n=2, 3, 4$ va hokazolar uchun ham, ya'ni istalgan n uchun ham to'g'ri.

Dekart teoremasi yordami bilan tenglamaning faqat musbat ildizlarining soninigina emas, balki manfiy ildizlarning sonini ham aniqlash mumkin. Muayyan misolga murojaat qilamiz.

Ushbu

$$f(x)=x^3-2x-1=0$$

tenglamani ko'rib chiqaylik. Demak, berilgan tenglama jami bo'lib bittagina musbat ildizga ega. Endi $x=-y$ deb faraz qilsak,

$$j(y)=y^3-2y+1=0$$

kelib chiqadi. Bu tenglamada ikkita almashinish borligi ko'rinadi, shuning uchun berilgan tenglamaning manfiy ildizlari ikkita yoki umuman yo'q.

4.4. Xaqiqiy ildizlarni taqribiy xisoblash.

Qisqa bayon etish maqsadida, "ildiz" degan so'zni haqiqiy ildiz deb, huddi shuningdek "tenglama" (yoki ko'pxad) degan so'zni haqiqiy koeffitsientli tenglama deb tushunamiz.

Biz bu joyda ildizlarni hisoblashning faqat uchta oddiyroq metodlarini tahlil qilamiz.

Gorner- Ruffini usuli. Bu usulning maqsadi quyidagidan iborat. $f(x)=0$ tenglamaning izlanayotgan ildizining butun qismini a bilan belgilaymiz. U vaqtda $x=a+y$ deb, $f(x)=f(a+y)$ ni Teylor formulasi yordami bilan y ning darajalariga nisbatan yoyilsa

$$\varphi_1(y)=0$$

tenglama hosil bo’lib, uning ildizi 0 va 1 orasida bo’ladi. Agar yana $10y=z$ deb qabul etsak, u holda ushbu

$$\varphi_2(z)=0$$

tenglama hosil bo’lib, uning ildizi 0 bilan 10 orasida yotadi. Shu ildizning butun qismi a bo’lsin. Yana $z=a_1+u$ faraz etib, $\varphi_2(z)=\varphi_2(a_1+u)$ ga Teylor formulasini tadbiq etamiz, natijada

$$\varphi_3(u)=0$$

tenglama kelib chiqadi va 0 bilan 1 orasida ildizga ega bo’ladi ba hokazo. Ravshanki, shunday almashtirishlarni keragicha takrorlasak , biz zarur bo’lgan aniqlikka erishamiz. Shuning baravarida a izlanayotgan ildizning butun qismidan iborat bo’lib, a_1- ildizning o’nlar xonasidagi son, a_2-ildizning yuzlar xonasidagi son, a_3 -ildizning minglar xonasidagi son va hokazo.

Gorner metodini konkret misolda ko’rsatamiz

Ushbu

$$f(x)=x^3-8x+1=0$$

tenglamani ko’rib chiqaylik. Ildizlarning -3 bilan +3orasida yotishini Nyuton usuli bo’yicha bilish mumkin. Ildizlarni ajratmoq uchun Shturm teoremasidan foydalanamiz. Berilgan $f(x)$ ko’pxad uchun mana bunday Shturm qatori kelib chiqadi:

$$f(x)=x^3-8x+1,$$

$$f'(x)=3x^2-8,$$

$$f_1(x)=16x-3,$$

$$f_2(x) = 1,$$

bulardan ishoralarning almanishini ko'rsatadigan quyidagi jadvalga ega bo'lamiz:

x	f	f'	f_1	f_2	Almanishlar soni
-3	-	+	-	+	3
-2	+	+	-	+	2
-1	+	-	-	+	2
0	+	-	-	+	2
1	-	-	+	+	1
2	-	+	+	+	1
3	+	+	+	+	0

Shunday qilib, birinchi ildiz (-3, -2) oraliqda, ikkinchisi (0, 1) oraliqda va uchinchisi esa (2,3) oraliqda yotadi.

Endi Gorner usuli bilan ildizlarning birini masalan, uchinchi ildizini 0.001 aniqlik bilan hisoblab chiqamiz.

Ildizning 2 bilan 3 orasida yotgan butun qismi 2 ga teng. Shu sababli $x = 2 + y$ qabul etib, $f(2+y)$ni Teylor formulasi bo'yicha $y$ning darajalariga nisbatan yoyamiz. Gorner sxemasi yordami bilan yoyishni bajarish qulayroq:

	1	0	-8	1
2	1	2	-4	-7
2	1	4	4	
2	1	6		
2	1			

Shunday qilib mana shu

$$y^3+6y^2+4y-7=0$$

tenglama hosil bo'ladi. Endi y ni $\frac{z}{10}$ ga almashtiramiz:

$$\left(\frac{z}{10}\right)^3+6\left(\frac{z}{10}\right)^2+4\left(\frac{z}{10}\right)-7=0$$

bo'ladi yoki

$$z^3+60z^2+400z-7000=0$$

so'nggi natijadan iborat.

Shuni payqab o'taylikki, (1) tenglamani birdaniga 1, 6, 4 va 7 sonlarini mos ravishda 1, 10, 100 va 1000 ga ko'paytirish yo'li bilan hosil qilish ham mumkin.

