

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

НАМАНГАН ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ
АМАЛИЙ МАТЕМАТИКА КАФЕДРАСИ

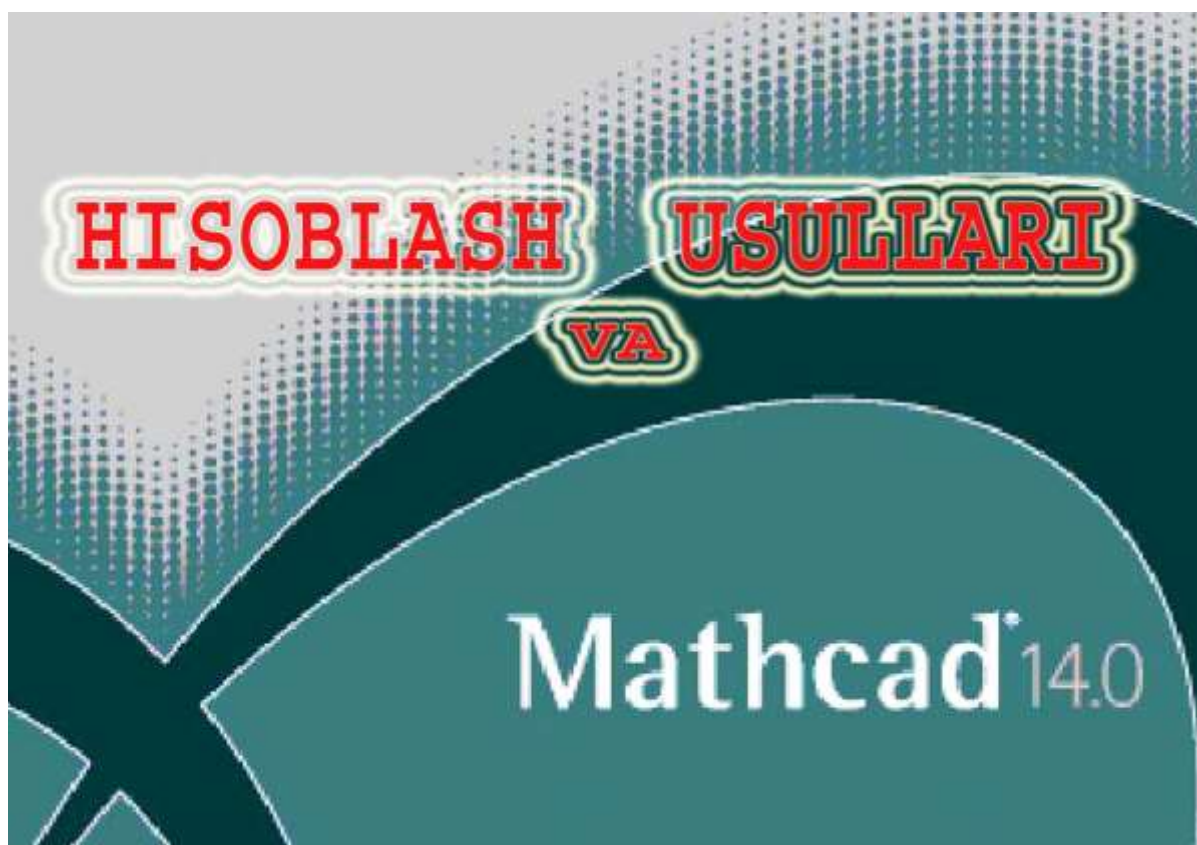
А.Имомов

ҲИСОБЛАШ УСУЛЛАРИ ВА MATHCAD

1-қисм

Алгебра ва анализ масалаларини тақрибий ечиш
Ўқув услубий қўлланма

университетларнинг 5130100-математика, 5130200-амалий математика
ва информатика йўналишлари учун тавсия этилган



http://www.ziyonet.uz/files/znuz_215446_20111025095315.rar
http://www.ziyonet.uz/files/znuz_215446_20111102151005.rar

Наманган-2016

УДК 519.6 (075.8)

ББК 22.19

А.Имомов. Ҳисоблаш усуллари ва MathCAD. Ўқув услубий қўлланма. Наманган, НамДУ, 2016.-100 б.

Ушбу ўқув услубий қўлланма университетларнинг 5130200-«Амалий математика ва информатика», 5130100 «Математика» йўналишлар учун «Ҳисоблаш усуллари» фанини ўрганувчилар учун мўлжалланган ва амалдаги ўқув режалар, ўқув дастурлари асосида тузилган. Ҳар бир мавзу асосий тушунчалар ва натижалар (формулалар), мавзунинг моҳиятини очиқ берувчи мулоҳазалар саволлардан тузилган.

1-қисм алгебра ва анализ масалаларини тақрибий ечишга бағишланган. Бу ерда битта нозик тенглама, уларнинг системалари, чизикли тенгламалар системалари, интерполяция, тақрибий дифференциаллаш ва интеграллаш масалалари қаралган.

2-қисм дифференциал ва интеграл тенгламаларни тақрибий ечишга қаратилган.

Биринчи марта, барча ҳисоблаш усуллари учун MathCAD программасида компьютерга киритилган натижа берадиган, синаб кўрилган, кўриниши табиий –математик ёзув билан бир хил бўлган масала ечишнинг алгоритмлари келтирилган.

MathCAD MATHeMatica (математика) ва CAD (Computer Aided Design — системы автоматического проектирования, ёки Математик САПР-математик автоматлаштирилган лойиҳалаш тизимлари) сўзларидан олинган. Шундай қилиб, MathCAD-ҳисоблашларни автоматлаштирувчи математик ахборот тизими демакдир.

Тизим деб қўйилган мақсадларини амалга ошириш учун бир вақтнинг ўзида ҳам ягона, ҳам ҳар хил элементларнинг мажмуи деб қаралиши мумкин бўлган ҳар қандай объектга айтилади.

Ахборот тизими- қўйилган мақсадни амалга ошириш учун ахборотни йиғиш, сақлаш, қайта ишлаш, қидириш ва узатиш усуллари, воситалари ва ходимларнинг ўзаро боғлиқ мажмуидир.

Ахборот тизимга инсон савол билан мурожаат қилади, у жавоб қайтаради.Фойдаланувчи MathCADга масала билан мурожаат қилади, у жавоб қайтаради.

Ўқув услубий қўлланма учун масъул: т.ф.н.,доц.П.Каримов

УДК 519.6 (075.8)

ББК 22.19

© Наманган давлат университети, 2016

МУНДАРИЖА

1-қисм. Маърузалар.

- [1.1. КИРИШ. ҲИСОБЛАШ МАТЕМАТИКАСИ НИМА ?.....](#)
- [1.2. НОЧИЗИҚ ТЕНГЛАМА УЧУН ИТЕРАЦИЯ УСУЛИ.....](#)
- [1.3. НОЧИЗИҚ ТЕНГЛАМА УЧУН НЬУТОН УСУЛИ.....](#)
- [1.4. ЧИЗИҚЛИ АЛГЕБРА МАСАЛАЛАРИНИ ТАҚРИБИЙ ЕЧИШ....](#)
- [1.5. ЧАТСНИ ЕЧИШНИНГ АНИҚ УСУЛЛАРИ. ГАУСС ВА ГАУСС-ЖОРДАН УСУЛИ.....](#)
- [1.6. ЧИЗИҚЛИ СИСТЕМА УЧУН ИТЕРАЦИЯ УСУЛИ.....](#)
- [1.7. МАТРИЦАНИНГ ХОС СОНЛАРИНИ ТОПИШ.....](#)
- [1.8. НОЧИЗИҚ ТЕНГЛАМА УЧУН ИТЕРАЦИЯ УСУЛИ.....](#)
- [1.9. НОЧИЗИҚ СИСТЕМА УЧУН НЬУТОН-КАНТОРОВИЧ УСУЛИ](#)
- [1.10. НЬУТОН ИНТЕРПОЛЯЦИЯ КЎПХАДИ.....](#)
- [1.11. ЛАГРАНЖ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ КЎПХАДИ.....](#)
- [1.12. СПЛАЙНЛАР БИЛАН ИНТЕРПОЛЯЦИЯЛАШ.....](#)
- [1.13. ТАҚРИБИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАШ ФОРМУЛАЛАРИ. ЧЕКЛИ АЙИРМАЛИ ХОСИЛАЛАР.....](#)
- [1.14. ТАҚРИБИЙ ИНТЕГРАЛЛАШ ФОРМУЛАЛАРИ.....](#)
- [1.15. КУБАТУРА ФОРМУЛАЛАРИ.....](#)
- [1.16. КВАДРАТУРА ФОРМУЛАЛАРИНИНГ ҚОЛДИҚЛАРИ.....](#)
- [1.17. ФУНКЦИЯ МИНИМУМИНИ ТОПИШ \(МАТЕМАТИК ПРОГРАММАЛАШ -МП МАСАЛАСИ\).....](#)
- [1.18. ЧИЗИҚЛИ ФУНКЦИЯ МИНИМУМИНИ ТОПИШ \(ЧИЗИҚЛИ ПРОГРАММАЛАШ \(ЧП\) МАСАЛАСИ\).....](#)

ИЛОВАЛАР.

- [1.АМАЛИЙ ИШЛАР.](#)
- [2. ЛАБОРАТОРИЯ ИШЛАР.](#)
- [3. Ҳисоблаш математикасидан тестлар](#)
- [4. Буюк математиклар.](#)
- [5. Mathcad программаси билан ишлаш](#)
- [6.Адабиёт](#)

ЕЧИШ.

1.1. КИРИШ. ҲИСОБЛАШ МАТЕМАТИКАСИ НИМА?

Асосий тушунчалар: Масала ечиш этаплари, ҳисоблаш усуллари, амалий математика тарихи, абсолют ва нисбий хато, муҳим ва ишончли рақамлар, хатоликлар назариясининг асосий масаласи (функциянинг қийматини ҳисоблашдаги хатолик)

Асосий натижалар:

1. Масала ечиш этаплари:

модель → алгоритм → дастур → компьютер → натижа.

2. Ҳисоблаш усуллари: масалани тақрибий ечиш усуллари яратади.

3. Амалий математика тарихи: I-давр эра миздан аввал 3-4-минг йиллар олдин, II-давр Ньютондан кейин, III-давр 1920 й.дан кейин (мураккаб ҳисоблашлар ва компьютер).

4. Хатоликлар: $\Delta a = |A - a| \leq \Delta_a$, $\delta a = \Delta a / |A| \approx \Delta a / |a|$, $\delta a \leq \delta_a$, $\delta_a = \Delta_a / |a|$, $\Delta_a = \delta_a |a|$

5. Функция хатолигини ҳисоблаш:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(c)}{\partial x_i} \Delta_{x_i}, \quad \Delta_y = \max_{c \in G} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f(c)}{\partial x_i} \right| \Delta_{x_i} \approx \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \Delta_{x_i},$$

$$\delta_y = \frac{1}{|y|} \Delta_y = \max_{c \in G} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \ln f(c)}{\partial x_i} \right| \Delta_{x_i} \approx \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \ln f(x)}{\partial x_i} \right| \Delta_{x_i},$$

6. Математик тизимлар (масалаларни ечувчи программалар): *Mathcad, Maple, MatLab.*

1. Математика бу ташқи дунёнинг геометрик формалари ва сонли муносабатлари ҳақидаги фандир (Энциклопедиядан).

Ҳисоблаш усуллари (ҳисоблаш математикаси) амалий масалаларнинг моделлари бўлмиш математик масалаларни тақрибий ечиш учун тақрибий (сонли) усуллар яратиш билан шуғулланади.

Ихтиёрий амалий масалани ечиш учун акад. А.А. Самарский ибораси билан айтганда ҳисоблаш эксперименти ўтказилади. Бу экспериментнинг асосий босқичларини қуйидагича тасвирлаш мумкин:

модель → алгоритм → дастур → компьютер → натижа.

Амалий масала бу бирор воқеа, жараён дир. Масаланинг математик модели бу амалий масалани математик муносабатлар билан баён этиб, типик математик масала синфига келтириш дир. Синфдан ечим аниқ масала танланиб, масалани ечиш учун алгоритм танланади. Алгоритм асосида компьютер учун дастур тузилади. Дастур компьютерда ишга туширилиб натижа олинади. Натижа мавжуд ечим ёки маълумотлар билан солиштирилади, улар мос бўлса алгоритм ҳам, модель ҳам қаноатланарли деб топилади. Акс ҳолда амалий масала яна текширилиб моделга тузатишлар киритилади ва ҳоказо. Бу жараён ечим етарли аниқлик билан топилгунча давом этади.

Ҳисоблаш эксперименти амалий масалани ечишда назарий математика, ҳисоблаш усуллари, алгоритмлар назарияси, дастурлаш, ЭҲМнинг ўрнини яққол тасвирлайди.

2. Математик масалани ечишда турли хил усуллар ишлатилиши мумкин. Агар мумкин бўлса аниқ усуллар, мумкин бўлмаса тақрибий усуллар ишлатилади. Сонли усуллар (ҳисоблаш усуллари) масала ечишнинг энг кучли воситаларидан бири ҳисобланади. Содда ҳисоблаш усуллари билан биз кўп фойдаланамиз. Масалан, квадрат илдиз чиқариш. Шундай масалалар борки, мураккаб ҳисоблашларни талаб қилади: об-ҳавони башорат қилиш, космик кема ҳаракати, кўп йиллик режаларни яратиш. Кўп ҳолларда ҳисоблашларни тез бажаришга тўғри келади. Масалан, суткалик об-ҳаво башорати бир неча соатда ҳисобланиши керак, космик кема траекторияси бир неча минутда ҳисобланиши керак ва ҳоказо. Замонавий ҳисоблаш усуллари ва ЭҲМ лар бундай имкониятларга эга. Ҳисоблаш усуллари масалани ечиш учун алгоритм беради. Алгоритм асосида компьютер учун дастур тузилади.

Алгоритмни асослаш масалани тўғри ечиш учун асос ҳисобланади. Лекин алгоритмнинг баҳосини амалий ҳисоблашлар бажаргандан кейин берилади. Бир нарсага эътибор бериш керак. Компьютер билан ишлаётган фойдаланувчи ўз алгоритми, дастурини синчиклаб текшириб чиқиши керак. Акс ҳолда Питер айтгандек: “Компьютер ҳисобловчининг ночорлигини кўп мартага оширади”, деган ҳодиса рўй бериши мумкин.

3. Мураккаб масалаларни ечиш учун, алгоритмлар яратиш билан шуғулланувчи математиканинг бўлимини амалий математика дейилади. Амалий математиканинг асосий масаласи ечимни берилган аниқлик билан топишдир. Классик математика ечимнинг мавжудлиги, ягоналиги, хоссаларини аниқлаш билан шуғулланади.

Амалий математика тарихини уч даврга бўлиш мумкин. Биринчи давр эра миздан 3-4 минг йил олдин бошланган. Бу даврда юза, ҳажмлар, содда механизмлар ҳисобланган. Иккинчи давр И.Ньютондан (1642-1723 й.й.) бошланган. Бу даврда астраномия масалалари, оддий дифференциал тенгламаларга, чизикли тенгламалар системасига олиб келувчи масалалари ечила бошланди. Ҳарбий масалалар одам бажариши қийин бўлган масалаларни ечишга ундайди. Учинчи давр-компьютерлар даври-20 аснинг 60 йилларидан бошланади. Бу даврда хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар, ночизик тенгламалар ва уларнинг системаларини ечиш усуллари пайдо бўлди.

4. A -аниқ сон, a унинг тақрибий қиймати бўлса, $A - a$ айирма a - тақрибий сон хатоси, $\Delta a = |A - a|$ - тақрибий сон a нинг абсолют хатоси дейилади. Ҳар қандай $\Delta_a \geq \Delta a$ сон тақрибий a соннинг чегаравий абсолют хатоси дейилади. $\delta a = \Delta a / |A|$ миқдор эса a тақрибий соннинг нисбий

хатоси дейилади. $A \approx a$ бўлгани учун амалда $\delta a = \Delta a / |a|$ деб олинади. Ҳар қандай $\delta_a \geq \delta a$ сон a тақрибий соннинг чегаравий нисбий хатоси дейилади. Демак, $\delta a = \Delta a / |a| \leq \delta_a = \Delta_a / |a|$ эканлигидан $\delta_a = \Delta_a / |a|, \Delta_a = a \delta_a$. Абсолют ва нисбий хато ёрдамида аниқ сон $A = a \pm \Delta_a = a(1 \pm \delta_a)$ кўринишида ёзилади.

A, a миқдорлар бирор нормаланган X фазонинг элементлари бўлса, у ҳолда юқоридаги таърифлар қуйидагича ўзгаради:

$$\Delta a = \|A - a\| \leq \Delta_a, \delta a = \Delta a / \|a\| \leq \delta_a, \delta_a = \Delta_a / \|a\|.$$

Мисол 1. $\sqrt{3} \approx 1,732050\dots, A = \sqrt{3}, a = 1,7321, \Delta_a = 0,0001, \delta_a = 0,00006$.

Агар $a < A$ бўлса ками билан, агар $a > A$ бўлса кўпи билан тақрибий сон олинади. Масалан, $A = \sqrt{3}$ учун, $a = 1,73$ ками билан, $a = 1,74$ кўпи билан олинмоқда.

Мисол 2. $A = \pi = 3.14159\dots$ сон 0.00010 аниқлик билан яхлитлансин.

Жавоб, $a = 3.1416$ чунки, $A - a \approx 0.00001 \leq 0.0001/2 = 0.00005$.

Мисол 3. $A = J(f) = \int_b^a f(x) dx$ интеграл $a = J_h^T(f)$ трапециялар

формуласи билан алмаштирилсин:

$$J_h^T(f) = \frac{h}{2} [f(x_0) + 2(f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})) + f(x_n)], x_i = a + ih, i = 0, \dots, n, h = \frac{b-a}{n}.$$

Кейинчалик кўрамизки, $|J(h) - J_h^T(f)| = \frac{h^2}{12} |f''(c)|, a < c < b$.

Мисол 4. $A = f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада $n+1$ та узлуксиз ҳосилаларга эга бўлсин ва $x_i \in [a, b], i = 0, \dots, n$ нуқталарда n - даражали Лагранж кўпхадиди $P_n(x)$ билан устма-уст тушсин:

$$P_n(x_i) = f(x_i), i = 0, \dots, n, P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x), l_i(x) = \prod_{j \neq i} (x - x_j) / (x_i - x_j),$$

У ҳолда $\|f(x)\|_C = \max\{|f(x)|, x \in [a, b]\}$ нормада қуйидаги баҳони оламиз:

$$\|f - P_n\|_C \leq \frac{\max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |(x-x_0)\dots(x-x_n)|.$$

Мисол 5. Умумий кўринишда берилган $L\bar{u} = f$ дифференциал тенглама аниқ ечими $\bar{u} = \bar{u}(x)$ нинг жадвали $\bar{u}_h = [\bar{u}(x_0), \dots, \bar{u}(x_n)]$ ушбу $L_h u_h = f_h$ чекли айирмалари схема ечими $u_h = [u_0, \dots, u_n], u_i \approx \bar{u}(x_i)$, билан алмаштирилади.

Унда хатолик сифатида $\varepsilon_h = \bar{u}_h - u_h = A - a$ миқдор олинади ва у

$\|\varepsilon_h\| = \max\{|\varepsilon_0|, \dots, |\varepsilon_n|\}, \varepsilon_i = \bar{u}_{h,i} - u_{h,i}$ нормада баҳоланади, $\|\varepsilon_h\| = O(h^r), h \rightarrow 0$.

Яхлитлаш хатоси. $a = a_m a_{m-1} \dots a_0, a_{-1} a_{-2} \dots a_{-n}$, бирор $m+n+1$ хонали ҳақиқий сон бўлсин. Соннинг ўнли ёзувидаги ҳар қандай 0 дан фарқли рақами муҳим рақам дейилади. Иккита муҳим рақамлар орасидаги ноллар ҳам муҳим дейилади, муҳим рақам кейидаги ноль ҳам муҳим рақам дейилади. Нолга тенг бўлмаган рақамлар олдидаги ноллар муҳим бўлмайди. Агар шу ёзувда соннинг абсолют хатоси вергулдан кейинги n – рақамининг бир бирлигидан ошмаса, (n – рақамининг бир бирлигининг ярмидан ошмаса)

кeнг маънода $m+n+1$ та ишончли рақамларга эга дейилади (тор маънода $m+n+1$ та ишончли рақамларга эга дейилади).

Тақрибий сон шундай ёзиладики, унда ишончли рақамлар сақланади. Сонни бирор рақамининг 1 бирлигигача аниқлик билан яхлитлаш (кeнг маънода ишончли рақамлар сақлаш) учун шу рақамни ўнг тамондаги барча рақамлар ўчирилади. Натижада вужудга келган сон ўчирилмай қолган рақамининг 1 бирлигидан ошмайди.

Сонни бирор рақамининг 1 бирлигининг ярмигача аниқлик билан яхлитлаш (тор маънода ишончли рақамлар сақлаш) учун шу рақамдан ўнгда тўрган рақамлар ўчирилади ва а) ўчирилгаётган рақамларнинг биринчиси 5 дан катта бўлса, сақланаётган охириги рақамга 1 қўшилади, б) ўчирилгаётган рақамларнинг биринчиси 5 дан кичик бўлса ўзгартирилмайди, в) ўчириляётган рақамнинг биринчиси 5 бўлиб, қолганларини ичида 0 дан фарқлилари бўлса, охириги рақамга 1 қўшилади, г) ўчирилгаётган рақамларнинг биринчиси 5 ва қолганлари 0 бўлса сақланаётган сон тоқ бўлса унга 1 қўшилади, жуфт бўлса қўшилмайди.

Тақрибий соннинг лимит абсолют хатоси билан ишончли рақамлари орасида муносабат мавжуд:

$$\delta_a \leq 10^{1-n} a_m^{-1} \text{ (кeнг маънода), } \delta_a \leq 0.5 * 10^{1-n} a_m^{-1} \text{ (тор маънода).}$$

Аксинча, агар соннинг лимит абсолют нисбий хатоси ушбу

$$\delta_a \leq 2(a_m + 1)^{-1} * 10^{1-n}$$

тенгсизликни қаноатлантирса, а сон тор маънода n та ишончли рақамга эга.

5. $y = f(x_1, \dots, x_n)$ функциянинг қийматини $x = (x_1, \dots, x_n)$ тақрибий нуқтада ҳисоблаш зарур, $x \in G \in R^n$.

Берилган: аргументларнинг хатоликлари: $\Delta_{x_i}, \delta_{x_i}, i = 1 \dots n$. Топиш керак функциянинг хатоликларини: $\Delta_y, \delta_y = ?$ Бу хатоликлар назариясининг тўғри масаласи. Тескари масалада Δ_y, δ_y лар берилади, $\Delta_{x_i}, \delta_{x_i}, i = 1 \dots n$ ларни топиш керак.

Ечиш: $y = f(x)$ функцияни X нуқтанинг бирор атрофида узлуксиз дифференциалланувчи дейлик, X шу атрофга тегишли бўлсин, Лагранжнинг чекли орттирмалар формуласига асосан

$$\Delta y = Y - y = f(X_1, \dots, X_n) - f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} (X_i - x_i) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \Delta x_i \approx \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \Delta x_i$$

с-ўрта қиймат, яъни қуйидаги формулаларни ёзиш мумкин:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right| \Delta x_i, \Delta_y = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right| \Delta_{x_i}, \delta_y = \frac{1}{|y|} \Delta_y = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \ln f(x)}{\partial x_i} \right| \Delta_{x_i}.$$

Тескари масала ноаниқдир. Ечимлардан бири тенг таъсир принциpidан топилади. Умумий хатоликка барча аргументлар бир хил ҳисса қўшади деб қабул қилинади, яъни

$$\left| \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right| \Delta_{x_i} = const, i = 1, \dots, n.$$

Бу бизга куйидаги формулаларни беради:

$$\Delta_{x_i} = \frac{\Delta_y}{n \left| \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right|}, i = 1, \dots, n.$$

Мисол 6. Агар $r = 15 \pm 0,02, h = 19,1 \pm 0,05, \pi = 3,14$, бўлса конус ҳажми қандай абсолют ва нисбий хатоликлар билан ҳисобланишини аниқланг.

Ечиш. Маълумки,

$v = \pi r^2 h / 3 = 4498,1, \partial v / \partial \pi = r^2 h / 3 = 1432,5, \partial v / \partial r = 2\pi r h = 599,74, \partial v / \partial h = \pi r^2 / 3 = 235,5$
эканлиги учун лимит абсолют ва нисбий хатоликлар формуласига асосан:

$$\Delta_v = \left| \frac{\partial v}{\partial \pi} \right| \Delta_\pi + \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right| \Delta_r + \left| \frac{\partial v}{\partial h} \right| \Delta_h = 26,06, \delta_v = \frac{26,1}{4498} = 0,006 \rightarrow v = 4498 \pm 26,1.$$

Мисол 7. Тўғри тўртбурчакнинг юзини 0,1 лимит абсолют хатолик билан ҳисоблаш учун унинг томонларини қандай лимит абсолют хатолик билан ҳисоблаш зарур?, $a \approx 4, b \approx 5$ м.

Ечиш. Равшанки, $S = ab, \Delta_S = 0,1$. Хатоликлар назариясининг тескари масаласи формулаларидан топамиз:

$$\left| \frac{\partial S}{\partial x_i} \right| \Delta_{x_i} = \frac{\Delta_S}{n}, \Delta_{x_i} = \frac{\Delta_S}{n \left| \frac{\partial S}{\partial x_i} \right|},$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = b = 5, \frac{\partial S}{\partial b} = a = 4,$$

$$\Delta_a = \frac{0,1}{2 * 5} = 0,01, \Delta_b = \frac{0,1}{2 * 4} = 0,0125.$$

6. Ҳозирги пайтда математик масалаларни ечишни дастур тузмасдан ечувчи математик программалар мавжуд: Matchad, Maple, Mathematica, MatLab, SWP, Derive, TK!Solver. Уларни математик тизимлар дейилади.

Бундай программалар химия, физика, механика, иқтисодиёт, чизмачилик ва бошқа соҳаларда ҳам мавжуд : QSP, TORO, Excel (операцияларни текшириш), GPSS (моделлаштириш), Lat_eX (мақолалар тайёрлаш), Visio, AutoCad (қурилиш, техника, машинасозликда лойиҳалаш), Crocodile (математика, физика, химия...), Socrat (чет тилидан таржимон).

Ушбу курсда Matchad дастури математик масалаларни ечишда параллел ўргатилиб борилади.

Назарий саволлар ва топшириқлар

1. Абсолют хато, чегаравий абсолют нима?
2. Нисбий хато, чегаравий нисбий хато нима?
3. Нисбий ва абсолют хато орасида қандай муносабат мавжуд?
4. Функция ва аргументлар хатоликлари орасида муносабат қандай ?
5. Функция $y = f(x_1, \dots, x_n)$ нинг хатоликлар формуласи асосида тўрт арифметик амал учун хатоликлар формуласининг чиқаринг.
6. Хатоликлар назариясининг тўғри ва тескари масаласига доир элементар геометриядан мисоллар келтиринг. [Мундарижага](#)

1.2. НОЧИЗИҚ ТЕНГЛАМА УЧУН ИТЕРАЦИЯ УСУЛИ

Асосий тушунчалар: Ночизик тенглама тўғрисида умумий тушунчалар, илдизларни ажратилиши, битта тенглама учун итерация усули ва унинг хатолигини баҳолаш, тенгламани итерация усулини қўллаш учун қулай кўринишга келтирилиши, усулнинг дастури, яқинлашиши шартли.

АСОСИЙ НАТИЖАЛАР:

1. Ночизик тенглама тўғрисида умумий тушунчалар: $f(x)=0, f(\xi)=0$.

2. Илдизларни ажратилиши масаласи $f(a)f(b)<0 \Rightarrow \exists c: f(c)=0$.

Кесмани 2 га бўлиши усули: $x^{(k)} = x^{(k-1)} + \text{sign}(f(a)f(x^{(k-1)}))(b-a)/2^k, k=1,2,\dots, x^{(0)}=a$.

$$|\xi - x^{(k)}| \leq (b-a) / 2^k.$$

3. Итерация усули: $f(x)=0 \Leftrightarrow x=g(x), g(x)=x-\lambda f(x), \lambda \neq 0$,

$$x^k = g(x^{k-1}), \xi = \lim_{k \rightarrow \infty} x^k, f(\xi) = 0.$$

$$|\xi - x^{(k)}| \leq q^k |\xi - x^{(0)}|, |\xi - x^{(k)}| \leq \frac{q}{1-q} |x^{(k)} - x^{(k-1)}|.$$

4. *Mathcad* да ички функциялар ва алгоритм.

1. Математикада тенгламалар чизикли, алгебраик, тригонометрик, кўрсаткичли каби гуруҳларга бўлинади. Олий математикада яна дифференциал ва интеграл тенгламалар пайдо бўлади. Ночизик тенгламалар турли амалий масалаларни ечишда ўз-ўзидан пайдо бўлади. Масалан, классик бўлиб кетган берилган бурчакни учга тенг бўлиш масаласи ушбу формулага асосан кубик тенгламага олиб келади:

$$a = c \cos(x) = 4 \cos^3\left(\frac{x}{3}\right) - 3 \cos\left(\frac{x}{3}\right).$$

Агар $\cos(x/3) = y$ десак қуйидаги тенгламани оламиз:

$$4y^3 - 3y - a = 0, (a = \cos(x)).$$

Иккинчи масала сифатида берилаган b ҳажмли кубдан ҳажми икки марта катта куб топилсин деган масалани қарайлик. Равшанки, кубнинг киррасини x десак қуйидаги оддий кубик тенгламага келамиз: $x^3 = 2b$.

Учинчи масала сифатида $x = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ иррационал сонини нималигини билмоқчимиз. У ҳолда икки марта квадратга кўтариш ушбу тенгламага олиб келади:

$$x^4 - 10x^2 + 1 = 0.$$

Тўртинчи мисол сифатида, $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, X'(0) = 0, X'(l) + hX(l) = 0$, чегаравий масалани қарайлик. Равшанки, ушбу функция $X = \cos(\lambda x)$ тенгламани ва биринчи чегара шартни қаноатлантиради. Иккинчи чегара шарт қаноатланиши учун $-\lambda \sin(\lambda l) + h \cos(\lambda l) = 0 \Rightarrow \text{tg}(\lambda l) = h/\lambda$, бўлиши керак. Яна ночизик тенгламага келдик: $\text{tg}(\lambda l) = h/\lambda$.

Бундай мисолларни кўпдан кўп келтириш мумкин. Масалан, қурилиш механикасида ҳам чизикли ихтиёрий ноъмалумли тенгламалар системаси ва ихтиёрий даражадаги алгебраик тенглама пайдо бўлади.

Абель, Галуа назариясидан маълумки, 5 ва ундан юқори даражали тенгламаларнинг ечимларини формулалар ёрдамида аниқ ёзиш мумкин эмас. Шунинг учун, ночизик тенгламалар ва уларнинг системалари тақрибий ечилади.

Баъзи бир таъриф ва теоремаларни келтирамиз. $y = f(x)$ функция $[a, b]$ да аниқланган ва узлуксиз бўлсин. $f(x) = 0$ тенгликни қаноатлантирувчи $x \in [a, b]$ нуқта $f(x) = 0$ тенгламани ечими ёки илдизи дейилади.

Теорема 1. Агар $f(x) \in C[a, b], f(a)f(b) < 0$ бўлса, $[a, b]$ да $f(x) = 0$ тенгламанинг ҳеч бўлмаганда битта ечими бор. Агар $f(x)$ $[a, b]$ да монотон бўлса (масалан, $\text{sign} f(x) = \text{const}$) бу ечим ягона.

Теорема 2. (алгебранинг асосий теоремаси-Гаусс теоремаси) n -даражали алгебраик тенглама

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = 0$$

нинг ҳеч бўлмаганда битта ечими бор. (Карралари, комплекс қўшмаларини қўшиб ҳисобланганда бу ечимлар сони n га тенг).

$f(x) = 0$ тенглама ечимларини ечиш 2 та этапдан иборат бўлади.

1) илдизларни ажратиш, яъни илдизлар сони, улар жойлашган ораликларни аниқлаш;

2) ажратилган илдизларни олдиндан берилган аниқлик билан топиш.

Илдизларни ажратиш учун график ёки аналитик усул (теорема (1.2.1)) ишлатилиши мумкин. График усулда $y = f(x)$ функция графиги чизилиб илдиз жойлашган ораликлар топилади. Аналитик усулда шундай $[a_k, b_k]$ кесмалар топиладики, $f(a_k)f(b_k) < 0$ бўлсин.

Ажратилган илдизларни берилган аниқлик билан топиш учун кесмани иккига бўлиш, итерация, Ньютон ва бошқа усулларидан фойдаланилади.

2. Илдизларни ажратиш.

2.1. Геометрик усул.

Агар мумкин бўлса $y = f(x)$ функция графиги чизилади. Сўнг графикдан илдизлар сони ва улар ётган ораликлар аниқланади. Агар $y = f(x)$ функциянинг графигини чизиш мумкин бўлмаса $f(x) = 0$ тенглама эквивалент $f_1(x) = f_2(x)$ ($f = f_1 - f_2$; f_1 ва f_2 - функциялар) кўринишга келтирилади ва $y_1 = f_1(x)$ ва $y_2 = f_2(x)$ функциялар графиклари чизилади. Равшанки, бу графиклар кесишган нуқталарнинг абциссалари тенгламанинг ечимлари бўлади.

Мисол 1. $f(x) = x - \cos(x) = 0, x \in (-\infty, +\infty)$ тенгламанинг илдизлари ажратилсин.

Ечиш. Тенгламани $x = \cos(x)$ ($f_1(x) = x, f_2(x) = \cos(x)$) кўринишга келтириб $y_1 = x, y_2 = \cos(x)$ функциялар графигини чизамиз. Чизмадан ягона илдиз $[0, \pi/2]$ кесмада ётганини кўриш мумкин.

Мисол 2. $x^4 - 4x + 1 = 0, x \in (-\infty, +\infty)$ тенглама илдизлари ажратилсин.

Ечиш. Тенгламани $x^4 = 4x - 1$ кўринишда ёзиб $y_1 = x^4, y_2 = 4x - 1$ функцияларнинг графигини чизамиз. Тенгламанинг иккита ҳақиқий илдизи бор: $x_1 \in [0, 1], x_2 \in [1, 2]$, чунки

$$f(0) = 1 > 0, f(1) = -2 < 0, f(2) = 9 > 0.$$

2.2. Аналитик усул. Илдизларни аналитик усулда ажратиш учун асосан, 1.2.1 теоремадан фойдаланамиз. Функциянинг аниқланиш соҳасини бўлақларга бўламиз. Бу бўлақлардан чеккаларида ишоралари ҳар хил бўлганларини ажратамиз. Агар бу кесмада функция монотон бўлса илдиз ягона. Масалан, $f(x) = x - \cos x = 0$ тенглама учун $f(0) = -1 < 0, f(\pi/2) = \frac{\pi}{2} > 0$ яъни $[0, \pi/2]$ да илдиз бор; $f'(x) = 1 + \sin x > 0$ лиги учун илдиз ягона.

$f(x) = x^4 - 4x + 1$ тенглама учун $f(0) = 1 > 0, f(1) = -2 < 0, f(2) = 9 > 0$, яъни $[0, 1], [1, 2]$ кесмаларда илдизлар бор.

$f'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x^3 - 1)$ ҳосила $[0, 1]$ да манфий, $[1, 2]$ да мусбатлиги учун $[0, 1], [1, 2]$ кесмалардаги илдизлар ягона.

3. Итерация усули. $f(x) = 0$ тенгламага итерация усулини қўллаш учун уни шу қулай кўринишга келтириш керак.

Фараз қилайлик $[a, b]$ да $f(x) = 0$ тенгламанинг ягона илдизи бўлсин. Тенгламани бирор усул билан $x = g(x), x \in [a, b]$ эквивалент кўринишга келтирайлик.

Масалан: $x = \cos x, x = (x^4 + 1)/4, x = \sqrt[4]{1 - 4x}$. Одатда $g(x)$ қуйидагича танланади:

$$f(x) = x - g(x) = 0 \quad (1)$$

$$q = \max_{x \in [a, b]} \{|g'(x)|\} < 1. \quad (2)$$

(2) шарт итерация усулининг яқинлашиш шарти дейилади.

