ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ
НАМАНГАН ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

Физика-математика факультети

Амалий математика кафедраси

Имомов Адаш

Илмий мақола

Наманган – 2019

КЎП ЎЗГАРУВЧИЛИ ОШКОР ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФОРМУЛАЛАРИНИНГ ҚОЛДИҚ ҲАДЛАРИНИ БАҲОЛАШ

1. Интерполяция масаласи ҳисоблаш усулларининг энг асосий, қадимий масаласи ҳисобланади. Унинг ёрдамида функцияни тақрибий аналитик тасвирлаш, дифференциаллаш, интеграллаш масалалари ечилади. Ҳозирги пайтда интерполяция масаласи самолётсозлик, кемасозлик, мураккаб деталларни лойиҳалашда, компьютер графикаси, картография, материалларни бичишда кенг ишлатилмоқда.

Кўп ўзгарувчили функцияларни интерполяциялаш масаласи қуйидагича қўйилади. $|x| = \sqrt{(x^1)^2 + \ldots + (x^m)^2}$ нормали евклид фазоси R^m нинг чегараланган соҳаси $D = \{x = (x^1, \ldots, x^m)\} \in R^m$ да $\Delta_n = \{x_i, i = 0, \ldots, n\}$ нуқталар тўплами ва бу нуқталарда бирор $y = f(x)$ функциянинг $y_i = f(x_i), i = 0, \ldots, n$ қийматлари берилган. Шундай функцияни топиш талаб этиладики,

$$I_n(x) = I_n(f, x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \varphi_i(x), \qquad (1)$$

ушбу интерполяция шартлари бажарилсин:

$$I_n(x_i) = f(x_i), i = 0, \ldots, n. \qquad (2)$$

1960 йилларгача, асосон, бир ўзгарувчили функциялар қараб келинган. Биз Ньютон ва Лагранж интерполяция формулаларини кўп ўзгарувчили функциялар учун умумлашмасини кўрамиз, ва қолдиқ ҳадларни баҳолаймиз. Аввало, умумлашган бўлинган айирмаларни киритамиз:

$$f[x_0, \ldots, x_k] = (f[x_0, \ldots, x_{k-2}, x_k] - f[x_0, \ldots, x_{k-1}]) / |x_k - x_{k-1}|^{\alpha}, \alpha > 0. \qquad (3)$$

Умумлашган интерполяция формулалари қуйидагича киритилади [1]:

$$N_n(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} f[x_0, \ldots, x_k] |x - x_0|^{\alpha} \ldots |x - x_{k-1}|^{\alpha}, \qquad (4)$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \varphi_i(x), \varphi_i(x) = \prod_{j \neq i} |x - x_j|^{\alpha} |x_i - x_j|^{-\alpha}, \qquad (5)$$

(5) формуладан қуйидаги Шепард формуласи келиб чиқади:

$$S_n(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\varphi_i(x), \varphi_i(x)=(d_i^{-\alpha})/(\sum_{i=0}^{n} d_i^{-\alpha})=\frac{\prod_{j\neq i} d_j^{\alpha}}{\sum_{i=0}^{n}\prod_{j\neq i}^{n} d_j^{\alpha}} \qquad (6)$$

Умумлашган Ньютон интерполяция формуласи қолдиқ ҳади қуйидагича бўлади[1]:

$$R_n(N_n,x)=f(x)-N_n(x)=\omega_n^{\alpha}(x)f[x_0,...,x_n,x].\ \omega_n^{\alpha}(x)=\prod_{j=0}^{n}\left|x-x_j\right|^{\alpha}. \qquad (7)$$

Мақолада (4),(5) интерполяция формулалари учун қолдиқ ҳадлар баҳоси функция $f(x)\in C^k[a,b], C^k[D], [a,b]\subset R, D\subset R^m$ бўлган ҳоллар учун олинади.

2. Бир ўзгарувчили ҳол учун интерполяция қолдиқ ҳади баҳоси .