0, 1,2, 3, 4, 5, 6, 7 va 8 sonlarini sinov qilib ko'ramizki, tenglamaning ildizi 7 va 8 orasida ekan, demak, $a_1=7$ ga Gorner sxemasini tuzamiz:

	1	60	400	-7000
7	1	67	869	-917
7	1	74	1387	
7	1	81		
7	1			

Bundan $1,\ 81, 1387$ va -917 sonlarni mos ravishda $1, 10, 100$ va 1000 ga ko'paytirib, ildizi 6 bilan 7 orasida bo'lgan ushbu

$$u^3+810u^2+138700-917000=0$$

tenglamaga erishamiz. Demak, $a_2=6$. Yana Gorner sxemasini tuzamiz:

	1	810	138700	-917000
6	1	816	143596	-55424
6	1	822	148528	
6	1	828		

6	1			

Mana bu

$$v^3 + 8280v^2 + 14852800v - 55424000 = 0$$

tenglamaga ega bo’lamiz va buning ildizi 3 va 4 orasida yotadi.

Binobarin, $0{,}001$ oraliq bilan berilgan tenglamaning ildizi mana bunga teng:

$$x = 2{,}763.$$

Agar hisoblash ishlari davom etilsa, natijada shu qadar katta koeffitsiyentli tenglamalar kelib chiqadiki, Gorner-Ruffini metodi noqulay bo’lib qoladi.

Biz hozir, ildizga tez yaqinlashtiradigan ikkita metodni tahlil qilamiz. $f(x)$ bilan uning hosilasini o’zaro tub deb qabul qilsak, u bilan umumiy fikrlarga hech qanday qarshilik tug’ilmaydi, chunki, aks holda biz karrali ildizlarni ajratgan bo’lar edik.

Nyuton usuli. Faraz qilaylik, $f(x) = 0$ tenglama (a, b) oraliqda yotuvchi x_0 ildizga ega bo’lsin. Geometrik tomondan bu ildizga $y = f(x)$ chiziq bilan OX o’qning kesishgan C nuqtasi mos keladi. Biz ildizga quyidagicha yaqinlasha olamiz.

Koordinatalari a va $f(a)$ bo’lgan A nuqtadan egri chiziqqa urinma o’tkazamiz. U OX o’qni a_1 nuqtada kesadi, shu bilan birga a ga qaraganda a_1 ildizga yaqinroq turadi. Koordinatalari a_1 va $f(a_1)$ bo’lgan A_2 nuqtadan yana urinma o’tkazish mumkin, u OX o’qni a_2 nuqtada kesib o’tish bilan birga, a_1 ga qaraganda, ildizga yana ham yaqinroq yotadi va hokazo. Natijada, x_0 ildizga chegarasiz yaqinlashuvchi qator $a, a_1, a_2, \ldots$ qiymatlar hosil bo’ladi.

Endi $a_1, a_2, a_3, \ldots$ larning nimaga tengligini topamiz. Urinmaning $A|a, f(a)|$ nuqtadagi burchak koeffitsiyenti $f'(a)$ ga teng, bundan urinmaning ushbu tenglamasi hosil bo’ladi:

$$y - f(x) = f'(a)(x - a).$$

Kesishish nuqtasi bo’lgan a_1 ni topish maqsadida $y = 0$ deb olamiz:

$$-f(a)=f'(a)(a_1-a),$$

bundan,

$$a_1=a-\frac{f(a)}{f'(a)} \qquad (11)$$

Xuddi shu usul bilan mana bularni topamiz:

$$a_2=a_1-\frac{f(a_1)}{f'(a_1)},$$

$$a_3=a_2-\frac{f(a_2)}{f'(a_2)}$$

va hokazo.

Agar A nuqtaga urinma o'tkazilsa, biz ildizga yaqinlashmay, balki uzoqlashamiz: a ga qaraganda a_1 ancha C dan uzoqda turadi. Matematik tahlildan ma'lum bo'lishicha, $f(a)$ va $f''(a)$ larning ishoralari bir xil, ya'ni

$$f(a)\,f''(a)>0 \qquad (11')$$

bo'lganda va faqat shundagina egri chiziq A nuqtada o'zining qabariq tomoni bilan OX o'qqa qaratilgan bo'ladi.

Binobarin, Nyuton usulini faqat (11′) shart bajarilgandagina ishlatish kerak. Tajribada ildizni avval Gorner-Ruffini metodi orqali $0{,}01$ yoki $0{,}001$ aniqlik bilan hisoblab chiqqandan so'ng Nyuton metodi bilan hisoblash ishini davom ettirish tavsiya etiladi.