Итерация усулининг моҳияти қуйидагидан иборат: Ихтиёрий $x^{(0)} \in [a, b]$ бошланғич қиймат (итерация, яқинлашиш) олиниб қуйидаги кетма-кетлик ҳосил қилинади:

$$x^{(k)} = g(x^{(k-1)}), \dots, k = 1, 2, \dots \quad (3)$$

(3) кетма-кетлик итерация кетма-кетлиги дейилади. Усулнинг моҳиятини ушбу фикр очиб беради

Теорема 3. $g(x) \in C[a, b]$ бўлиб, $\{x^{(k)}\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлсин, яъни $\xi = \lim_{k \rightarrow \infty} \{x^{(k)}\} \in [a, b]$ бўлсин. У ҳолда ξ нукта $x = g(x)$ тенглама (яъни $f(x) = 0$ ни ҳам) илдизи бўлади.

Исботи: $x^{(k)} = g(x^{(k-1)})$ тенгликда лимитга ўтамиз:

$$\xi = \lim_{k \rightarrow \infty} \{x^{(k)}\} = \lim_{k \rightarrow \infty} g(\{x^{(k-1)}\}) = g(\lim_{k \rightarrow \infty} \{x^{(k-1)}\}) = g(\xi),$$

яъни $\xi = g(\xi)$ ёки $f(\xi) = 0$.

Таъриф 1. Ушбу шартни қаноатлантирувчи функция

$$|g(x_1) - g(x_2)| < q |x_1 - x_2|, x_1, x_2 \in [a, b], 0 < q < 1, \quad (4)$$

$[a, b]$ да кесмани қисқартириб акс эттирувчи дейилади.

Таъриф 2. $\xi = g(\xi)$ нуқта $g(x)$ акслантиришнинг қўзғалмас нуқтаси дейилади.

Масалан: $g(x) = 0.1 \sin x$ функция R сонлар ўқини қисқартириб акс эттиради, чунки Лагранжнинг чекли орттирмалар ҳақидаги теоремасига асосан ихтиёрий x_1, x_2 нуқталар учун

$$|0.1 \sin x_1 - 0.1 \sin x_2| = 0.1 \cos c |x_1 - x_2| < 0.1 |x_1 - x_2|$$

тенгсизлик бажарилади, бу ерда c - ўрта қиймат.

Қисқартириб акс эттирувчи функциялар учун одатда 1.1 теорема кўпинча ўринли бўлади.

Теорема 4. Фараз қилайлик $g(x)$ функция $G_r = \{x : |x - x_0| < r\}$ кесмани қисқартириб акс эттирувчи ва бошланғич итерация ушбу

$$|g(x_0) - x_0| < (1 - q)r \quad (5)$$

шартни қаноатлантирсин. У ҳолда $\{x^{(k)} = g(x^{(k-1)})\}$ итерация кетма-кетлиги яқинлашувчан бўлиб қуйидаги фикрлар ўринли бўлади:

$$1). \xi = \lim_{k \rightarrow \infty} \{x^{(k)}\} \text{ мавжуд, } \xi = g(\xi),$$

$$2). | \xi - x^{(k)} | \leq q^k | \xi - x^{(0)} |, \quad (6)$$

$$| \xi - x^{(k)} | \leq \frac{q}{1 - q} |x^{(k)} - x^{(k-1)}| \leq \frac{q^k}{1 - q} |x^{(1)} - x^{(0)}| \quad (7)$$

Исбот. Кетма-кет ушбу фикрларни исботлаймиз.

$$1. x^{(k)} = g(x^{(k-1)}) \in G_r, k = 1, 2, \dots;$$

Равшанки, $x^{(0)} \in G$ деб оламиз, шунинг учун, агар $|x^{(k-1)} - x^{(0)}| \leq r$ бўлса, у ҳолда қуйидаги тенгсизликлар бажарилади:

$$\begin{aligned} |x^{(k)} - x^{(0)}| &= |g(x^{(k-1)}) - x^{(0)}| \leq |g(x^{(k-1)}) - g(x^{(0)})| + \\ &+ |g(x^{(0)}) - x^{(0)}| \leq q |x^{(k-1)} - x^{(0)}| + (1 - q)r \leq qr + (1 - q)r \leq r. \end{aligned}$$

Демак, агар $x^{(0)} \in G_r$ бўлса $x^{(k)} \in G_r$ бўлар экан.

$$2. x^{(k)} = g(x^{(k-1)}) \text{ кетма-кетликни яқинлашувчан эканлигини кўрсатамиз.}$$

$$\begin{aligned} \text{Равшанки, } |x^{(k+1)} - x^{(k)}| &= |g(x^{(k)}) - g(x^{(k-1)})| \leq q |x^{(k)} - x^{(k-1)}| \leq \dots \leq q^k |x^{(1)} - x^{(0)}| \\ |x^{(k+p)} - x^{(k)}| &\leq |x^{(k+p)} - x^{(k+p-1)}| + |x^{(k+p-1)} - x^{(k+p-2)}| + \dots + |x^{(k+1)} - x^{(k)}| \leq \\ &\leq q^k |x^{(1)} - x^{(0)}| + q^{k+1} |x^{(1)} - x^{(0)}| + \dots + q^{k+p-1} |x^{(1)} - x^{(0)}| \leq \\ &\leq q^k (1 + q + \dots + q^{p-1}) |x^{(1)} - x^{(0)}| \leq q^k |x^{(1)} - x^{(0)}| (1 + q + \dots) \leq q^k / (1 - q) |x^{(1)} - x^{(0)}|. \end{aligned}$$

яъни

$$|x^{(k+p)} - x^{(k)}| < \frac{q^k}{1 - q} |x^{(1)} - x^{(0)}|.$$

Бу тенгсизликда $k \rightarrow \infty$ десак $|x^{(p+k)} - x^{(k)}| \rightarrow 0$ яъни $\{x^{(k)}\}$ ни фундаментал кетма-кетлик эканлиги келиб чиқади. $\{x^{(k)}\} \in G_r$ лигидан ва G_r нинг ёпиқлигидан шундай ξ мавжуд бўладики $\xi = \lim_{k \rightarrow \infty} \{x^{(k)}\}$, бўлади. У ҳолда $\xi = g(\xi)$ ёки $f(\xi) = 0$ эканлиги равшан.

3.(6) тенгсизликни кўрсатамиз:

$$|\xi - x^{(k)}| = |g(\xi) - g(x^{(k-1)})| < q |\xi - x^{(k-1)}| \leq q^2 |\xi - x^{(k-2)}| \leq \dots \leq q^k |\xi - x^{(0)}|.$$

4.(7) тенгсизликни исботлаймиз:

Равшанки,

$$|\xi - x^{(k)}| \leq q |\xi - x^{(k-1)}| \leq q |\xi - x^{(k)} + x^{(k)} - x^{(k-1)}| \leq q |\xi - x^{(k)}| + q |x^{(k)} - x^{(k-1)}|$$

Бу ердан

$$(1-q) |\xi - x^{(k)}| \leq q |x^{(k)} - x^{(k-1)}|.$$

Бу тенгсизликдан (7) ни топамиз.

(7) нинг ўнг томони осонгина топилади. Уни **апостериор** баҳо дейилади, яъни қолдиқ ҳад баҳоси ечимнинг тақрибий қиймати топилгандан сўнг аниқланади. (6) баҳо **априор** баҳо дейилади. Уни биз тақрибий ечим топилмасдан баҳолашимиз мумкин. (6) ва (7) баҳолар итерацияларни қачонгача давом эттириб ҳисоблаш зарурлиги аниқланади. Масалан, $|\xi - x^{(k)}| < \varepsilon$ бўлиши учун

$$q^k |\xi - x^{(k)}| < \varepsilon, \quad (8)$$

$$q |x^{(k)} - x^{(k-1)}| / (1-q) < \varepsilon \quad (9)$$

бажарилиши зарур. (9) тенгсизлик амалда кенг қўлланилади.

Энди $f(x) = 0$ тенгламани $x = g(x)$ кўринишга қандай қилиб келтириш мумкинлигини кўрайлик. Бу ерда икки ҳол бўлиши мумкин. 1) Фараз қилайлик $f'(x) > \varepsilon$ ҳосила мавжуд ва $m \leq f'(x) \leq M$ тенгсизлик $x \in [a, b]$ да бажарилсин. У ҳолда

$$x = g(x) = x - lf(x) = x - f(x)/M, l = 1/M,$$

деб олишимиз мумкин, чунки

$$|g'(x)| = |1 - f'(x)/M| \leq |1 - m/M| \leq 1, x \in [a, b],$$

яъни $q = 1 - m/M$ дейиш мумкин. 2) Агар $f'(x) < 0$ бўлса $f_1(x) = -f(x) = 0$ тенгламани қараб яна юқоридаги ҳолга келиш мумкин.

Мисол 3. $f(x) = x^4 - 4x + 1 = 0$ тенгламани қарайлик. Маълумки, илдизлар $[0,1]$, $[1,2]$ оралиқларда ётади ва

$$f(x) = 4(x^3 - 1) = \begin{cases} \leq 0, & x \in [0,1], \\ \geq 0, & x \in [1,2], \end{cases}$$

$[0,1]$ даги ечим учун $f_1(x) = -f(x) = 0$ тенгламани қараймиз.

Бу ҳолда $g'(x) = 4(1 - x^3)$, $M = \max\{|f'(x)|, x \in [0,1]\} = 4$.

Шунинг учун $g(x) = x - (4x - x^4 - 1)/4 = x^4/4 + 3x/4 + 1/4$.

$[1,2]$ даги ечим учун

$$M = \max\{|f'(x)|, x \in [1,2]\} = 28$$

$$g(x) = x - (x^4 - 4x + 1)/28 = 32x/28 - x^4/28 - 1/28;$$

$[0,1]$ даги ечим учун $x^0 = 0$ деймиз ва қуйидагиларни топамиз:

$$x^{(1)} = 0,25; x^{(2)} = 0,2539062; x^{(3)} = 0,2541561;$$

$$x^{(4)} = 0,2541725; x^{(5)} = 0,2541725; x^{(6)} = 0,2541736;$$

$$x^{(7)} = 0,2541737;$$

Равшанки, ечимни 0,2541737 деб олиш мумкин.

[1,2] даги ечим учун $x^{(0)} = 1,2$ деб олиб қуйидаги ҳисоблашларни топамиз:

$$x^{(1)} = 1,2616571; x^{(2)} = 1,31156881; x^{(3)} = 1,360912;$$

$$x^{(4)} = 1,3971063; x^{(5)} = 1,3951456; x^{(6)} = 1,42343308;$$

$$x^{(7)} = 1,4444457; \dots, x^{(18)} = 1,4927254; x^{(19)} = 1,49236;$$

$$x^{(20)} = 1,492936;$$

Демак, ечим сифатида 1,492936 сонни олиш мумкин.

4. Mathcad да ички функциялар ва алгоритм

MathCAD дастурида бир ноъмалумли нозизиқ тенгламаларни тақрибий ечиш учун стандарт ички функциялар мавжуд, улар

1) $\text{root}(f(x), x)$, $\text{given} \dots \text{find}$, $\text{minimize}(f(x), x)$ - ихтиёрий $f(x)=0$ тенглама учун,

2) $\text{polyroots}(v)$ - кўпхадли тенглама $f(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$ учун, бу ерда $v=[a_0, a_1, \dots, a_n]^T$ - коэффицентлар.

Қуйидаги келишувни қабул қиламиз: Ҳар бир саҳрада MathCAD командасини табиий- математик кўринишида ёзамиз, саҳра аввал командани тушунтирувчи текст- изоҳдан ва сўнг командадан иборат бўлади. MathCAD ойнасида изоҳ майдончаси Shift+” тугмалар билан очилади. Биз текст- изоҳни курсив билан ажратиб кўрсатамиз.

Мисол 1. $f(x)=x-\cos(x)=0$ тенгламани тақрибий ечиш қуйидагича:

Бошланғич итерация ва тенглама

$$x:=0 \quad f(x):=x-\cos(x)$$

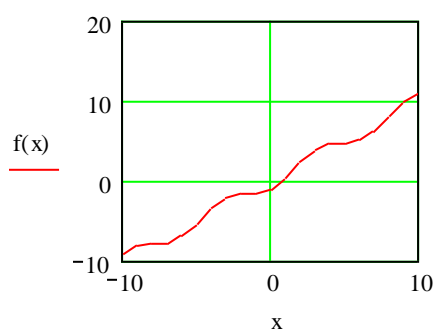
Ички функцияга мурожаат

$$r:=\text{root}(f(x), x)^T$$

Илдизни чиқариш

$$r=0.7398$$

Графикни келтирамиз ($f(x)=x-\cos(x), -10 \leq x \leq 10$).



Мисол 2.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$$

тенгламанинг барча илдизларини топиш

Тенглама ва коэффициентлар

$$f(x) := x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0 \quad v := [3 \ -1 \ -3 \ 1]^T$$

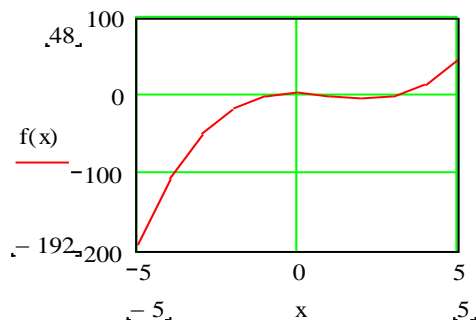
Ички функцияларга мурожашитлар

$$r := \text{polyroots}(v) \quad s := \text{root}(f(x), x)$$

Илдизларни чиқариш

$$r = (-1, 3, 1)^T \quad s \rightarrow (-1, 3, 1)^T$$

Графикни келтирамиз ($f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3, -10 \leq x \leq 10$).

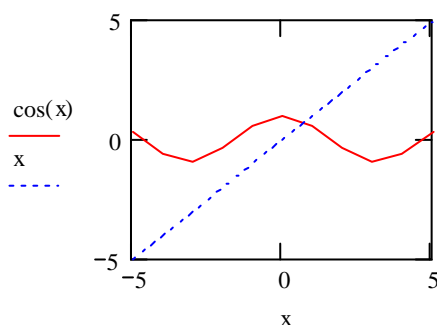


Энди итерация ва Ньютон усуллари ташкил этувчи ҳисоблаш жараёнларини тузамиз, бу усулларни ўргатишда жуда муҳим.

Мисол 3. Итерация усули. $f(x) = x - \cos(x) = 0$ тенгламани қараймиз.

$[-5, 5]$ кесмада график чизамиз

Graph > X-Y Plot (Shift+2)



Бошланғич итерация ва итерациялар сонини бериш

$$x_0 := 0 \quad k := 0..10$$

$f(x) = 0$ ни $x = g(x)$ кўринишига келтириш, итерациялар

$$x_{k+1} := \cos(x_k)$$

Натижани чиқариш

$$x^T = (1, 0.5403, 0.8576, \dots, 0.7314)$$

Мисол 4. Кесмани 2 га бўлиш усули. $f(x) := \sqrt{x+2} + 0.7x = 0$.

Тенглама

$$f(x) := \sqrt{x+2} + 0.7x$$

Параметрлар

$$x_0 := -1 \quad k := 0..10 \quad a := -1 \quad b := -2$$

Кесмани 2 га бўлиш усули

$$x_{k+1} := x_k + \text{sign}(f(x_0)) \text{sign}(f(x_k)) \frac{b-a}{2^{k+1}}$$

Натижани чиқариш

$$x^T = \{-1 \ -1.5 \ -1.125 \ -1.188 \ -1.242 \ -1.246 \ -1.244 \ -1.243\}$$

Изоҳ. 1. $f(x) = 0$ тенглама учун энг содда усул-бу кесмани тенг иккига бўлиш усулидир. Бу усулнинг ғояси қуйидагича: $\{x^{(k)} = g(x^{(k-1)})\}$ кетма-кетлик қуйидагича тузилади:

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + \text{sign}(f(a)f(x^{(k-1)}))(b-a)/2^k, k=1,2,\dots, x^{(0)}=a.$$

Равшанки, аниқ ечим билан тақрибий ечим орасидаги хатолик қуйидагича:

$$|\xi - x^{(k)}| \leq (b-a)/2^k.$$

2. Графиклар MathCAD да жуда осон чизилади. Бунинг учун чизиладиган функция ва унга дастлабки маълумотлар берилади: масалан,
 $f(x) := x * \sin(x)$ $a := 0$ $b := 6 * \pi$ $n := 100$ $h := (b - a) / n$ $x := a, a + h..b$

Курсорни ишчи майдонга қўйиб, қуроллар панелидан ёки менюдан Graph>X-Y Plot (Shift+2) командаси берилади. Керакли маркерлар ўрнига функция ва аргумент белгиси қўйилади. Enter босилгач тасвир чиқади. Бир графикда 16 тагача график яшаш мумкин. График устида қўш чертки бажарилса графикни форматлаш имконияти туғилади. Унда ўқлар учун масштаблар, тасвир учун тўр, ранглар, чизик қалинлиги, турини кўрсатиш мумкин. Форматлаш яхши кўринмай қолган графиклар учун фойда беради.

Назарий саволлар ва топшириқлар.

1. Итерация усулининг моҳиятини айтиб беринг.
2. Тенглама итерация усулини қўллаш учун қандай қилиб кўринишга келтирилади.
3. Итерация усулининг яқинлашиш шартини маъносини айтиб беринг.
4. Итерация усулининг назарий ва амалий хатоликларининг маъносини айтиб беринг.
5. Қуйидаги тенгламалар итерация усули билан ечилсин
 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $ax + c - b \sin(x) = 0$, $ax + c - b \cos(x) = 0$.

Коэффецентлар танлаб олинсин. Паскаль тилида программа тузилиб жавоблар олинсин. [Мундарижага](#)

1.3. НОЧИЗИҚ ТЕНГЛАМА УЧУН НЬЮТОН УСУЛИ

Асосий тушунчалар: Ньютон усулнинг зояси, усулнинг қолдиги, итерация усули билан боғланиши, усулнинг дастури.

Асосий натижалар:

1. Усулнинг зояси: $x^{(k+1)} = x^{(k)} - f(x^{(k)}) / f'(x^{(k)})$, $k = 1, 2, \dots$, $f(x^{(0)})f''(x^{(0)}) > 0$,
 $\xi = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}$, $f(\xi) = 0$.

2. Усулнинг қолдиги $|\xi - x^{(k)}| \leq q(|\xi - x^{(k-1)}|)^2$, $|\xi - x^{(k)}| \leq (q|\xi - x^{(0)}|)^k / q$, $q = M_2 / (2m_1)$.

3. Итерация усули билан алоқаси: $x^k = g(x^{k-1})$, $g(x) = x - f(x) / f'(x)$.

4. Mathcad да ички функциялар ва алгоритм.

1. Бу усул амалда энг кўп қўлланиладиган усуллардан бири ҳисобланади. Фараз қилайлик, $[a, b]$ да $y = f(x)$ узлуксиз икки марта дифференциаланувчи функция берилган, яъни $f(x) \in C^2[a, b]$ бўлсин. Фараз қилайлик $f(\xi) = 0$, $f(a)f(b) < 0$ ва $f'(x) \neq 0$ бўлсин $x \in [a, b]$, $x^{(k)} \approx \xi$ деб $f(x)$ ни $x^{(k)}$ атрофида Тейлор формуласи бўйича ёзамиз:

$$0 = f(\xi) = f(x^{(k)} + \xi - x^{(k)}) = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(\xi - x^{(k)}) + f''(c)(\xi - x^{(k)})^2 / 2$$

Бу ерда с ноъмалум оралиқ миқдор. $x^{(k)} \cong \xi$ бўлганлиги учун $(\xi - x^{(k)})^2$ чексиз кичик миқдор. Уни ўз ичига олган ҳадни ташлаб юборамиз:

$$f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(\xi - x^{(k)}) \approx 0$$

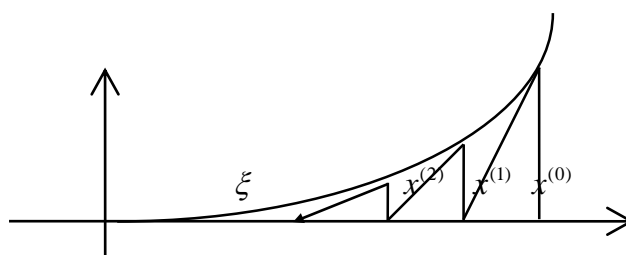
Бу формуланинг чап қисмини ξ эмас, бошқа бирор $x^{(k+1)}$ нолга айлантирсин:

$$f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = 0.$$

Бу ердан

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - f(x^{(k)}) / f'(x^{(k)}), k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

(1) уринмалар ёки Ньютон усули дейилади. Чизмага мурожаат қилайлик.



$x^{(0)}$ нуқтада уринма ўтказамиз:

$$y = f(x^{(0)}) + (x - x^{(0)})f'(x^{(0)})$$

$y = 0$ деб $x^{(1)}$ ни топамиз ва хоказо. $x^{(k-1)}$ нуқтада уринма

$$y = f(x^{(k-1)}) + (x - x^{(k-1)})f'(x^{(k-1)})$$

кўринишда бўлади. $x^{(k)}$ нуқтада $y = 0$ деб (1) формулани ҳосил қиламиз.

Шунинг учун Ньютон усулини кўпинча уринмалар усули дейишади.

Чизмадан кўринадикки, $x^{(k)} \rightarrow \xi$ бўлиши учун

$$f(x^{(0)})f''(x^{(0)}) > 0, \quad (2).$$

бажарилиши керак. Бу шартни бошланғич шартни танлаб олиш шарти дейилади. $x^{(k+1)}$ ξ га $x^{(k)}$ нисбатан яқинроқ бўлиши керак.

2.Ньютон усулининг қолдиғи.

Фараз қилайлик $f \in C^2[a,b]$ дейлик ва

$$M_2 = \max\{|f''(x)|, x \in [a,b]\},$$

$$m_1 = \min\{|f'(x)|, x \in [a,b]\} \neq 0, q = M_2/2m_1.$$

Тейлор формуласига асосан

$$0 = f(\xi) = f(x^{(k-1)}) + f'(x^{(k-1)})(\xi - x^{(k-1)}) + \frac{f''(c)}{2}(\xi - x^{(k-1)})^2 / 2.$$

Шунинг учун

$$\xi = x^{(k-1)} - \frac{f(x^{(k-1)})}{f'(x^{(k-1)})} - \frac{f''(c)}{2f'(x^{(k-1)})}(\xi - x^{(k-1)}).$$

Бу тенгликдан Ньютон усулининг формуласи бўлмиш формула

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - \frac{f(x^{(k-1)})}{f'(x^{(k-1)})}$$

ни айириб ушбу баҳони ҳосил қиламиз:

$$\xi - x^{(k)} = \frac{f''(c)}{2f'(x^{(k-1)})}(\xi - x^{(k-1)})^2 \quad (3)$$

Демак,

$$|\xi - x^{(k)}| \leq q|\xi - x^{(k-1)}|^2, \quad q|\xi - x^{(k)}| \leq \{q|\xi - x^{(k-1)}|\}^2. \quad (4)$$

Бу тенгсизликдан кўринадики, агар $q|\xi - x^{(k-1)}| < 1$ бўлса Ньютон методи жуда тез яқинлашади. Умуман олганда $a_k = q|\xi - x^{(k)}|$ десак, $a_k \leq a_{k-1}^2$, шунинг учун, $a_k \leq a_{k-1}^2 \leq a_{k-2}^4 \leq \dots \leq a_0^{2^k}$, ва олдинги белгилашларга қайтиб ушбу тенгсизликни оламиз

$$|\xi - x^{(k)}| \leq (q|\xi - x^{(0)}|)^{2^k} / q \quad (5)$$

(1) ўрнига ушбу формулани олиш мумкин:

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - \frac{f(x^{(k-1)})}{f'(x^{(k-1)})}, \quad k=1,2,\dots \quad (6)$$

Бу усулни соддалаштирилган Ньютон усули дейилади.

3.Итерация усули билан боғланиш.

Равшанки, $l \neq 0$ бўлса

$$f(x)=0 \leftrightarrow x = x + lf(x) \quad x=g(x), \quad g(x)=x + lf(x).$$

Итерация методида $|g'(x)|$ қанчалик кичик бўлса у шунчалик тез яқинлашади.

Шунинг учун $g'(x^{(k-1)})=0$ деб қабул қиламиз:

$$g'(x^{(k-1)}) = 1 + l \cdot f'(x^{(k-1)}) = 0 \rightarrow l = -1/(f'(x^{(k-1)}))$$

ва яна

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - \frac{f(x^{(k-1)})}{f'(x^{(k-1)})}, \quad k=1,2,\dots$$

формулага келамиз.

4. Mathcad да ички функциялар ва алгоритм.

Мисол 1. Ньютон усули. $f(x) = x - \cos(x) = 0$ тенгламани қараймиз.

Бошланғич итерация ва итерациялар сони $x_0 := 0 \quad k := 0..10$

Ньютон усули $x^{(k+1)} = x^{(k)} - f(x^{(k)}) / f'(x^{(k)}) \quad x_{k+1} := x_k - (x_k - \cos(x_k)) / (1 + \sin(x_k))$

Натижани чиқариши $x^T = (1, 0.75036, 0.73911, \dots, 0.73909)$

Натижа итерация усулига нисбатан тезроқ олинди ва аниқлик яхшироқ.

Назарий саволлар ва топшириқлар.

1. Ньютон усулининг ғоясининг айтиб беринг.
2. Ньютон усулининг геометрик маъносини айтиб беринг.
3. Ньютон усулининг яқинлашиш тартиби қандай?
4. Ньютон усулининг қолдиқ ҳадининг баҳоланг.
5. Қуйидаги тенгламалар Ньютон усули билан ечилсин.
 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $ax - b\sin(x) = 0$, $ax - b\cos(x) = 0$.Коэффецентлар танлаб олинсин. Паскаль тилида программа тузилиб жавоблар олинсин.

[Мундарижага](#)

1.4. ЧИЗИҚЛИ АЛГЕБРА МАСАЛАЛАРИНИ ТАҚРИБИЙ ЕЧИШ

Асосий тушунчалар: Чизикли алгебра масалалари, уч диагоналли системани ечиш, прогонка (ҳайдаш) усули, усулнинг дастури.

Асосий натижалар:

1. Чизикли алгебра масалалари:

$$Ax = b, B = A^{-1}, x = A^{-1}b, \Delta = \det(A), Ax = \lambda x.$$

2. Уч диагоналли системани ечиш:

$$b_0x_0 + c_0x_1 = d_0, a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i, i = 1, \dots, n-1, a_n x_{n-1} + b_n x_n = d_n.$$

$$\begin{cases} u_{i+1} = \frac{-c_i}{a_i u_i + b_i}, v_{i+1} = \frac{d_i - a_i v_i}{a_i u_i + b_i}, i = 0, \dots, n-1, u_0 = v_0 = 0; \\ x_n = \frac{d_n - a_n v_n}{a_n u_n + b_n}, x_i = u_{i+1} x_{i+1} + v_{i+1}, i = n-1, \dots, 0 \end{cases}$$

3. Mathcad да ички функциялар ва алгоритм.

1. Чизикли алгебра масалалари

Ушбу чизикли тенгламалар системасини қараймиз:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 = a_{1n+1} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 = a_{2n+1} \\ &\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n = a_{nn+1} \end{aligned} \quad (1)$$

Бу системани ушбу векторлар, матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} a_{1n+1} \\ a_{2n+1} \\ \dots \\ a_{nn+1} \end{pmatrix}$$

киритиб қисқа кўринишда езамиз:

$$Ax = b. \quad (2)$$

Алгебрадан маълумки, бу ерда қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

1) $\det(A) \neq 0$, система ягона ечимга эга: $x = A^{-1}b$ ёки Крамер формулаларига асосан $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i = 1, \dots, n$, бу $\Delta = \det(A), \Delta_i = \det(A_i), A_i$ - матрица A дан i -устун билан фарқ қилади, унда ўнг томон жойлашган, бу ерда A^{-1} - тескари матрица;

2) $\det(A) = 0$, бу ернинг ўзида иккита ҳол бўлиши мумкин:

$$a) \Delta = \det(A) = 0, \Delta_i = \det(A_i) = 0, i = 1, \dots, n,$$

бўлса бу система биргаликда, акс ҳолда яъни

$$b) \Delta = \det(A) = 0, \exists j : \Delta_j = \det(A_j) \neq 0, j \in [1, \dots, n]$$

бўлса, бу система ечимга эга эмас. Бу фикрлар чизиқли алмаштиришлар ёрдамида ҳосил қилинадиган ва доимий тўғри бўлган ушбу айниятлардан келиб чиқади:

$$x_i \Delta = \Delta_i, i = 1, \dots, n.$$

$Ax = lx, x \neq 0$ шартларни қаноатлантирувчи x -вектор хос вектор, l -сон хос сон дейилади. (1) системанинг ечимини топиш, $\det(A), A^{-1}$, хос сон, хос векторларни топиш масалалари чизиқли алгебра масалалари дейилади.

2. Уч диагоналли системани ечиш. Бу масалалар амалда жуда кўп учрайди, ҳатто шу курснинг ўзида бир неча бор ишлатилади. Қуйидаги

$$\begin{aligned} b_0 x_0 + c_0 x_1 &= d_0, \\ a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} &= d_i, i = 1, \dots, n-1, \\ a_n x_{n-1} + b_n x_n &= d_n. \end{aligned} \quad (3)$$

кўринишдаги система уч диагоналли система дейилади. Бу система хайдаш (прогонка) усули (И.М.Гельфанд, О.В.Локуциевский-1953й.) билан ечилади. Равшанки, ечимлар орасида

$$x_i = u_{i+1} x_{i+1} + v_{i+1}, i = 0, 1, \dots, n-1, \quad (4)$$

боғланиш бор (0- тенглама учун бу аниқ, x_0 ни 1-сига кўямиз ва ҳоказо). Демак,

$$x_{i-1} = u_i x_i + v_i, i = 1, \dots, n.$$

Бу тенгликдан фойдаланиб (3) ни ўзгартирамиз:

$$a_i (u_i x_i + v_i) + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i, i = 1, \dots, n-1$$

$$(a_i u_i + b_i) x_i + c_i x_{i+1} = d_i - a_i v_i, i = 1, \dots, n-1$$

$$x_i = \frac{-c_i}{a_i u_i + b_i} x_{i+1} + \frac{d_i - a_i v_i}{a_i u_i + b_i}, i = 1, \dots, n-1$$

Охирги тенгликни (4) билан солиштириб

$$u_{i+1} = \frac{-c_i}{a_i u_i + b_i}, v_{i+1} = \frac{d_i - a_i v_i}{a_i u_i + b_i}, i = 1, \dots, n-1 \quad (5)$$

тенгликларни оламиз. Уларни $i=0, n$ учун кенгайтирамыз. (3) нинг 0-чисидан оламиз:

$$x_0 = -\frac{c_0}{d_0} x_1 + \frac{d_0}{b_0}. \quad (6)$$

(5), (6) дан $v_0=0, u_0=0$ бўлиши кераклигини топамиз. (4) дан ва (3) нинг охиргисидан

$$x_{n-1} = u_n x_n + v_n, a_n x_{n-1} + b_n x_n = d_n,$$

x_{n-1} ни йўқотсак,

$$a_n (u_n x_n + v_n) + b_n x_n = d_n \triangleright x_n = \frac{d_n - a_n v_n}{a_n u_n + b_n} = v_{n+1}.$$

ни топамиз. Демак,

$$\{u_{i+1} = -c_i / (a_i u_i + b_i), v_{i+1} = (d_i - a_i v_i) / (a_i u_i + b_i), i = 0, \dots, n-1, u_0 = v_0 = 0; \quad (7)$$

$$x_n = (d_n - a_n v_n) / (a_n u_n + b_n), x_i = u_{i+1} x_{i+1} + v_{i+1}, i = n-1, \dots, 0 \quad (8)$$

3. Прогонка усулининг дастури: Масалани Маткадда ечиш

а) $b_0 x_0 + c_0 x_1 = d_0, a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i, i = 1, \dots, n-1, a_n x_{n-1} + b_n x_n = d_n$.-ЧАТС,

б) $u_{i+1} = \frac{-c_i}{a_i u_i + b_i}, v_{i+1} = \frac{d_i - a_i v_i}{a_i u_i + b_i}, i = 0, \dots, n-1, u_0 = v_0 = 0$ -прогонка усулида ўнг юриш

в) $x_n = \frac{d_n - a_n v_n}{a_n u_n + b_n}, x_i = u_{i+1} x_{i+1} + v_{i+1}, i = n-1, \dots, 0$ - прогонка усулида чап юриш

Уч диагоналли система коэффициентлари $n:=10 \quad i:=0..n \quad a_0:=0 \quad c_n:=0$

Уч диагоналли матрица ва ўнг томонни бериш

0- тенглама коэффициентлари $m_{0,0}:=b_0 \quad m_{0,1}:=c_0 \quad d_0 := \gamma_0$

i-тенглама коэффициентлари $i := 1..n-1 \quad m_{i,i-1} := a_i \quad m_{i,i} := b_i \quad m_{i,i+1} := c_i \quad d_i := \gamma_i$

n- тенглама коэффициентлари. $m_{n,n-1} := a_n \quad m_{n,n} := b_n \quad d_n := \gamma_1$

Назорат учун ЧАТС матрицаси ва ўнг томонни экранга чиқарамиз:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0.95	-1.999	1.05	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0.95	-1.998	1.05	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0.95	-1.997	1.05	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0.95	-1.996	1.05	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0.95	-1.995	1.05	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0.95	-1.994	1.05	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0.95	-1.993	1.05	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0.95	-1.992	1.05
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0.95	-1.991
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	0
0	0
1	$6.301 \cdot 10^{-3}$
2	0.013
3	0.021
4	0.029
5	0.038
6	0.048
7	0.059
8	0.071
9	0.085
10	0.1

Ечимнинг қийматларини чиқарамиз:

Прогонка коэффициентлари $u_0 = 0$ $v_0 = 0$ $i = 0..n-1$ $u_{i+1} = \frac{-c_i}{a_i u_i + b_i}$ $v_{i+1} = \frac{d_i - a_i v_i}{a_i u_i + b_i}$

Ечимни ҳисоблаш $x_n = \frac{d_n - a_n v_n}{a_n u_n + b_n}$ $i = n-1..0$ $x_i = u_{i+1} x_{i+1} + v_{i+1}$

Ечимни чиқариш

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0.526E-3	0.907E-3	0.028	0.065	0.126	0.217	0.344	0.513	0.729	1

Назарий саволлар ва топшириқлар.

1. Чизиқли алгебра масалалари деб қандай масалаларга айтилади?
2. Чизиқли системанинг қачон ечими мавжуд ва ягона.
3. Прогонка усули неча этапдан иборат?
4. Прогонка усулининг турғунлик шартини топинг.
5. $b_0 y_0 + c_0 y_1 = d_0$, $y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = d_i = -h^2 f_i$, $i = 1..n-1$, $a_n y_{n-1} + b_n y_n = d_n$ уч диоганалли система прогонка усули билан ечилсин

[Мундарижага](#)

1.5. ЧАТСНИ ЕЧИШНИНГ АНИҚ УСУЛЛАРИ. ГАУСС ВА ГАУСС-ЖОРДАН УСУЛИ.

Асосий тушунчалар: Гаусс усули ва Жордан - Гаусс усуллари, усулнинг дастури

Асосий натижалар:

1. Гаусс усули: $Ax = b \Leftrightarrow LUx = b, Ux = y, Ly = b, LU = A, L$ -қуйи ва U -юқори учбурчак матрицалар.

2. Жордан - Гаусс усули:

$$Ax = b \Leftrightarrow Dx = b, D = [d_1, \dots, d_n], x_i = b_i / d_i, i = 1, \dots, n.$$

3. Детерминант ва тескари матрицани ҳисоблаш:

$$D_n = a_{11} D_{n-1} = a_{11} a_{22}^{(1)} D_{n-2} = \dots = a_{11} a_{22}^{(1)} \dots a_{nn}^{(n-1)}, \quad [A|E] = [E|B], B = A^{-1}, \det(E) = 1$$

4. *Mathcad* да ички функциялар ва алгоритм.

1. Гаусс усули

(4.1) системани Гаусс усули билан ечиш ғояси қуйидагича:

1-қадам. $a_{11} \neq 0$ бўлсин. Акс ҳолда қолган тенгламалардан x_1 олдида нолга тенг бўлмаган тенглама (ёки модуль бўйича x_1 олдида энг катта коэффициентли тенглама) биринчи тенглама қилиб олинади. Биринчи тенгламадан x_1 ни топиб оламиз:

$$x_1 = (a_{1n+1} - a_{12} x_2 - \dots - a_{1n} x_n) / a_{11} = a_{1n+1}^{(1)} - (a_{12}^{(1)} x_2 + \dots + a_{1n}^{(1)} x_n)$$

Бу тенгламани барча қолган тенгламаларга қўямиз:

Бу ердан, $z=2, y=4z-5=3, x=-y+z=-1$. Жавоб: $\{-1, 3, 2\}$.