Белгилаймиз: $a=x_0<x_1<...<x_n=b$, $h_i=x_{i+1}-x_i$, $h=\max h_i$, $R_n(I_n,x)=f(x)-I_n(x)$,

$\omega_n(x)=(x-x_0)...(x-x_n), \omega_{i,r}(x)=(x-x_i)...(x-x_{i+r})$, $\xi_i=\xi_i(x)=x_i+c_i(x-x_i), 0<c_i<1,$

Лемма 1. Айтайлик, $u(x)\in C^1[a,b], u(x_i)=0, i=0..n.$ У ҳолда баҳолар ўринли:

$$\left|u(x)\right|=\left|\omega_n(x)\right|^{1/(n+1)}\prod_{i=0}^{n}\left|u'(\xi_i(x))\right|, \left|u(x)\right|\le M_1h^1, M_r=\max\left|u^{(r)}(x)\right|. \qquad (8)$$

Исбот. Равшанки, $u(x)=u(x_i)+(x-x_i)u'(\xi_i(x))=(x-x_i)u'(\xi_i(x)), i=0..n$. Уларни кўпайтириб, модулга ўтиб (8) муносабатларни ҳосил қиламиз.

Теорема 1. Айтайлик, $u(x)\in C^{r+1}[a,b], 0\le r\le n, u(x_i)=0, i=0..n.$ У ҳолда ўринли:

$$\left|u(x)\right|=\frac{1}{(r+1)!}\prod_{i=0}^{n-r}\left|\omega_{i,r}(x)u^{(r+1)}(\xi_i(x))\right|, \left|u(x)\right|\le\frac{1}{(r+1)!}M_{r+1}h^{r+1}. \qquad (9)$$

Исбот. (7) формулага асосан ихтиёрий нуқталар кетма-кетлиги $x_i,...,x_{i+r}, i=0..n-r$, учун ушбу формула ўринли бўлади: $u(x)=(1/(r+1)!)[\omega_{i,r}(x)][u^{(r+1)}(\xi_i)]$.Бу формулаларни $i=0..n-r$ учун кўпайтирамиз, модулга ўтамиз ва p=n-r+1 илдиз чиқариб оламиз: $\left|u(x)\right|\le\frac{1}{(r+1)!}M_{r+1}h^{r+1}$.

3. Бўлинган айирмалар учун ифода.

Бўлинган айирмалар (9) учун $\alpha=1$ ҳолда бир муҳим кўриниш топамиз.

Лемма 2[1]. Айтайлик, $f(x)\in C^k[D], k\ge 1, \alpha=1$. У ҳолда шундай нуқталар $\xi_i=x_i+c_i(x-x_i),$ ва йўналишлар $e_1,...,e_n$ мавжудки, ушбу тенгликлар ўринли:

$$f[x_0,...,x_k]=D_{e_k}...D_{e_1}f(\xi_k)=f^{(k)}(\xi_k)e_1...e_k$$

4. Кўп ўзгарувчили интерполяцияни баҳолаш.

Нуқталар тўпламини $\Delta = \{x_i\}$ дейлик. Яна, қуйидаги белгилашларн киритамиз: $h = \sup_{x \in D} \inf_{a \in \Delta} |x - a|, \omega_n(x) = |x - x_0|..|x - x_n|, \omega_{i,r}(x) = |x - x_i|..|x - x_{i+r}|$.

Лемма 3[1]. Айтайлик, $u(x) \in C^1[D], u(x_i) = 0, i = 0..n.$ У ҳолда ўринли

$$|u(x)| = [\omega_n(x)]^{1/(n+1)} \prod_{i=0}^{n} \left| D_{e_i} u(\xi_i(x)) \right|, |u(x)| \le M_1 h^1, M_1 = \sup_{x \in D} \left\| u^{(1)}(x) \right\|. \quad (11)$$

Теорема 2[1]. Айтайлик, $u(x) \in C^{r+1}[D], 0 \le r \le n, u(x_i) = 0, i = 0..n$, у ҳолда ўринли

$$|u(x)| = \prod_{i=0}^{n-r} \left| \omega_{i,r}(x) D_{e_i \ldots e_r} u(\xi_i(x)) \right|, |u(x)| \le M_{r+1} h^{r+1}, M_{r+1} = \sup_{x \in D} \left\| u^{(r+1)}(x) \right\| \quad (12)$$

Адабиёт

1. Имомов А. Явные интерполяционные формулы для функций многих переменных. Методы сплайн функций. Тезисы докл. Новосибирск, Изд. ИМ, 2001, с.38-39.

2.Имомов А. Оценки явных формул многомерной интерполяции в зависимости от класса функций. Молодой учёный. №20 (100) октябрь-2, 2015.

3.Зорич В.А. Математический анализ. т.II.М.: Наука, 1984. -640 с.

4. Имомов А. Интерполяция операторов. Научный вестник ФерГУ, Фергана, 1997, вып.1-2, с.57-62.