Misol tarzida yana

$$f(x)=x^3-8x+1=0$$

tenglamani olamiz. Yuqorida biz topgan edikki, bu tenglamaning ildizlaridan biri $0{,}001$ aniqlik bilan $2{,}763$ ga teng edi. Endi

$$f(2{,}763)\approx-0{,}010791<0, \quad f(2{,}764)\approx0{,}004119>0,$$

bo'lgani uchun ildiz $2{,}763$ va $2{,}764$ orasida yotadi. Endi Nyuton usulidan foydalanamiz; uni $2{,}764$ ga tatbiq qilish kerak, chunki

$$f''(2{,}764)\,f(2{,}764)>0.$$

Natijada

$$f'(2{,}764)\approx14{,}9191,$$

$$a_1 = 2,764 - \frac{f(2,764)}{f'(2,764)} \approx 2,764 - \frac{0,004119}{14,9191} \approx 2,7637239,$$

hosil bo’ladi. Topilgan a_1 yaqinlashish verguldan so’ng oltinchi xonagacha to’g’ri, darhaqiqat, $2,763723$ va $2,763724$ qiymatlarni $f(x)$ ko’phadga qo’ysak ko’ramizki,

$$f(2,763723) < 0, \quad f(2,763723) > 0.$$

bo’ladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI.

1. I.A.Karimov. Jahon moliyaviy – iqtisodiy inqirozi, O’zbekiston sharoitida, uni bartaraf etishning yo’llari va choralari. Toshkent. 2009 yil.

2. I.A.Karimov. Barkamol avlod orzusi. T. 1999 yil.

3. I.A.Karimov. O’zbekiston XXI asrbo’sag’asida. T. 1997 yil.

4. I.A.Karimov.Mamlakatimizni modernizatsiya qilish va kuchli fuqorolik jamiyati barpo yetish – ustuvor maqsadimizdir (Prezident I.A.Karimovning O’zbekiston Respublikasi Oliy Majlisi Qonunchilik palatasi va Senatining qo’shma majlisidagi ma’ruzasi). O’zbekiston ovozi gazetasi, 12 son, 2010 yil 28-yanvar.

5. O’zbekiston Respublikasi Prezidentining qarori. “Barkamol avlod yili” Davlat dasturi to’g’risida. O’zbekiston ovozi gazetasi, 12 son, 2010 yil 28-yanvar.

6 A. Karimov “Barkamol avlod orzusi” Toshkent – 2000 yil.

7 A. Karimov “Inson baxt uchun tug`iladi”, “Sharq” – T. 2001

8 I.A. Karimov “Yuksak ma`naviyat – yengilmas kuch”. Toshkent “ Ma`naviyat” 2005.

9 .I.A. Karimov “Jahon moliyaviy – iqtisodiy inqirozi, O`zbekiston sharoitida uni bartaraf etishning yo`llari va choralari” – T: O`zbekiston, 2009 yil.

10 I.A. Karimov “Mamalakatimizda demokratik islohotlarni yanada chuqurlashtirish va fuqorolik jamiyatini rivojlantirish konsepsiyasi” – T: O`zbekiston, 2010 yil.

11 . I.A.Karimov “Mamlakatimizni modernizatsiya qilish va kuchli fuqorolik jamiyati barpo etish-ustuvor maqsadimiz”. “Xalq so`zi” gazetasi 2010 yil. 27 yanvar.

12 . I.A. Karimov “Mamlakatimizni modernizatsiya qilish yo`lini izchil davomi – taraqqiyotimizning muhim omilidir”, “Ishonch” gazetasi; 2010 yil 8 – dekabr

13 . I.A. Karimov “Barcha reja va dasturlarimiz vatanimiz taraqqiyotini yuksaltirish, xalqimiz farovonligini oshirishga xizmat qiladi”, “Xalq so`zi” gazetasi, 2011 yil 22 – yanvar.

14. А.И Кострикин. “Введение в алгебру” М.1977г 496-ст

15. Л.Я Куликов. “Алгебра и теория чисел” М. 1979г 423-ст

16. А.Г. Курош. “Олий алгебра курси” Т 1976 396-бет

17.Р. Н. Назаров. Б. Т. Тошпўлатов. А. Д. Дусумбетов. “Алгебра ва сонлар назарияси” 1-2 том Тошкент 1995

18. Е.Л Ван дер Варден “Алгебра” М 1979

19. Д.К. Фаддеев, И. С Соминиский. “Сборник задач по вышей алгебре” М.1977

20. Ж.Х Хожиев, А.С Файнлейб. “Алгебра ва сонлар назарияси курси” Т.2001

21. D.I Yunusova, A.S Yunusov “ Algebra va sonlar nazariyasi”

22.WWW.algebra. narod.ru

23. Internet: WWW. Ziyonet.uz,

INTERNET MA'LUMOTLARI

Рубрика " Алгебра"

8.2.1. Решение неполных квадратных уравнений

I. $ax^2=0$ – ***неполное*** квадратное уравнение ***(b=0, c=0)***. Решение: $x=0$. **Ответ: 0.**

Решить уравнения.

Пример 1. $2x\cdot(x+3)=6x-x^2$.

Решение. Раскроем скобки, умножив **2x** на каждое слагаемое в скобках:

$2x^2+6x=6x-x^2$; переносим слагаемые из правой части в левую:

$2x^2+6x-6x+x^2=0$; приводим подобные слагаемые:

$3x^2=0$, отсюда $x=0$.

Ответ: 0.