2. Жордан-Гаусс усули.

Энди Жордан-Гаусс усулини кўриб чиқамиз.

1-кадам. Гаусс методи билан бир хил.

2-кадамда x_2 ноъмалум 2-тенглама ёрдамида 1, 3, ..., n-тенгламалардан йўқотилади (Гаусс методидида 1-тенгламадан йўқотилмас эди) ва хоказо n-1 - кадамда x_{n-1} -номаълум 1-, 2-, ..., n-2, n - тенгламалардан йўқотилади.

Натижада ушбу системага келинади:

$$x_1 = a_1^{(n)}, x_2 = a_2^{(n)}, \dots, x_n = a_n^{(n)} \quad (5)$$

яъни ечим топилади. Жордан методидида тескари юриш йўқ экан.

3. Детерминант ва тескари матрицани ҳисоблаш.

Гаусс усули ёрдамида детерминант ва тескари матрицани ҳисоблаш мумкин.

n-тартибли квадрат матрица $A=[a_{ij}]$ нинг детерминанти $D_n = \det(A)$ ни ҳисоблашни қарайлик. Равшанки, энг содда ҳол $n=2$ да бўлади:

$$D_2 = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$a_{11} \neq 0$ деб D_3 ни қарайлик. У ҳолда элементлар алмаштиришлар қуйидагини беради:

$$D_3 = \det(A) = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}/a_{11} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}/a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21}/a_{11} & d_{22}^{(1)} & d_{23}^{(1)} \\ a_{31}/a_{11} & d_{32}^{(1)} & d_{33}^{(1)} \end{vmatrix} = a_{11}D_2.$$

Бу ерда

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{vmatrix}, a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}a_{1j}/a_{11} = \frac{1}{a_{11}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix}.$$

Шунинг учун, $a_{ij}^{(1)} = a_{11}a_{ij} - a_{i1}a_{1j}$ десак,

$$D_3 = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & a_{11} & a_{12} & 1 & a_{11} & a_{13} \\ a_{11} & a_{21} & a_{22} & a_{11} & a_{21} & a_{23} \\ 1 & a_{11} & a_{12} & 1 & a_{11} & a_{13} \\ a_{11} & a_{31} & a_{32} & a_{11} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{11}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

яъни

$$D_3 = \frac{1}{a_{11}} \begin{vmatrix} a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{vmatrix}, a_{ij}^{(1)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix}.$$

Ҳудди шу каби, ихтиёрий n учун қуйидаги муносабатларни ҳосил қиламиз:

$$D_n = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ a_{11} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \\ a_{11} & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = a_{11}D_{n-1}, \alpha_{ij}^{(1)} = \frac{1}{a_{11}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix} = a_{ij}^{(1)} / a_{11},$$

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} \alpha_{23}^{(1)} & \dots & \alpha_{2n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n2}^{(1)} & \dots & \alpha_{nm}^{(1)} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{11}^{n-1}} \begin{vmatrix} a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \dots & a_{3n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{vmatrix}$$

$$D_n = a_{11} D_{n-1} = \frac{1}{a_{11}^{n-2}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ёки

$$D_n = a_{11} D_{n-1} = a_{11} a_{22}^{(1)} D_{n-1} = \dots = a_{11} a_{22}^{(1)} \dots a_{nn}^{(n-1)}, \quad (6)$$

Мисоллар 2.

$$1. \quad A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -5 & -7 \end{vmatrix} = -18.$$

$$2. \quad A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & -7 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 18 \end{vmatrix} = -18.$$

Кўрсатилган мисоллар алгоритми тўғрилигини билдиради.

$A^{-1} = B$ тескари матрицани ҳисоблаш учун кенгайтирилган $Ax = E$ матрицавий тенгламани қараймиз. Уни битта матрицали бир неча ўнг томонли чизиқли тенгламалар системаси деб қараш мумкин, ўнг томонлар бирлик векторлар. Унга Гаусс усулини қўллаб $EX = X = B = A^{-1}$ муносабатни оламиз. Шундай қилиб, тескари матрицани ҳисоблаш учун A матрица ёнига бирлик матрицани ёзиб кенгайтирилган матрица тузиш керак экан, ҳосил бўлган кенгайтирилган матрицани Гаусс усулидаги элементар алмаштиришлар ёрдамида A матрица ўрнида бирлик матрица ҳосил қилингунча ўзгартириш керак экан. Шунда E матрица ўрнида A га тескари матрица ҳосил бўлар экан.

Мисол 3.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, A^{-1} = ?.$$

Тескари матрицани кенгайтирилган матрица орқали топамиз:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -7 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -7 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \approx$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 7 & -5 & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{18} & -\frac{5}{18} & \frac{1}{18} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{18} & \frac{1}{18} & \frac{7}{18} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{18} & \frac{-7}{18} & -\frac{5}{18} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{18} & \frac{-5}{18} & \frac{1}{18} \end{bmatrix}$$

Бу ердан, тескари матрицани топамиз:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{18} & \frac{1}{18} & \frac{7}{18} \\ \frac{1}{18} & \frac{-7}{18} & -\frac{5}{18} \\ \frac{7}{18} & \frac{-5}{18} & \frac{1}{18} \end{bmatrix}.$$

4. Mathcad да ички функциялар ва алгоритм.

MathCAD да жуда кўп чизиқли алгебра масалалари ечилиши мумкин ва бу жараён табиий математика тилида олиб борилади. У нақадар содда ва тушунарлики, биз айрим асосий командаларни санаб ўтиш билан чекланамиз.

4.1. Тескари матрица усули

Матрица ва ўнг томон

$$A := \begin{bmatrix} 40 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 40 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 40 \end{bmatrix} \quad b := \begin{bmatrix} 43 \\ 45 \\ 46 \\ 44 \end{bmatrix}$$

Ечимни ҳисоблаш ва чиқариш

$$x := A^{-1}b \quad x^T = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

4.2. Ички функция lsolve(A,b) ёрдамида ечиш

Матрица ва ўнг томон

$$A := \begin{bmatrix} 40 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 40 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 40 \end{bmatrix} \quad b := \begin{bmatrix} 43 \\ 45 \\ 46 \\ 44 \end{bmatrix}$$

Ички функцияга мурожаат қилиш

$$r := \text{lsolve}(A,b)$$

Натижани чиқариш

$$r^T = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

4.3. Гаусс усулининг ички функцияси rref(A) ёрдамида ечиш

Матрица ва ўнг томон

$$A := \begin{bmatrix} 40 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 40 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 40 \end{bmatrix} \quad b := \begin{bmatrix} 43 \\ 45 \\ 46 \\ 44 \end{bmatrix}$$

Кенгайтирилган матрица

$$B := \text{augment}(A, b) \quad B = \begin{bmatrix} 40 & 1 & 1 & 1 & 43 \\ 2 & 40 & 2 & 1 & 45 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 46 \\ 1 & 1 & 2 & 40 & 44 \end{bmatrix}$$

Ички функция ва ечим

$$s := \text{rref}(B) \quad s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4.4. Тескари матрица

Матрица

$$A := \begin{bmatrix} 40 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 40 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 40 \end{bmatrix}$$

Ички функция ва уни чиқариш, текшириш

$$C := A^{-1} \quad C =$$

$$C = \begin{pmatrix} 0.0251 & -0.0006 & -0.0006 & -0.0006 \\ -0.0012 & 0.0251 & -0.0012 & -0.0005 \\ -0.0012 & -0.0012 & 0.0251 & -0.0012 \\ -0.0005 & -0.0006 & -0.0012 & 0.0251 \end{pmatrix}, \quad C \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.5. Детерминант, хос сонлар, хос векторлар

Матрица

$$A := \begin{bmatrix} 40 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 40 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 40 \end{bmatrix}$$

Детерминант, тескари матрица детерминанти, уларнинг кўпайтмаси

$$d := |A| \quad d1 := |C| \quad d=2538588 \quad d1=0.00000039 \quad d * d1 = 1$$

Хос сонлар $r := \text{eigenvals}(A)$ $r^T = [44.49 \ 38.866 \ 39.37 \ 37.644]$

Хос векторлар $s := \text{eigenvals}(A)$ $s = \begin{bmatrix} 0.3582 & -0.1852 & -0 & 0.0958 \\ 0.5338 & 0.7658 & 0.7071 & -0.5129 \\ 0.606 & 0.5878 & 0 & 0.7295 \\ 0.4686 & -0.6132 & -0.7071 & -0.4423 \end{bmatrix}$

Назарий саволлар ва топшириқлар.

1. Гаусс усулининг моҳиятини айтиб беринг.
2. Юқори тартибли детерминантларини ҳисоблашни қандай қодаларини биласиз?
3. Гаусс усули билан детерминантни ҳисоблашни 2 тартибли детерминантларга келтириш ғоясини айтиб беринг.
4. Тескари матрицани Гаусс усули билан ҳисоблаш ғоясини айтиб беринг.
5. Гаусс усулини доир масалалар тузиб беринг.

[Мундарижага](#)

1.6. ЧИЗИҚЛИ СИСТЕМА УЧУН ИТЕРАЦИЯ УСУЛИ

Асосий тушунчалар: Матрица нормаси, ЧАТС учун итерация усули ва унинг хатолигини баҳолаш, яқинлашиш шарти, усулнинг дастури. Зейдель усули.

Асосий натижалар:

1. Матрицанинг нормаси: $\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$.

2. Итерация усулининг назарияси:

$$Ax = b \Leftrightarrow x = Cx + d, x^k = Cx^{k-1} + d, \lim_{k \rightarrow \infty} x^k = \xi, A\xi = b,$$

$$\|\xi - x^{(k)}\| \leq \|C\|^k \|\xi - x^{(k-1)}\|, \|\xi - x^{(k)}\| \leq \frac{\|C\|}{1 - \|C\|} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|.$$

3. Содда итерация усули:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} (b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k-1)}), \quad k=0,1,\dots$$

4. Зейдель усули:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k-1)}), \quad k=0,1,\dots$$

5. Итерация усулининг Mathcad да дастури.

1. Матрицанинг нормаси

$x=(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y=(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ бўлсин ва $y=Ax$ алмаштириш

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

матрица билан берилсин.

\mathbb{R}^n да норма сифатида ушбу миқдорлар олинади:

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|, \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p},$$

Таъриф. $\|x\|$ $x \in \mathbb{R}^n$ нинг бирор нормаси бўлсин. Ушбу

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

миқдор A матрицанинг $\|x\|$ нормага мос нормаси дейилади.

Лемма. $\|x\|_\infty, \|x\|_1, \|x\|_2$ нормага A мос матрицанинг нормалари ушбулардир:

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$$

Исбот. $x \in \mathbb{R}^n, y=Ax$ бўлсин. Равшанки,

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, i = 1, \dots, n.$$

Шунинг учун

$$\begin{aligned} \|Ax\|_\infty = \|y\|_\infty &= \max_i \left(\left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \right) \leq \max_i \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_j| \right) \leq \\ &\leq \max_i \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) (\max_j |x_j|) \leq \max_i \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) \|x\|_\infty = \|A\|_\infty \|x\|_\infty. \end{aligned}$$

Демак, ҳар қандай $x \in \mathbb{R}^n$ учун

$$\|Ax\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|x\|_\infty, x \neq 0.$$

Ҳудди шу каби

$$\begin{aligned} \|Ax\|_1 &= \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_j| \leq \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) |x_i| \leq \\ &\leq \sum_i \left(\max_j \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) \right) |x_j| = \|A\|_1 \|x\|_1, \end{aligned}$$

$$\|Ax\|_1 \leq \|A\|_1 \|x\|_1, x \neq 0 \text{ ҳар қандай } x \neq 0.$$

Коши - Буняковский (Шварц)

$$\left| \sum_{j=1}^n a_j b_j \right|^2 \leq \sum_{j=1}^n |a_j|^2 \sum_{j=1}^n |b_j|^2$$

тенгсизлигидан фойдаланамиз. У ҳолда

$$\begin{aligned} \|Ax\|^2 &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_j \right)^2 \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \sum_{j=1}^n |x_j|^2 = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \sum_{j=1}^n |x_j|^2 = \|A\|_2^2 \|x\|_2^2. \end{aligned}$$

Демак,

$$\|Ax\|_2 \leq \|A\|_2 \|x\|_2, x \neq 0 \text{ ҳар қандай } x \neq 0.$$

Биринчи ва иккинчи норма учун

$$\|Ax\|_l = \|A\|_l \|x\|_l, l=1,2$$

векторлар топилади. (Мустақил топинг). Учинчи норма учун бундай вектор йўқ.

Матрицалар учун яна бир норма киритамиз:

$$\|A\|_4 = n \max_i |a_{ij}|.$$

Бу норма итерация усулида муҳим роль ўйнайди. Маълумки, чекли ўлчовли фазода барча нормалар эквивалент.

2. $Ax = b$ чизиқли тенгламалар системасини қараймиз. Уни итерация методини қўллаш учун қулай кўринишга келтирамиз:

$$x + l Ax = x + l b, l=0$$

$$x = (E - l A)x + l b, Ex=x,$$

$$C = E - l A, d = l b$$

$$x = Cx + d,$$

бу ерда B - матрица, d - вектор .

Содда итерация методи қуйидагича $x^0 \in R^n$ ихтиёрий бошланғич вектор олиниб ушбу векторлар кетма-кетлиги ҳосил қилинади.

$$x^{(k)} = Cx^{(k-1)} + d, k=0,1,\dots \quad (1)$$

Теорема. Агар $\|C\| < 1$ бўлса, у ҳолда $x = Cx + d (Ax = b)$ система ягона ечимга эга:

$$A \xi = b \quad (\xi = C\xi + d), \quad \xi = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}$$

Ундан ташқари қуйидаги баҳолар ўринли:

$$\|\xi - x^{(k)}\| \leq \|C\|^k \|\xi - x^{(k-1)}\| \quad (2)$$

$$\|\xi - x^{(k)}\| \leq \frac{\|C\|}{1 - \|C\|} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \quad (3)$$

Исбот. Ечимнинг ягоналиги ва мавжудлиги. Фараз қилайлик

$$\xi = C\xi + d.$$

У ҳолда

$$\|\xi\| \leq \|C\xi + d\| \leq \|C\| \|\xi\| + \|d\|,$$

$$\|\xi\| \leq \frac{\|d\|}{1 - \|C\|}$$

Агар $d = 0$ бўлса $\xi = 0$ бўлмоқда, яъни бир жинсли система фақат 0 ечимга эга экан. У ҳолда бир жинсли бўлмаган

$$x = Cx + d$$

система ҳар қандай d учун ягона ечимга эга.

Энди

$$r^{(k)} = \xi - x^{(k)} \text{ деб } \xi = C\xi + d, \quad x^{(k)} = Cx^{(k-1)} + d$$

тенгликларни бир-биридан айирсак

$$\xi - x^{(k)} = C(\xi - x^{(k-1)}) \rightarrow r^{(k)} = Cr^{(k-1)}$$

тенгликни оламиз. У ҳолда

$$\begin{aligned} \|r^{(k)}\| &= \|Cr^{(k-1)}\| \leq \|C\| \|r^{(k-1)}\| = \\ \|C\| \|Cr^{(k-2)}\| &\leq \|C\|^2 \|r^{(k-2)}\| \leq \|C\|^k \|r^{(0)}\|, \quad \|\xi - x^{(k)}\| \leq \|C\|^k \|\xi - x^{(0)}\|. \end{aligned}$$

эканлигидан

$$\begin{aligned} \|\xi - x^{(k)}\| &\|C\| \|\xi - x^{(k)}\| + \|C\| \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \\ (1 - \|C\|) \|\xi - x^{(k)}\| &\leq \|C\| \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \\ \|\xi - x^{(k-1)}\| &\leq \frac{\|C\|}{1 - \|C\|} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \end{aligned}$$

Теоремадаги биринчи баҳо (2) априор баҳони беради, яъни тақрибий ечим хатолигини системани ечмасдан олдинги (назарий) баҳони беради. Теоремадаги иккинчи баҳо апостериор (амалий) баҳони беради. Апостериор баҳо ҳар бир тақрибий ечим топилгач, бу тақрибий ечим аниқ ечимга яқинлашяптими деган саволга жавоб беради.

Мисол. $B = \begin{bmatrix} -3/5 & 3/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{bmatrix}$ матрица учун $\|B\|_\infty = 6/5 > 1$, $\|B\|_1 = 1$, $\|B\|_2 = \sqrt{23}/5 < 1$

Теоремадан кўринадики, итерация усули яқинлашиши учун C матрицанинг қандайдир нормаси бирдан кичик бўлиши керак экан, яъни $\|C\| < 1$, $C = E - lA$ бўлганлиги учун параметр l ни шундай танлаш керак эканки, $\|E - lA\| < 1$ бўлсин. Масалан: 4-нормани олсак $\|C\| < \max\{|a_{ij}|/n, i, j=1..n\}$ деб олиш мумкин. Бундай ҳолда итерация усулини системага тўғридан тўғри қўллаш мумкин.

3. Содда итерация ёки Якоби усули қуйидагича қурилади: ҳар бир тенгламадан $a_{ii} \neq 0$ деб x_i лар топиб олинади:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} (b_i - \sum_{j \neq i}^n a_{ij} x_j), \quad k=0, 1, \dots$$

Сўнг итерациялар қуйидагича қурилади:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} (b_i - \sum_{j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k-1)}), \quad k=0, 1, \dots$$

4. Зейдель усули.

$Ax = b$ системада $a_{ii} \neq 0$ деб i -тенгламадан x_i ни топиб оламиз

$$a_{ii} x_i = -\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j + d_i$$

$$x_i = -\frac{1}{a_{ii}} \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j - \frac{1}{a_{ii}} \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j + \frac{b_i}{a_{ii}}, i = 1, \dots, n.$$

Натижада $x = Cx + d$ кўринишга келамиз, бу ерда

$$C = c_{ij} = \begin{cases} -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, & j = i \\ 0, & j = i \end{cases}$$

Зейдель методиди итерациялар қуйидагича кўрилади:

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} x_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^n b_{ij} x_j^{(k-1)} + d_i, k=0, 1, \dots$$

x^0 - ихтиёрий .

Теорема. Агар A матрицада диагонал элементлар салмоқли бўлса, яъни

$$\sum_{j \neq i}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|, i=1, \dots, n$$

$Ax = b$ система ягона ечимга эга ва Зейдель методи яқинлашади:

$$\xi = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}$$

Исбот. Олдинги теоремага асосан

$$\|C\|_l = \max_i \sum_{j=1}^n |c_{ij}| < 1$$

бўлиши керак, ёки

$$\sum_{j=1}^n |c_{ij}| = \sum_{j \neq i}^n |c_{ij}| = \sum_{j=1}^n \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1$$

бўлиши керак. Демак,

$$\sum_{j \neq i}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|, i=1, \dots, n$$

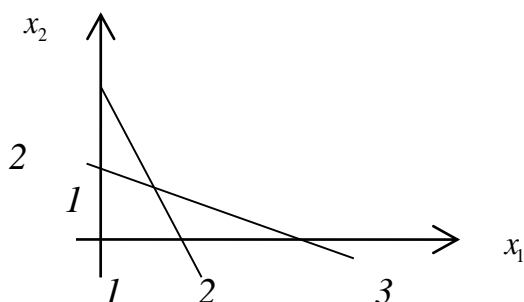
Мисол.

$$2x_1 + x_2 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 = 3$$

$$x_1 = \frac{3}{2} - \frac{x_2}{2}$$

$$x_2 = \frac{3}{2} - \frac{x_1}{2}$$



яқинлашишларни топамиз.

$$\begin{aligned}
x_1^{(0)} &= (0,0), \\
x_1^{(1)} &= 3/2 = 1.5, \quad x_2^{(1)} = 1.5 \\
x_1^{(2)} &= 3/2 - (1*3)/(2*2) = 3/2 - 3/4 = 3/4 = 0.75 \\
x_2^{(2)} &= 0.75 \\
x_1^{(3)} &= 3/2 - (1*3)/(2*4) = 3/2 - 3/8 = 9/8 = 1.25 \\
x_2^{(3)} &= 1.25 \\
x_1^{(4)} &= 0.9375 \quad x_1^{(5)} = 1.03125 \quad x_1^{(6)} = 0.982375 \\
x_2^{(4)} &= 0.9375 \quad x_2^{(5)} = 1.03125 \quad x_2^{(6)} = 0.982375
\end{aligned}$$

5. Итерация усулини Mathcad да ташкил этиш.

Тенгламалар системасини бериш

$$A := \begin{bmatrix} 40 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 40 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 40 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 40 \end{bmatrix} \quad b := \begin{bmatrix} 43 \\ 45 \\ 46 \\ 44 \end{bmatrix}$$

Бирлик матрица ва 0- итерация $E := \text{identity}(4)$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Итерация параметри $\tau := 0.005$

ЧАТС ни итерация учун қулай кўринишга келтириш

$$C := E - \tau A \quad d := \tau b \quad x := d + Cx$$

Итерацияларни қуриш $k := 0..30 \quad x^{<k+1>} := d + Cx^{<k>}$

Натижани чиқариш

	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0	0.989	0.992	0.993	0.995	0.996	0.997	0.997	0.998	0.998	0.999	0.999	0.999
x = 1	0.992	0.994	0.995	0.996	0.997	0.998	0.998	0.999	0.999	0.999	0.999	1
2	0.994	0.995	0.997	0.997	0.998	0.999	0.999	0.999	0.999	1	1	1
3	0.991	0.993	0.994	0.996	0.997	0.997	0.998	0.998	0.999	0.999	0.999	0.999

Назарий саволлар ва топшириқлар

1. Матрицанинг нормаси нима?
2. Чизикли тенгламалар системаси учун содда итерация усулининг яқинлашиш шарти қандай ?
3. Зейдел усулининг яқинлашиш шарти қандай ?

4. Чизикли система итерация усулини қўллаш учун қандай кўринишга келтирилади?
5. $x+2y=3, 2x+y=3$ система учун итерация усулини кўринг.

[Мундарижага](#)

1.7.МАТРИЦАНИНГ ХОС СОНЛАРИНИ ТОПИШ

Асосий тушунчалар: Матрицанинг хос сонлари, хос векторлари, Гамильтон-Келли теоремаси, симметрик матрицалар учун хос сонларнинг хоссалари, энг катта хос сони топиш учун итерация усули.

Асосий натижалар:

1. Хос сонлар ва хос векторлар: $Ax = \lambda x, x \neq 0,$

2. Симметрик матрицанинг хос сонлари:

1) $\lambda \in R, 2) Ax = \lambda x, Ay = \mu y, \lambda \neq \mu \rightarrow (x, y) = 0.$

3. Энг катта энг кичик хос сонлар учун итерация усули:

$$1) x^k = \lambda_k A x^{k-1}, x^0 \in R^n, \|x^k\| = 1, \lambda_k \rightarrow \lambda_{\max}, k \rightarrow \infty.$$

$$2) y^k = \mu_k A^{-1} y^{k-1}, y^0 \in R^n, \|y^k\| = 1, \mu_k \rightarrow \mu_{\min}, k \rightarrow \infty.$$

4. Характеристик тенглама қуришининг Леверье-Фадеев усули.

5. MathCAD да дастурлар.

1. $A = [a_{ij}], i, j = 1, \dots, n$ квадрат, хақиқий элементли матрица берилган бўлсин, $A: R^n \rightarrow R^n, E$ - бирлик матрица бўлсин.

Ушбу

$$Ax = \lambda x, x \neq 0, \quad (1)$$

тенгликни қаноатлантирувчи λ сон A матрицанинг хос сони, $x \neq 0$ вектор эса хос вектори дейилади.

A матрицанинг барча хос сонлари топиш хос сонлар проблемаси дейилади. Кўрайликчи, бу масала нимага олиб келар экан. (1) ни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$Ax - \lambda Ex = (A - \lambda E)x = 0. \quad (2)$$

(2) бир жинсли система, у ноль бўлмаган ечимга эга бўлиши учун, унинг детерминанти 0 га тенг бўлиши керак: $\det(A - \lambda E) = |A - \lambda E| = 0.$

Лекин,

$$A - \lambda E = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Шунинг учун,

$$\det(A - \lambda E) = (-1)^n (\lambda^n + \rho_1 \lambda^{n-1} + \rho_2 \lambda^{n-2} + \dots + \rho_n) = 0. \quad (3)$$

(3) тенглама A матрицанинг характеристик (асрий) тенгламаси дейилади. У n – даражали алгебраик тенглама. Шундай қилиб, хос сонларни топиш учун

алгебраик n -даражали характеристик тенгламани барча ечимларини топиш керак экан.

Алгебрининг асосий теоремасига асосан, характеристик тенглама алгебраик n -даражали тенглама бўлганлиги учун, ҳар қандай A -матрица қарралари, комплекс илдизларини ҳисобга олганда n -та хос сонларга эга.

Гамильтон-Келли теоремаси. Ҳар қандай матрица ўз характеристик тенгласини қаноатлантиради: $\det(A - \lambda E) = \det(A - AE) = 0$.

Амалиётда, кўпинча матрицанинг бир неча хос сонларини топиш талаб этилади, масалан, энг кичик ва энг катта хос сонларни. Уларни топиш, хос сонларнинг хусусий проблемаси дейилади. Барча хос сонларни топиш хос сонларнинг тўлиқ проблемаси дейилади. Энг кичик хос сони топиш бошқа матрицанинг энг катта хос сони топиш масаласига келтирилади. Ҳақиқатан ҳам, $Ax = \lambda x \leftrightarrow A^{-1}x = x/\lambda$ эканлигидан. A -матрица учун энг катта хос сон, $B = A^{-1}$ матрица учун энг кичик хос сон экан.

Хос сонларни топишнинг бир қанча усуллари мавжуд: Энг катта (энг кичик) хос сонни топишнинг итерация усули.

- 1) Аввал характеристик тенгламани, сўнг хос сонларни топиш усуллари (Крылов, Леверье, Фадеев, интерполяция, нобмалум коэффициентлар...);
- 2) Хос сонларни характеристик тенглама тузмасдан топувчи, яъни матрицаларни алмаштиришга асосланган итерация усуллари (Якоби,...).

2. Матрица ўзининг транспортланганнига (комплекс қўшмасига) тенг бўлса, ёки R^n да скаляр кўпайтма маъносида

$$(Ax, y) = (x, A^*y) = (x, Ay), \quad x, y \in R^n \quad (4)$$

тенгликни қаноатлантирса симметрик дейилади.

Симметрик матрица учун хос сонлар ҳақида қуйидаги фикрлар ўринли:

Теорема 1. Симметрик матрицанинг хос сонлари ҳақиқий, ҳар хил хос сонларга мос векторлар ўзаро ортогонал.

Исбот. $Ax = \lambda x, Ay = \mu y$ бўлсин. Фараз қилайлик, $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2, \bar{\lambda} = \lambda_1 - i\lambda_2$ бўлсин. Таърифга асосан,

$$(Ax, x) = (\lambda x, x) = \lambda(x, x) = (x, Ax) = (x, \lambda x) = \bar{\lambda}(x, x)$$

Шунинг учун, $(\lambda - \bar{\lambda})(x, x) = 0, x \neq 0$ эканлигидан $\lambda = \bar{\lambda} = \lambda_1 \in R$. Иккинчидан,

$$(Ax, y) = \lambda(x, y) = (x, Ay) = (x, \mu y) = \mu(x, y).$$

Шунинг учун, $(\lambda - \mu)(x, y) = 0, \lambda \neq \mu$ эканлигидан, $(x, y) = 0 \Rightarrow x \perp y$.

$T^*T = E$ шартни қаноатлантирувчи матрицалар ортогонал матрицалар дейилади, равшанки, улар учун $T^*T^{-1} = E$. $A = T^*BT$ шarti қаноатлантирувчи матрицалар ўхшаш дейилади.

Теорема 2. Ўхшаш матрицалар бир хил хос сонларга эга, хос векторлар ўзаро чизикли боғланган.

Исбот. $Ax = \lambda x$, бўлсин, y ҳолда $Ax = T^*BTx = \lambda x$, ва $Tx = y$ десак

$$T^*By = \lambda x = \lambda T^{-1}y \Rightarrow By = (T^*)^{-1}\lambda T^{-1}y = \lambda(T^*T)^{-1}y = \lambda Ey = \lambda y$$

Яъни, $By = \lambda y$ ва $y = Tx$ экан.

3. $Ax = \lambda x$ масалада энг катта хос сони топишга киришамиз, Бирор $x^{(0)} \in R^n$ вектор олиб $x^{(k)} = Ax^{(k-1)}, k=1,2,\dots$, векторлар кетма-кетлиги қурамыз.

Теорема 3. $x^{(0)} \in R^n$ ихтиёрый бошланғич вектор учун $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) = Ax^{(k)}$ кетма-кетлик қурилган бўлсин. У ҳолда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_i^{(k)}}{x_i^{(k-1)}} = \lambda_{\max}, i = 1, \dots, n \quad (5)$$

Исбот. $Ae_i = \lambda_i e_i$ бўлсин, $i = 1, \dots$. Фараз қилайлик,

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

Равшанки, $x^{(0)} = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$ десак,

$$x^{(1)} = Ax^{(0)} = \lambda_1 a_1 e_1 + \dots + \lambda_n a_n e_n, \dots, x^{(k)} = Ax^{(k-1)} = \lambda_1^k a_1 e_1 + \dots + \lambda_n^k a_n e_n.$$

Энди $e_i = (e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{in})$ десак, $x_i^{(k)} = \lambda_1^k a_{1i} e_{1i} + \dots + \lambda_n^k a_{ni} e_{ni}$ ва

$$\begin{aligned} \frac{x_i^{(k)}}{x_i^{(k-1)}} &= \frac{\lambda_1^k a_{1i} e_{1i} + \dots + \lambda_n^k a_{ni} e_{ni}}{\lambda_1^{k-1} a_{1i} e_{1i} + \dots + \lambda_n^{k-1} a_{ni} e_{ni}} = \\ &= \lambda_1 \frac{1 + \mu_2^k (a_{2i} e_{2i} / a_{1i} e_{1i}) + \dots + \mu_n^k (a_{ni} e_{ni} / a_{1i} e_{1i})}{1 + \mu_2^{k-1} (a_{2i} e_{2i} / a_{1i} e_{1i}) + \dots + \mu_n^{k-1} (a_{ni} e_{ni} / a_{1i} e_{1i})} = \lambda_1 + O(|\mu_2|^{k-1}) \end{aligned}$$

бу ерда $\mu_i = \lambda_i / \lambda_1, i > 1$. Яъни,

$$\frac{x_i^{(k)}}{x_i^{(k-1)}} = \lambda_1 + O(|\mu_2|^{k-1}). \quad (6)$$

Бу ердан (5) келиб чиқади.

4. Характеристик кўпхадни топишнинг ноъмалум коэффицентлар усули.

$D(\lambda) = \det(A - \lambda E) = p_0 + p_1 \lambda + \dots + p_{n-1} \lambda^{n-1} + \lambda^n$ дейлик. p_i коэффицентларни топиш учун

$$D(i) = d_i, i = 0, \dots, n-1, \quad (7)$$

Детерминантларни ҳисоблайлик. Равшанки,

$$p_0 = d_0, p_0 + p_1 + \dots + p_{n-1} + 1 = d_1, p_0 + 2p_1 + \dots + 2^{n-1} p_{n-1} + 2^n = d_2, \dots, p_0 + (n-1)p_1 + \dots + (n-1)^{n-1} p_{n-1} + (n-1)^n = d_{n-1}. \quad (8)$$

Бу ердан дарров келиб чиқадики, $p_0 = d_0$ ва

$$p_1 + \dots + p_{n-1} = d_1 - d_0 - 1^n, p_0 + 2p_1 + \dots + 2^{n-1} p_{n-1} = d_2 - d_0 - 2^n, \dots, (n-1)p_1 + \dots + (n-1)^{n-1} p_{n-1} = d_{n-1} - d_0 - (n-1)^n. \quad (9)$$

Энди ушбу матрица ва векторларни киритамиз:

$$M = [m_{ij}] = [i^j], i, j = 1, \dots, n-1, p = [p_1, p_2, \dots, p_{n-1}], b = [b_1, b_2, \dots, b_{n-1}], b_i = d_i - d_0 - i^n.$$

Натижада (7.9) системани қуйидаги кўринишда ёзиб олиш мумкин:

$$Mp = b \quad (10)$$

M матрицанинг детерминанти нолдан фарқли, у Вандермонд детерминантининг миноридир. Уни ечиб $p = M^{-1}b$ формуладан характеристик тенгламанинг коэффицентларини топамиз. Характеристик тенгламани бирор усул билан ечиб хос сонларни топамиз.

5.Mathcad да хос сон ва векторлар ички функциялар $eigenvals(A)$, $eigenvals(A)$ орқали осонгина топилади.

Матрица, ички функциялар $A := \begin{bmatrix} 40 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 40 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 40 \end{bmatrix}$

Ички функциялар $r := eigenvals(A)$ $s := eigenvals(A)$

хос сон ва векторлар $r = \begin{bmatrix} 44.49 \\ 38.86 \\ 39.37 \\ 37.64 \end{bmatrix}$ $s = \begin{bmatrix} 0.3582 & -0.1852 & -0 & 0.0958 \\ 0.5338 & 0.7658 & 0.7071 & -0.5129 \\ 0.606 & 0.5878 & 0 & 0.7295 \\ 0.4686 & -0.6132 & -0.7071 & -0.4423 \end{bmatrix}$

Ундан ташқари, энг катта ва энг кичик хос сонлар (5) алгоритм асосида ҳам топилиши мумкин.

[Мундарижага](#)

1.8. НОЧИЗИҚ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИ УЧУН ИТЕРАЦИЯ УСУЛИ.

Асосий тушунчалар: Қисқартириб акс эттириш принципи. Тақрибий ечимни хатолигини баҳолаш, назарий ва амалий баҳолаш.

Асосий натижалар:

1. Қисқартириб акс эттириш принципи:

$$x = g(x), x^k = g(x^{k-1}), k = 1, \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} x^k = \xi, x, \xi \in R^n, \|g(x) - g(y)\| \leq q \|x - y\|, 0 < q < 1.$$

2. Қолдиқ хад учун баҳолаш:

$$\|\xi - x^{(k)}\| \leq q^k \|\xi - x^{(0)}\|, \|\xi - x^{(k)}\| \leq q^k \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| / (1 - q) = q^k \|x^{(1)} - x^{(0)}\| / (1 - q)$$

3. Итерация усули: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x), x^k = g(x^{k-1}), k = 1, \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} x^k = \xi, x, \xi \in R^n$.

4. MathCAD да дастурлар.

1. Қисқартириб акс эттириш принципи.

R^n деб n -ўлчовли векторлар тўпламига айтилади. У чизикли нормаланган тўлиқ фазо, $x \in R^n$ нормаси (узунлиги) куйидаги тенгликлар билан берилади:

$$\|x\|_{R^n} = \|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}, l \leq p \leq \infty$$

Жумладан,

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}, \|x\|_\infty = \max |x_i|,$$

G бирор ёпиқ соха бўлсин. Ихтиёрий $f: G \rightarrow R^n$ акслантириш n та n -ўзгарувчили функциялар

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix}$$

вектор функция ёрдамида берилсин. Шунинг учун

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

вектор тенглама n та тенглама системаси

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

га эквивалент. (2) ни ушбу кўринишда ёзиш мумкин бўлсин.

$$\begin{cases} x_1 = g_1(x_1, \dots, x_n) \\ x_2 = g_2(x_1, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots \\ x_n = g_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \tag{3}$$

ёки вектор кўринишида

$$x = g(x) \tag{4}$$

бу ерда равшанки, $g = [g_1, \dots, g_n]^T$.

Таъриф. Агар $0 \leq q < 1$ сон топилиб, ушбу тенгсизлик

$$\|g(x) - g(y)\| \leq q \|x - y\|, \quad \forall x, y \in G \tag{5}$$

бажарилса, $g: G \rightarrow G \subset R^n$, акслантириш $G \in R^n$ да қисқартириб акслантириш дейилади. Қисқартириб акслантириш узлуксиздир.

Таъриф. Агар ҳар қандай $x \in G$ учун $g(x) \in G$ бўлса g ни ўзини ўзига акслантиради дейилади: $g: G \rightarrow G$ ёки $g(G) \subseteq G$.