II. $ax^2+bx=0$ – ***неполное*** квадратное уравнение ***(c=0)***. Решение: $x\ (ax+b)=0 \rightarrow x_1=0$ или $ax+b=0 \rightarrow x_2=-b/a$. **Ответ: 0; -b/a.**

Пример 2. $5x^2-26x=0$.

Решение. Вынесем общий множитель **x** за скобки:

$x(5x-26)=0$; каждый множитель может быть равным нулю:

x=0 или **5x-26=0** → $5x=26$, делим обе части равенства на **5** и получаем: $x=5{,}2$.

Ответ: 0; 5,2.

Пример 3. $64x+4x^2=0$.

Решение. Вынесем общий множитель **4x** за скобки:

$4x(16+x)=0$. У нас три множителя, $4\neq0$, следовательно, или **x=0** или **16+x**=0. Из последнего равенства получим $x=-16$.

Ответ: -16; 0.

Пример 4. $(x-3)^2+5x=9$.

Решение. Применив формулу квадрата разности двух выражений раскроем скобки:

$x^2-6x+9+5x=9$; преобразуем к виду: $x^2-6x+9+5x-9=0$; приведем подобные слагаемые:

$x^2-x=0$; вынесем **x** за скобки, получаем: $x\ (x-1)=0$. Отсюда или **x=0** или **x-1=0** → $x=1$.

Ответ: 0; 1.

III. $ax^2+c=0$ – ***неполное*** квадратное уравнение ***(b=0)***; Решение: $ax^2=-c \rightarrow x^2=-c/a$.

Если **(-c/a)<0**, то действительных корней нет. Если **(-c/a)>0**, то имеем два действительных корня:

$$x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}} \quad \text{и} \quad x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}. \quad \text{Ответ: } \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Пример 5. x^2-49=0.

Решение.

x^2=49, отсюда **x=±7. Ответ:** -7; 7.

Пример 6. 9x^2-4=0.

Решение.

$$9x^2 = 4 \quad |:9$$

$$x^2 = \frac{4}{9}; \text{ отсюда } x = \pm\sqrt{\frac{4}{9}}; \quad x = \pm\frac{2}{3}.$$

Ответ: $-\frac{2}{3}$; $\frac{2}{3}$.

8.2.5. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители

Квадратный трехчлен ***ax^2+bx+c*** *можно разложить на линейные множители по формуле:*

ax^2+bx+c=a (x-x_1)(x-x_2), *где* ***x_1, x_2*** *— корни квадратного уравнения* ***ax^2+bx+c=0.***

Разложить квадратный трехчлен на линейные множители:

Пример 1). 2x^2-7x-15.

Решение. Найдем корни квадратного уравнения: 2x^2-7x-15=0.

a=2; **b**=-7; **c**=-15. Это общий случай для полного квадратного уравнения. Находим дискриминант **D**.

$D=b^2-4ac=(-7)^2-4\cdot2\cdot(-15)=49+120=169=13^2>0$; 2 действительных корня.

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{7-13}{2\cdot2} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} = -1{,}5; \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{7+13}{4} = 5.$$

Применим формулу: ***ax^2+bx+c=a (x-x_1)(x-x_2).***

2x^2-7x-15=2 (x+1,5)(x-5)=(2x+3)(x-5). Мы представили данный трехчлен **2x^2-7x-15** в виде произведения двучленов **2x+3** и **x-5.**

Ответ: 2x^2-7x-15=**(2x+3)(x-5).**

Пример 2). 3x^2+2x-8.

Решение. Найдем корни квадратного уравнения:

3x^2+2x-8=0.

a=3; **b**=2; **c**=-8. Это частный случай для полного квадратного уравнения с четным вторым коэффициентом (**b**=2). Находим дискриминант **D_1.**

$$D_1 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = 1^2 - 3\cdot(-8) = 1 + 24 = 25 = 5^2 > 0; \text{ 2 действительных корня.}$$

$$x_1 = \frac{-\frac{b}{2} - \sqrt{D_1}}{a} = \frac{-1-5}{3} = -\frac{6}{3} = -2; \quad x_2 = \frac{-\frac{b}{2} + \sqrt{D_1}}{a} = \frac{-1+5}{3} = \frac{4}{3}.$$

Применим формулу: ***ax^2+bx+c=a (x-x_1)(x-x_2).***

$$3x^2 + 2x - 8 = 3(x + 2)\left(x - \frac{4}{3}\right) = (x + 2)(3x - 4).$$

Мы представили трехчлен **3x^2+2x-8** в виде произведения двучленов **x+2** и **3x-4**.

Ответ: $3x^2+2x-8$**=(x+2)(3x-4).**

Пример 3). $5x^2$-3x-2.

Решение. Найдем корни квадратного уравнения:

$5x^2-3x-2=0$.

a=5; **b**=-3; **c**=-2. Это частный случай для полного квадратного уравнения с выполненным условием: **a+b+c=0** (5-3-2=0). В таких случаях **первый корень** всегда равен единице, а**второй корень** равен частному от деления свободного члена на первый коэффициент:

$x_1=1;\quad x_2=\frac{c}{a}=-\frac{2}{5}=-0,4.$

Применим формулу: ***$ax^2+bx+c=a\,(x-x_1)(x-x_2)$.***

$5x^2-3x-2=5\,(x-1)(x+0,4)=(x-1)(5x+2)$. Мы представили трехчлен **$5x^2$-3x-2** в виде произведения двучленов **x-1** и **5x+2.**

Ответ: $5x^2-3x-2$**=(x-1)(5x+2).**

Пример 4). $6x^2$+x-5.

Решение. Найдем корни квадратного уравнения:

$6x^2+x-5=0$.

a=6; **b**=1; **c**=-5. Это частный случай для полного квадратного уравнения с выполненным условием: **a-b+c=0** (6-1-5=0). В таких случаях **первый корень** всегда равен минусединице, а **второй корень** равен минус частному от деления свободного члена на первый коэффициент:

$x_1=-1;\quad x_2=-\frac{c}{a}=\frac{5}{6}.$

Применим формулу: ***$ax^2+bx+c=a\,(x-x_1)(x-x_2)$.***

$6x^2+x-5=6(x+1)(x-\frac{5}{6})=(x+1)(6x-5).$

Мы представили трехчлен **$6x^2$+x-5** в виде произведения двучленов **x+1** и **6x-5**.

Ответ: $6x^2+x-5$=**(x+1)(6x-5)**.

Пример 5). x^2-13x+12.

Решение. Найдем корни приведенного квадратного уравнения:

$x^2-13x+12=0$. Проверим, можно ли применить теорему Виета. Для этого найдем дискриминант и убедимся, что он является полным квадратом целого числа.

a=1; **b**=-13; **c**=12. Находим дискриминант **D.**

$D=b^2-4ac$ $=13^2-4\cdot1\cdot12=169-48=121=$**$11^2$**.

Применим теорему Виета: сумма корней должна быть равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней должно быть равно свободному члену:

$x_1+x_2=13$; $x_1\cdot x_2=12$. Очевидно, что $x_1=1$; $x_2=12$.

Применим формулу: ***$ax^2+bx+c=a\,(x-x_1)(x-x_2)$.***

$x^2-13x+12=(x-1)(x-12)$.

Ответ: $x^2-13x+12$=**(x-1)(x-12)**.

Пример 6). x^2-4x-6.

Решение. Найдем корни приведенного квадратного уравнения:

x^2-4x-6=0.

a=1; **b**=-4; **c**=-6. Второй коэффициент — четное число. Находим дискриминант D_1.

$D_1 = (\frac{b}{2})^2 - ac = 2^2 - 1\ (-6) = 4 + 6 = 10 > 0$; 2 действительных корня.

Дискриминант не является полным квадратом целого числа, поэтому, теорема Виета нам не поможет, и мы найдем корни по формулам для четного второго коэффициента:

$$x_1 = \frac{-\frac{b}{2} - \sqrt{D_1}}{a} = 2 - \sqrt{10}; \quad x_2 = \frac{-\frac{b}{2} + \sqrt{D_1}}{a} = 2 + \sqrt{10}.$$

Применим формулу: ***$ax^2+bx+c=a\ (x-x_1)(x-x_2)$*** и запишем ответ:

Ответ: $x^2 - 4x - 6 = (x - 2 + \sqrt{10})(x - 2 - \sqrt{10})$.

Друзья, для того, чтобы разложить квадратные трехчлены на множители, мы решали каждое квадратное уравнение рациональным способом. Все эти способы мы рассмотрели ранее в теме: «Решение полных квадратных уравнений».

8.2.4. Применение теоремы Виета

Часто требуется найти сумму квадратов $(x_1^2+x_2^2)$ или сумму кубов $(x_1^3+x_2^3)$ корней квадратного уравнения, реже — сумму обратных значений квадратов корней или сумму арифметических квадратных корней из корней квадратного уравнения:

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} \quad \text{или} \quad \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}.$$

Помочь в этом может теорема Виета:

Сумма корней приведенного квадратного уравнения **$x^2+px+q=0$** равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену:

$x_1+x_2=-p$; $x_1 \cdot x_2=q$.

Выразим через **p** и **q**:

1) сумму квадратов корней уравнения **$x^2+px+q=0$;**

2) сумму кубов корней уравнения **$x^2+px+q=0$.**

Решение.

1) Выражение **$x_1^2+x_2^2$** получится, если взвести в квадрат обе части равенства **$x_1+x_2=-p$;**

$(x_1+x_2)^2=(-p)^2$; раскрываем скобки: $x_1^2+2x_1x_2+ x_2^2=p^2$; выражаем искомую сумму: $x_1^2+x_2^2=p^2-2x_1x_2=p^2-2q$. Мы получили полезное равенство: **$x_1^2+x_2^2=p^2-2q$.**

2) Выражение **$x_1^3+x_2^3$** представим по формуле суммы кубов в виде:

$(x_1^3+x_2^3)=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=-p\cdot(p^2-2q-q)=-p\cdot(p^2-3q)$.

Еще одно полезное равенство: **$x_1^3+x_2^3=-p\cdot(p^2-3q)$.**

Примеры.