Энди ушбу шартни қарайлик:

$$G = S_{(x_0, r)} = \{x \in R^n : \|x - x_0\| \leq r\}$$

Лемма. Агар $g: S \rightarrow R^n$ акслантиришда S да қисқартириб акслантириш, яъни

$$\|g(x) - g(y)\| \leq q \|x - y\|, 0 \leq q \leq 1, x, y \in \vec{S}, \quad \text{ва} \quad \|g(x_0) - x_0\| \leq (1 - q)r \quad \text{бўлса,}$$

$$g(\vec{S}) \subseteq \vec{S} \quad \text{бўлади, яъни} \quad g: \vec{S} \rightarrow \vec{S} \quad \text{бўлади.}$$

Исбот. $x \in \vec{S}(x_0, r)$ ихтиёрий нукта бўлсин. Унда

$$\|g(x) - x_0\| \leq \|g(x) - g(x_0)\| + \|g(x_0) - x_0\| \leq qr + (1 - q)r \leq r.$$

Энди $x = g(x)$ тенгламани тақрибий ечишга ўтамиз.

Таъриф. Агар $\xi = g(\xi)$ бўлса $\xi \in G$ нукта $g(x)$ акслантиришнинг кўзгалмас нуктаси дейилади.

$x = g(x)$ тенглама учун итерация усули куйидагича кўрилади:

$$x^{(k)} = g(x^{(k-1)}), k = 1, \dots, \tag{6}$$

тузилади. Бу кетма кетликнинг маъносини ушбу теорема ечиб беради.

Теорема 1. Агар $g : G \rightarrow G$ узлуксиз ва $g(G) \subseteq G$, лимит $\xi = \lim\{x^{(k)}, k \rightarrow \infty\}$ мавжуд бўлса, $\xi = g(\xi)$ тенглик ўринли, яъни ξ нукта $g(x)$ акслантиришининг кўзғалмас нуктаси бўлади.

Исбот. Равшанки, $\xi = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{(k)} = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x^{(k-1)}) = g(\lim_{x \rightarrow \infty} x^{(k-1)}) = g(\xi)$.

Теорема 2. (қисқартириб акс эттириш принципи).

Агар $g(G) \subseteq G$ бўлиб, $g(x)$ -қисқартириб акслантириш бўлса, у ҳолда $g(x) : G \rightarrow G$ G тўпланда ягона кўзғалмас нуктага эга.

Бу кўзғалмас нукта итерация кетма-кетлигининг лимити сифатида топилиши мумкин. Аниқ ечим ва итерация орасидаги фарқ қуйидагича баҳоланади:

$$\|\xi - x^{(k)}\| \leq q^k \|\xi - x^{(0)}\|, \quad (\text{назарий баҳо}) \quad (7)$$

$$\|\xi - x^{(k)}\| \leq \frac{q}{1-q} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| = \frac{q^k}{1-q} \|x^{(1)} - x^{(0)}\| \quad (\text{амалий баҳо}) \quad (8)$$

Исбот. 1) $\{x^{(k)}\}$ -фундаментал кетма-кетлик, яъни

$$\|x^{(k+p)} - x^{(k)}\| \rightarrow 0, k, p \rightarrow \infty.$$

Ҳақиқатдан ҳам, $\|x^{(k+i)} - x^{(k+i+1)}\| \leq q \|x^{(k+i-1)} - x^{(k+i)}\| \leq q^{k+i} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$,

$$\|x^{(k)} - x^{(k+1)}\| \leq \sum_{i=0}^{p-1} \|x^{(k+i)} - x^{(k+i+1)}\| \leq \sum_{i=0}^{p-1} q^{k+i} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$$

Демак,

$$\|x^{(k)} - x^{(k+p)}\| \leq \|x^{(1)} - x^{(0)}\| \sum_{i=0}^{p-1} q^{k+i} \leq \|x^{(1)} - x^{(0)}\| \sum_{i=0}^{\infty} q^{k+i} \leq q^k \|x^{(1)} - x^{(0)}\| / (1-q).$$

Бу ердан $0 \leq q < 1$ эканлигидан $\|x^{(k)} - x^{(k+p)}\| \rightarrow 0, k, p \rightarrow \infty$.

2) $\{x^{(k)}\}$ фундаментал, R^n тўлиқ лигидан шундай $\xi = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}$ мавжуд; $x^{(k)} \in G$; ва G ёпиқлигидан $\xi \in G$.

3) 1- теоремага асосан $\xi = g(\xi)$.

4) ξ -ягона. Акс ҳолда $\xi_1 = g(\xi_1)$, $\xi_2 = g(\xi_2)$ десак,

$$\|\xi_1 - \xi_2\| = \|g(\xi_1) - g(\xi_2)\| \leq q \|\xi_1 - \xi_2\|$$

ва $q \geq 1$ бўлиб чиқади. Бу мумкин эмас.

2. Қолдиқ хадларни баҳолаш. Равшанки,

$$\|\xi - x^{(k)}\| = \|g(\xi) - g(x^{(k-1)})\| \leq q \|\xi - x^{(k-1)}\| \leq \dots \leq q^k \|\xi - x^{(0)}\|,$$

яъни

$$\|\xi - x^{(k)}\| \leq q^k \|\xi - x^{(0)}\|.$$

Лекин,

$$\|\xi - x^{(k)}\| \leq q \|\xi - x^{(k-1)}\| \leq q \|\xi - x^{(k)}\| + q \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|.$$

Бу ердан осонгина қуйидаги тенгсизликни оламиз:

$$\|\xi - x^{(k)}\| \leq q/(1-q) \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|.$$

(7) назарий баҳо дейилади, бу ерда ноъмалум ечим иштирок этмокда.

(8) амалий баҳо дейилади, бу баҳони биз ҳар бир тақрибий ечим $x^{(k)}$ топилгач ҳисоблашимиз мумкин.

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - [f'(x^{(0)})]^{-1} f(x^{(k-1)}) \quad (13)$$

$$2) g'(x^{(k-1)}) = E + Lf'(x^{(k-1)}) = 0, \quad L = -[f'(x^{(k-1)})]^{-1} \quad (14)$$

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - [f'(x^{(k-1)})]^{-1} f(x^{(k-1)}) \quad (15)$$

$n=1$ хол учун (13),(15) формулалар, маълумки, қуйидаги кўринишга эга

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - f(x^{(k-1)}) / f'(x^{(0)}), f : R \rightarrow R, \quad (13.1)$$

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - f(x^{(k-1)}) / f'(x^{(k-1)}), f : R \rightarrow R \quad (13.2)$$

(13) соддалаштирилган Ньютон методи, (15) эса Ньютон методи дейилади. $n=2$ учун (13) формулалар қуйидаги кўринишни олади.

$$x_1^{(k)} = x_1^{(k-1)} - \frac{1}{\det(f'(x^{(0)}))} \begin{vmatrix} f_1^{(k-1)} & f_{1x_2}^{(0)} \\ f_2^{(k-1)} & f_{2x_2}^{(0)} \end{vmatrix}, \quad x_2^{(k)} = x_2^{(k-1)} - \frac{1}{\det(f'(x^{(0)}))} \begin{vmatrix} f_{1x_1}^{(0)} & f_1^{(k-1)} \\ f_{2x_1}^{(0)} & f_2^{(k-1)} \end{vmatrix}, \quad (13)$$

$n=2$ учун (8.15) формулалар қуйидаги кўринишни олади.

$$x_1^{(k)} = x_1^{(k-1)} - \frac{1}{\det(f'(x^{(k-1)}))} \begin{vmatrix} f_1^{(k-1)} & f_{1x_2}^{(k-1)} \\ f_2^{(k-1)} & f_{2x_2}^{(k-1)} \end{vmatrix}, \quad x_2^{(k)} = x_2^{(k-1)} - \frac{1}{\det(f'(x^{(k-1)}))} \begin{vmatrix} f_{1x_1}^{(k-1)} & f_1^{(k-1)} \\ f_{2x_1}^{(k-1)} & f_2^{(k-1)} \end{vmatrix}, \quad (15)$$

Бу формулалар кейинги параграфда алоҳида қаралади.

Шунинг учун $q = \max\{\|g'(x)\|, x \in G\} < 1$ шарт x нинг ξ га яқин қийматларида бажарилади. Бу фикрдан (13) дан (15) метод яхшироқ яқинлашиши ҳам кўриниб турибди. Бу фикрни қолдиқ хадлар баҳолари ҳам таъкидлайди, (13) чизиқли яқинлашишга эга, (15) квадратик яқинлашишга эга.

Мисол 1. Итерация усули ёрдамида $\{x_1^2 + x_2^2 = 1, x_1^2 - x_2 = 0\}$ ечилсин.

Ечиш. $x_1^2 + x_2^2 = 1$ айлана, $x_1^2 - x_2 = 0$ кубик парабола билан кесишиб иккита ечимни беради. Уларни чизиб $\xi_{1,2} = [0,9; 0,5]$ тақрибий ечимларни топамиз. ξ_1 учун $x(0) = [0,9; 0,5]$ бошланғич ечим танлаймиз. $\{x^{(k)}\}$ ни топиш учун (8.13) усулни танлаймиз. Равшанки,

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ x_1^2 - x_2 \end{bmatrix}, f'(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -1 \end{bmatrix}, f'(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 1,8 & 1 \\ 1,8 & -1 \end{bmatrix}, \det(f'(x^{(0)})) = -3,6,$$

$$[f'(x^{(0)})]^{-1} = -\frac{1}{3,6} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1,8 & 1,8 \end{bmatrix} = L.$$

Шунинг учун системани $x = g(x)$ кўринишга келтирамиз, бу ерда

$$g(x) = x + Lf(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \frac{1}{3,6} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1,8 & 1,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1^2 - x_2 \end{bmatrix}$$

$x = g(x)$ системани энди итерация (соддалаштирилган Ньютон) усули билан ечамиз. Бошланғич итерацияларни киритамиз ва натижа оламиз:

k	x_1	x_2	e
1	0.797222	0.625000	0.227778
2	0.787013	0.617188	0.018021
3	0.786315	0.618134	0.001644

4	0.786166	0.618022	0.000261
---	----------	----------	----------

Шундай қилиб

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.786166 \\ 0.618022 \end{bmatrix}$$

дейиш мумкин. Усулнинг дастурини 1.9 параграфдаги Ньютон усулининг дастуридан ҳосила иштирок этган устунларни бошланғич нуктада ҳисобланишидан олиш мумкин. Дастурнинг ўзи ҳам қуйида келтирилган.

Мисол 2. Итерация усулининг тадбиқи сифатида қуйидаги ночизик оддий дифференциал тенглама учун чегара масалани қараймиз:

$$u'' = f(x, u), u(a) = A, u(b) = B$$

$[a, b]$ кесмани $a \leq x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq b$ нукталар тўплами билан бўлиб тур ясаймиз. Бу нукталарда тенгламани ёзамиз:

$$u''(x_i) = f(x_i, u(x_i)), u(x_0) = A, u(x_n) = B. \quad u'' = f(x, u) \quad \text{ҳосилани иккинчи тартибли}$$

чекли айирмали ҳосила билан алмаштирамиз:

$$u''(x_i) = (u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1})) / h^2 + h^2 u^{(4)}(c) / 24 = A_{xx} u(x_i) + O(h^2).$$

$$u''(x_i) = (u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1})) / h^2 + h^2 u^{(4)}(c) / 24 = f(x_i, u(x_i))$$

Чексиз кичик миқдор $O(h^2)$ ни ташлаб юбориб қуйидаги чекли айирмали схемага келамиз:

$$u_0 = A, u_n = B \quad \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = f(x_i, u_i), i=1, \dots, n,$$

Бу ерда u_i миқдор $u(x_i)$ ечимнинг тақрибий қиймати. Кўриниб турибдики бу ночизик система, уни итерация усули билан ечиш мумкин:

$$u_0^{(0)} = A, u_n^{(0)} = B, (u_{i-1}^{(k)} - 2u_i^{(k)} + u_{i+1}^{(k)}) / h^2 = f(x_i, u_i^{(k)}), i=1, \dots, n.$$

Бу система ҳар бир k учун прогонка усули билан ечилади, итерациялар $|u^{(k)} - u^{(k-1)}| \leq \varepsilon$ бўлгунча давом эттирилади.

4. MathCADда итерация усулининг дастури.

MathCAD дастурида ночизик тенгламалар системасини тақрибий ечиш учун стандарт ички функциялар мавжуд, улар given ..find блоки, minimize (f(x), x) ички функцияси. Мисол сифатида ушбу системаларни оламиз:

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 = 1, \quad f_2(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2 = 0,$$

1) given ..find блоки

$$\text{Бошланғич итерацияни бериш} \quad x:=1 \quad y:=0 \quad (x:=-1 \quad y:=0)$$

$$\text{Тенгламаларни бериш (баробар йўгон)} \quad \text{Given } x^2 + y^2 = 1 \quad x^2 - y = 0$$

$$\text{Илдизни ўзгарувчига бериш} \quad r := \text{Find}(x, y)$$

$$\text{Илдизни чиқариш} \quad r^T = [0.7861 \quad 0.6181] \quad (r^T = [-0.7861 \quad 0.6181])$$

Итерация усулини ташкил этувчи жараёнлар тузамиз.

2) Итерация усули. $x_1 + 0.5 \cos x_2 = 1, \sin(x_1 + 1) - x_2 = 1.2$ системани қараймиз.

Итерация функциясини бериш $g(x) := [1 - 0.5 * \cos(x_2) \quad \sin(x_1 + 1) - 1.2]^T$

Бошланғич итерация ни бериш $x^{<1>} := [0.4 \quad 0.5]^T \quad x^{<2>} := [-0.6 \quad -0.1]^T$

Итерацияларни ҳисоблаш ва чиқариш $k := 0..5 \quad x^{<k+1>} := g(x^{<k>})$

$$x = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.562 & 0.515 & 0.510 & 0.511 & 0.511 \\ 0.5 & -0.215 & -0.20 & -0.202 & -0.219 & -0.219 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} -0.6 & 0.502 & 0.655 & 0.510 & 0.510 & 0.510 \\ -0.1 & -0.811 & -0.202 & -0.203 & -0.202 & -0.202 \end{bmatrix}$$

Назарий саволлар ва топшириқ.

1. $f_1 = ax_1 + b \sin(x_2) = d_1, f_2 = c \cos(x_1) + d \cdot \ln(1+x^2) = d_2$ системани итерация усулини қўллаш учун қулай кўринишга келтиринг.
2. $f_1 = \sin(x_1 + a) + bx_2 = d_1, f_2 = cx_1 + d \cos(x_2 + e) = d_2$ системани итерация усулини қўллаш учун қулай кўринишга келтиринг.
3. $f_1 = ax_1 + b \sin(x_2 + c) = d_1, f_2 = \cos(x_1 + e) + dx_2 = d_2$ системани итерация усулини қўллаш учун қулай кўринишга келтиринг.
4. $f_1 = tg(x_1 + a) + bx_2 = d_1, f_2 = cx_1 + \cos(x_1) + d \sin(x_2 + e) = d_2$ системани итерация усулини қўллаш учун қулай кўринишга келтиринг.
 $f_1 = \sin(x_1 + a) + bx_2 = d_1, f_2 = cx_1 + d \sin(x_2 + e) = d_2$ системани итерация усулини қўллаш учун қулай кўринишга келтиринг.

[Мундарижага](#)

1.9. НОЧИЗИҚ СИСТЕМА УЧУН НЬЮТОН-КАНТОРОВИЧ УСУЛИ

Асосий тушунчалар: Ночизиқ система учун Ньютон -Канторович итерация усули.

Ньютон -Канторович итерация усулининг яқинлашиш шарти.

Асосий натижалар:

1. Ночизиқ система: $f_i(x) = f_i(x_1, \dots, x_n) = 0, i = 1, \dots, n \Leftrightarrow f(x) = 0, f : R^n \rightarrow R^n$

2. Ньютон- Канторович усули:

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - [f'(x^{(k-1)})]^{-1} f(x^{(k-1)}) \quad , \quad \| \xi - x^{(k)} \| \leq 1/q [q \| \xi - x^{(0)} \|]^{2^k} \quad , \quad q = M/2m_1 .$$

3. Ньютон- Канторович усулининг MathCAD да дастури.

1. Ночизиқ система

Ушбу ночизиқ тенламалар системаси берилган бўлсин.

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \dots \dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Бу системани R^n - n - ўлчовли Евклид фазосининг векторлари ва $f = [f_1, \dots, f_n] : \rightarrow R^n$ вектор функция киритиб битта вектор тенглама

$$f(x) = 0 \quad (2)$$

кўринишида ёзиб олиш мумкин. Унинг ечимини ξ деб белгилаймиз. Вектор функцияни ξ ечимнинг бирор G атрофида икки марта узлуксиз ҳосилга эга деб фараз қиламиз, яъни: $f(x) \in C^2(G)$.

Бизга маълумки, $f'(x)$ Якоби матрицаси - икки ўлчовли массив, $f''(x)$ - Гессинан - уч ўлчовли массив, яъни

$$f'(x) = [\partial_i f_k(x)], \quad f''(x) = [\partial_j \partial_i f_k(x)]$$

бу ерда $\partial_i f_k(x) = \partial f_k(x) / \partial x_i$, $\partial_j \partial_i f_k(x) = \partial^2 f_k(x) / \partial x_i \partial x_j$. Равшанки, $f'(x) \cdot y$ - вектор, $f''(x) \cdot y$ - матрица, $f'''(x) \cdot y \cdot z$ - вектор.

$[f'(x)]^{-1}$ Якоби матрицасига тескари матрица бўлсин. $n=2$ учун

$$[f'(x)]^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} \partial_2 f_2 & -\partial_2 f_1 \\ -\partial_1 f_2 & \partial_1 f_1 \end{bmatrix},$$

бу ерда $D = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \partial_1 f_1(x) \partial_2 f_2(x) - \partial_1 f_2(x) \partial_2 f_1(x)$.

2.Ньютон-Канторович усули. Фараз қилайлик $x^{(k-1)}, k=1,2,\dots$, топилган бўлсин, $x^{(k)}$ ни топайлик. Бунинг учун $\xi = x^{(k-1)} + h^{(k-1)}$ деб олиб $h^{(k-1)}$ тузатишни топамиз. Бунинг учун $f(\xi)$ ни $x^{(k-1)}$ атрофида Тейлор формуласи бўйича ёзамиз:

$$f(\xi) \approx 0 = f(x^{(k-1)} + h^{(k-1)}) = f(x^{(k-1)}) + f'(x^{(k-1)})h^{(k-1)} + 0.5f''(c)[h^{(k-1)}]^2 \quad (4)$$

Агар $\|h^{(k-1)}\|$ чексиз кичик миқдор бўлса, (9.4) да охириги ҳад ҳам чексиз кичик миқдор бўлади. Уни ташлаб юбориб $h^{(k-1)}$ га нисбатан ушбу тақрибий тенгликни ҳосил қиламиз:

$$0 = f(\xi) = f(x^{(k-1)}) + f'(x^{(k-1)})h^{(k-1)} \approx 0 \quad (5)$$

Бу ердан $h^{(k-1)}$ (5)ни чап томонини 0 га айланттирувчи вектор деб қабул қилсак ушбу тузатмани топамиз:

$$[f'(x^{(k-1)})]h^{(k-1)} = -f(x^{(k-1)}), \quad h^{(k-1)} = -[f'(x^{(k-1)})]^{-1} * f(x^{(k-1)}). \quad (6),$$

Тузатмани $\xi = x^{(k-1)} + h^{(k-1)}$ ифодага қўямиз ва ушбу формулани топамиз:

$$\begin{aligned} \xi &\approx x^{(k)} = x^{(k-1)} + h^{(k-1)} = x^{(k-1)} - [f'(x^{(k-1)})]^{-1} f(x^{(k-1)}), \\ x^{(k)} &= x^{(k-1)} - [f'(x^{(k-1)})]^{-1} f(x^{(k-1)}). \end{aligned} \quad (7)$$

(7) тенглик Ньютон-Канторович усули дейилади. Энди $n=2$ учун қуйидаги муносабатларни топамиз:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} - \frac{1}{D_k} \begin{bmatrix} \partial_2 f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) & -\partial_2 f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \\ -\partial_1 f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) & \partial_1 f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \end{bmatrix} \quad (8)$$

Бу формулани ажратиб ҳам ёзиш мумкин.

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= x_1^{(k)} - \frac{1}{D_k} \begin{bmatrix} f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) & \partial_1 f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \\ f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) & \partial_2 f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \end{bmatrix} \\ x_2^{(k+1)} &= x_1^{(k)} - \frac{1}{D_k} \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) & f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \\ \partial_1 f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) & f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

бу ерда $D_k = D(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) = \det([f'(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})])$.

Энди $r^{(k)} = \xi - x^{(k)}$ ни баҳолаймиз. Бунда $h^{(k-1)} = x^{(k)} - x^{(k-1)}$. Шунинг учун $r^{(k)} = r^{(k-1)} - h^{(k-1)}$ (5) дан топамиз.

$$f^{(1)}(x^{(k-1)})h^{(k-1)} = -f(x^{(k-1)}), \quad \text{ёки } f^{(1)}(x^{(k-1)})(x^{(k)} - x^{(k-1)}) = -f(x^{(k-1)}),$$

Буни (4) га қўямиз:

$$\begin{aligned} f(\xi) &= f(x^{(k-1)} + h^{(k-1)}) = f(x^{(k-1)}) + f'(x^{(k-1)})r^{(k-1)} + 0,5f''(c)[r^{(k-1)}]^2 = \\ &= f'(x^{(k-1)})[r^{(k-1)} - h^{(k-1)}] + 0,5f''(c)[r^{(k-1)}]^2 = f^{(1)}(x^{(k-1)})r^{(k)} + 0,5f''(c)[r^{(k-1)}]^2 = 0 \end{aligned}$$

Бу ердан

$$r^{(k)} = -0,5[f^{(1)}(x^{(k-1)})]^{-1}f''(c)[r^{(k-1)}]^2 \quad (10)$$

Теорема 1. Агар Гессинан норма бўйича чегараланган, якобианга тескари матрица чегараланган, яъни

$$\|f''(x)\| \leq M_2, \quad x \in G$$

$$\|[f'(x)]^{-1}\| \leq 1/m_1, \quad x \in G$$

бўлса

$$\|\xi - x^{(k)}\| \leq q\|\xi - x^{(k-1)}\|^2 \quad (11)$$

$$\|\xi - x^{(k)}\| \leq 1/q[q\|\xi - x^{(0)}\|]^{2^k}, \quad q = M/2m_1 \quad (12)$$

тенгсизликлар ўринли бўлади.

Исбот. (11) тенгсизлик (10) дан осонгина келиб чиқади (12) тенгсизлик (11)дан кетма-кет қўллаш натижасида келиб чиқади.

Изоҳлар. Соддалаштириш мақсадида Ньютон усулининг қуйидаги модификацияларини кўриш мумкин:

$$1) \quad x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \frac{f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial_1 f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}, \quad x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - \frac{f_2(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)})}{\partial_2 f_2(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)})}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (13)$$

$$2) \quad \begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= x_1^{(k)} - \frac{f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial_1 f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}, \\ x_2^{(k+1)} &= x_2^{(k)} - \frac{f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial_2 f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})} - \frac{\partial_1 f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})(x_1^{(k+1)} - x_1^{(k)})}{\partial_2 f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (14)$$

Бу усулларнинг қулайлиги шундаки уларда Якоби матрицасининг тескарисини топиш шарт эмас. Бу усулларни биз ажраладиган Ньютон усуллари деб айтаемиз. Бу иккала усул ушбу кўринишдаги Ньютон усулда

$$f^{(1)}(x^{(k-1)})(x^{(k)} - x^{(k-1)}) = -f(x^{(k-1)}),$$

$[f^{(1)}(x^{(k-1)})]$ ўрнига қуйидаги тақрибий матрицалар олинишидан келиб чиқади:

$$[f^{(1)}(x^{(k-1)})] = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1 & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \partial_n f_n \end{bmatrix}, \quad [f^{(1)}(x^{(k-1)})] = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1 & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial_1 f_n & \partial_2 f_n & \partial_n f_n \end{bmatrix}$$

Экспериментлар (9.13) усулни (9.14) га нисбатан афзаллигини кўрсатмоқда. Кейинги усулнинг дастури $x_2^{(k)}$ ни ҳисоблаш операторидагина фарқ қилади холос.

Мисол 9.1. Ньютон итерация усулининг тадбиқи сифатида қуйидаги ночизиқ оддий дифференциал тенглама учун чегара масалани қараймиз

$u'' = f(x, u), u(a) = A, u(b) = B$ $[a, b]$ кесмани $a \leq x_0 \leq x_1 \dots \leq x_n \leq b$ нуқталар тўплами билан бўлиб тўр ясаймиз. Бу нуқталарда тенгламани ёзамиз:

$$u''(x_i) = f(x_i, u(x_i)), u(x_0) = A, u(x_n) = B.$$

Ҳосилани иккинчи тартибли чекли айирмали ҳосила билан алмаштираемиз:

$$u''(x_i) = (u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1})) / h^2 + h^2 u^{(4)}(c) / 24 = \Delta_{xx} u(x_i) + O(h^2).$$

Чексиз кичик миқдор $O(h^2)$ ни ташлаб юбориб қуйидаги чекли айирмали схемага келамиз:

$$u_0 = A, u_n = B,$$

$$u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1} / h^2 = f(x_i, u_i), i = 1, \dots, n,$$

Бу ерда u_i миқдор $u(x_i)$ ечимнинг тақрибий қиймати. Қўриниб турибдики бу нозизиқ система, уни ушбу Ньютон итерация усули билан ечиш мумкин:

$$u_0^{(k)} = A, u_n^{(k)} = B$$

$$(u_{i-1}^{(k)} - (2 + h^2 f_u(x_i, u_i^{(k-1)})) u_i^{(k)} + u_{i+1}^{(k)}) / h^2 = f(x_i, u_i^{(k-1)}) - f_u(x_i, u_i^{(k-1)}) u_i^{(k-1)}, i = 1, \dots, n.$$

Охирги муносабат қуйидагича топилди:

$$f(x_i, u_i^{(k)}) = f(x_i, u_i^{(k-1)} + u_i - u_i^{(k-1)}) = f(x_i, u_i^{(k-1)}) + f_u(x_i, u_i^{(k-1)})(u_i^{(k)} - u_i^{(k-1)}) + O(|u_i - u_i^{(k-1)}|^2).$$

Бу ифода юқоридаги тенгламанинг ўнг томонига қўйилади ва гуруҳлаштирилади. (Чексиз кичик миқдор ташлаб юборилади.)

Бу система ҳар бир к учун прогонка усули билан ечилади, итерациялар $|u_i^{(k)} - u_i^{(k-1)}| \leq \varepsilon$ бўлгунча давом эттирилади.

9.3. Ньютон усулининг дастури.

1) Ньютон итерация усули: $x^{<k+1>} := x^{<k>} - (J(x^{<k>}))^{-1} f(x^{<k>}).$

Индекснинг бошланғич қиймати

ORIGIN := 1

Итерацияловчи функцияларни бериш

$$g(x)^T := [x_1^2 + x_2^2 - 1, x_1^2 - x = 0]$$

Якоби матрицасини қуриш

$$J(x) := \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -1 \end{bmatrix}$$

Бошланғич итерацияни бериш $x^{<1>} := [-1 \ 0]^T$

$$(x^{<1>} := [1 \ 0]^T)$$

Ньютон итерацияларини қуриш $k := 0..5$ $x^{<k+1>} := x^{<k>} - (J(x^{<k>}))^{-1} f(x^{<k>}).$

$$x = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -0.833 & -0.788 & -0.786 & -0.786 \\ 0 & 1 & 0.667 & 0.619 & 0.618 & 0.618 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.8333 & 0.7881 & 0.7861 & 0.7861 \\ 0 & 1 & 0.6667 & 0.6190 & 0.6180 & 0.6180 \end{bmatrix}$$

Ҳозирча формула $x^{<k+1>} := x^{<k>} - (J(x^{<k>}))^{-1} f(x^{<k>})$ фақат MathCAD да ишляпти.

2) Минимизация усули. $f(x) := (x_1^2 + x_2^2 - 1)^2 + (x_2 - x_1^2)^2 \rightarrow \min$ масалани

караймиз. Равшанки, Minimize $f(x)=0$, яъни $f(x)=0$. Шунинг учун, топамиз:

Бошлангич қиймат

$$x_1 := -1 \quad x_2 := 0 \quad (x_1 := 1 \quad x_2 := 0)$$

Мақсад функция

$$f(x) := [x_1^2 + x_2^2 - 1]^2 + [x_1^2 - x_2]^2$$

Ички функцияга мурожсаат

$$s := \text{Minimize}(f, x_1, x_2)$$

Натижалар

$$s^T = (-0.786 \ 0.618) \quad ($$

$$r^T = (0.787 \ 0.618))$$

3) Minner ички функциясидан фойдаланиш

Бошлангич қиймат

$$x_1 := -1 \quad x_2 := 0 \quad (x_1 := 1 \quad x_2 := 0)$$

Блокбоши

$$\text{Given } x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0, x_1^2 - x_2 = 0$$

Ички функцияга мурожсаат

$$s := \text{Miner}(x_1, x_2)$$

Натижалар

$$r^T = (0.787 \ 0.618) \quad ($$

$$s^T = (-0.786 \ 0.618))$$

Назарий саволлар ва топшириқлар.

1. $f_1 = ax_1 + b\sin(x_2) = d_1, f_2 = c\cos(x_1) + d \cdot \ln(1+x^2) = d_2$ системасини Ньютон усулини қўллаш учун қулай кўринишга келтиринг.
2. $f_1 = \sin(x_1 + a) + bx_2 = d_1, f_2 = cx_1 + d\cos(x_2 + e) = d_2$ системасини Ньютон усулини қўллаш учун қулай кўринишга келтиринг.
3. $f_1 = ax_1 + b\sin(x_2 + c) = d_1, f_2 = \cos(x_1 + e) + dx_2 = d_2$ системасини Ньютон усулини қўллаш учун қулай кўринишга келтиринг.
4. $f_1 = tg(x_1 + a) + bx_2 = d_1, f_2 = cx_1 + \cos(x_1) + d \sin(x_2 + e) = d_2$ системасини Ньютон усулини қўллаш учун қулай кўринишга келтиринг.
5. $f_1 = \sin(x_1 + a) + bx_2 = d_1, f_2 = cx_1 + d\sin(x_2 + e) = d_2$ системасини Ньютон усулини қўллаш учун қулай кўринишга келтиринг. [Мундарижага](#)

1.10. НЬЮТОН ИНТЕРПОЛЯЦИЯ КЎПХАДИ

Асосий тушунчалар: Интерполяция масаласи, кўпхадлар билан интерполяциялаш, бўлинган айирмалар ва уларнинг хоссалари, Ньютон интерполяция кўпхади, усулнинг дастури.

Асосий натижалар:

1.Интерполяция масаласи: $F(x_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, n, F(x) = ?$.

2.Кўпхад билан интерполяциялаш: $P_n(x_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, n, P_n(x) = ?$.

3.Бўлинган айирмалар:

$$f[x_0, \dots, x_k] = (f[x_0, \dots, x_{k-2}, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]) / (x_k - x_{k-1}), k \geq 1.$$

4.Ньютон интерполяция формуласи:

$$N_n(f; x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \dots + f[x_0, \dots, x_n](x - x_1) \dots (x - x_{n-1}),$$

$$N_n(f; x) = f(x_0) + hf[x_0, x_1]t + \dots + h^n f[x_0, \dots, x_n]t(t-1) \dots (t-n+1), x = x_0 + th.$$

5. Ньютон интерполяция кўпхадини MathCAD да қуриш дастури.

1. Интерполяция масаласи

[a,b] кесмадан олинган $a = x_0 < \dots < x_n = b$ нукталарда бирор $y = f(x)$ функциянинг $y_i = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n$ қийматларида берилган бўлсин. $y = f(x)$ функциянинг $x_i, i = 0, 1, \dots, n$ нукталардан фарқли бўлган x нуктада, яъни $x \neq x_i, i = 0, 1, \dots, n$ қийматини топиш талаб этилади.

Агар $y = f(x)$ функциянинг аналитик кўриниши маълум бўлса, бу ишни бажариш мумкин. Лекин бу ерда, бу ҳисоблашда агар $f(x)$ функциянинг аналитик ифодаси ҳисоблашга яроқли бўлсагина бажариш мумкин. Агар $f(x)$ функциянинг аналитик ифодаси мураккаб(масалан, интеграл билан ифодаланган ёки ошкормас кўринишда берилган) ёки фақат $\{(x_i, f(x_i)), i = 0, 1, \dots, n\}$ жадвалгина берилган бўлса, бу ҳисоблашни бажариш мумкин эмас.

Бундай шароитда қуйидагича иш қилинади: $\{(x_i, f(x_i)), i = 0, 1, \dots, n\}$ жадвал бўйича $f(x)$ функцияга яқин бўлган бирор $F(x)$ функция кўрилади ва $f(x) \approx F(x)$ деб қабул қилинади. Бу масалани $f(x)$ функцияни $F(x)$ функция билан яқинлаштириш масаласи дейилади.

Бу масаланинг классик ечими қуйидагича ҳал қилинади: $F(x)$ функция $x = x_i, i = 0, 1, \dots, n$ нукталарда $f(x)$ билан устма-уст тушади деб қабул қилинади, яъни

$$F(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n \quad (1)$$

Яқинлашувчи функция $F(x)$ ни (1.10.1) шарт асосида топишни интерполяция масаласи дейилади. $F(x)$ функцияни интерполяция формуласи, x_0, \dots, x_n нукталарни интерполяция нукталари дейилади. (1) шартни интерполяция шартлари дейилади.

$F(x)$ функцияни даражали кўпхад, тригонометрик кўпхад, рационал функция, сплайн-функция кўринишда олиш мумкин.

(1) ўрнига

$$F^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n; \quad j = 0, 1, \dots, k \quad (2)$$

Ҳосил бўлган формула Эрмит интерполяция кўпхади дейилади.

2. Кўпхад билан интерполяциялаш .

$F(x)$ функцияни кўпхад

$$F(x) = P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = \sum_{j=0}^n a_jx^j$$

кўринишда излаймиз. $P_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$ деб талаб қилиб ушбу чизиқли тенгламалар системасига келамиз:

$$\sum_{j=0}^n a_jx_i^j = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (3)$$

Бу системанинг детерминанти алгебрадан маълум бўлган Вандермонд детерминантидир:

$$D = |x_{ij}| = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

Равшанки, агар интерполяция нуқталари ҳар хил бўлса $D \neq 0$. Шундай қилиб биз ушбу теоремага келдик.

Теорема 1. Агар $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ бўлса $P_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$, шартларни қаноатлантирувчи ягона интерполяция кўпхади $P_n(x)$ мавжуд. Амалда $P_n(x)$ интерполяция кўпхадини И.Ньютон (1643-1727) ва Ж.Л.Лагранж (1736-1813) топган қулай кўринишлари ишлатилади.

3. Бўлинган айирмалар.

Ньютон интерполяция кўпхадини

$$N_n(f; x) = d_0 + d_1(x - x_0) + \dots + d_n(x - x_0)\dots(x - x_{n-1})$$

кўринишда излаган, лекин, афсуски шу ердан бошлаб у x_0, \dots, x_n нуқталар бир-биридан тенг узокликларда жойлашган деб фараз қилиб ўзининг икки хил формуласини яратди.

Биз эса x_0, \dots, x_n нуқталар ихтиёрий жойлашган ва фақат $x_i \neq x_j, \quad i \neq j$, деб фараз қиламиз.

Таъриф 1. Ушбу миқдорлар

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1] &= (f(x_1) - f(x_0)) / (x_1 - x_0), & f[x_0, x_1, x_2] &= (f[x_0, x_2] - f[x_0, x_1]) / (x_2 - x_1) \\ &\dots & & \dots \\ f[x_0, \dots, x_k] &= (f[x_0, \dots, x_{k-2}, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]) / (x_k - x_{k-1}) \end{aligned} \quad (5)$$

$f(x)$ функциянинг 1-2-, ..., k - тартибли бўлинган айирмалари дейилади.

Лемма 1. $f[x_0, \dots, x_k], \quad k \leq n$, бўлинган айирма ўз аргументларига нисбатан симметрикдир.