3) x^2-3x-4=0. Не решая уравнение, вычислите значение выражения **$x_1^2+x_2^2$**.

Решение.

По теореме Виета сумма корней этого приведенного квадратного уравнения

$x_1+x_2=-p=3$, а произведение $x_1 \cdot x_2=q=-4$. Применим полученное нами (**в примере 1**) равенство:
$x_1^2+x_2^2=p^2-2q$. У нас $-p=x_1+x_2=3 \rightarrow p^2=3^2=9$; $q=x_1x_2=-4$. Тогда $x_1^2+x_2^2=9-2\cdot(-4)=9+8=17$.
Ответ: $x_1^2+x_2^2=17$.
4) $x^2-2x-4=0$. Вычислить: $x_1^3+x_2^3$.
Решение.
По теореме Виета сумма корней этого приведенного квадратного уравнения $x_1+x_2=-p=2$, а произведение $x_1 \cdot x_2=q=-4$. Применим полученное нами (**в примере 2**) равенство: $x_1^3+x_2^3=-p\cdot(p^2-3q)=2\cdot(2^2-3\cdot(-4))=2\cdot(4+12)=2\cdot16=32$.
Ответ: $x_1^3+x_2^3=32$.
Вопрос: а если нам дано не приведенное квадратное уравнение? Ответ: его всегда можно «привести», разделив почленно на первый коэффициент.

5) $2x^2-5x-7=0$. Не решая, вычислить: $x_1^2+x_2^2$.
Решение. Нам дано полное квадратное уравнение. Разделим обе части равенства на 2 (первый коэффициент) и получим приведенное квадратное уравнение: $x^2-2{,}5x-3{,}5=0$.
По теореме Виета сумма корней равна **2,5**; произведение корней равно **-3,5**.
Решаем так же, как пример **3)**, используя равенство: $x_1^2+x_2^2=p^2-2q$.
$x_1^2+x_2^2=p^2-2q=2{,}5^2-2\cdot(-3{,}5)=6{,}25+7=13{,}25$.
Ответ: $x_1^2+x_2^2=13{,}25$.
6) $x^2-5x-2=0$. Найти:
$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$. Преобразуем это равенство и, заменив по теореме Виета сумму корней через **-p**, а произведение корней через **q**, получим еще одну полезную формулу. При выводе формулы использовали равенство 1): $x_1^2+x_2^2=p^2-2q$.

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{1}{x_1^2}^{\backslash x_2^2}+\frac{1}{x_2^2}^{\backslash x_1^2}=\frac{x_2^2+x_1^2}{x_1^2\cdot x_2^2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{(x_1x_2)^2}=\frac{p^2-2q}{q^2}. \qquad \boxed{\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{p^2-2q}{q^2}}$$

В нашем примере $x_1+x_2=-p=5$; $x_1 \cdot x_2=q=-2$. Подставляем эти значения в полученную формулу:

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{p^2-2q}{q^2}=\frac{5^2-2\cdot(-2)}{(-2)^2}=\frac{25+4}{4}=\frac{29}{4}=7\frac{1}{4}=7{,}25.$$

Ответ: $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=7{,}25.$

7) $x^2-13x+36=0$. Найти:
$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$. Преобразуем эту сумму и получим формулу, по которой можно будет находить сумму арифметических квадратных корней из корней квадратного уравнения.

$$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=\sqrt{(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})^2}=\sqrt{(\sqrt{x_1})^2+2\sqrt{x_1x_2}+(\sqrt{x_2})^2}=\sqrt{x_1+2\sqrt{x_1x_2}+x_2};$$

$$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=\sqrt{x_1+x_2+2\sqrt{x_1x_2}}=\sqrt{-p+2\sqrt{q}}. \quad \boxed{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=\sqrt{-p+2\sqrt{q}}}$$

У нас **$x_1+x_2=-p=13$; $x_1\cdot x_2=q=36$.** Подставляем эти значения в выведенную формулу:

$$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=\sqrt{-p+2\sqrt{q}}=\sqrt{13+2\sqrt{36}}=\sqrt{13+12}=\sqrt{25}=5.$$

Ответ: $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=5.$

Совет: всегда проверяйте возможность нахождения корней квадратного уравнения по подходящему способу, ведь **4** рассмотренные **полезные формулы** позволяют быстро выполнить задание, прежде всего, в тех случаях, когда дискриминант — «неудобное» число. Во всех простых случаях находите корни и оперируйте ими. Например, в последнем примере подберем корни по теореме Виета: сумма корней должна быть равна **13**, а произведение корней **36**. Что это за числа? Конечно, **4 и 9.** А теперь считайте сумму квадратных корней из этих чисел: **2+3=5.** Вот так то!

8.2.3. Теорема Виета

I. Теорема Виета для приведенного квадратного уравнения.

Сумма корней приведенного квадратного уравнения **$x^2+px+q=0$** равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену:

$x_1+x_2=-p$; $x_1\cdot x_2=q$.

Найти корни приведенного квадратного уравнения, используя теорему Виета.