Исбот. k га нисбатан индукция методини қўлаймиз. $k=1$ да равшанки, $f[x_0, x_1] = f[x_1, x_0]$. Энди $k-1$ учун леммани ўринли деб фараз қилайлик. $f[x_0, \dots, x_k]$ да x_0, \dots, x_{k-1} ларни ёки x_0, \dots, x_{k-2} ларни ихтиёрий алмаштирсак ҳам $f[x_0, \dots, x_k]$ ўзгармайди. Демак, фақат x_{k-1} билан x_k ни алмаштириб кўриш керак. $f[x_0, \dots, x_k]$ нинг таърифидан бу ҳолда ҳам у ўзгармайди.

Лемма 2. $f[x_0, \dots, x_k]$ бўлинган айирма учун ушбу формула ўринли

$$f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} = \sum_{i=0}^k \frac{f(x_i)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)} \quad (6)$$

Исбот. Бевосита кўрамизки,

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}, \quad f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Қолгани индукция усули билан исботланиши мумкин.

(6) бўлинган айирмаларнинг классик таърифи, (5) эса замонавий таърифи. (5) таърифнинг қулайлиги унинг рекурентлиги ва ҳисоблаш учун қулайлигидадир.

Лемма 3. Ҳар қандай $k-1$ - тартибли кўпхаднинг k - тартибли бўлинган айирмаси нолга тенг.

Исбот. Осонгина кўриш мумкинки, ўзгармаснинг 1-тартибли бўлинган айирмаси, чизикли функциянинг 2-тартибли бўлинган айирмаси ва хоказо, $k-1$ - тартибли кўпхаднинг k -тартибли бўлинган айирмаси нолга тенг (ўхшатиш: $k-1$ -тартибли кўпхаднинг k -ҳосиласи нолга тенг).

4. Ньютон интерполяция кўпхади.

$N_n(x)$ нинг номаълум $d_i, i=0, 1, \dots, n$, коэффицентларини интерполяция шартларидан топамиз:

$$N_n(x_0) = d_0 = f(x_0), \quad I_n(x_1) = d_0 + d_1(x_1 - x_0) = f(x_1) \implies d_1 = f[x_0, x_1]$$

$$N_n(x_2) = d_0 + d_1(x_2 - x_0) + d_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f(x_2) \implies d_2 = f[x_0, x_1, x_2]$$

ва хоказо, равшанки, $d_n = f[x_0, x_1, \dots, x_n], k \leq n$

Демак, интерполяция кўпхадининг Ньютон кўриниши

$$N_n(f; x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \dots + f[x_0, \dots, x_n](x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

шаклда бўлади.

Агар $x_1 - x_0 = \dots = x_n - x_{n-1} = h$ бўлса $\frac{(x - x_0)}{h} = t$ деб (7) ўрнига ушбу

формулани ҳосил қиламиз:

$$N_n(f; x) = f(x_0) + hf[x_0, x_1]t + \dots + h^n f[x_0, \dots, x_n]t(t-1)\dots(t-n+1), \quad x = x_0 + th$$

5. Ньютон интерполяция кўпхадини кўриш дастури.

MathCAD ойнасида қуйидаги командаларни терамиз:

Тугун нуқталар, функция $n := 4 \quad f(t) := x * \sin(t) \quad a := 0 \quad b := 4 \quad h := (b - a) / n$

Интерполяция шартлари $i := 0..n \quad x_i := a + ih \quad y_i = f(x_i)$

Қийматлар $x := [0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4]^T \quad y := [0 \ 0.8415 \ 1.8186 \ 0.4234 \ -3.0272]^T$

Бўлинган айирмалар $k := 0..n \quad a_0 := f(x_0) \quad a_k := \sum_{i=0}^k y_i \prod_{j=0}^k i f(i = j, 1, 1 / (x_i - x_j))$

Ньютон кўпҳади $Nn(t) := a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \prod_{j=0}^{i-1} (t - x_j)$

Натижалар $Nn(2.3) = 1.6893 \quad Nn(2) = 1.8186 \quad Nn(3) = 0.4234$

Натижа алгоритмнинг тўғри ишлаётганини кўрсатмоқда.

Назарий саволлар ва топшириқлар.

1. Интерполяция масаласи нима?
2. Алебраик интерполяция нима?
3. Бўлинган айирмалар нима?
4. Ньютон кўпҳадини ёзинг.
5. Ньютон кўпҳадини қолдиғи нимага тенг.

[Мундарижага](#)

1.11. ЛАГРАНЖ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ КЎПҲАДИ

Асосий тушунчалар: Лагранж интерполяция кўпҳади, Лагранж интерполяция кўпҳадининг қолдиғи, Лагранж интерполяция кўпҳадининг дастури, Ньютон интерполяция кўпҳадининг қолдиғи, Ньютон интерполяция кўпҳадининг дастури.

Асосий натижалар:

1. Лагранж интерполяция кўпҳади:

$$L_n(f; x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x), \quad l_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

2. Лагранж интерполяция дастурининг дастури.

3. Интерполяция кўпҳадининг қолдиғи:

$$R_n^N(f; x) = f[x_0, \dots, x_n, x] (x - x_0) \dots (x - x_n), \quad \omega_n(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n),$$

$$R_n^L(f; x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \omega_n(x).$$

4. Лагранж интерполяция кўпҳадини MathCAD да кўриш дастури.

1. Лагранж интерполяция кўпҳадини

$$L_n(f; x) = f(x_0) l_0(x) + f(x_1) l_1(x) + \dots + f(x_n) l_n(x) \quad (1)$$

кўринишда излади, бу ерда $l_j(x)$ лар n -даражали кўпхад бўлиб

$$l_j(x_i) = \delta_{ij}, \delta_{ij} = 1, i = j, \delta_{ij} = 0, i \neq j,$$

шартларни қаноатлантиради. Равшанки,

$$l_i(x) = c_i(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)$$

бўлиши керак ва C_i коэффициент $l_i(x_i) = 1$ шартдан топилиши керак. Демак,

$$C_i = 1/[(x_i - x_0)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)], \quad l_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (2)$$

$$L_n(f; x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)l_i(x) \quad (3)$$

тенг узокликда жойлашган нукталар учун

$$l_i(x) = (-1)^{n-i} \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{i!(n-i)!}, \quad i = 0, 1, \dots, n; \quad x = x_0 + th \quad (4)$$

формулани (2) дан осонгина олиш мумкин. Интерполяция кўпхадига ягоналигидан,

$$L_n(f; x) = N_n(f; x).$$

2. Лагранж усулининг дастури.

Лагранж интерполяция кўпхадига: $L_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)l_i(x), l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$.

MathCAD ойнасида куйидаги командаларни терамиз:

Тугун нукталар, функция $n := 4 \quad f(x) := x * \sin(x) \quad a := 0 \quad b := 4 \quad h := (b - a) / n$

Интерполяция шартлари $i := 0..n \quad vx_i := a + ih \quad vy_i = f(vx_i)$

Қийматлар $vx := [0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4]^T \quad vy = [0 \quad 0.8415 \quad 1.8186 \quad 0.4234 \quad -3.0272]^T$

Индексларнинг ўзгариши соҳаси $i := 0..n \quad j := 0..n$

Лагранж интерполяция кўпхадига $Ln(x) := \sum_{i=0}^n vy_i \prod_{j=0}^n \text{if}(i = j, 1, (x - vx_j) / (vx_i - vx_j))$

Қийматлар $Ln(2.3) = 1.689 \quad f(2.3) = 1.715 \quad Ln(1) = 0.841 \quad Ln(2) = 1.8186$

Натижа дастурни тўғрилигини кўрсатамиз.

3. Интерполяция кўпхадининг қолдиғи.

$R_n^N(f; x) = f(x) - N_n(f; x), R_n^L(f; x) = f(x) - L_n(f; x), R_n^N(f; x) = R_n^L(f; x) = R_n(f; x)$ интерполяция кўпхадининг қолдиғи дейилади. Равшанки, иккала ҳол учун

$$R_n(f; x) = 0, \quad x = x_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$R_n(f; x)$ нинг кўринишини икки усулда топамиз:

бўлинган айирмалар (10.5) ёрдамида ва $f(x)$ функциянинг ҳосиласи ёрдамида. (10.5) даги $f[x_0, x], x \neq x_0$, таърифидан

$$f(x) = f(x_0) + f[x_0, x](x - x_0) \quad (5)$$

формулани топамиз. У бизга Лагранжнинг чекли орттормалар формуласини эслатади ва биз учун функцияни x_0, \dots, x_n нукталар атрофида ёйиш учун калит формулани беради. $f[x_0, x_1, x], x \neq x_0, x_1$ нинг таърифидан

$$f[x_0, x] = f[x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x](x - x_1)$$

формулани ҳосил қиламиз. Бу формулани (5) га қўйсақ

$$f(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x](x - x_0)(x - x_1) \quad (6)$$

формулани ҳосил қиламиз. Бу ишни

$f[x_0, \dots, x_k, x], x \neq x_i, i = 0, 1, \dots, k$ ларни барчаси учун бажариб, кетма-кет ўрнига қўйишларни бажарсак қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f[x_0, x](x - x_0) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x](x - x_0)(x - x_1) = \\ &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \dots + f[x_0, \dots, x_n](x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) + \\ &+ f[x_0, \dots, x_n, x](x - x_0) \dots (x - x_n) = N_n(f; x) + R_n^N(f; x) \end{aligned}$$

Бу ерда

$$N_n(f; x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n f[x_0, \dots, x_k](x - x_0) \dots (x - x_{k-1}) \quad , \quad (7)$$

$$R_n^N(f; x) = f[x_0, \dots, x_n, x](x - x_0) \dots (x - x_n) \quad (8)$$

Демак, биз ушбу натижани олдик.

Теорема 1. Агар $f(x) [a, b]$ да узлуксиз бўлса

$$f(x) = N_n(f; x) + R_n^N(f; x)$$

ёйилма ўринли.

Равшанки, $N_n(f; x)$ -Ньютон интерполяция кўпхади, $R_n^N(f; x) = f(x) - N_n(f; x)$ унинг қолдиғи. Энди $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада $(n+1)$ та узлуксиз ҳосилга эга функциялар тўплами $C^{n+1}[a, b]$ га кирази деб 1-теоремани кучайтирамиз.

Теорема 2. Агар $f(x) \in C^{n+1}[a, b]$ бўлса ҳар бир $x \in [a, b]$ учун $\xi = \xi(x)$ нукта мавжудки,

$$R_n^L(f; x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \omega_n(x), \quad \omega_n(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n) \quad (9)$$

тенглик ўринли.

Исбот. $R_n^L(f; x) = f(x) - L_n(f; x) = A\omega_n(x)$ деб оламиз. Равшанки,

$$A = \frac{f(x) - L_n(f, x)}{\omega_n(x)}$$

деб олиш мумкин..

А нинг бундай қийматида $u(t)$ функция $n+2$ та нукталарда $x_0, \dots, x_i, x, x_{i+1}, \dots, x_n$ да 0 га айланади, яъни $n+2$ та илдизга эга бўлади.

$[x_0, x_1], \dots, [x_i, x], [x, x_{i+1}], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ кесмаларга Ролль теоремасини қўллаб

$u'(x)$ функция $n+1$ та илдизга,

$u''(x)$ функция n та илдизга,

.....
 $u^{(n+1)}(x)$ функция 1 та илдизга

эга деган ҳулосага келамиз. Фараз қилайлик $\xi = \xi(x)$ нуқтада $u^{(n+1)}(\xi) = 0$ бўлсин. Лекин, $u^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - A(n+1)!$ эканлигидан

$u^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - A(n+1)! = 0$ яъни

$$A = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Шундай қилиб

$$R_n^L(f; x) = f(x) - L_n(f; x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)\dots(x-x_n) \quad (10)$$

x нинг ихтиёрийлигидан юқоридаги тенглик барча $x \in [a, b]$ лар учун ўринли эканлиги келиб чиқади. Агар

$$M_{n+1} = \max\{|f^{(n+1)}(x)|, x \in [a, b]\}$$

десак, (11.16) дан ушбу тенгсизликни ҳосил қиламиз:

$$|R_n^L(f; x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |x-x_0| \dots |x-x_n|$$

Хулоса 1. Агар $f(x) \in C^k[a, b]$ бўлса шундай $\xi = \xi(x)$ нуқта мавжудки

$$f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{k!} (x-x_0)\dots(x-x_k)$$

2. $(k-1)$ -тартибли кўпхаднинг k -тартибли бўлинган айирмаси 0 га тенг.

Назарий саволлар ва топшириқлар

1. Лагранжнинг базис кўпхадлари нима?
2. Лагранж ва Ньютон кўпхадлари тенг эканлигини кўрсатинг.
3. Лагранж ва Ньютон кўпхадларини фарқларини айтинг.
4. Лагранж кўпхадини ёзинг.
5. Лагранж кўпхадининг қолдиғи нимага тенг?

[Мундарижага](#)

1.12. СПЛАЙНЛАР БИЛАН ИНТЕРПОЛЯЦИЯЛАШ.

Асосий тушунчалар: Сплайнларнинг таърифлари, чизиқли интерполяция сплайни ва унинг қолдиғи, кубик интерполяция сплайни ва унинг аникловчи тенгламалар системаси.

Асосий натижалар:

1. Сплайнларнинг таърифи:

$$s(x) \in C^{p-k}[a, b], \quad 1 \leq k \leq p; \quad s^{(k+1)}(x) = 0, x_i \leq x \leq x_{i+1}; \quad s(x_i) = f(x_i), i = 0, \dots, n.$$

2. Кубик интерполяция сплайни:

$$S(f; x) = \frac{M_i(x_{i+1}-x)^3}{6h_i} + \frac{M_{i+1}(x-x_i)^3}{6h_i} + \left(f_i - \frac{M_i h_i^2}{6}\right) \frac{x_{i+1}-x}{h_i} + \left(f_{i+1} - \frac{M_{i+1} h_i^2}{6}\right) \frac{x-x_i}{h_i},$$

$$2M_0 + \beta_0 M_1 = d_0, \quad \alpha_i M_{i-1} + 2M_i + \beta_i M_{i+1} = d_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad \alpha_n M_0 + 2M_1 = d_n$$

3. Кубик сплайнни MathCAD да қуриш дастури.

1. Сплайнларнинг таърифи

$[a, b]$ кесма $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ нукталар

билан бўлақларга бўлинган бўлсин. $p \geq 1$ натурал сон бўлсин.

Таъриф 1. $[a, b]$ да аниқланган даражали k - дефектли сплайн деб ушбу шартларни қаноатлантирувчи функцияга айтилади:

$$1) s(x) \in C^{p-k}[a, b], \quad 1 \leq k \leq p;$$

$$2) \quad s(x) = a_{0i} + a_{1i}(x-x_i) + \dots + a_{ki}(x-x_i)^k, \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}$$

k -даражали кўпхад, яъни $s^{(k+1)}(x) = 0, x_i \leq x \leq x_{i+1}$,

Таъриф 2. Агар $s(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n$ бўлса $s(x)$ сплайн $f(x)$ ни интерполяциялайди дейилади ва қуйидагича ёзилади: $s(f, x)$

Агар $p = 2m-1, m \geq 1, k = 1, \dots$ бўлса сплайн тоқ даражали оддий сплайн дейилади. Бунда сплайннинг эркинлик даражасини (коэффициентлар сонини) аниқлайлик.

Ҳар бир кесма $[x_i, x_{i+1}]$ да $s(f; x)$ $2m-1$ - даражали кўпхад, яъни $A = 2mn$ та коэффициентга эга. Бу коэффициентларга қуйидаги боғланишлар қўйилган:

а) ички $n-1$ та (x_1, \dots, x_{n-1}) нукталарда $S, S', \dots, S^{(2m-2)}$ ҳосилалар узлуксиз, яъни $(n-1)(2m-1)$ та шарт бор;

б) $(n+1)$ та интерполяция $S(f; x_i) = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n$ шартлар бор, яъни $B = n+1 + (n-1)(2m-1)$ та шартлар бор. Фарқ $A - B = 2m - 2$ га тенг. Бу етишмаган шартлар чегара шартлар сифатида берилади.

1-тур чегара шарти: $f^{(j)}(x_0), f^{(j)}(x_n), 1 \leq j \leq m-1$ лар берилган, яъни (уларнинг сони $A - B = 2m - 2$ га тенг.)

$$S^{(j)}(f; t) = f^{(j)}(t), t=a \text{ ёки } t=b, j=1, \dots, m-1.$$

2-тур чегара шарт: $f^{(j)}(x_0), f^{(j)}(x_n), m \leq j \leq 2m-2$, лар берилган, яъни(уларнинг сони $A - B = 2m - 2$ га тенг.)

$$S^{(j)}(f; t) = f^{(j)}(t), t=a \text{ ёки } t=b, j=m, \dots, 2m-2$$

2'-тур чегара шарт: $f^{(i)}(a), f^{(j)}(b)$ ҳосилалар берилмаган. Шунинг учун $S^{(j)}(f; t) = 0, t=a \text{ ёки } t=b, j=m, \dots, 2m-2$, (уларнинг сони $A - B = 2m - 2$ га тенг.) деб қабул қилинади. 2'- тур чегара шарт табиий дейилади.

Даврий чегара шарт. Агар интерполяция қилинувчи функция даврий бўлса сплайн ҳам даврий бўлиши керак. Шунинг учун $S^{(j)}(f; t) = f^{(j)}(t), j = 1, \dots, 2m-2$, деб талаб қилинади.

Мисол 1. Чизикли интерполяция сплайни. ($m=1$). Равшанки, ҳар бир $[x_i, x_{i+1}]$ оралиқда $S(f; x) = a_i + b_i(x-x_i)$ бўлиб, a_i, b_i коэффициентлар интерполия шартлардан топилади: $S(f; x_i) = f(x_i), S(f; x_{i+1}) = f(x_{i+1})$ шунинг учун $a_i = f(x_i), b_i = f[x_i, x_{i+1}]. h_i = x_{i+1} - x_i$ десак,

$$S(f; x) = f(x_i) + (x-x_i)f[x_i, x_{i+1}], x_i \leq x \leq x_{i+1},$$

бўлади. Равшанки, чизикли сплайн қолдиғи

$$R(f; x) = f(x) - S(f; x) = \frac{f^2(\xi)}{2!} (x - x_i)(x - x_{i+1}), \quad (1)$$

хар бир $[x_i, x_{i+1}]$ учун алоҳида олинади.

(1) формула (11.16) дан келиб чиқади.

Мисол 2. Параболик сплайн. $[a, b]$ кесмани $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{2n} = b$ нуқталар билан $2n$ бўлакка бўламиз. $[x_0, x_2], [x_2, x_4], \dots, [x_{2n-2}, x_{2n}]$ кесмаларда 2-даражали интерполяция кўпхадни қуриб ушбу функцияни аниқлаймиз:

$$S(f; x) = \{ f(x_i) + f[x_i, x_{i+1}](x - x_i) + f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}](x - x_i)(x - x_{i+1}), \quad (2)$$

$$x \in [x_i, x_{i+1}], i = 0, 2, \dots, 2n - 2.$$

Уни параболик сплайн деб атаймиз. Қолдиқ ҳад қуйидагича бўлади:

$$R(f; x) = f(x) - S(f; x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} (x - x_i)(x - x_{i+1})(x - x_{i+2})$$

2. Кубик интерполяция сплайни .

$m=2, k=1$ десак,

$$S(f; x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, x_i \leq x \leq x_{i+1}$$

формулага эгамиз.

Равшанки, $S''(x)$ - чизиқли функция, шунинг учун $S''(x_i) = M_i$ десак

$$S''(x) = S''_{3,i}(x) = M_i \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + M_{i+1} \frac{x - x_i}{h_i}, x \in [x_i; x_{i+1}],$$

формулага келамиз. Бу ердан, равшанки,

$$S(x) = M_i \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} + M_{i+1} \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} + \alpha_i (x_{i+1} - x) + \beta_i (x - x_i), \quad h_i = x_{i+1} - x_i,$$

Авалло,

$S(x_i) = f(x_i), S(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$ эканлигидан

$$\alpha_i = \frac{f_i}{h_i} - \frac{M_i h_i^2}{6}, \quad \beta_i = \frac{f_{i+1}}{h_i} - \frac{M_{i+1} h_i^2}{6}$$

Шунинг учун,

$$S(f; x) = \frac{M_i (x_{i+1} - x)^3}{6h_i} + \frac{M_{i+1} (x - x_i)^3}{6h_i} + (f_i - \frac{M_i h_i^2}{6}) \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + (f_{i+1} - \frac{M_{i+1} h_i^2}{6}) \frac{x - x_i}{h_i} \quad (3)$$

Бу ердан 1-ҳосилани топамиз: (3) дан $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ учун

$$S'(f; x) = -\frac{M_i (x_{i+1} - x)^2}{2h_i} + \frac{M_{i+1} (x - x_i)^2}{2h_i} + \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{(M_{i+1} - M_i)h_i}{6}, x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad (4)$$

(4) дан бир томонлама ҳосилаларни x_1, \dots, x_{n-1} нуқталарда топамиз:

$$S^i(f; x_i - 0) = \frac{h_{i-1}}{6} M_{i-1} + \frac{h_{i-1}}{3} M_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}, S^i(f; x_i + 0) = -\frac{h_i}{6} M_i - \frac{h_i}{3} M_{i+1} + \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i}$$

Шарт бўйича S', S'' лар узлуксиз. $S'(f; x)$ нинг x_1, \dots, x_{n-1} нуқталардаги ҳосилаларни тенглаштириб ушбу тенгламаларни ҳосил қиламиз:

$$\frac{h_{i-1}}{6} M_{i-1} + \frac{h_{i-1} + h_i}{3} M_i + \frac{h_i}{6} M_{i+1} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}, i = 1, 2, \dots, n - 1,$$

ёки

$$\alpha_i M_{i-1} + 2M_i + \beta_i M_{i+1} = d_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (5)$$

бу ерда

$$\alpha_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i}, \quad \beta_i = 1 - \alpha_i = \frac{h_i}{h_{i-1} + h_i},$$

$$d_i = 6 \frac{f[x_i; x_{i+1}] - f[x_{i-1}; x_i]}{h_{i-1} + h_i} = 6f[x_{i-1}; x_i; x_{i+1}].$$

Кубик интерполяция сплайнини тўла топиш учун (5) системага яна 2 та чегара шарт қўйиш керак.

$$1\text{-тур чегара шарт: } S'(f; a) = f_0', \quad S'(f; b) = f_n'$$

(4) дан қуйидагиларни топамиз:

$$S^i(f; x_0 + 0) = -\frac{h_0 M_0}{3} + \frac{f_1 - f_0}{h_0} - \frac{M_1 h_0}{6} = f_0'$$

$$S^i(f; x_n - 0) = \frac{h_{n-1} M_{n-1}}{6} + \frac{h_{n-1}}{3} M_n + \frac{f_n - f_{n-1}}{h_{n-1}} = f_n'$$

Шунинг учун чегара шартларнинг қўринишлари

$$2M_0 + M_1 = \frac{6}{h_0} \left(\frac{f_1 - f_0}{h_0} - f_0' \right), \quad M_{n-1} + 2M_n = \frac{6}{h_0} \left(f_n' - \frac{f_n - f_{n-1}}{h_{n-1}} \right).$$

шаклда бўлади, шундай қилиб биз

$$2M_0 + M_1 = \frac{6}{h_0} \left(\frac{f_1 - f_0}{h_0} - f_0' \right),$$

$$\alpha_i M_{i-1} + 2M_i + \alpha_i M_{i+1} = d_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (6)$$

$$M_{n-1} + 2M_n = \frac{6}{h_0} \left(f_n' - \frac{f_n - f_{n-1}}{h_{n-1}} \right).$$

системага келамиз. Бу системадан M_i лар топилгач кубик сплайн қиймати (3) формула асосида ҳисобланади.

2-тур чегара шарт.

$$S''(f, a) = M_0, \quad S''(f, b) = M_n,$$

У ҳолда фақат (4) ечилади, ёки

$$2M_1 + \beta_1 M_2 = d_1 - \alpha_1 M_0$$

$$\alpha_i M_{i-1} + 2M_i + \beta_i M_{i+1} = d_i, \quad i = 2, \dots, n-2, \quad (7)$$

$$\alpha_{n-1} M_{n-2} + 2M_{n-1} = d_{n-1} - \beta_{n-1} M_n$$

Яна, M_0, \dots, M_n лардан фойдаланиб $S(f; x)$ нинг қиймати (3) формула билан ҳисобланиши мумкин.

2'- тур чегара шарт. $M_0 = M_n = 0$. Бу (7) нинг хусусий холи.

3. Сплайнлар билан интерполяциялаш дастури.

Сплайнлар билан интерполяциялаш: $s_1(x) = f(x_i) + f[x_i, x_{i+1}](x - x_i), x_i \leq x \leq x_{i+1}$.

$$S_3(f; t) = \frac{M_i (x_{i+1} - t)^3}{6h_i} + \frac{M_{i+1} (t - x_i)^3}{6h_i} + \left(f_i - \frac{M_i h_i^2}{6} \right) \frac{x_{i+1} - t}{h_i} + \left(f_{i+1} - \frac{M_{i+1} h_i^2}{6} \right) \frac{t - x_i}{h_i}.$$

Чизикли s1 , кубик s3 сплайнлар қуйидагича қурилади:

Тугун нуқталар, функция $n:=4$ $f(t):=x*\sin(t)$ $a:=0$ $b:=4$ $h:=(b-a)/n$

Интерполяция шартлари $i:=0..n$ $x_i:=a+ih$ $y_i=f(x_i)$

Қийматлар $x:= [0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4]^T$ $y:= [0 \ 0.8415 \ 1.8186 \ 0.4234 \ -3.0272]^T$

Сплайнлар $s1(t):=linterp(x, y, t)$ $M:=cspline(x, y)$ $s3(t):=interp(M, x, y, t)$

Қийматлар $s1(1.5)=0.868$ $s3(1.5)=0.98$ $f(1.5)=0.997$

Натижалар дастурни тўғри ишлаётганлигини кўрсатяпти.

Назарий саволлар ва топшириқлар.

1. Сплайн нима?
2. Чегара шартлар нима?
3. Сплайннинг деффекти нима?
4. Чизикли сплайннинг қолдиғи нимага тенг?
5. Кубик сплайннинг қолдиғи нимага тенг?

[Мундарижага](#)

1.13. ТАҚРИБИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАШ ФОРМУЛАЛАРИ ЧЕКЛИ АЙИРМАЛИ ҲОСИЛАЛАР

Асосий тушунчалар: Тақрибий дифференциаллаш формулалари ёки чекли айирмали ҳосилалар ва уларнинг хатоликлари.

Асосий натижалар:

1. Тақрибий дифференциаллаш масаласи:

$$D_x f(x) \approx \Lambda_x f(x), D_{xx} f(x) \approx \Lambda_{xx} f(x).$$

2. Чекли айирмали ҳосилалар: $\Lambda_x^+ f(x), \Lambda_x^- f(x), \Lambda_x^0 f(x), \Lambda_x^r f(x), \Lambda_x^l f(x), \Lambda_{xx} f(x)$:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{1}{12} f''(\xi)h = \Lambda_x^+ f(x) + O(h),$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \frac{1}{12} f''(\xi)h = \Lambda_x^- f(x) + O(h)$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2) = \Lambda_x^0 f(x) + O(h^2),$$

$$f'(x) = \frac{1}{2h} [-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)] + O(h^2) = \Lambda_x^l f(x) + O(h^2),$$

$$f'(x) = \frac{1}{2h} [f(x-2h) - 4f(x-h) + 3f(x)] + O(h^2) = \Lambda_x^r f(x) + O(h^2),$$

$$f''(x) = \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} - \frac{f^{IV}(\xi)}{12} h^2 = \Lambda_{xx} f(x) + O(h^2)$$

1. Тақрибий дифференциаллаш масаласи.

Бирор $[a, b]$ кесмада жадвали

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \quad (1)$$

нуқталар тўплами берилган ва бу нуқталарда қандайдир $y = f(x)$ функциянинг $y_i = f(x_i), i = 0, 1, 2, \dots, n$ қийматлари берилган.

Тақрибий дифференциаллаш масаласида $D^{(r)} f(x) = f^{(r)}(x)$ ҳосилани, интеграллаш масаласида

$$J(f) = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n p_i f(\xi_i) \quad (2)$$

интегрални топиш талаб қилинади. Бу ерда $p_i, \xi_i, i = 0, 1, \dots, n$ – коэффициентлар ва тугун нуқталар, йиғинди тақрибий интеграллаш ёки квадратура формуласи деб айтилади.

Бу иккала масалада ҳам $y = f(x)$ функциянинг аналитик кўриниши бирор чексиз йиғинди ёки интеграл кўринишида берилган бўлганда ҳам вужудга келади. Гап шундаки, йиғинди ва интеграл билан берилган функциянинг қийматларини ҳисоблаш қийин бўлганлиги учун унинг қиймати чекли сондаги, масалан, $\{x_i\}$ нуқталарда ҳисоблангач қолган нуқталарда ҳисоблаш учун янги лекин соддароқ функция қурилади.

Бу икки масала ҳам бир хил усулда ечилади. Масалан, интерполяция формулалари

$$N_n(f; x), L_n(f; x), S_n(f; x)$$

кўрилиб, ($N_n(f; x)$ – Ньютон, $L_n(f; x)$ – Лагранж интерполяция кўпхадлари)

$$f'(x) \approx I_n'(f; x), J(f) = J(I_n(f; x))$$

деб олинади. Бунда қуйидаги хатоликларга йўл қўйилади:

$$r_n(f; x) = f'(x) - I_n'(f; x) \quad (3)$$

$$r_n(f) = \int_a^b [f(x) - I_n(f; x)] dx = \int_a^b R_n(f; x) dx \quad (4)$$

К бирор функциялар тўплами бўлсин. Агар

$$r_n(f) = 0, \quad f \in K \quad (5)$$

бўлса тақрибий интеграллаш формуласи K тўпланда аниқ дейилади. (4) формуладан кўринадики, тақрибий интеграллаш формуласи $K = P_n - n$ - даражали кўпхадлар тўпламида аниқ экан.

Тақрибий интеграллаш формуласига бошқача ҳам тус бериш мумкин. $N_n(f; x)$ ўрнида $L_n(f; x)$ олсак

$$I(f) \approx I(L_n(f; x)) = \sum_{i=0}^n p_i f(x_i) \quad (6)$$

ни ҳосил қилишингиз мумкин, бу ерда

$$p_i = \int_a^b l_i(x) dx; \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (7)$$

Демак, тақрибий интеграллаш формуласининг жумладан тақрибий дифференциаллаш формуласини (6) кўринишида олиш мумкин, масалан,

$$D(f) = f'(x) = \sum_{i=0}^n c_i f(x_i), \quad c_i = c_i(x) = l_i'(x), \quad . \quad (8)$$

Такрибий дифференциаллаш формулалари. Чекли айирмали ҳосилалар $f'(x_i)$, $f''(x_i)$ ларнинг такрибий қийматларини топамиз. Нуқталар тенг узокликда жойлашган деб фараз қилайлик.

Ньютон интерполяция формуласидан фойдаланиш

$$N_2(f; x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0; x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0; x_1; x_2]$$

Формуладан

$$f'(x_0) \approx N_2'(f; x_0) = \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2h} \stackrel{def}{=} f_{x,0}' = \Lambda_x^1 f(x_0) \quad (9)$$

$$f(x_1) \approx N_2(f; x_1) = \frac{f_2 - f_0}{2h} \stackrel{def}{=} f_{x,1} \equiv \Lambda_x^0 f(x_0) \quad (10)$$

$$f(x_2) \approx N_2'(f; x_2) = \frac{f_0 - 4f_1 + 3f_2}{2h} \stackrel{def}{=} f_{x,2}' \equiv \Lambda_x^1 f(x_0) \quad (11)$$

$$f''(x_0) \approx N_2''(f; x_0) = \frac{f_0 - 2f_1 + f_2}{h^2} \stackrel{def}{=} f_{xx,0} \equiv \Lambda_{xx} f(x_0) \quad (12)$$

формулаларни ҳосил қиламиз. Бу тенгликларда ўнг томондаги учинчи устун ҳосилаларнинг такрибий қийматлари, тўртинчи ва бешинчи устун эса бу такрибий қийматларнинг шартли белгиларини ифода қилади. Бундан кейин def ифода таъриф бўйича деган маънони англатади.

$r_2^1(f; x) = R_2^1(f; x)$ эканлигидан

$$r_2(f; x_i) = f^{(3)}(\xi) / 3! [(x_i - x_1)(x_i - x_2) + (x_i - x_0)(x_i - x_2) + (x_i - x_0)(x_i - x_1)]$$

шунинг учун

$$f^i(x_0) = \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2h} + \frac{f^{(3)}(\xi)}{3} h^2 = f_{x,0}' + O(h^2) \quad (13)$$

$$f^1(x_1) = \frac{f_2 - f_0}{2h} - \frac{f^{(3)}(\xi)}{3} h^2 = f_{x,1} + O(h^2) \quad (14)$$

$$f^1(x_2) = \frac{f_0 - 4f_1 + 3f_2}{2h} + \frac{f^{(3)}(\xi)}{3} h^2 = f_{x,2}' + O(h^2) \quad (15)$$

Қуйида кўрамизки,

$$f^{(2)}(x_1) = \frac{f_0 - 2f_1 + f_2}{h^2} - \frac{f^{(4)}(\xi)h^2}{12} = f_{xx,1} + O(h^2) = \Lambda_{xx} f(x_1) + O(h^2) \quad (16)$$

(9) - (12) формулалар такрибий дифференциаллаш формуласи ёки чекли айирмали ҳосилалар дейилади. (13) - (16) бу формулаларнинг хатоликларини кўрсатади. (14) биринчи тартибли марказий ҳосила, (16) иккинчи тартибли марказий ҳосила дейилади. Учунчи ҳосила чекланган функциялар синфида бу ҳосилаларнинг хатоликлари бошқаларникидан икки марта кичиклиги кўриниб турибди.

2. Тейлор формуласидан фойдаланиш.

Фараз қилайлик, функция формулаларда мавжуд узлуксиз хосилаларга эга бўлсин. Бунинг учун $f(x) \in C^p[a;b]$, $p \leq 4$, бўлиши биз учун етарли.

Аввало, $f(x) \in C^2[a;b]$ дейлик. Тейлор формуласига асосан,

$$f(x_i \pm h) = f(x_i) \pm hf'(x_i) + h^2/2 f''(\xi_i)$$

Бу ердан

$$\pm f'(x_i) = \frac{f(x_i \pm h) - f(x_i)}{h} - \frac{1}{2} f''(\xi_i)h.$$

Энди $f(x) \in C^4[a;b]$ бўлсин, у ҳолда

$$f(x_i \pm h) = f(x_i) \pm hf'(x_i) + h^2/2 f''(x_i) + h^3/3! f'''(x_i) + h^4/4! f^{IV}(\xi_i)$$

бу тенгликларни қўшиб

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i + h) - 2f(x_i) + f(x_i - h)}{h^2} - \frac{h^2}{12} \left[\frac{f^{IV}(\xi_1) + f^{IV}(\xi_2)}{2} \right]$$

формулага келамиз. $f^{IV}(x) \in C^4[a;b]$ лигидан

$$f^{IV}(\xi_1) + f^{IV}(\xi_2) = 2f^{IV}(\xi)$$

тенгликни каноатлантирувчи ξ нуқта мавжуд. Шу боис

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i - h) - 2f(x_i) + f(x_i + h)}{h^2} - \frac{f^{IV}(\xi)}{12} h^2 = \Lambda_{xx} f(x_i) + O(h^2) \quad (19)$$

(16) формула исбот булди. (13), (15) формулалар ҳам қуйидагича умумлаштирилиши мумкин

$$f'(x) = \frac{1}{2h} [f(x-2h) - 4f(x-h) + 3f(x)] + O(h^2) = f_{x,0} = \Lambda_x^r f(x) + O(h^2),$$

$$f'(x) = \frac{1}{2h} [-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)] + O(h^2) = \Lambda_x^l f(x) + O(h^2)$$

Бу формулаларни исботлаймиз:

$$f(x \pm h) = f(x) \pm f'(x)h + \frac{f''(x)h^2}{2} + O(h^3)$$

$$f(x \pm 2h) = f(x) \pm f'(x)2h + \frac{f''(x)2h^2}{2} + O(h^3) \quad (*)$$

$$4f(x \pm h) = 4f(x) \pm 4f'(x)h + f''(x)2h^2 + O(h^3) \quad (**)$$

(**) дан (*) ни айириб, $f'(x)$ ни топсак исботлашимиз керак бўлган формулалар келиб чиқади.