Пример 1) $x^2-x-30=0$. Это приведенное квадратное уравнение **($x^2+px+q=0$)**, второй коэффициент **$p=-1$**, а свободный член **$q=-30$.** Сначала убедимся, что данное уравнение имеет корни, и что корни (если они есть) будут выражаться целыми числами. Для этого достаточно, чтобы дискриминант был полным квадратом целого числа.

Находим дискриминант **D**$=b^2— 4ac=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-30)=1+120=121=\mathbf{11^2}$.

Теперь по теореме Виета сумма корней должна быть равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, т.е. (**-p**), а произведение равно свободному члену, т.е. (**q**). Тогда:

$x_1+x_2=1$; $x_1\cdot x_2=-30$. Нам надо подобрать такие два числа, чтобы их произведение было равно **-30**, а сумма – **единице**. Это числа **-5** и **6**. **Ответ: -5; 6.**

Пример 2) $x^2+6x+8=0$. Имеем приведенное квадратное уравнение со вторым коэффициентом **p=6** и свободным членом **q=8**. Убедимся, что есть целочисленные корни. Найдем дискриминант **D_1**, так как второй коэффициент – четное число. **D_1**$=3^2-1\cdot8=9-8=1=\mathbf{1^2}$. Дискриминант D_1 является полным квадратом числа **1**, значит, корни данного уравнения являются целыми числами. Подберем корни по теореме Виета: сумма корней равна **–p=-6**, а произведение корней равно **q=8**. Это числа **-4** и **-2**.

На самом деле: $-4-2=-6=-p$; $-4\cdot(-2)=8=q$. **Ответ: -4; -2.**

Пример 3) $x^2+2x-4=0$. В этом приведенном квадратном уравнении второй коэффициент**p=2**, а свободный член **q=-4**. Найдем дискриминант **D_1**, так как второй коэффициент – четное число. $\mathbf{D_1}=1^2-1\cdot(-4)=1+4=\mathbf{5}$**.** Дискриминант не является полным квадратом числа, поэтому, делаем **вывод**: *корни данного уравнения не являются целыми числами и найти их по теореме Виета нельзя.* Значит, решим данное уравнение, как обычно, по формулам (в данном случае по формулам для частного случая с четным вторым коэффициентом). Получаем:

$x_1=-1-\sqrt{5}$; $x_2=-1+\sqrt{5}$;

Пример 4). Составьте квадратное уравнение по его корням, если $\mathbf{x_1=-7,\ x_2=4}$**.**
Решение. Искомое уравнение запишется в виде: $\mathbf{x^2+px+q=0}$, причем, на основании теоремы Виета $\mathbf{-p=x_1+x_2}=-7+4=\mathbf{-3} \rightarrow p=3$; $\mathbf{q=x_1\cdot x_2}=-7\cdot 4=\mathbf{-28}$. Тогда уравнение примет вид: $\mathbf{x^2+3x-28=0}$**.**

Пример 5). Составьте квадратное уравнение по его корням, если:

$x_1=1-\sqrt{3}$; $x_2=1+\sqrt{3}$.

Решение. Составим уравнение $x^2+px+q=0$.

$-p=x_1+x_2=(1-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})=2$; отсюда $p=-2$.

$q=x_1\cdot x_2=(1-\sqrt{3})\cdot(1+\sqrt{3})=1^2-(\sqrt{3})^2=1-3=-2$.

Получаем: $x^2-2x-2=0$.

II. Теорема Виета для полного квадратного уравнения $\mathbf{ax^2+bx+c=0}$**.**
Сумма корней равна минус **b**, деленному на **a**, произведение корней равно **c**, деленному на **a:**

$\mathbf{x_1+x_2=-b/a;\quad x_1\cdot x_2=c/a}$**.**

Пример 6). Найти сумму корней квадратного уравнения $\mathbf{2x^2-7x-11=0}$.
Решение.
Убеждаемся, что данное уравнение будет иметь корни. Для этого достаточно составить выражение для дискриминанта, и, не вычисляя его, просто убедиться, что дискриминант больше нуля. $\mathbf{D}=7^2-4\cdot 2\cdot(-11)\mathbf{>0}$. А теперь воспользуемся **теоремой Виета** для полных квадратных уравнений.

$\mathbf{x_1+x_2=-b:a}=-(-7):2=\mathbf{3{,}5}$**.**

Пример 7). Найдите произведение корней квадратного уравнения $\mathbf{3x^2+8x-21=0}$**.**
Решение.
Найдем дискриминант $\mathbf{D_1}$, так как второй коэффициент (**8**) является четным числом. $\mathbf{D_1}=4^2-3\cdot(-21)=16+63=79\mathbf{>0}$. Квадратное уравнение имеет **2** корня, по теореме Виета произведение корней $\mathbf{x_1\cdot x_2=c:a}=-21:3=\mathbf{-7}$**.**

8.2.2. Решение полных квадратных уравнений

I. $\mathbf{ax^2+bx+c=0}$ – квадратное уравнение общего вида
Дискриминант $\mathbf{D=b^2 - 4ac}$**.**
Если **D>0**, то имеем два действительных корня:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \quad \text{и} \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}.$$

Если **D=0**, то имеем единственный корень (или два равных корня) **x=-b/(2a)**.
Если D<0, то действительных корней нет.