Яратилган барча формулаларни битта жадвалга ёзамиз:

№	хосила	Чекли айирмали хосила	Шартли белгиси	Қолдиғи
1	$f'(x_i)$	$\frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h}$	$f_{x,i} = \Lambda_x^+ f(x_i)$	$-hf''(\xi)/2$
2	$f'(x_i)$	$\frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h}$	$f_{x,i} = \Lambda_x^- f(x_i)$	$hf''(\xi)/2$
3	$f''(x_i)$	$\frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h}$	$f_{x,i} = \Lambda_x^0 f(x_i)$	$h^2 f'''(\xi)/6$
4	$f''(x_0)$	$\frac{-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)}{2h}$	$f_{x,0} = \Lambda_x^r f(x_0)$	$h^2 f'''(\xi)/3$

5	$f''(x_n)$	$\frac{f(x_{n-2}) - 4f(x_{n-1}) + 3f(x_n)}{2h}$	$f_{x,n} = \Lambda_x^l f(x_n)$	$-h^2 f'''(\xi)/3$
6	$f''(x_i)$	$\frac{f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1}))}{h^2}$	$f_{x,i} = \Lambda_{xx} f(x_i)$	$-h^2 f^{IV}(\xi)/12$

Бу тақрибий дифференциалаш формулалари тенгламаларни чекли айирмали схемалар ёрдамида тақрибий ечишда муҳим роль уйнайди.

Мисол 1. $y' = f(x, y)$, $y(a) = y_0$, $a \leq x \leq b$, Коши масаласини қарайлик.

$[a, b]$ кесмада $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, нуқталар тўпламини киритамиз.

$y'(x_i) = f(x_i, y(x_i))$, $y(x_0) = y_0$, $a \leq x \leq b$, $y'(x_i) = (y(x_{i+1}) - y(x_i))/(h) + r_h = f(x_i, y(x_i))$

деб оламиз. Чексиз кичик ҳадларни ташлаб юбориб $y_i \approx y(x_i)$ қийматларни

топиш учун Эйлер формуласига келамиз: $y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, \dots, n-1$,

берилган. Кўрсатилдики, $y(x_i) - y_i = O(h)$.

Назарий саволлар ва топшириқлар.

1. Биринчи тартибли марказий чекли айирмали ҳосила ва қолдиғи нимага тенг.
2. Биринчи тартибли чап чекли айирмали ҳосила ва қолдиғи нимага тенг.
3. Биринчи тартибли ўнг чекли айирмали ҳосила ва қолдиғи нимага тенг.
4. Иккинчи тартибли биринчи чап ва ўнг чекли айирмали ҳосила ва қолдиғи нимага тенг.
5. Иккинчи тартибли марказий чекли айирмали ҳосила ва қолдиғи нимага тенг.

[Мундарижага](#)

1.14. ТАҚРИБИЙ ИНТЕГРАЛЛАШ (квадратура) ФОРМУЛАЛАРИ

Асосий тушунчалар: Тақрибий интеграллаш формулалари, Ньютон - Котес формулалари ва уларнинг қолдиқлари, Трапеция формуласи, Симпсон формуласи

Асосий натижалар:

1. Ньютон - Котес формулалари

$$J_h^{NK}(f) = J(L_n(f; x)) = \int_a^b \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x) dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) p_i.$$

2. Тўғри тўртбурчаклар формуласи $J_h^{TT}(f) = h \sum_{i=0}^{n-1} f_{i+0.5}$

3. Трапеция формуласи: $J_h^T(f) = \frac{h}{2} \{f_0 + 2[f_1 + \dots + f_{n-1}] + f_n\}$.

4. Симпсон формуласи:

$$J_h^C(f) = \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{m-1} [f_{2i} + 4f_{2i+1} + f_{2i+2}] = \frac{h}{3} [f_0 + 4(f_1 + \dots + f_{2m-1}) + 2(f_2 + \dots + f_{2m-2}) + f_{2m}].$$

4. Интегрални тақрибий ҳисоблашга доир дастурлар

1. Ньютон-Котес формулалари $J_h^{NK}(f)$.

$J(f) = \text{int}(f, a, b)$ интегрални ҳисоблаш учун Ланграж интерполяция формуласидан фойдаланамиз:

$$J_h^{NK}(f) = J(L_n(f; x)) = \int_a^b L_n(f; x) dx = \int_a^b \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x) dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) p_i \quad (1)$$

бу ерда

$$p_i = \int_a^b l_i(x) dx = \int_a^b \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx \quad (2)$$

(1) формула $x_{i+1} - x_i = h$, ҳол учун Ньютон - Котес формуласи дейилади, (2) Ньютон - Котес коэффицентлари дейилади. (2) да $x = x + th$ алмаштириш бажарсак $dx = h dt$, $x \rightarrow t$, $a \rightarrow 0$, $b \rightarrow n$, $h = (b - a) / n$ ва

$$p_i = \frac{b-a}{n} \int_0^n (-1)^{n-i} \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{i!(n-i)!(t-i)} dt \quad (3)$$

кўринишни ҳосил қиламиз. (3)ни ҳосил қилишда

$$x - x_j = (t - j)h, \quad x_i - x_j = (i - j)h$$

тенгликлардан фойдаландик.

2. Тўғри тўртбурчаклар формуласи $J_h^{TT}(f)$.

Квадратура формуласи (интеграл йиғинди) да

$$J(f) = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n p_i f(\xi_i) \quad (4)$$

да $\xi_i = x_i + h/2$, $p_i = h$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, деб ушбу марказий тўғри тўртбурчаклар формуласи $J_h^{TT}(f)$ га келамиз:

$$J_h^{TT}(f) = h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i + h/2) = h \sum_{i=0}^{n-1} f_{i+0.5}.$$

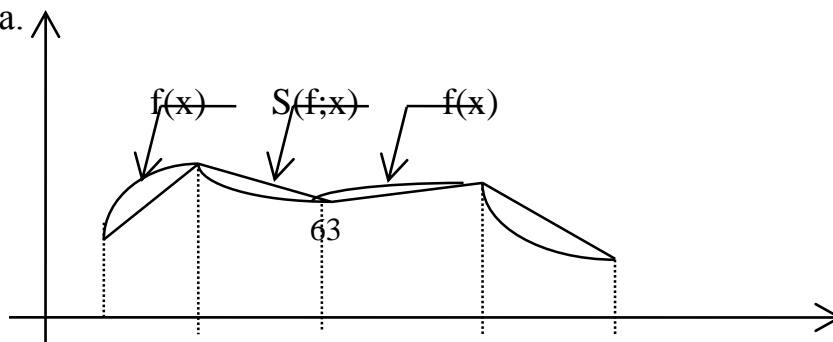
Марказий тўғри тўртбурчаклар формуласида эгри чизиқли трапеция юзи чизмада кўрсатилган асослари h ва $f(x_i + h/2)$ га тенг тўғри тўртбурчак юзаларининг йиғиндиси $J_h^{TT}(f)$ га алмаштирилмоқда.

3. Трапеция формуласи $J_h^T(f)$.

Квадратура формуласида $\xi_i = x_i$, $p_0 = p_n = h/2$, $p_i = h$, $i = 1, \dots, n-1$ деб оламиз

$$J_h^T(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f_i + f_{i+1}}{2} h = \frac{h}{2} \{f_0 + 2(f_1 + \dots + f_{n-1}) + f_n\} \quad (5)$$

(5) формула трапеция формуласи дейилади. Трапеция формуласида эгри чизиқли трапеция юзи чизмада кўрсатилган асослари f_i , f_{i+1} , h баландликка эга трапециялар юзаларининг йиғиндиси $J_h^T(f)$ билан алмаштирилмоқда.



4. Симпсон формуласи $J_h^C(f)$.

$J(f)$ интегрални тақрибий ҳисоблаш учун $\{(x_i, f(x_i)), i = 0, 1, \dots, 2n\}$ жадвал олиб хар бир $[x_{2i}, x_{2i+2}] \{i = 0, 1, \dots, 2n - 2\}$ кесмада Ньютоннинг иккинчи даражали кўпҳадини қураимиз. Бу функциялар $[x_0; x_{2n}]$ кесмада узлуксиз иккинчи даражали (параболик) интерполяция сплайни $S(f, x)$ ни ташқил қилади.

$$S(f, x) = \begin{cases} f(x_{2i}) + (x - x_{2i})f[x_{2i}, x_{2i+1}] \\ + (x - x_{2i})(x - x_{2i+1})f[x_{2i}, x_{2i+1}, x_{2i+2}] \\ x_{2i} \leq x \leq x_{2i+2}, i = 0, 1, \dots, n - 1 \end{cases} \quad (6)$$

Сўнг $J(f) \approx J(S) = J_h^C(f)$ деб қабул қиламиз ва $J_h^C(f)$ ни Симпсон формуласи деб атаймиз. Равшанки,

$$J_h^C(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} L_{2,i}(f; x) dx = \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{n-1} [f_{2i} + 4f_{2i+1} + f_{2i+2}] =$$

$$\frac{h}{3} \{f_0 + 4(f_1 + \dots + f_{2m-1}) + 2(f_2 + \dots + f_{2m-2}) + f_{2m}\}$$

Оралик натижа қуйидагича яратилади. $[x_0, x_2]$ кесмада Ньютоннинг 2-даражали интерполяция кўпҳадини интеграллаймиз.

Лемма 1. Ушбу содда Симпсон формуласи ўринли:

$$\int_{x_0}^{x_2} N_2(x) dx = h(f_0 + 4f_1 + f_2)/3 = J_h^C(N_2).$$

Исбот. $a_0 = f_0, a_1 = f[x_0, x_1], a_2 = f[x_0, x_1, x_2]$ деб қуйидагиларни оламиз:

$$\int_{x_0}^{x_2} N_2(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} (a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)) dx = 2ha_0 + 2a_1h^2 + 2a_2h^3/3$$

$$= 2hf_0 + 2h^2(f_1 - f_0)/h + 2\frac{h^3}{3}(f_0 - 2f_1 + f_2)/2h^2 = h(f_0 + 4f_1 + f_2)/3 = J_h^C(N_2).$$

Лемма 2. $r_h^C(f) = f(x) - J_h^C(f)$ десак $r_h^C(x^\alpha) = 0, \alpha = 0, 1, 2, 3$.

Исбот. $\alpha = 0, 1, 2$ ҳоллар равшан, $\alpha = 3$ ҳол элементар кўрсатилади:

$$r_h^C(x^3) = \frac{1}{4}(x_2^4 - x_0^4) - \frac{(x_2 - x_0)}{6} [x_0^3 + 4(\frac{x_0 + x_2}{2})^3 + x_2^3] = \frac{1}{4}(x_2^4 - x_0^4) - \frac{(x_2^2 - x_0^2)}{6} \frac{3}{2} [x_0^2 + x_2^2] = 0$$

5. Интегрални тақрибий ҳисоблашга доир дастурлар.

$$J = \int_0^\pi \sin(x) dx \text{ интегрални ҳисоблайлик, } J_h := \sum_{i=0}^n c_i f(\xi_i) \quad R_h := J - J_h.$$

5.1. Тўғри тўртбурчаклар формуласи.

$$J_h^{TT} := h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i + h/2), \quad R_h^{TT} = \frac{h^2(b-a)}{24} f''(c).$$

функция, оралиқ, бўлинишлар сони $f(x) := \sin(x) \quad a := 0 \quad b := \pi \quad n := 20$
 ҳисобланадиган интеграл $J := \int_a^b f(x) dx \quad J = 2$
 қадам, тугун нуқталар $h := (b-a)/n \quad i := 0..n \quad x_i := a + ih$
 ТТ формуласи ва қиймати $JT(n) := h \sum_{i=0}^n f(x_i - h/2) \quad JJT(n) = 1.99$

5.2.Трапеция формуласи:

$$J_h^T := h \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} \right] + h \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i), \quad R_h^T = -\frac{h^2(b-a)}{12} f''(c).$$

функция, оралиқ, бўлинишлар сони $f(x) := \sin(x) \quad a := 0 \quad b := \pi \quad n := 20$
 ҳисобланадиган интеграл $J := \int_a^b f(x) dx \quad J = 2$
 қадам, тугун нуқталар $h := (b-a)/n \quad i := 0..n \quad x_i := a + ih$
 Трапеция формуласи $JT(n) := h \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} \right] + h \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \quad JT(n) = 1.996$

5.3.Симпсон формуласи:

$$J_h^C := \frac{h}{3} [f(a) + f(b) + 4 \sum_{i=1}^m f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i})], \quad R_h^{TC} = -\frac{h^4(b-a)}{180} f^{(4)}(c).$$

функция, оралиқ, бўлинишлар сони $f(x) := \sin(x) \quad a := 0 \quad b := \pi \quad n := 20$
 ҳисобланадиган интеграл $J := \int_a^b f(x) dx$
 қадам, тугун нуқталар $h := (b-a)/n \quad i := 0..n \quad x_i := a + ih$
 Симпсон формуласи $JS(m) := \frac{h}{3} [f(a) + f(b) + 4 \sum_{i=1}^m f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i})]$
 интегралнинг аниқ ва тақрибий қиймати $J = 2 \quad JS(10) = 2.0000067844$

Натижа тўғрилиги кўриниб турибди.

Назарий саволлар ва топшириқлар

1. Ньютон-Котес квадратура формуласини ёзинг.
2. Чап ва унг тўғри тўртбурчаклар формуласини ёзинг.
3. Марказий тўғри тўртбурчаклар формуласини ёзинг.

4. Трапеция формуласини ёзинг.
5. Симпсон формуласини ёзинг.

[Мундарижага](#)

M1.15. КУБАТУРА ФОРМУЛАЛАРИ.

Тўртбурчакда кубатура формулаларини такрорий интеграллаш асосида қуриш.

1. Такрорий интеграллаш усули. Фараз қилайлик ушбу каррали интегрални ҳисоблаш керак бўлсин:

$$J(f) = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy, F(x) = \int_c^d f(x, y) dy, D = [a, b] * [c, d]. \quad (1)$$

Такрорий интеграллаш усулида интеграл аввал битта ўзгарувчи бўйича сўнг бошқа ўзгарувчи бўйича интегралланади.

Теорема 1. Такрорий интеграллаш усули қуйидаги кўринишга эга:

$$J(f) \approx k_1 \sum_{i=0}^m p_i F_i = k_1 k_2 \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n p_i q_j f(x_i, y_j). \quad (2)$$

бу ерда p_i, q_j - бирор бир ўлчовли квадратура формулаларининг коэффицентлари, x_i, y_j -уларнинг тугун нуқталари, k_1, k_2 -умумий коэффицентлар.

Исбот. Интегрални ҳисоблаш учун бирор квадратура формуласини қўллаймиз: [M1.14]:

$$\int_a^b F(x) dx \approx k_1 \sum_{i=0}^m p_i F_i, F_i = F(x_i) = \int_c^d f(x_i, y) dy, x_i = a + ih, h = (b - a) / m, i = 0..m. \quad (3)$$

Ўз навбатида оламиз

$$F(x_i) = \int_c^d f(x_i, y) dy \approx k_2 \sum_{j=0}^n q_j f(x_i, y_j), f(x_i, y_j) = f_{ij}, y_j = c + jl, j = 0..n, l = (d - c) / n \quad (4)$$

(4) ни (3) га қўйиб ушбу такрорий интеграл учун кубатура формуласини оламиз:

$$J(f) \approx k_1 \sum_{i=0}^m p_i F_i = k_1 k_2 \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n p_i q_j f(x_i, y_j). \quad (5)$$

Коэффицентлар учун бир неча мисоллар келтирамиз. Тўғритўртбурчаклар, Симпсон, трапеция, Гаусс формулаларида қуйидаги коэффицентларни қурдик:

$$p = p_p = [1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 1 \ 1], p = p_s = [1 \ 4 \ 2 \ \dots \ 4 \ 2 \ 1], p = p_t = [1 \ 2 \ 2 \ \dots \ 2 \ 2 \ 1],$$

$$p = p_G = [p_0 \ p_1 \ \dots \ p_m].$$

Бундай кўринишда кубатура формулаларини эса сақлаш осон. Гаусс формуласида квадратура формуласининг тугун нуқталари Лежандр $P_m(x) = cd^m(x^2 - 1)/dx^m$, кўпхадининг илдизлари бўлади, коэффициентлари эса Лагранж фундаментал интерполяция формулаларининг интеграллари бўлади.

Гаусса усулида ихтиёрий тўртбурчак $[a, b] \times [c, d]$ стандарт бирлик квадрат $[-1, 1] \times [-1, 1]$ га ўзгарувчиларни алмаштириш ёрдамида олиб келинади :

$$x_i = 0.5[(a+b) + (b-a)\xi_i], y_i = 0.5[(a+b) + (b-a)\eta_j], p_i q_j = 0.25(b-a)(d-c)\gamma_{ij}.$$

2. Қолдиқ ҳадларучун формулалар.

Квадратура формулаларининг қолдиқ ҳадлари қуйидагича:

$$R_h^p(f) = J(f) - J_h^p(f) = h^2(b-a)f^{(2)}(\xi)/24,$$

$$R_h^r(f) = J(f) - J_h^r(f) = -h^2(b-a)f^{(2)}(\xi)/12,$$

$$R_h^s(f) = J(f) - J_h^s(f) = -h^4(b-a)f^{(4)}(\xi)/180, R_h^g(f) = \frac{2^{2m+1}(m!)^4}{(2m)!(2m+1)} f^{(2m)}(\xi).$$

Теорема 2. Агар $f(x, y) \in C^{(r,s)}[D]$ бўлса эгамиз:

$R_{hl}(f) = J(f) - J_{hl}(f) = L_1 h^r + L_2 h^s$, бу ерда $C^{(r,s)}[D]$ -ҳосилалари $f^{(i,j)}(x, y), i=0..r, j=0..s, L_1, L_2 \geq 0$ узлуксиз функциялар синфи.

Исбот. Юқорида киритилган белгилашлардан фойдаланиб ҳосил қиламиз:

$$J(f) = \int_a^b F(x)dx = J_h(F) + R_h(F) = k_1 \sum_{i=0}^m p_i F(x_i) + M_1 F^{(r)}(\xi) h^r, M_1 > 0$$

$$F(x_i) = \int_c^d f(x_i, y)dy = J_l(f(x_i, y)) + R_l(f(x_i, y)),$$

$$J_l(f(x_i, y)) = k_2 \sum_{j=0}^n q_j f(x_i, y_j), R_l(f(x_i, y)) = M_2 f^{(0,s)}(x_i, \eta) l^s, M_2 > 0.$$

Шунинг учун $R_{hl}(f) = J(f) - J_{hl}(f) = L_1 h^r + L_2 h^s$, чунки ушбу тенгликлар ўринли

$$\begin{aligned} J(f) &= J_{hl}(f) + R_h(F) = k_1 \sum_{i=0}^m p_i [k_2 \sum_{j=0}^n q_j f(x_i, y_j) + M_2 f^{(0,s)}(x_i, \eta) l^s] + M_1 f^{(r,0)}(\xi, \eta) h^r = \\ &= J_{hl}(f) + M_1 f^{(r,0)}(\xi, \eta) h^r + k_1 \sum_{i=0}^m p_i f^{(0,s)}(x_i, \eta) M_2 l^s = J_{hl}(f) + L_1 h^r + L_2 l^s. \end{aligned}$$

3. Кубатур формулалар билан ээкспериментлар. Куйидаги интегрални бир неча усул билан хисоблаймиз:

$$J(f) = \int_0^1 dx \int_0^1 (x * x + y * y) dy \quad (J(f) = 2/3).$$

Хисоблашлар куйидаги жадвалга олиб келди:

Формулы	m=10, n=20	m=20, n=20	m=20, n=40	m=40, n=80
прямоугольников	0.665625	0.66625	0.66640625	0.6666015625
трапеций	0.66875	0.6675	0.6671875	0.666796875
Симпсона	0.666666667	0.66666666667	0.6666666667	0.666666667
Гаусса	m=5,n=5	a=0,b=1	c=0,d=1	0.651096560

Гаусс квадратура формуласи учун ушбу коэффициентларни оламиз, $m = 5$:

$x_i \in [-1,1]$	p_i
$x_0, x_5 = \mp 0.9325, x_1, x_4 = \mp 0.6612,$ $x_2, x_3 = \mp 0.2386$	$p_0, p_5 = 0.1713, p_1, p_4 = 0.3608,$ $p_2, p_3 = 0.4679$

4. Mathcad дастурида программалар.

а) Марказий тўртбурчаклар формуласи.

$$a := 0 \quad b := 1 \quad c := 0 \quad d := 1 \quad // \text{соҳа}$$

$$f(s,t) := s^2 + t^2 \quad Jf := \int_a^b \int_c^d f(s,t) ds dt \quad J = 0.666666666666667 \quad //$$

берилганлар,интеграл

$$m := 50 \quad n := 50 \quad h := (b-a)/m \quad l := (d-c)/n \quad k := h * l \quad // \text{қадам, тугун}$$

нуқталар

$$i := 0..m \quad j := 0..n \quad x_i := a + i * h \quad y_j := c + j * h \quad f_{i,j} := f(x + h/2_i, y_j + l/2) \quad // \text{сетка}$$

$$p_0 := 1 \quad p_m := 1 \quad q_0 := 1 \quad q_n := 1 \quad // \text{коэффициентлар}$$

$$i := 1..m-1 \quad j := 1..n-1 \quad p_i := 1 \quad q_j := 1 \quad // \text{коэффициентлар}$$

$$JP := k * \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} p_i * q_j * f_{i,j} \quad JP = 0.666625 \quad // \text{кубатура формуласи}$$

б) Трапедия формуласи

$$a := 0 \quad b := 1 \quad c := 0 \quad d := 1 \quad // \text{соҳа}$$

$$f(s,t) := s^2 + t^2 \quad Jf := \int_a^b \int_c^d f(s,t) ds dt \quad J = 0.666666666666667 \quad //$$

берилганлар,интеграл

$$m:=50 \quad n:=50 \quad h:=(b-a)/m \quad l:=(d-c)/n \quad k:=h*l/4 \quad // \text{сетка}$$

$$i:=0..m \quad j:=0..n \quad x_i:=a+i*h \quad y_j:=c+j*h \quad f_{i,j}:=f(x_i,y_j)$$

$$p_0:=1 \quad p_m:=1 \quad q_0:=1 \quad q_n:=1 \quad // \text{коэффициентлар}$$

$$i:=1..m-1 \quad j:=1..n-1 \quad p_i:=2 \quad q_j:=2 \quad // \text{коэффициентлар}$$

$$JP:=k*\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n p_i*q_j*f_{i,j} \quad JP=0.66675 \quad // \text{кубатура формуласи}$$

в) Симпсон формуласи

$$a:=0 \quad b:=1 \quad c:=0 \quad d:=1 \quad // \text{соҳа}$$

$$f(s,t):=s^2+t^2 \quad Jf:=\int_a^b \int_c^d f(s,t)dsdt \quad J=0.6666666666666667 \quad //$$

берилганлар,интеграл

$$m:=50 \quad n:=50 \quad h:=(b-a)/m \quad l:=(d-c)/n \quad k:=h*l/9 \quad // \text{сетка}$$

$$i:=0..m \quad j:=0..n \quad x_i:=a+i*h \quad y_j:=c+j*h \quad f_{i,j}:=f(x_i,y_j)$$

$$p_0:=1 \quad p_m:=1 \quad q_0:=1 \quad q_n:=1 \quad // \text{коэффициентлар}$$

$$i:=1..m/2 \quad j:=1..n/2 \quad p_{2i-1}:=4 \quad q_{2j-1}:=4 \quad // \text{коэффициентлар}$$

$$i:=2..m/2 \quad j:=2..n/2 \quad p_{2i-2}:=2 \quad q_{2j-2}:=2 \quad // \text{коэффициентлар}$$

$$JP:=k*\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n p_i*q_j*f_{i,j} \quad JP=0.6666666666666667 \quad // \text{кубатура формуласи}$$

г) Гаусса формуласи

$$a:=0 \quad b:=1 \quad c:=0 \quad d:=1 \quad k:=(b-a)*(d-c)/4 \quad // \text{соҳа}$$

$$f(s,t):=s^2+t^2 \quad Jf:=\int_a^b \int_c^d f(s,t)dsdt \quad J=0.6666666666666667 \quad // \text{берилганлар, интеграл}$$

$$x_0=-0.9325 \quad x_1=-0.6612 \quad x_2=-0.2386 \quad x_3=0.2386 \quad x_4=0.6612 \quad x_5=0.9325 \quad // \text{тугун}$$

$$p_0=0.1713 \quad p_1=0.3608 \quad p_2=0.4679 \quad p_3=0.4679 \quad p_4=0.3608 \quad p_5=0.1713 \quad // \text{коэф.}$$

$$i:=0..m \quad j:=0..n \quad s_i:=(b-a)*x_i/2+(a+b)/2 \quad t_j:=(d-c)*y_j/2+(c+d)/2 \quad f_{i,j}:=f(s_i,t_j)$$

$$JG:=k*\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n p_i*p_j*f_{i,j} \quad JG=0.651096560148172 \quad // \text{кубатура формуласи}$$

1.16. КВАДРАТУРА ФОРМУЛАЛАРИНИНГ ҚОЛДИҚЛАРИ.

Асосий тушунчалар: Трапеция формуласининг қолдиги, Симпсон формуласининг қолдиги, хатоликни амалий баҳолашнинг Рунге қоидаси, тақрибий усулнинг яхшилашнинг Ричардсон экстраполяция формуласи.

Асосий натижалар:

1. Квадратура формулаларининг қолдиқлари:

$$r_h^T(f) = -f^{(2)}(c)h^2(b-a)/12, \quad r_h^{TT}(f) = f^{(2)}(c)h^2(b-a)/24, \quad f(x) \in C^2[a,b],$$

$$r_h^C(f) = -f^{(4)}(c)h^4(b-a)/180, \quad f(x) \in C^4[a,b].$$

2. Рунге қоидаси ва Ричардсон экстраполяция формуласи:

$$r_h = Z - Z_h = \frac{Z_{h/2} - Z_h}{2^k - 1} + O(h^{k+m}), \quad h \rightarrow 0.$$

$$Z_h^* = Z_h + (Z_{h/2} - Z_h)/(2^k - 1), \quad r_h^* = Z - Z_h^* = O(h^{k+m}).$$

1. Квадратура формулаларининг қолдиқлари.

Ушбу ифодалар $r_h^T(f) = J(f) - J_h^T(f)$, $r_h^C(f) = J(f) - J_h^C(f)$, $r_h^{TT}(f) = J(f) - J_h^{TT}(f)$ трапеция, Симпсон ва т.т. квадратура формулаларининг қолдиқларидир.

Теорема 1. Агар $f(x) \in C^2[a,b]$ бўлса ушбу тенгликлар ўринли

$$r_h^T(f) = -f^{(2)}(c)h^2(b-a)/12, \quad r_h^{TT}(f) = f^{(2)}(c)h^2(b-a)/24. \quad (1)$$

Теорема 2. Агар $f(x) \in C^4[a,b]$ бўлса ушбу тенглик ўринли

$$r_h^C(f) = -f^{(4)}(c)h^4(b-a)/180. \quad (2)$$

Исбот. Равшанки, $L_{1,i}(x) = f(x_i) + f[x_i, x_{i+1}](x - x_i)$, $x \in [x_i, x_{i+1}]$ десак

$$r_h^T(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x) - L_{1,i}(x)] dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [(f^{(2)}(c_i))(x - x_i)(x - x_{i+1})] / 2 dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} f^{(2)}(t_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} [(x - x_i)(x - x_{i+1})] / 2 dx = \sum_{i=0}^{n-1} f^{(2)}(t_i) h^3 \frac{1}{12} = -h^2 \frac{b-a}{12} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(t_i)}{n} = -h^2 \frac{b-a}{12} f^{(2)}(c)$$

Бу ерда интеграл учун ўртача қиймат ҳақида теоремадан фойдаландик, чунки $f''(x)$ - узлуксиз ва $(x - x_i)(x - x_{i+1}) \leq 0$. Охирида йиғинди учун ўрта қиймат ҳақидаги теорема ишлатилди, чунки $f''(x)$ - узлуксиз ва

$$f''(\eta_1) + \dots + f''(\eta_n) = n f''(\xi), \quad \eta_i, \xi \in [a, b].$$

(1) нинг иккинчи формуласи қуйидагича исботланади. Равшанки,

$$f(x) = f(x_i + h/2) + f'(x_i + h/2)(x - x_{i+1/2}) + f''(c_i)(x - x_{i+1/2})^2,$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} h f_{i+1/2} + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f''(c_i)(x - x_{i+1/2})^2 dx = J_h^{TT}(f) + \frac{h^3(b-a)}{24} f''(\eta)$$

(2) формула ҳам шу каби исботланади.

Лемма 3. Ихтиёрий $f(x) \in C^4[x_0, x_2]$ учун ушбу тенглик ўринли

$$r_h^C(f, x_0, x_2) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta), \quad x_0 < \eta < x_2.$$

Исбот. Олдинги леммага асосан $r_h^C(P_3(x)) = 0$, $P_3(x) = N_2(x) + dx^3$, $d \in \mathbb{R}$.

$P_3(x)$ кўпхадни интерполяция кўпхадни шаклида оламит:

$$P_3(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, 2, P_3'(x_1) = f'(x_1). \text{ Равшанки,}$$

$$R_3(x) = f(x) - P_3(x) = \frac{1}{4!} f^{(4)}(\eta)(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2),$$

$$r_h^C(f) = \int_{x_0}^{x_2} R_3(x) dx = \int_a^b \frac{1}{4!} f^{(4)}(\eta)(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2) dx =$$

$$= \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi) \int_{x_0}^{x_2} (x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2) dx = \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi) \int_{-h}^h (t+h)t^2(t-h) dt = -\frac{h^5(b-a)}{90} f^{(4)}(\xi).$$

Энди равшанки,

$$r_h^C(f) = -\sum_{i=0}^{m-1} \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta_i) = -\frac{h^4}{2 \cdot 90} (b-a) \sum_{i=0}^{m-1} \frac{f^{(4)}(\eta_i)}{m} = -\frac{h^4}{180} (b-a) f^{(4)}(\eta)$$

2. Рунге қондаси ва Ричардсон экстраполяция формуласи

Z_h миқдор Z нинг h параметрга боғлиқ бирор тақрибий қиймати бўлсин ва қуйидаги асимптотик боғланиш мавжуд бўлсин:

$$Z = Z_h + ch^k + O(h^{k+m}), c = const, h \rightarrow 0 \quad k, m - \text{бутун сонлар.} \quad (3)$$

Теорема 1. Агар (3) ўринли бўлса,

$$Z = Z_h + \frac{Z_{h/2} - Z_h}{2^k - 1} + O(h^{k+m}), h \rightarrow 0 \quad (4)$$

муносабат ўринли бўлади, яъни ушбу формулалар ўринли:

$$r_h = Z - Z_h = \frac{Z_h - Z_{h/2}}{2^k - 1} + O(h^{k+m}) \approx \frac{Z_h - Z_{h/2}}{2^k - 1}, r_h^* = Z - Z_h^* = O(h^{k+m})$$

$$Z_h^* = Z_h + (Z_{h/2} - Z_h) / (2^k - 1) = c_1 Z_{h/2} + c_2 Z_h, c_1 = 2^k / (2^k - 1), c_2 = -1 / (2^k - 1).$$

Исбот. (3) ни $h/2$ да ёзамиз:

$$Z = Z_{h/2} + c \frac{h^k}{2^k} + O(h^{k+m}), h \rightarrow 0. \quad (5)$$

(3) дан (5) ни айирамиз ва c ни топамиз:

$$0 = Z_h - Z_{h/2} + c(2^k - 1)h^k / 2^k + O(h^{k+m}), h \rightarrow 0,$$

$$c = (Z_{h/2} - Z_h) 2^k / (2^k - 1)h^k + O(h^{k+m}), h \rightarrow 0.$$

Бу тенгликни (3) га қўйиб (4) ни топамиз. Бу ердан кўринадики, қолдиқ ҳад $r_h = Z - Z_h$ сифатида ушбу формулани олиш мумкин экан:

$$r_h = Z - Z_h = \frac{Z_{h/2} - Z_h}{2^k - 1} + O(h^{k+m}), h \rightarrow 0.$$

Бу қолдиқ ҳадни ҳисоблашнинг Рунге қондаси деб айтилади. Рунге қондасидан қуйидаги Ричардсон экстраполяция формуласи келиб чиқади:

$$Z_h^* = Z_h + (Z_{h/2} - Z_h) / (2^k - 1) = c_1 Z_{h/2} + c_2 Z_h, c_1 = 2^k / (2^k - 1), c_2 = -1 / (2^k - 1) \quad (7)$$

Ричардсон экстраполяция формуласининг қолдиғи қуйидагича:

$$r_h^* = Z - Z_h^* = O(h^{k+m}), h \rightarrow 0. \quad (8)$$

Теорема 3. Агар $f(x) \in C^4[a, b]$ бўлса ушбу формулалар ўринли.

$$r_h^T(f) = Ch^2 + O(h^4), C = -1/12 \int_a^b f''(x) dx,$$

Агар $f(x) \in C^6[a, b]$ бўлса, ушбу формулалар ўринли:

$$r_h^C(f) = Ch^4 + O(h^6), \quad C = -1/180 \int_a^b f^{(4)}(x) dx .$$

Биринчи формулани қисқача исботга олиб борувчи фикрни келтирамиз. Равшанки,

$$r_h^T(f) = -\frac{h^2}{12}(b-a) \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(2)}(c_i)}{n} = -\frac{h^2}{12} \left[\int_a^b f''(x) dx + O(h^2) \right] = ch^2 + O(h^2) .$$

Демак,

$$r_{h/2}^T(f) = (J_{h/2}^T(f) - J_h^T(f))/3 + O(h^4) \quad (9)$$

$$r_{h/2}^C(f) = (J_{h/2}^C(f) - J_h^C(f))/15 + O(h^6) \quad (10)$$

Мисол 1. Трапеция формуласи билан $f(x) = 1/\sqrt{1+x^3}$ функциядан $[0,1]$ кесмада интеграл $\varepsilon = 0,00001$ аниқлик билан ҳисоблансин. $h_1=0,1$ ва $h_2=0,05$ кадамлар олиб $[0,1]$ кесмада иккита нуқталар тўплами оламиз: $x_k = a + k_1 h_1, x_k = a + k_2 h_2, k_1 = 0,1, \dots, 10, k_2 = 0,1, \dots, 20$. Ҳисоблаб топамиз: $J_{h_1}^T = 9,0916166, J_{h_2}^T = 9,0982576$. Рунге қоидаси асосида қолдиқни, Ричардсон формуласига асосан интегрални ҳисоблаймиз:

$$r_h = Z - Z_h = \frac{Z_{h/2} - Z_h}{2^k - 1} \approx \frac{J_{h_1}^T - J_{h_2}^T}{3} = 0,0001106,$$

$$Z_h^* = Z_h + (Z_{h/2} - Z_h) / (2^k - 1) \approx 0,9094$$

Назарий саволлар ва топшириқлар.

1. Ньютон-Котес квадратура формуласини қолдиғини ёзинг.
2. Марказий тўғри тўртбурчаклар формуласининг қолдиғини ёзинг.
3. Трапеция ва Симпсон формуласини қолдиғини исботланг.

[Мундарижага](#)

1.17. Функция минимумини топиш (математик программалаш масаласи)

Асосий тушунчалар: Перебор усули, градиент пасайиш усули, масаланинг Matchad программасида ечилиши .

Асосий натижалар:

1. Масаланинг қўйилиши:

$$Z = f(x) = f(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \min, \quad g_i(x) = g_i(x_1, \dots, x_n) \leq b_i, \quad i = 1..m .$$

$$\min_{x \in R^n} \sum_{i=1}^n f_i^2(x) = \sum_{i=1}^n f_i^2(\xi) = 0 \Leftrightarrow f_i(\xi) = 0, \quad i = 1..n,$$

2. Перебор усули. $\min_{x \in D \subset R^n} f(x) \approx \min_{D_h = \{x^{(k)} \in D\}} f(x^{(k)}) = \xi$

3. Градиент пасайиш усули $x^{(k)} = x^{(k-1)} - h \operatorname{grad} f(x^{(k-1)}), \quad k = 1, 2, \dots,$

$$\xi = \arg \min_{x \in G \in R^n} f(x), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = \xi$$

4. Алгоритми ва программаси.

5. Масаланинг Matchad программасида ечилиши.

1. Бирор қўп ўзгарувчи функциянинг

$$Z = f(x) = f(x_1, \dots, x_n) \quad (1)$$

$$g_i(x) = g_i(x_1, \dots, x_n) \leq b_i, \quad i = 1..m \quad (2)$$

каби шартларни қаноатлантирувчи экстремум қийматларини топиш талаб этилади. (1), (2) масала шартли экстремум масаласи дейилади. $z = f(x)$ функция мақсад функция, $g_i(x) \leq b_i, i = 1..m$, шартлар чекланиш шартлари дейилади. Улар орасида $x_i \geq 0, i = 1..n$, шартлар ҳам бўлиши мумкин. Мақсад функция сафатида космик кемани фазога олиб чиқиш учун зарур бўлган ёқилғи миқдори, механик конструкция оғирлиги, ишлаб чиқарилаётган маҳсулот таннархи, ҳаражатлар миқдори каби кўрсаткичлар бўлиши мумкин. Чекланишлар зарур ресурслар миқдорини чекланганлигини билдиради.

Агар масалада (2) шартлар бўлмаса масала шартсиз экстремум масаласи дейилади. Яна бир мисол сифатида

$$f_i(x) = f_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1..n \quad (3)$$

тенгламалар системасини олиш мумкин.

$$f(x) = f^2(x) + f_2^2(x) + \dots + f_n^2(x) \quad (4)$$

функцияни тузайлик. Равшанки,

$$\min_{x \in R_n} f(x) = f(\xi) = 0 \Leftrightarrow f_i(\xi) = 0, \quad i = 1..n, \quad (5)$$

яъни $f(x)$ функция минимумини топиш тенгламалар системасини ечиш билан эквивалент. Ва ихтиёрий функция $f(x)$ нинг минимумини топиш

$$f_i(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1..n, \quad (5)$$

системани ечиш билан баробар.

Масалан, $f(x) = x_1^4 + x_1^4 - x_1^2 - x_2^2$ функциянинг минимумини топиш учун

$$2x_1^3 - x_1 = 0, \quad 2x_2^3 - x_2 = 0 \quad (6)$$

Системага келамиз. Бу система ечими $(\pm \sqrt{2}/2, \pm \sqrt{2}/2)$ га тенг

2. Перебор усулининг ғояси жуда содда. Берилган $D \subset R^n$ соҳада $D_h = \{x^{(k)} \in D\}$ нукталар тўплами (тур) оламиз ва $f(x^{(k)})$ қийматларни ҳисоблаб чиқамиз. Қийматлар орасида энг кичик ва унга мос нуктани масаланинг тақрибий ечими деб қабул қиламиз. Агар n катта бўлса, бу масала анча оғир масала, Масалан, $D = (0 \leq x_i \leq 1, i = 1..n)$ гиперкуб бўлсин. $h = 0.1$ кадам, билан $x_i = ih, i = 1..n$, тўр ясайлик. Нукталар сони 10^n га тенг функция қийматини 1 та нуктада ҳисоблаш учун $100n$ та амал ишлатилсин. Алгоритм учун 10^{n+2} n та амал бажариш керак. $n=10$ учун тезлиги 10^6 амал/сек бўлган компьютер бундай масалани 10^7 секунд ≈ 4 йил узлуксиз ишлаб бажариш мумкин.

3. $f(x)$ функция градиенти деб

$$\text{grad } f(x) = f'(x) = (\partial_1 f(x), \dots, \partial_n f(x))$$

векторга айтилади. Анализдан маълумки функция градиент йўналишида ўсади, антиградиент йўналишида камаяди. Шунинг учун бирор $x^{(0)} \in D$ бошланғич нуктадан бошлаб

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - h \operatorname{grad} f(x^{(k-1)}), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

итерациялар кўрилади, бу ерда h итерация қадами дейилади. Етарли кичик h лар учун

$$f(x^{(0)}) > f(x^{(1)}) > \dots > f(x^{(n)}) > \dots \quad (8)$$

бўлади. Одатда итерацияларнинг тугаллаш шarti сифатида

$$\| \operatorname{grad} f(x^{(k)}) \| \leq \varepsilon \quad (9)$$

тенгсизлик қабул қилинади $\varepsilon > 0$ – аниқлик чегараси.

Мисол. $f(x) = x_1^2/4 + x_2^2$ функция учун

$$x_1^{(k)} = x_1^{(k-1)} - hx_1^{(k-1)}/2, \quad x_2^{(k)} = x_2^{(k-1)} - h \cdot 2x_2^{(k-1)} \quad h = 0,1, \quad x^{(0)} = (1,1)$$

$$x_1^{(1)} = 0,95; \quad x_1^{(2)} = 0,9025, \quad x_1^{(3)} = 0,85574$$

$$x_2^{(1)} = 0,80; \quad x_2^{(2)} = 0,6400, \quad x_2^{(3)} = 0,5120$$

$$f(x^{(0)}) = 1,25, \quad f(x^{(1)}) = \dots, \quad f(x^{(3)}) = 0,446$$

Агар танланган h қадам учун $f(x^{(k)}) < f(x^{(k-1)})$ бажарилган, қадам 2 га бўлинади ва хоказо.

Энг тез пасайиши усулида қадам h қуйидагича танланади:

$$F(h^*) = \min F(h), \quad F(h) = f(x^{(k)}) - h \operatorname{grad} f(x^{(k)}). \quad (10)$$

Масалан, юқоридаги мисол учун $x^{(0)} = (1,1)$ да (10) масала қуйидагича бўлади:

$$\min \left[\frac{1}{4} \left(1 - \frac{h}{2}\right)^2 + (1 - 2h)^2 \right] \quad (11)$$

ва $h^* = \frac{10}{9}$ га тенг.

Шартли экстремум масаласи шартсиз экстремум масаласи турли усуллар билан келтирилиши мумкин: Лагранж усули, штраф функциялар усули ва хоказо. Масалан, штраф функциялар усулида

$$\phi_k(x) = f(x) + k \sum_{i=1}^m (g_i(x) - b_i)_+^2, \quad k \gg 1, \quad (12)$$

функция киритилади, бу ерда

$$(g_i(x) - b_i)_+ = \begin{cases} g_i(x) - b_i, & \text{агар } g_i(x) > b_i, \\ 0, & \text{агар } g_i(x) \leq b_i. \end{cases}$$

(12) функциянинг шартсиз экстремум нуқталари $x^{(k)}$ лар ҳисобланади. Махсус курсларда исботланадики, $x^{(k)} \rightarrow \xi$, бу ерда ξ шартли экстремум нуқтаси. Ҳақиқатан ҳам, равшанки,

$$\Phi_k(x^{(k)}) = \min \phi_k(x) \geq f(x^{(k)})$$

Шунинг учун, $x^{(k)} \in D$ нуқталар учун $\Phi_k(x^{(k)}) > \Phi_{k+1}(x^{(k+1)}) > \dots$ бўлса,

$f(x^{(k)}) > f(x^{(k+1)}) > \dots$ бўлишига мажбур.

3. Mathcad да нозиклик функциянинг экстремумларини топиш масаласини қараймиз, ушбу функция берилган бўлсин:

$$f(x, y) := 2 + 2 \cdot x + 2 \cdot y - x^2 - y^2$$

Масаланинг Matchad ойнасида ечилиши.

Given

$$\begin{aligned} x &\geq 0 && \text{first minimum point at } (0,9), \\ &&& \text{the uppermost vertex of T} \\ 0 &\leq y \leq 9 - x \end{aligned}$$

$$P := \text{Minimize}(f, x, y) \quad P = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix} \quad f(P_0, P_1) = -61$$

$$x := 5 \quad y := 4$$

Given

$$\begin{aligned} x &\geq 0 && \text{second minimum point at } (9,0), \\ &&& \text{the rightmost vertex of T} \\ 0 &\leq y \leq 9 - x \end{aligned}$$

$$Q := \text{Minimize}(f, x, y) \quad Q = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f(Q_0, Q_1) = -61$$

Яна такрорлаймиз, бу масалалар тўғри Matchad ойнасидан олинган.

[Мундарижага](#)

1.18. Чизиқли функция минимумини топиш

Асосий тушунчалар: ЧП масаласи, симплекс усул. Mathcadда ечим олиш.

1. ЧП масаласининг каноник кўриниши: $f(x) = cx \rightarrow \min, Ax = b (Ax \leq b, Ax \geq b)$.

2. ЧП масаласига мисоллар: тақсимот, рацион, транспорт масалалари.

3. ЧП ечиш учун симплекс усул.

4. Масаланинг Mathcad программаси ёрдамида ечиш.

1. $f(x) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n = (c, x) = (c, x)_{R^n}$ чизиқли функция ва чизиқли тенгламалар системаси (чекланишлар) $Ax = b$ берилган бўлсин, бу ерда

$$A = [a_{ij}], \quad x = [x_1, \dots, x_n] \in R^n, \quad b = [b_1, \dots, b_m] \in R^m, \quad A: R^n \rightarrow R^m :$$

$$\{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \dots, a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \quad (1)$$

$$x_i \geq 0, i = 1..n, \quad b_j \geq 0, \quad j = 1..m, \quad m \leq n,$$

Чизиқли функция $f(x)$ га (1) шартларни қаноатлантирадиган ечимлар U орасидан энг кичкина қиймат берувчи нуқтани топиш керак:

$$\min f(x) = \min(c, x) = f(x^*) \quad (2)$$

$$U = \{x \in R^n : Ax = b, \quad x \geq 0, \quad b \geq 0\} \quad (3)$$

(2),(3) масала чизиқли функциянинг (ЧФМ) минимуми ҳақидаги масаланинг каноник шакли дейилади.

ЧФМ ҳақидаги масаланинг умумий кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\min(c, x) = (c, x^*), \quad U = \{x \in R^n : Ax = b, x \geq 0, b \geq 0\} \quad (4)$$

Умумий кўринишдаги масаласидаги тенгсизлик билан берилган шартлар тенглик шартларига қўшимча ўзгарувчилар киритиш йули билан осонгина келтирилади: масалан, $a_1x_1 + \dots + a_nx_n \leq b$ ($a_1x_1 + \dots + a_nx_n \geq b$) тенгсизлик янги $x_{n+1} \geq 0$ ўзгарувчи киритилиб, қуйидаги тенглик ҳосил қилинади:

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n + x_{n+1} = b \quad (a_1x_1 + \dots + a_nx_n - x_{n+1} = b).$$

Функцияга бу ўзгарувчи 0 коэффициент билан киради: $f(x) = (c, x) + 0x_{n+1}$.

2. Иккита масалани қараймиз. 1-мисол. Ресурсларни оптимал тақсимлаш масаласи. x_1, \dots, x_n миқдорда n хил товар ишлаб чиқарилсин. Уларни тайёрлаш учун m хил ашё керак бўлсин. i -товар ишлаб чиқариш учун j -хом ашё дан a_{ij} миқдорда керак бўлсин. j - хом ашё запаси b_j бўлсин. Бир бирлик i - товар c_i фойда берсин. У ҳолда энг кўп фойда қилиш учун ушбу масалага келамиз:

$$f(x) = (c, x) \rightarrow \max, \quad U = \{x \in R^n : Ax = b, x \geq 0, b \geq 0\} \quad (5)$$

2-мисол. Транспорт масала. i -пунктда, $1 \leq i \leq m$, a_i миқдорда маҳсулот бор, j -қабул пунктига b_j миқдорда маҳсулот керак, i -пунктдан j -пунктга бир бирлик маҳсулотни топиш учун $C_{i,j}$ пул кетсин, Равшанки, $a_1 + \dots + a_n = b_1 + \dots + b_m$ бўлиши керак. Траснспорт масаласида маҳсулотни шундай топиш керакки, ҳаражатлар энг кичик бўлсин.

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n,m} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = a_i, \quad \sum_{i=1}^n x_{ij} = b_j, \quad x_{ij} \geq 0. \quad (7)$$

Теорема 1. (6) функцияни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{i,j} x_{i,j} = \text{tr}(Cx^T), \text{tr}(A) = \sum_{k=1}^l a_{k,k}.$$

Исбот. $Cx^T = Cy = A$ дейлик. У ҳолда

$$a_{i,l} = \sum_{k=1}^m c_{i,k} y_{k,l} = \sum_{k=1}^m c_{i,k} x_{l,k}, \text{tr}(Cx^T) = \sum_{i=1}^m a_{i,i} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n c_{i,k} x_{i,k} = Cx.$$

Теорема 2. (7) шартларни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$x^* e_1^T = a, x^T * e_2^T = b, a = [a_1, \dots, a_m]^T, b = [b_1, \dots, b_m]^T, e_1^T = [1, \dots, 1_n]^T, e_2^T = [1, \dots, 1_m]^T.$$

3. Симплекс усул.(2)-(3) масаланинг мумкин бўлган ечими деб (3) шартларни қаноатлантирувчи $x = (x_1, \dots, x_n)$ векторга айтилади. Фараз қилайлик $\text{rang}(A) = m$. Симплекс усул қуйидаги икки қадамдан иборат.

1-қадам. $Ax = b$ системада m та базис ўзгарувчи мавжуд. У ҳолда Гаусс усули билан уни қуйидаги кўринишга келтириш мумкин:

$$\{x_1 + \alpha_{1m+1}x_{m+1} + \dots + \alpha_{in}x_n = \beta_1, \dots, x_m + \alpha_{mm+1}x_{m+1} + \dots + \alpha_{in}x_n = \beta_m, \beta_i \geq 0. \quad (8)$$

улардан x_1, \dots, x_m ларни топиб $f(x)$ функцияни

$$f(x) + \gamma_{m+1}x_{m+1} + \dots + \gamma_nx_n = f_0 \quad (f(x) = p_{m+1}x_{m+1} + \dots + p_nx_n + f_0) \quad (9)$$

кўринишга келтириш мумкин. Бу ерда x_1, \dots, x_m базис ўзгарувчилар, x_{m+1}, \dots, x_n – эркин ўзгарувчилар. $x_{m+1} = \dots = x_n = 0, x_i = \beta_i, i = 1, \dots, m$, қийматларни топамиз ва

$$x^{(0)} = (\beta_1, \dots, \beta_m, 0, \dots, 0) \quad (10)$$

бошланғич мумкин бўлган ечимни қурамыз.

Теорема. ($x^{(0)}$ нуқтанинг минимал оптималлик шarti). Агар (9) да барча $\gamma_i \leq 0, i = m+1, \dots, n$ ($\gamma_i \geq 0, i = m+1, \dots, n$) бўлса, $f(x)$ функциянинг $f(x^{(0)})$ қиймати энг кичик (энг катта) қиймат ва $x^{(0)}$ (10) оптимал ечим, чунки бирор эркин ўзгарувчи қиймати ошса функция қиймати катталашади (кичиклашади).

Фараз қилайлик, γ_j лар ичида манфийлари мавжуд бўлсин. Улардан модуль бўйича энг каттаси γ_j бўлсин. J -устун ҳал қилувчи дейилади. (8)-(9) ни ушбу симплекс жадвалда акс эттирамыз:

	x_1	x_2		x_m	x_{m+1}		x_J		x_n	β_i	ρ_i
x_1	1	0	.	0	α_{1m+1}		α_{1J}		α_{1n}	β_1	ρ_1
x_2	0	1	.	0	α_{2m+1}		α_{2J}		α_{2n}	β_2	ρ_2
.							
x_I					α_{Im+1}		α_{IJ}		α_{In}	β_I	ρ_I
.											
x_m	0	0		1	α_{mm+1}		α_{mJ}		α_{mn}	β_m	ρ_m
f	0	0	.	0	γ_{m+1}		γ_J		γ_n	f_0	

2-қадам. Янги базисга функция қийматини камайтириб ўтиш учун $\beta_i / \alpha_{ij}, 1 \leq i \leq m, m+1 \leq j \leq n$ сонларни қараймыз. Бу ерда икки ҳол бўлиши мумкин: 1) барча a_{ij} лар манфий; 2) a_{ij} лар орасида мусбатлари мавжуд. Биринчи ҳолда $f(x)$ функция қуйидан чегараланмаган, иккинчи ҳолда эса ушбу қийматни топамиз: $\rho_I = \beta_I / |\alpha_{IJ}| = \min_{a_{ij} \geq 0} \{ \beta_i / |\alpha_{ij}| \} = \rho$.

I -сатр ҳал қилувчи сатр дейилади. Янги базис ечим қурамыз:

$$x^{(1)} = (\beta_1, \dots, \beta_{I-1}, 0, \beta_{I+1}, \dots, \beta_m, 0, \dots, \rho, \dots, 0),$$

бу ерада $\rho - J$ -ўринда. x_i ни базисдан чиқариб, x_J ни базисга киратимиз:

$$x_i^{(1)} = \begin{cases} \beta_i - \alpha_{ij} x_J \geq 0, & 1 \leq i \leq m; x_I = 0, \\ 0, & m+1 \leq i \leq n; x_J = \rho \end{cases}$$

Бу ечимда $f(x)$ ни топамиз ва қўрамызки, f функция қиймати камайди :

$$f(x^{(1)}) = f_0 + \gamma_J \beta_I / \alpha_{IJ} = f_0 + \gamma_J \rho < f_0, \gamma_J < 0.$$

Бу ишни оптимал ечим яратгунча давом эттирамыз.

Изоҳ. Амалда, 2-қадам осонгина бажарилади. a_{IJ} элемент ҳал қилувчи элемент дейилади. I сатр a_{IJ} га бўлинади. a_{IJ} ўрнида 1 ҳосил бўлади. У ерда Гаусс усулини қўллаб, J устундаги барча элементларни 0 га айлантирамыз. Янги симплекс жадвал ҳосил бўлади. Ундан янги таянч ечимни оламыз. Уни оптималликка текширамыз ва ҳ.к.

Мисол 1. $f(x) = x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 14x_6$,

$$x_1 + x_4 = 20, x_2 + x_5 = 50, x_3 + x_6 = 30, x_4 + x_5 + x_6 = 60, x_j \geq 0.$$

Масаланинг матрицаси куйидагича

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{rang}(A) = 4.$$

Базис деб x_2, x_4, x_5, x_6 ўзгарувчиларни оламиз. Уларни x_1, x_3 ва мақсад функцияни эркин ўзгарувчилар орқали куйидагича ифодалаймиз :

$$x_2 + x_1 + x_3 = 40, x_4 + x_1 = 20, x_5 - x_1 - x_3 = 10, x_6 + x_3 = 30, x_j \geq 0., f(x) + 7x_1 + 14x_3 = 880.$$

Ушбу симплекс жадвални тузамиз:

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	β_i	ρ_i
x_2	1	1	1	0	0	0	40	40
x_4	1	0	0	1	0	0	20	
x_5	-1	0	0	0	1	0	10	
x_6	0	0	1 \rightarrow	0	0	1	30	30
$f(x)$	7	0	14 \uparrow	0	0	0	880	

Масалани куйидагича ечамиз:

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	β_i	ρ_i
x_2	1 \rightarrow	1	0	0	0	-1	10	10
x_4	1	0	0	1	0	0	20	20
x_5	-1	0	0	0	1	1	40	
x_3	0	0	1	0	0	1	30	
$f(x)$	7 \uparrow	0	0	0	0	-14	-460	

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	β_i	ρ_i
x_1	0	1	0	0	0	-1	10	
x_4	0	-1	0	1	0	1	10	
x_5	0	1	0	0	1	0	50	
x_3	0	1	1	0	0	0	30	
$f(x)$	0	-7	0	0	0	-14	390	

Демак, $f(x) = 390 \rightarrow \min, x^* = x_{\min} = (10, 0, 30, 10, 50, 0)$.

2-масала. $f(x) = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max, x_1 + 2x_2 \leq 4, x_1 + x_2 \leq 3, 2x_1 + x_2 \leq 8, x_j \geq 0.$

Чекланишларни ўзгартирамиз: $x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, x_1 + x_2 + x_4 = 3, 2x_1 + x_2 + x_5 = 8, x_j \geq 0.$

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	β_i	ρ_i
x_3	1	2 \rightarrow	1	0	0	4	2
x_4	1	1	0	1	0	3	3
x_5	2	1	0	0	1	8	8
$f(x)$	3	4 \uparrow	0	0	0	0	

$$x^{(0)} = (0, 0, 4, 3, 8), f(x^{(0)}) = 0$$

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	β_i	ρ_i
x_2	1/2	1	1/2	0	0	2	4
x_4	1/2 →	0	-1/2	1	0	1	2
x_5	1/2	0	-1/2	0	1	6	12
$f(x)$	-1 ↑	0	2	0	0	8	

$$x^{(1)} = (0, 2, 0, 1, 6), f(x^{(1)}) = 8$$

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	β_i	ρ_i
x_2	1	1	-1	0	1	0	
x_1	1 →	0	-1	2	0	2	2
x_5	0	1	-3	1	3	0	
$f(x)$	0 ↑	0	1	2	0	10	

$$x^{(2)} = (2, 1, 0, 0, 3), f(x^{(2)}) = 10 \rightarrow \max$$

4. Масалани Mathcad дастури ёрдамида ечиш.

Индексларнинг бош қаймати

ORIGIN := 1

Мақсад функция

$$B := [1 \ 9 \ 5 \ 3 \ 4 \ 14] \quad C := B^T \quad f(x) := Cx$$

Чекланишлар матрицаси, вектори

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad b := \begin{bmatrix} 20 \\ 50 \\ 30 \\ 60 \end{bmatrix} \quad y := [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \quad x := y^T$$

Блок боши

Given

Чекланишлар (баробар йўгон)

$$Ax = b \quad x \geq 0$$

Ички функцияга мурожаат

$$r := \text{Minimize}(f, x)$$

Натижани чиқариш

$$r = [10 \ 0 \ 30 \ 10 \ 50 \ 0]$$

Функция қиймати

$$f(r) = 390 \rightarrow \min$$

Мисол 2. Қуйидаги транспорт масаласини ечамиз.

	B1	B2	B3	B4	B5		
A1	4	11	6	5	15	200	
A2	8	7	9	13	10	200	
A3	10	5	12	7	20	100	
Юкка эҳтиёж	70	80	150	110	90	500	500

Индексларнинг бош қайматлари

ORIGIN := 1

Матрица, векторлар

$$C := \begin{bmatrix} 4 & 11 & 6 & 5 & 15 \\ 8 & 7 & 9 & 13 & 10 \\ 10 & 5 & 12 & 7 & 20 \end{bmatrix} \quad A := \begin{bmatrix} 200 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 70 \\ 80 \\ 150 \\ 110 \\ 90 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Мақсад функция, векторлар $F(x) := \text{tr}(Cx^T)$ $e_1 := [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ $e_2 := [1 \ 1 \ 1]^T$

Блок боши, ички функция Given $x^* e_1^T = A$ $x^T * e_2^T = B$ $x \geq 0$ $x := \text{Minimize}(F, x)$

Ечимни олиш

$$x = \begin{bmatrix} 70 & 0 & 40 & 90 & 0 \\ 0 & 110 & 0 & 0 & 90 \\ 0 & 80 & 0 & 20 & 0 \end{bmatrix} \quad F(x) = 3400$$

[Мундарижага](#)

Амалий ва мустақил ишлар
ИНДИВИДУАЛ ТОПШИРИҚЛАР

1.Тенгламалар итерация, Ньютон усуллари билан ечилсин. Ечим Mathcad (Maple, Mathematica) дастурида ички функциялар ёрдамида ва алгоритм тузиб олинсин, натижаларнинг яқинлигига эришилсин. Графиклар чизилсин.

Т.р	Топшириқлар	a	b	c	d
1	$f(x)=0$ тенгламанинг энг	0,6319	0,9217	-	-
2	кичик нолдан фарқли	9,4637	13,8249	-	-
3	мусбат ечими топилсин	0,9464	1,3825	-	-
4	$f(x)=tg(ax)-bx$	8,5174	12,4424	-	-
5		1,8927	2,7650	-	-
6		4,4164	6,4516	-	-
7	$f(x)=0$ тенгламанинг энг	0,3049	0,3436	0,5	-
8	катта мусбат ечими	9,1464	10,3081	1,0	-
9	топилсин	0,6098	0,6872	1,5	-
10	$f(x)=\ln(ax)+bx-c$	8,5366	9,6209	2,0	-
11		0,9146	1,0308	2,5	-
12		7,9268	8,9337	3,0	-
13	$f(x)=0$ тенгламанинг энг	0,33	2,3	0,5	-
14	кичик нолдан фарқли	10	7,375	7,75	-
15	мусбат ечими топилсин	1	2,2	1	-
16	$f(x)=asin(bx)-cx$	6,3	5,189	5	-
17		1,67	2,5	1,5	-
18		8	6,18	6,25	-
19		0,312	0,7586	-	-
20		0,893	0,52	-	-
21	$f(x)=0$ тенглама ечилсин	0,0385	0,963	-	-
22		0,944	0,51	-	-
23	$f(x)=a \exp(-bx)-x$	0,25	0,8	-	-
24		0,67	0,6	-	-
25		0,5	0,667	-	-
26		0,6857	0,56	-	-
27		0,982	0,503	-	-
28	$f(x)=0$ тенглама ечилсин	0,8896	-2,813	3,6929	11,2
29	$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$	0,107	-0,4613	2,3738	5,44
30		1,2755	-3,601	-1,37	6,76

2. Тенгламалар итерация, Ньютон усуллари билан ечилсин. Ечим Mathcad (Maple, Mathematica) дастурида ички функциялар ёрдамида ва алгоритм тузиб олинсин, натижаларнинг яқинлигига эришилсин. Графиклар чизилсин.

N			
1	$\sin(x+1) - y = 1.2, 2x + \cos y = 2$	2	$\cos(x-1) + y = 0.5, x - \cos y = 3$
3	$\sin x + 2y = 2, \cos(y-1) + x = 0.7$	4	$\cos x + y = 1.5, 2x - \sin(y-0.5) = 1$
5	$tg(xy+0.4) = x^2, 0.6x^2 + 2y^2 = 1$	6	$\sin(x+y) - 1.6x = 0, x^2 + y^2 = 1$
7	$\cos x + y = 1.5, 2x - \sin(y-0.5) = 1$	8	$\sin(x+y) - 1.2x = 0.2, x^2 + y^2 = 1$
9	$\{\sin(x+0.5) - y = 1, 2x - \sin(y-0.5) = 1\}$	10	$\{tg(xy+0.3) = x^2, 0.9x^2 + 2y^2 = 1\}$
11	$\begin{cases} \cos(x+0.5) + y = 0.8 \\ \sin y - 2x = 1.6 \end{cases}$	12	$\{\sin(x+y) - 1.3x = 0, x^2 + y^2 = 1\}$
13	$\begin{cases} \cos(y+0.5) + x = 0.8 \\ \sin x - 2y = 1.6 \end{cases}$	14	$\begin{cases} tg(xy+0.1) = x^2; \\ 0.5x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$
15	$\begin{cases} 2x - \cos(y+1) = 0; \\ y + \sin x = -0.4 \end{cases}$	16	$\begin{cases} \sin(x+y) = 1.1x - 0.1; \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$
17	$\begin{cases} \cos(y+0.5) - x = 2 \\ \sin x - 2y = 1 \end{cases}$	18	$\begin{cases} tg(x-y) - xy = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$
19	$\begin{cases} \sin(y+2) - x = 1.5 \\ y + \cos(x-2) = 0.5 \end{cases}$	20	$\begin{cases} \sin(x-y) - xy = -1, x^2 - y^2 = \frac{3}{4} \end{cases}$
21	$\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1 \\ 2x + \cos y = 2 \end{cases}$	22	$\begin{cases} tg(xy+0.2) = x^2; \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$
23	$\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0.8 \\ x - \cos y = 2 \end{cases}$	24	$\begin{cases} \sin(x+y) - 1.5x = 0; \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$
25	$\begin{cases} \sin x + 2y = 1.6 \\ \cos(y-1) + x = 1 \end{cases}$	26	$\{tgxy = x^2, 0.5x^2 + 2y^2 = 1\}$
27	$\begin{cases} \cos x + y = 1.2 \\ 2x - \sin(y-0.5) = 2 \end{cases}$	28	$\begin{cases} \sin(x+y) = 1.2x - 0.2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$
29	$\begin{cases} \sin(x+y) = 1.2x - 0.2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$	30	$\begin{cases} \sin(x+y) = 1.2x - 0.2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

3. Чизиқли алгебра масалалари.

Индивидуал топшириқлар.

Тенгламалар системаси Гаусс, итерация, тескари матрица усуллари билан ечилсин. Хос сонлар ва хос векторлар топилсин. Ечим Mathcad (Maple, Mathematica) дастурида ички функциялар ёрдамида ва алгоритм тузиб олинсин, натижаларнинг яқинлигига эришилсин.

$$1) A = \begin{bmatrix} 8.30 & 2.62 + \alpha & 4.10 & 1.90 \\ 3.92 & 8.45 & 7.78 - \alpha & 2.46 \\ 3.77 & 7.21 + \alpha & 8.04 & 2.28 \\ 2.21 & 3.65 - \alpha & 1.69 & 6.99 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 16.92 + \alpha \\ 22.61 - \alpha \\ 21.3 + \alpha \\ 14.54 - \alpha \end{bmatrix}, \alpha = 0.2k, k = 0, \dots, n, 2)$$
$$A = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{bmatrix}, k = n+3, n+4, n+5, \dots, b = \begin{bmatrix} n+3 \\ n+3 \\ n+3 \\ n+3 \end{bmatrix}, n = 1, 2, \dots$$

4.Интерполяция масаласи

Берилган функция учун Ньютон, Лагранж интерполяция кўпхадлари, чизикли, кубик интерполяция сплайнлари қурилсин. Ечим Mathcad (Maple, Mathematica) дастурида ички функциялар ёрдамида ва алгоритм тузиб олинсин, натижаларнинг яқинлигига эришилсин. Тўр нукталари $\{x_i = a + ih, i = 0..n\}$ дан фаркли учта $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ нукталарда интерполяция формулалари ва функциянинг қийматлари ҳисобланиб, қийматлар солиштирилсин. Графиклар чизилсин.

Т.р	Топшириқлар	a	b	c	d	[a,b]	Нукталар сони	Функция ҳисобланадиган. нукталар
1	f(x)=tg(ax)-bx	1	1			[0,2]	10	$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$
2								
3								
4								
5								
6								
7	f(x)=ln(ax)+bx-c	1	1	1		[3,4]	10	$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$
8								
9								
10								
11								
12								
13	f(x)=asin(bx)-cx	1	1	1		[1,4]	10	$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$
14								
15								
16								
17								
18								
19	f(x)=a exp(-bx)-x	1	1			[3,5]	10	$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$
20								
21								
22								
23								
24								
25								
26								
27								
28	f(x)=a x ³ +bx ² +cx+d	1	1	1	1	[2,5]	10	$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$
29								
30								

5. Тақрибий интеграллаш

Интеграллар тўғри тўртбурчаклар, трапеция, Симпсон, Гаусс усуллари билан топилсин. Ечим Mathcad (Maple, Mathematica) дастурида ички функциялар ва алгоритм тузиб олинсин, натижаларнинг яқинлигига эришилсин.

1. $\int_0^1 \cos(x + x^3) dx$	11. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln \sin x dx$	21. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} (x + \ln \sin x) dx$
2. $\int_0^1 \sin(x^4 + 2x^3 + x^2) dx$	12. $\int_0^{\pi} \cos(2 \sin x) dx$	22. $\int_0^{\pi} (x + \cos(2 \sin x)) dx$
3. $\int_0^1 e^{\sin x} dx$	13. $\int_0^{\pi} x^2 e^{-x^2} dx$	23. $\int_0^{\pi} (x + x^2 e^{-x^2}) dx$
4. $\int_0^1 \sin x e^{-2x} dx$	14. $\int_0^{\pi} x^4 e^{-x^2} dx$	24. $\int_0^{\pi} (x^4 e^{-x^2} + x) dx$
5. $\int_0^1 e^{\cos x} dx$	15. $\int_{\pi/2}^{\pi} \cos(x + x^3) dx$	25. $\int_{\pi/2}^{\pi} (x + \cos(x + x^3)) dx$
6. $\int_0^1 \operatorname{ch} x^2 dx$	16. $\int_1^2 \sin x^3 dx$	26. $\int_1^2 (x + \sin x^3) dx$
7. $\int_0^1 \cos^2 x dx$	17. $\int_1^2 x^{-1} \ln(1+x) dx$	27. $\int_1^2 (x + x^{-1} \ln(1+x)) dx$
8. $\int_0^1 \sin(x + x^3) dx$	18. $\int_1^2 x^{-1} e^x dx$	28. $\int_1^2 (x + x^{-1} e^x) dx$
9. $\int_0^1 \cos x e^{-x^2} dx$	19. $\int_1^2 \operatorname{sh} x^2 dx$	29. $\int_1^2 (x + \operatorname{sh} x^2) dx$
10. $\int_1^2 \sin 2x e^{-x^2} dx$	20. $\int_0^{\pi/4} x \sin x^3 dx$	30. $\int_0^{\pi/4} (x + x \sin x^3) dx$

[Мундарижага](#)

Лаборатория ишлари.2-курс, 4-семестр, 6 соат.

1-лаборатория иши.

Мавзу: Ночизик тенгламалар ва уларнинг системаларини тақрибий ечиш

1.1. Ночизик тенглама учун итерация усули.

$$f(x) = e^{\alpha x} + 2x - 4\beta = 0, \alpha = 0.1k, \beta = 1 + 0.01k, k \in N.$$

тенглама итерация усули билан ечилсин. Ҳисоблашлар Паскаль ва Делфи тилларида тузилган дастурлар ёрдамида амалга оширилсин.

1.2. Ночизик тенглама учун Ньютон усули.

$$f(x) = x^3 + 4x - \beta = 0, \beta = 1 + 0.01k, k \in N.$$

тенглама Ньютон итерация усули билан ечилсин. Ҳисоблашлар Паскаль ва Делфи тилларида тузилган дастурлар ёрдамида амалга оширилсин.

1.3. Ночизик тенгламалар системаси учун итерация усули.

$$A) \alpha x^3 - y^2 - 1 = 0, xy^3 - y - 4 = 0, \alpha = 1 + 0.5k, k = 0, \dots, 5.$$

B)

$$e^{xy} = x^2 - y + \alpha, (x + 0.5)^2 + y^2 = k, x > 0, y > 0, \alpha = 1 + 0.1m, k = 0.6 + 0.1m, m = 0, \dots, 5.$$

тенгламалар системаси итерация усули билан ечилсин. Ҳисоблашлар Паскаль ва Делфи тилларида тузилган дастурлар ёрдамида амалга оширилсин.

1.4. Ночизик тенгламалар системаси учун Ньютон усули.

$$A) \alpha x^3 - y^2 - 1 = 0, xy^3 - y - 4 = 0, \alpha = 1 + 0.5k, k = 0, \dots, 5.$$

$$B) \operatorname{tg}(xy + k) = x^2, \alpha x^2 + 2y^2 = 1, x > 0, y > 0, \alpha = 0.5 + 0.1m, k = 0.1m, m = 0, \dots, 5.$$

тенгламалар системаси Ньютон итерация усули билан ечилсин. Ҳисоблашлар Паскаль ва Делфи тилларида тузилган дастурлар ёрдамида амалга оширилсин.

2-лаборатория иши.

Чизикли тенгламалар системаси Гаусс, оддий итерация, Зейдель усуллари билан ечилсин

$$A = \begin{bmatrix} 24.21 + \alpha & 2.42 & 3.35 \\ 2.31 & 31.49 + \alpha & 1.52 \\ 3.49 & 4.85 & 28.72 + \alpha \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 30.24 \\ 40.95 - \beta \\ 42.81 \end{bmatrix}, \varepsilon = 10^{-4}, \alpha = 0.2k, \beta = 0.2k, k = 0, \dots, 5.$$

Детерминант ва тескари матрица ҳисоблансин. Ҳисоблашлар Паскаль ва Делфи тилларида тузилган дастурлар ёрдамида амалга оширилсин.

3-лаборатория иши.

Хос сонлар ва хос векторларни тақрибий ҳисоблаш

$$A = \begin{bmatrix} 24.21 + \alpha & 2.42 & 3.35 \\ 2.31 & 31.49 + \alpha & 1.52 \\ 3.49 & 4.85 & 28.72 + \alpha \end{bmatrix}, \alpha = 0.2k, \beta = 0.2k, k = 0, \dots, 5.$$

матрицанинг хос сонлари ва хос векторлари тақрибий топилсин.