Пример 1) **$2x^2+5x-3=0$.**

Решение. **a**=2; **b**=5; **c**=-3.

$D=b^2$— 4ac$=5^2-4\cdot2\cdot(-3)=25+24=49=7^2>0$; 2 действительных корня.

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-5-7}{2\cdot2}=\frac{-12}{4}=-3;\qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-5+7}{2\cdot2}=\frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{2}_{1}\cdot2}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: -3; $\frac{1}{2}$.

Пример 2) **$4x^2+21x+5=0$.**

Решение. **a**=4; **b**=21; **c**=5.

$D=b^2$— 4ac$=21^2$— $4\cdot4\cdot5=441-80=361=19^2>0$; 2 действительных корня.

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-21-19}{2\cdot4}=\frac{-40}{8}=-5;\qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-21+19}{2\cdot4}=\frac{-2}{8}=-\frac{1}{4}.$$

Ответ: -5; $-\frac{1}{4}$.

II. $ax^2+bx+c=0$ – квадратное уравнение частного вида <u>при четном втором коэффициенте **b**</u>

Дискриминант $D_1=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac$. Если $D_1>0$, то имеем два действительных корня:

$$x_1=\frac{-\frac{b}{2}-\sqrt{D_1}}{a}\quad \text{и} \quad x_2=\frac{-\frac{b}{2}+\sqrt{D_1}}{a}.$$

Если $D_1=0$, то имеем единственный корень $x=-\frac{b}{2a}$.

Если $D_1<0$, то действительных корней нет.

Пример 3) **$3x^2-10x+3=0$.**

Решение. **a**=3; **b**=-10 (<u>четное число</u>); **c**=3.

Дискриминант $D_1=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac=5^2-3\cdot3=25-9=16=4^2>0$; 2д.к.

$$x_1=\frac{-\frac{b}{2}-\sqrt{D_1}}{a}=\frac{5-4}{3}=\frac{1}{3};\qquad x_2=\frac{-\frac{b}{2}+\sqrt{D_1}}{a}=\frac{5+4}{3}=3.$$

Ответ: $\frac{1}{3}$; 3.

Пример 4) **$5x^2-14x-3=0$.**

Решение. **a**=5; **b**= -14 (<u>четное число</u>); **c**=-3.

Дискриминант $D_1=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac=7^2-5\cdot(-3)=49+15=64=8^2>0$; 2д.к.

$$x_1=\frac{-\frac{b}{2}-\sqrt{D_1}}{a}=\frac{7-8}{5}=-\frac{1}{5};\qquad x_2=\frac{-\frac{b}{2}+\sqrt{D_1}}{a}=\frac{7+8}{5}=3.$$

Ответ: $-\frac{1}{5}$; 3.

Пример 5) **$71x^2+144x+4=0$.**

Решение. **a**=71; **b**=144 (<u>четное число</u>); **c**=4.

Дискриминант $D_1 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = 72^2 - 71 \cdot 4 = 5184 - 284 = 4900 = 70^2 > 0$; 2д.к.

$$x_1 = \frac{-\frac{b}{2} - \sqrt{D_1}}{a} = \frac{-72-70}{71} = \frac{-142}{71} = -2; \quad x_2 = \frac{-\frac{b}{2} + \sqrt{D_1}}{a} = \frac{-72+70}{71} = -\frac{2}{71}.$$

Ответ: -2; $-\frac{2}{71}$.

Пример 6) **$9x^2$-30x+25=0.**

Решение. **a**=9; **b**=-30 (<u>четное число</u>); **c**=25.

Дискриминант $D_1 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = 15^2 - 9 \cdot 25 = 225 - 225 = 0$; единственный корень.

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-30}{2 \cdot 9} = \frac{\cancel{30}^{5}}{\cancel{18}_{3}} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}.$$

Ответ: $1\frac{2}{3}$.

III. ax^2+bx+c=0 – квадратное уравнение <u>частного вида при условии</u>**: a-b+c=0.** Первый корень всегда равен минус единице, а второй корень равен минус **c**, деленному на **a**:

x_1=-1, x_2=-c/a.

Пример 7) **$2x^2$+9x+7=0.**

Решение. **a**=2; **b**=9; **c**=7. Проверим равенство: **a-b+c=0.** Получаем: **2-9+7=0**. Тогда **x_1=-1, x_2=-c/a=-7/2=-3,5.** Ответ: **-1; -3,5.**

IV. ax^2+bx+c=0 – квадратное уравнение частного вида при условии**: a+b+c=0.** Первый корень всегда равен единице, а второй корень равен **c**, деленному на **a**:

x_1=1, x_2=c/a.

Пример 8) **$2x^2$-9x+7=0.**

Решение. **a**=2; **b**=-9; **c**=7. Проверим равенство: **a+b+c=0.** Получаем: **2-9+7=0**. Тогда **x_1=1, x_2=c/a=7/2=3,5.** Ответ: **1; 3,5.**