1) максимал хос сон ва унга мос хос вектор итерация усули билан $\varepsilon = 0.001$ аниқликкача;

18. $f(x)=0, f : D \in R^n \rightarrow R^n$ НТС $x = g(x) : D \in R^n \rightarrow R^n$ эквивалент кўринишга келтирилган ва итерация усули $x^{(k)} = g(x^{(k-1)}), k = 1, 2, \dots$, қўлланилган. Амалий баҳони кўрсатинг.
- A) $\|\xi - x^{(k)}\| \leq q \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| / (1-q)$ B) $\|\xi - x^{(k)}\| \leq q^k \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| / (1-q)$ C) $\|\xi - x^{(k)}\| \leq q^{k-1} \|\xi - x^{(0)}\|$
D) $\|\xi - x^{(k)}\| \leq q^k \|\xi - x^{(0)}\|$
19. $f_1 = x - e^{-y} = 0, f_2 = y - e^x = 0$ система илдизлари етган соҳани кўрсатинг.
- A) 2-чорак B) $[0,1] \times [0,1]$ C) 3-чорак D) 4-чорак
20. $x = g(x)$ ночизик система итерация усули $x^{(k)} = g(x^{(k-1)})$ билан ечилмоқда. Узоқлашиш шарти қандай. (Бу ерда $g^{(1)}(x)$ - Якоби матрицаси, $q = \max\{\|g^{(1)}(x)\|, x \in D\}$)
- A) $q > 1$ B) $q < 1$ C) $q = 1$ D) $q < 2$
21. Гаусс усули билан қандай тенгламалар ечилади?
- A) Ночизик тенглама B) Ночизик тенгламалар системаси C) Чизикли тенгламалар системаси D) Чизикли тенглама
22. Гаусс усули неча этапдан иборат?
- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4
22. Гаусс усулида чизикли алгебраик тенгламалар системаси ўнг юришда қандай кўринишга келтирилади?
- A) Диогонал матрицали системага B) чап қуйи учбурчак матрицали системага
C) ўнг юқори учбурчак матрицали системага D) уч диогонал матрицали системага
23. $Ax = b \Leftrightarrow x = Cx + d$ кўринишга келтирилган ва итерация усули қўлланилган. Яқинлашиш шарти қандай?
- A) $\|C\| = 1$ B) $\|C\| = 0$ C) $\|C\| > 1$ D) $\|C\| < 1$
24. $Ax = b \Leftrightarrow x = Cx + d$ кўринишга келтирилган ва итерация усули қўлланилган. Назарий баҳони кўрсатинг.
- A) $\|\xi - x^{(k)}\| \leq q^k \|\xi - x^{(1)}\|$ B) $\|\xi - x^{(k)}\| \leq q \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| / (1-q)$ C) $\|\xi - x^{(k)}\| \leq q^{k-1} \|\xi - x^{(0)}\|$
D) $\|\xi - x^{(k)}\| \leq q^k \|\xi - x^{(0)}\|$
25. Чизикли тенгламалар системаси $Ax = b \Leftrightarrow x = Cx + d$ кўринишга келтирилган ва итерация усули қўлланилган. Амалий баҳони кўрсатинг.
- A) $\|\xi - x^{(k)}\| \leq q^k \|\xi - x^{(1)}\|$ B) $\|\xi - x^{(k)}\| \leq q \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| / (1-q)$ C) $\|\xi - x^{(k)}\| \leq q^{k-1} \|\xi - x^{(0)}\|$
D) $\|\xi - x^{(k)}\| \leq q^k \|\xi - x^{(0)}\|$
26. $Ax = b, A = [a_{ij}], x = [x_i]^T, b = [b_i]^T, i, j = 1, \dots, n$, чизикли тенгламалар системасининг ечими қачон мавжуд ва ягона?
- A) $\det(A) \neq 0$ B) $\det(A) = 0$ C) $\det(A) = 0, \exists i : \det(A_i) \neq 0$ D) $\det(A) = 0, \det(A_i) = 0 \forall i$
27. $Ax = b, A = [a_{ij}], x = [x_i]^T, b = [b_i]^T, i, j = 1, \dots, n$, чизикли тенгламалар системаси учун Крамер қондасини кўрсатинг. A) $\det(A) \neq 0$ B) $x_i = \det(A) / \det(A_i), i = 1, \dots, n$ C) $\det(A) = 0, \exists i : \det(A_i) \neq 0$ D) $\det(A) = 0, \det(A_i) = 0 \forall i$
28. Уч диогоналли чизикли тенгламалар $b_0 x_0 + c_0 x_1 = d_0$,
 $a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i, i = 1, \dots, n-1, a_n x_{n-1} + b_n x_n = d_n$ системаси қандай усул билан ечилади?
- A) Гаусс B) итерация C) прогонка D) квадрат илдизлар
29. Прогонка усулининг ўнг юришини кўрсатинг.
- A) $u_0 = 0, u_{i+1} = -c_i / (a_i u_i + b_i), v_0 = 0, v_{i+1} = (d_i - a_i v_i) / (a_i u_i + b_i), i = 0, \dots, n-1$. B) $x = A^{-1} b$

C) $x_n = (d_n - a_n v_n) / (a_n u_n + b_n), x_i = u_{i+1} x_{i+1} + v_{i+1}, i = n-1, \dots, 0.$

D) $x_i = \det(A) / \det(A_i), i = 1, \dots, n.$

30. Прогонка усулининг чап юришини кўрсатинг.

A) $u_0 = 0, u_{i+1} = -c_i / (a_i u_i + b_i), v_0 = 0, v_{i+1} = (d_i - a_i v_i) / (a_i u_i + b_i), i = 0, \dots, n-1.$ B) $x = A^{-1}b$

C) $x_n = (d_n - a_n v_n) / (a_n u_n + b_n), x_i = u_{i+1} x_{i+1} + v_{i+1}, i = n-1, \dots, 0.$

D) $x_i = \det(A) / \det(A_i), i = 1, \dots, n.$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	A	C	C	D	A	B	A	B	C
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	B	A	D	C	D	D	A	B	A
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
C	B	D	D	B	A	B	C	A	C

5 семестр 1-ОН

Ночизик тенглама

1. Ночизик тенглама ечими. Илдизларни ажратиш.
2. Ночизик тенглама учун кесмани 2 га бўлиш қулай кўринишга келтириш.
3. Ночизик тенглама учун итерация усули
4. Ночизик тенглама итерация усулини қўллаш учун ҳади. Назарий баҳо.
5. Ночизик тенглама учун итерация усулининг қолдиқ усули.
6. Ночизик тенглама учун итерация усулининг қолдиқ ҳади. Амалий баҳо.
7. Ночизик тенглама учун Ньютон усули. Геометрик маъноси.
8. Ночизик тенглама учун Ньютон усули Қолдиқ ҳаднинг баҳоси
9. Ночизик тенглама учун Ньютон усулида бошланғич итерацияни танлаб олиш.
10. Ночизик тенглама учун соддалашган Ньютон усули

Ночизик тенгламалар системаси

1. НТС ечими. Илдизларни ажратиш.
2. НТС ечимнинг мавжуд бўлмаслик ҳоллари
3. НТС учун итерация усули
4. НТС га итерация усулини қўллаш учун қулай кўринишга келтириш
5. НТС учун итерация усулининг қолдиқ ҳади. Назарий баҳо.
6. НТС учун итерация усулининг қолдиқ ҳади. Амалий баҳо.
7. НТС учун Ньютон усули. Геометрик маъноси.
8. НТС уун Ньютон усули Қолдиқ ҳаднинг баҳоси
9. НТС учун соддалашган Ньютон усули
10. НТС учун ажраладиган Ньютон усули

Чизикли тенгламалар системаси

1. ЧАТС да Крамер қоидаси
2. ЧАТС да ечимни текшириш
3. ЧАТС да Гаусс усули

- A)1 B)2 C)3 D)4
10. 1 деффеќтли кубик интерполяция сплайннинг узлуксиз ҳосилалар сони нечта?
A)2 B)2n C)3n D)4n
11. Биринчи тартибли $f(x_i)$ ҳосила учун иккинчи тартибли аниқликдаги чекли айирмали марказий ҳосилани кўрсатинг.
A) $(f_0-4f_1+3f_2)/2h$ B) $(f_{i+1}-f_{i-1})/2h$ C) $(f_{i+1}-f_i)/h$ D) $(f_{n-2}-4f_{n-1}+3f_n)/2h$
12. Биринчи тартибли $f'(x_0)$ ҳосила учун иккинчи тартибли аниқликдаги чекли айирмали ҳосилани кўрсатинг
A) $(f_{i+1}-f_{i-1})/2h$ B) $(f_{n-2}-4f_{n-1}+3f_n)/2h$ C) $(f_0-4f_1+3f_2)/2h$ D) $(f_{i+1}-2f_i+f_{i-1})/h^2$
13. Биринчи тартибли $f'(x_n)$ ҳосила учун иккинчи тартибли аниқликдаги чекли айирмали ҳосилани кўрсатинг
A) $(f_{i+1}-f_{i-1})/2h$ B) $(f_0-4f_1+3f_2)/2h$ C) $(f_{n-2}-4f_{n-1}+3f_n)/2h$ D) $(f_{i+1}-2f_i+f_{i-1})/h^2+0(h^2)$
14. Иккинчи тартибли $f''(x_i)$ ҳосила учун иккинчи тартибли аниқликдаги чекли айирмали ҳосилани кўрсатинг.
A) $(f_{i+1}-f_{i-1})/2h$ B) $(f_0-4f_1+3f_2)/2h$ C) $(f_{n-2}-4f_{n-1}+3f_n)/2h$ D) $(f_{i+1}-2f_i+f_{i-1})/h^2$
15. Биринчи тартибли $f'(x_i)$ ҳосила учун биринчи тартибли аниқликдаги ўнг чекли айирмали ҳосилани кўрсатинг.
A) $(f_{i+1}-f_i)/h$ B) $(f_{i+1}-f_{i-1})/2h$ C) $(f_0-4f_1+3f_2)/2h$ D) $(f_{n-2}-4f_{n-1}+3f_n)/2h$
16. Биринчи тартибли $f(x_i)$ ҳосила учун иккинчи тартибли аниқликдаги чекли айирмали марказий формула ва қолдиғини кўрсатинг.
A) $(f_0-4f_1+3f_2)/2h+0(h^2)$ B) $(f_{i+1}-f_{i-1})/2h+0(h^2)$ C) $(f_0-4f_1+3f_2)/2h+0(h^2)$ D) $(f_{n-2}-4f_{n-1}+3f_n)/2h+0(h^2)$
17. Биринчи тартибли $f'(x_0)$ ҳосила учун иккинчи тартибли аниқликдаги чекли айирмали ҳосила ва қолдиғини кўрсатинг
A) $(f_{i+1}-f_{i-1})/2h+0(h^2)$ B) $(f_{n-2}-4f_{n-1}+3f_n)/2h+0(h^2)$ C) $(f_0-4f_1+3f_2)/2h+0(h^2)$
D) $(f_{i+1}-2f_i+f_{i-1})/h^2+0(h^2)$
18. Биринчи тартибли $f'(x_n)$ ҳосила учун иккинчи тартибли аниқликдаги чекли айирмали ҳосила ва қолдиғини кўрсатинг
A) $(f_{i+1}-f_{i-1})/2h+0(h^2)$ B) $(f_0-4f_1+3f_2)/2h+0(h^2)$ C) $(f_{n-2}-4f_{n-1}+3f_n)/2h+0(h^2)$
D) $(f_{i+1}-2f_i+f_{i-1})/h^2+0(h^2)$
19. Иккинчи тартибли $f''(x_i)$ ҳосила учун иккинчи тартибли аниқликдаги чекли айирмали ҳосила ва қолдиғини кўрсатинг.
A) $(f_{i+1}-f_{i-1})/2h+0(h^2)$ B) $(f_0-4f_1+3f_2)/2h+0(h^2)$
C) $(f_{n-2}-4f_{n-1}+3f_n)/2h+0(h^2)$ D) $(f_{i+1}-2f_i+f_{i-1})/h^2+0(h^2)$
20. Биринчи тартибли $f(x_i)$ ҳосила учун биринчи тартибли аниқликдаги ўнг чекли айирмали ҳосила ва қолдиғини кўрсатинг.
A) $(f_{i+1}-f_i)/h+0(h)$ B) $(f_{i+1}-f_{i-1})/2h+0(h^2)$ C) $(f_0-4f_1+3f_2)/2h+0(h^2)$
D) $(f_{n-2}-4f_{n-1}+3f_n)/2h+0(h^2)$

21. Ньютон-Котес квадратура формулаларида аниқлик тартиби қандай.

A)n B)1 C)2 D)3

22. Трапеция формуласини кўрсатинг. (Бу ерда $S_1=f_1+\dots+f_{2m-1}$, $S_2=f_2+\dots+f_{2m-2}$)

A) $\frac{h}{3}(f_0+4S_1+2S_2+f_{2m})$ B) $h(f_0+2f_1+\dots+2f_{n-1}+f_n)/2$ C) $-f^{(2)}(\xi)h^2(b-a)/12$

D) $-f^{(4)}(\xi)h^4(b-a)/180$

23. Симпсон формуласини кўрсатинг. (Бу ерда $S_1=f_1+\dots+f_{2m-1}$, $S_2=f_2+\dots+f_{2m-2}$)

A) $\frac{h}{3}(f_0+4S_1+2S_2+f_{2m})$ B) $h(f_0+2f_1+\dots+2f_{n-1}+f_n)/2$ C) $-f^{(2)}(\xi)h^2(b-a)/12$

D) $-f^{(4)}(\xi)h^4(b-a)/180$

24. Трапеция формуласида қолдик қандай. (Бу ерда $S_1=f_1+\dots+f_{2m-1}$, $S_2=f_2+\dots+f_{2m-2}$)

A) $\frac{h}{3}(f_0+4S_1+2S_2+f_{2m})$ B) $h(f_0+2f_1+\dots+2f_{n-1}+f_n)/2$ C) $-f^{(2)}(\xi)h^2(b-a)/12$

D) $-f^{(4)}(\xi)h^4(b-a)/180$

25. Симпсон формуласида аниқлик тартиби ва қолдик қандай?

A) 5, $\frac{h}{3}(f_0+4S_1+2S_2+f_{2m})$ B) 2, $h(f_0+2f_1+\dots+2f_{n-1}+f_n)/2$ C) 1, $-f^{(2)}(\xi)h^2(b-a)/12$

D) 3, $-f^{(4)}(\xi)h^4(b-a)/180$ (бу ерда $S_1=f_1+\dots+f_{2m-1}$, $S_2=f_2+\dots+f_{2m-2}$)

26. Ньютон Котес квадратура формулалари коэффициентлар қандай?

A) $p_i = \text{int}(l_i(x), a, b)$ B) $p = h[121..121]/2$ C) $p = h[111..111]$ D) $p = h[142..421]/3$

27. Тўғритўртбурчаклар квадратура формулалари коэффициентлар қандай?

A) $p_i = \text{int}(l_i(x), a, b)$ B) $p = h[121..121]/2$ C) $p = h[111..111]$ D) $p = h[142..421]/3$

28. Трапеция квадратура формулалари коэффициентлар қандай?

A) $p_i = \text{int}(l_i(x), a, b)$ B) $p = h[121..121]/2$ C) $p = h[111..111]$ D) $p = h[142..421]/3$

29. Симпсон квадратура формулалари коэффициентлар қандай?

A) $p_i = \text{int}(l_i(x), a, b)$ B) $p = h[121..121]/2$ C) $p = h[111..111]$ D) $p = h[142..421]/3$

30. Чебышев квадратура формулалари коэффициентлар қандай?

A) $p_i = \text{int}(l_i(x), a, b)$ B) $p = h[121..121]/2$ C) $p = [111..111]$ D) $p = h[142..421]/3$

И	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	D	C	A	A	B	A	B	A	C	D
ТДФ	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	B	C	C	D	A	B	C	C	A	A
ТИ	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	A	B	A	C	D	A	C	B	D	C

5 семестр 2-ОН
Интерполяция

- 1.Интерполяция масаласи.
- 2.Кўпхадлар билан интерполяциялаш
- 3.Бўлинган айирмалар
- 4.Ньютон интерполяция кўпхади
- 5.Лагранж интерполяция кўпхади
6. Ньютон интерполяция кўпхади қолдиғи
7. Лагранж интерполяция кўпхадининг қолдиғи
8. Сплайнларнинг таърифи
- 9.Чизиқли ва параболик сплайнлар
- 10.Кубик сплайн

Тақрибий дифференциаллаш

- 1.Тақрибий дифференциаллаш масаласи
2. $f^{(1)}(x_i)$ ҳосила учун ўнг биринчи тартибли чекли айирмалар ҳосила
3. $f^{(1)}(x_i)$ ҳосила учун чап биринчи тартибли чекли айирмалар ҳосила
4. $f^{(1)}(x_i)$ ҳосила учун марказий биринчи тартибли чекли айирмалар ҳосила
5. $f^{(1)}(x_0)$ ҳосила учун ўнг чегаравий биринчи тартибли чекли айирмалар ҳосила
6. $f^{(1)}(x_n)$ ҳосила учун чап чегаравий биринчи тартибли чекли айирмалар ҳосила
7. $f^{(2)}(x_i)$ ҳосила учун марказий иккинчи тартибли чекли айирмалар ҳосила
8. $f^{(1)}(x_0) \approx N_2^{(1)}(x_0)$ тақрибий дифференциаллаш формуласи
9. $f^{(1)}(x_1) \approx N_2^{(1)}(x_1)$ тақрибий дифференциаллаш формуласи
10. $f^{(1)}(x_2) \approx N_2^{(1)}(x_2)$ тақрибий дифференциаллаш формуласи

Тақрибий интеграллаш

1. Тақрибий интеграллаш формуласи
- 2.Ньютон-Котес квадратура формуласи $J_h^{NK}(f)$
3. Ньютон-Котес квадратура формуласининг қолдиғи
$$r_h^{NK}(f) = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)\dots(x-x_n) dx$$
4. Тўғри тўртбурчаклар формуласи $J_h^{TT}(f)$
5. Тўғри тўртбурчаклар формуласининг қолдиғи $r_h^{TT}(f) = h^2 f^{(2)}(\xi)/24$
6. Трапециялар формуласи $J_h^T(f)$
7. Трапециялар формуласининг қолдиғи $r_h^T(f) = -h^2 f^{(2)}(\xi)/12$
8. Содда Симпсон формуласи $J_h^C(f) = h(f_0 + 4f_1 + f_2)/3$,
9. Содда Симпсон формуласининг қолдиғи $r_h^C(f) = -h^5 f^{(4)}(\xi)/90$
10. Мураккаб Симпсон формуласи ва унинг қолдиғи $J_h^C(f) = h(f_0 + 4\sigma_1 + 2\sigma_2 + f_{2m})/3$,
 $r_h^C(f) = -h^4 f^{(4)}(\xi)/180$

Математик системалар

1. Замонавий математик дастурлар дастаси ҳақида.
2. Математик программалар.
3. Matchad программаси ҳақида.
4. Matchadдан фойдаланиш асослари.
5. Matchadда стандарт масалаларни ечиш.

1. Математик ва илмий ҳисоблашлар шахсий компьютерларнинг энг биринчи вазифаси бўлиб келган. Кўпинча бошқа фан мутахассислари компьютерда масала ечиш учун фақат дастурлаш тилларидан бирида, масалан, Паскаль, Фортран, Бейсик, Делфи, дастур тузиш керак деб ўйлашади. Афсуски, бундай эмас. Ҳозир фирмалар томонидан шундай программалар ишлаб чиқилганки, уларда турли хил масалаларни дастур тузмасдан ечиш мумкин. Бундай программалар ҳозир шундай кўп яратилганки, улар химия, физика, механика, иқтисодиёт, чизмачилик ва бошқа соҳаларда ҳам мавжуд.

2. Албатта, энг кўп тарқалган программалар-математик программалардир. Ҳозир дунёда Matchad дан ташқари Matematika, MatLab, Maple, SWP, Derive, TK!Solver каби программалар мавжуд. Бошқа соҳаларда эса: QSP, TORO, LINGO, AMPL, Excel (жараёнлар тадқиқоти), GPSS (моделлаштириш), Lat_eX (мақолалар тайёрлаш), Visio (чизмачилик), AutoCad машинасозлик) каби программалар мавжуд.

Matematika-энг кучли математикага яқинроқ программа, MatLab (Mathematic Laboratory)-чизиқли алгебра масалалари учун мўлжалланган программа, Maple-кенг қамровли турли хил масалаларни ечиш учун мўлжалланган программа, SWP (Scientific Wook Place)-олимпнинг иш ўрни, илмий масалаларни ечиш учун мўлжалланган программа.

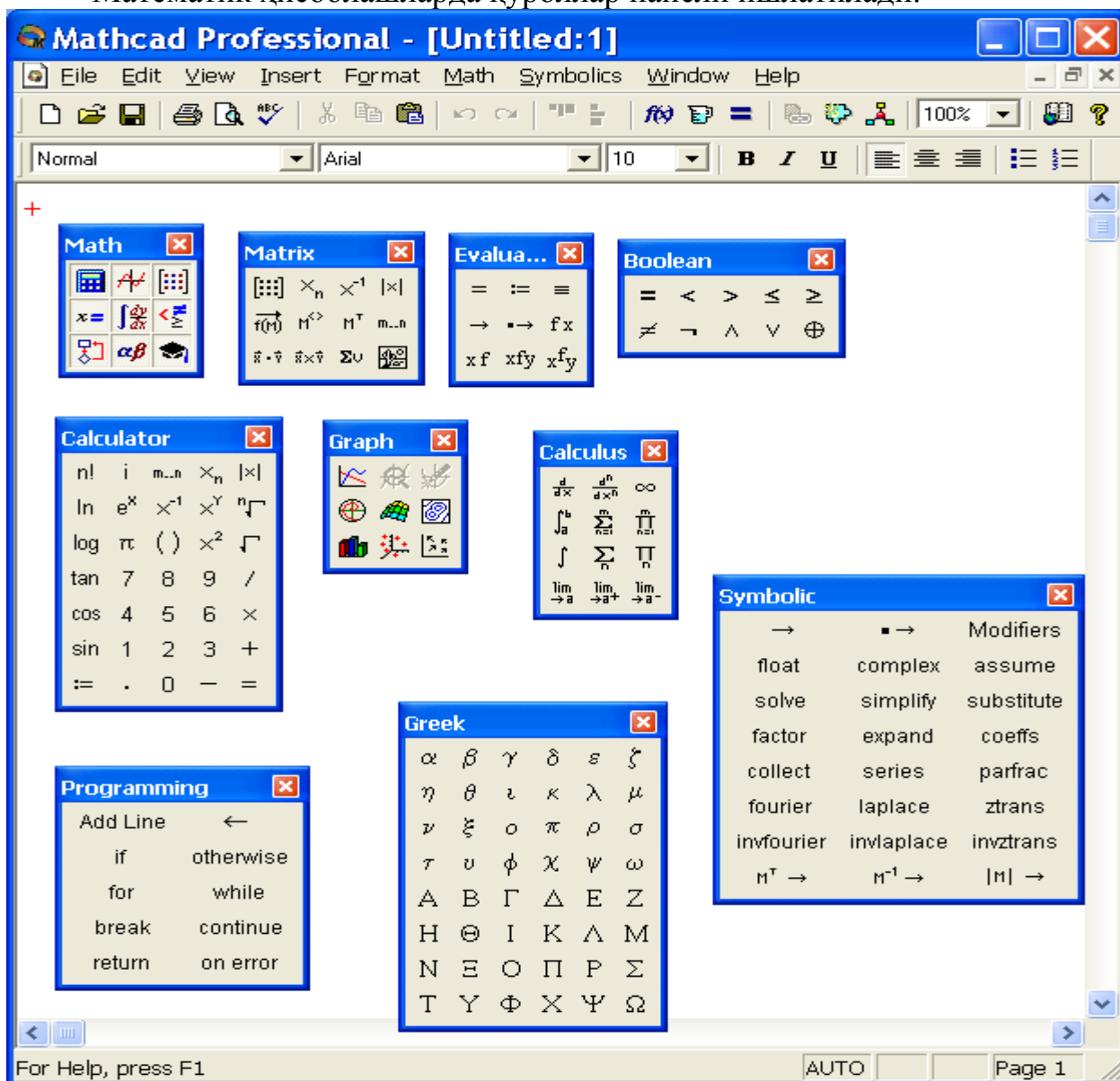
3. Matchad программаси 1986 йили яратилган ва тобора такомиллашиб бормоқда.

Ҳозир Matchad ёрдамида қаторларнинг йиғиндиларини ҳисоблаш, лимит, интеграллар, Фурье, Лаплас алмаштиришлар, ҳосилаларни ҳисоблаш, графиклар чизиш, бир ва бир неча ноъмалумли чизиқли ва чизиқсиз тенгламалар системасини ечиш, детерминант, тескари матрица, хос сонлар ва хос векторларни ҳисоблаш, ОДТ учун Коши ва чегара масалаларни ечиш, хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни тақрибий ечиш (тўр усулида), интерполяция масаласини ечиш, эхтимоллар назарияси ва математик статистиканинг стандарт масалаларини ечиш каби ишларни осонгина программа тузмасдан ечиш мумкин. Фақатгина, масалани Matchad нинг математикага яқин бўлган тилида қўя олиш керак ва ечимни сўраш керак холос.

4. Matchad да масала ечиш учун унинг қуроллар панелларидан ёки менюларидан фойдаланиш керак. Энг осони қуроллар панелларидан фойдаланиш. Асосий қуроллар панелини келтирамиз. Уларнинг сони 10 та. Расмда келтирилган тартибда танишамиз:

1) Қуроллар панели Math-асосий қуроллар панели, қолганлар шу ердан очилади, 2) Қуроллар панели Matrix-матрица ва векторлар кстида амаллар бажарувчи, 3) Қуроллар панели Evaluation-ҳисоблаш операторлари панели, 4) Қуроллар панели Boolean-матиқий амаллар панели, 5) Қуроллар панели Calculator-калькулятор панели, 6) Қуроллар панели Graph-графиклар чизиш имкониятини берувчи панель, 7) Қуроллар панели Calculus-математик анализ панели, 8) Қуроллар панели Programming-программа тузиш учун зарур операторлар, 9) Қуроллар панели Greek-грек ҳарфлари панели, 10) Қуроллар панели Symbolic-символли ҳисоблашлар панели.

Математик ҳисоблашларда қуроллар панели ишлатилади.



АДАБИЁТЛАР:

1. Бахвалов Н.С. Численные методы. - М.:Наука, 1973-Т. 1-632 с.
2. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений - М.: Физматгиз, 1966.
3. Годунов С.К. Рябенский Р.С. Разностные схемы-М.: Наука, 1977.
4. Дьяченко В.Ф. Основные понятия вычислительной математики М.:Наука, 1977.
5. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И. , Мирошниченко В.Л Методы сплайн функций М.:Наука, 1980.350 с.
6. Калиткин Н.И. Численные методы.- М.:Наука, 1978.
7. Зеленский К.Х, Игнатенко В.И., Коц А.П. Компьютерные методы прикладной математики.- Киев, 1999 г. 352 с.
8. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастирный П.И. Вычислительные методы, Т.1, М.:Наука, 1976 , Т.2- М.:Наука 1977.
9. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики.- М.:Наука, 1981 г, 416 с.
10. Самарский А.А., Гулин А.В.Численные методы.- М.:Наука 1989. 432 с.
- 11.Н.В.Копчёнова, И.А.Марон. ВМ в примерах и задачах.-М.:Наука,1972.
12. Исроилов М.И.Ҳисоблаш методлари.- Т.: Ўқитувчи.2003.
13. Волков Е.А.Численные методы. - М.:Наука, 1987, 248 с.
14. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.Численные методы. - М.:Наука,1987.- 600 с.
15. Дробышев В.И., Дымников В.П., Ривкин Г.С Задачи по вычислительной математике -М.:Наука,1980. 144 с.
16. Плис А.И. Сливина И.А. Лабораторный практикум по ВМ -М.:Наука, 1983г.
17. Турчак Л.И.Основы численных методов-М.:Наука, 1987-326 с.
18. Абдукодиров А.А., Фозилов Ф.И., Умрзоков Т.И.ҲМ ва дастурлаш.- Т.:Ўзбекистон, 1996й, 256 бет.
19. Ф.Б.Бадалов, Ғ. Шодмонов. Математик моделлар ва муҳандислик масалаларини сонли ечиш усуллари.-Т.:Фан,2000.-276 б.
- 20.Е.М.Мудров. Программы для ПК на языке Бейсик, Паскаль, Фортране. Томск, МП Раско,1992.-272 с.
- 21.А.Абдухамидов, С.Худойназаров.Ҳисоблаш усулларидаш машқлар ва лаборатория ишлари.Т.:Ўзбекистон,1995.
- 22.П.-Ж.Лоран. Аппроксимация и оптимизация.М.:Мир,1975.
- 23.А.Н.Тихонов,В.Я.Арсенин.Методы решения некорректных задач.М.:Наука, 1980.
- 24.Я.Т.Гринчишин, В.И.Ефимов, А.Н.Ломакович. Алгоритмы и программы на языке Бейсик .М.:Просвещение.-1988 .-160 с.
- 25.Ю.П.Боглаев. ВМ и программирование. - М.:ВШ,1999-544 с.
26. Web-сайтлар: www.exponenta.ru;techno.edu.ru;toehelp.ru;math.msu.ru.;
- 27.Т.Е.Шуп. Прикл. числ. методы в физике и технике.-М.:ВШ,1990-256 с.
- 28.В.М.Вержбицкий. Численные методы . -М.:ОНИКС 21 век ,2005-400 с.
- 29.В.В.Воеводин. Линейная алгебра. - М.:Наука,1974-338 с.

30. Ё.У.Соатов. Олий математика, 5-жилд.-Т.:1998.-352 б.
31. К.И.Бабенко. Основы численного анализа.-М.:Наука,1986.-744 с.
32. Қобулов В.Қ. Функционал анализ ва ҳисоблаш математикаси. Т.:Ўқитувчи,1976 й.
33. Бойзоқов А., Қаюмов Ш. Ҳисоблаш математикаси асослари. Т.:ТДИУ, 2000.
34. Б.Х.Хўжаёров Қурилиш масалаларини сонли ечиш усуллари. Т.: «Ўз.-н» 1995.
35. Холматов Г.Х., Тойлоқов Н.Ш. Амалий математика ва компьютернинг дастурий таъминоти. Т.: «Меҳнат»,2000.
36. Сиддиқов А. Сонли усуллар ва программалаш. Т.: «Ўзбекистон»,2001.
37. Н.Н.Яненко. Метод дробных шагов решения многомерной задачи математической физики. Н.:Наука, 1967.
38. С.А.Немнюгин. Turbo Pascal.-СПб.:Питер, 2002.-496 с.
39. Л.В.Канторович, Г.П.Акилов. Функциональный анализ.М.:Наука, 1977.
40. Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. Численные методы в задачах и упражнениях. М.: ВШ,2000.
41. Рябенский В.С. Введение в вычислительную математику.-М.: Наука, 2004.
42. Asrayev Z.R. «Hisoblash usullari». Ma'ruzalar matni. Buxoro – 2006 . znuz_901_20090626190428.rar.
43. Ro`ziyev R.A., O`tapov T.U. «Sonli usullar» fanidan ma'ruza matnlari to'plami. Navoiy-2008.- znuz_749_20110126112150.rar
44. Имомов А. Ҳисоблаш математикаси (усуллари). Наманган, НамДУ,2007.- znuz_749_20101020110737.zip
45. А.С.Амридинов, А.И.Бабаяров, Б.Б.Бабажанов.«Ҳисоблаш математикаси» фанидан лаборатория ишларини бажариш бўйича услубий тавсиялар ва топшириқлар. СамДУ-2008.- znuz_662_20080519191437.rar.
46. E.M. Mirzakarimov. Amaliy mashg'ulotlar uchun sonli hisoblash usullari va dasturlash. FerPI-2009. znuz_notauth_20100417145959.1271498399.54.rar.
47. Эшназарова М., Имомов А., Мелибоев Х. “Ҳисоблаш усуллари” масофавий курси. Ўзб. Давлат Патент гувоҳномаси, ВГУ №00280, Тошкент, 2012.
48. Имомов А. Ҳисоблаш усуллари ва MathCAD. Наманган, НамДУ, 2011.- 88 б.
49. Имомов А. Дифференциал тенгламаларни MathCAD дастурида ечишни ташкил этиш. АЛКХҚ да физика, математика ва информатика фанларини ўқитишни такомиллаштириш истиқболлари. 7-анъанавий республика олий ўқув юртлари аро илмий амалий конференция материаллари. 1-қисм. Тошкент, 2011.-38-41 б.
50. Имомов А. MathCAD да Ҳисоблаш усуллари ташкил этиш. Теорема-2013. Ёш математикларнинг янги теоремалари. Илмий-амалий республика конференцияси материаллари. Н.: НамДУ,2013.-177-181б.
51. Имомов А. MathCAD да дифференциал тенгламаларни ечишни ташкил этиш. Теорема-2013. Ёш математикларнинг янги теоремалари. Илмий-

- амалий республика конференцияси материаллари . Н.: НамДУ,2013.-181-185 б.
52. Имомов А. Ҳисоблаш усуллари, 1-қисм. Н.:НамДУ, 2009-104 б. znuz_215446_20111025095315.
53. Имомов А. Ҳисоблаш усуллари,2-қисм.Н.:НамДУ, 2009.-104 б. znuz_215446_20111102151005
54. Имомов А. Организация численных методов в MathCAD. Молодой учёный, №6(65), май 1, 2014 г.-с. 15-19.
55. Имомов А. Организация решения краевых задач для линейных ОДУ в MathCAD. Молодой учёный, №8(67), июнь 1, 2014 г.-с. 1-5.
56. Имомов А. Решение краевой задачи для линейных ДУ в частных производных в MathCAD. Молодой учёный, №8(67), июнь 1, 2014 г.-с. 6-12
- 57.Имомов А. Организация приближённого решение интегральных уравнений в MathCAD. Молодой учёный, № 14(73), сентябрь 1, 2014 г.-с. 6-15.
58. Имомов А., Эргашев Б.С. «Реализация схемы Кранка — Николсона для линейного параболического дифференциального уравнения в MathCAD». Молодой учёный, № 14(73), сентябрь 1, 2014 г.-с.1-5.
- 59.Имомов А.,Эргашев Б. Организация решения задач исследования операций в MathCAD. Молодой учёный, № 8(88), апрель 1, 2015 г.-с.5-10.
- 60.Имомов А., Бокиев Э. Организация решения задач динамического программирования. Молодой учёный, № 12(92), май, 2015 г.-с.1-5.
61. Имомов А. Явные формулы многомерной интерполяции. Молодой учёный, № 19(99), октябрь 1, 2015 г.-с.5-10.
62. Имомов А.,Эргашев Б. Оценки явных формул многомерной интерполяции в зависимости от класса функций. Молодой учёный, № 20(100), октябрь , 2015 г.-с.1-4.
63. Имомов А. Построение кубатурных формул на прямоугольнике повторным интегрированием в MathCAD. с.269-272. Материалы XI Международной научно-практической интернет-конференции «Тенденции и перспективы развития науки и образования в условиях глобализации»: Сб. науч. трудов. – Переяслав-Хмельницкий, 2016. – Вып. 11. – 414 с.
64. Имомов А., Тошбоев С. Организация решения задачи Коши в MathCAD. с.121-124. Материалы XIII Международной научно-практической интернет-конференции «Тенденции и перспективы развития науки и образования в условиях глобализации»: Сб. науч. трудов. – Переяслав-Хмельницкий, 2016. – Вып. 13. – 276 с.
65. Имомов А.ЭДТ ни MathCADда ечиш.НамДУ, ИА, №3,2013.-152-154.
66. Имомов А. MathCADда ДТ ни ечишни ташкил этиш. НамДУ, ИА, №3,2013.-31-35.
67. Имомов А. Решение КЗ для ГДУ в MathCAD. НамДУ, ИА, №2, 2015 й.- 61-70б.
68. Имомов А. Кўп ўзгарувчили функцияларнинг ошкор интерполяция формулалари. НамДУ, ИА, №3, 2015 й.-20-23 б.

69. Имомов А. Кўп ўзгарувчилик ошкор интерполяция формулалари қолдиқ хадлари. НамДУ, ИА, №3, 2015 й.-1-5 б. НамДУ, ИА, №3, 2015 й.-1-5 б.
70. Имомов А. Интерполяция операторов. НамДУ, ИА, №1, 2016 й.-73-77б.
71. Имомов А. Построение кубатурных формул на прямоугольнике повторным интегрированием в MathCAD. НамДУ, ИА, №1, 2016 й.-77-80б.