**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI**

**OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI**

**NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI**

*Qo‘l yozma huquqida*

*UDK* 519.3:518.12.

**TEMIROVA OYBEK MAMATHO’JA O’G’LINING**

"ISSIQLIK O’TKAZISH TENGLAMASINI C++ TILIDA VIZUALLASHTIRISH" **MAVZUSIDAGI**

**5A130202 – Amaliy matematika va AT ( yo`nalishlar bo‘yicha)**

**mutaxassisligi bo‘yicha**

**Magistr**

**akademik darajasini olish uchun taqdim etilgan**

**DISSERTATSIYASI**

NAMANGAN – 2019

## MUNDARIJA:

**Kirish**……………………………………………………………………………. 3

I bob. **Parabolik differensial tenglamalarga keltiriladigan jarayonlar: issiqlik o'tkazish tenglamalari**.

1.1 Differensial tenglamalar haqida tushuncha………..……………………….. 9

1.2. Parabolik tipdagi differensial tenglamalarga keltiriladigan jarayonlar. Issiqlik o'tkazish tenglamasi………………………………………..……….…..... 17

1.3. Issiqlik o'tkazish tenglamasi yechimi uchun maksimal qiymat prinsipi. Chegaraviy va Koshi masalasi yechimining yagonaligi……………………... 26

II bob. **Issiqlik o'tkazish masalalarini chekli ayirmalar usuli yordamida yechishni tashkil etish**

2.1 Matematik model tushunchasi. ………………………………..……….. 34

2.2. Parabolik differentsial tenglama (PDT) uchun chekli ayirmali sxema....... 42

2.3 Nochiziq parabolik tenglama uchun chekli ayirmali sxema……….…..... 50

III bob. **Issiqlik o'tkazish tenglamasini C++ da yechish. Olingan natijalar, yechimlarning vizual ko'rinishi.**

3.1 Issiqlik o'tkazish masalasini yechishni C++ dasturlash tilida tashkil etish…... …………………………………………………...………..…55

3.2 Olingan natijalar va ularning qiyosiy tahlili…………………..……….…..…60

**Xulosa**……………………………………………………………..…..……..64

**Foydalanilgan adabiyotlar**……………………………………....………65

**Ilovalar**……………………………………………………………...………67

# K I R I SH

Mamlakatimizda istiqlolning dastlabki yillaridan boshlab ta'lim-tarbiya tizimini tubdan isloh qilishga alohida e'tibor qaratilib, yoshlarning jahon andozalari darajasida bilim va kasb-hunarlarni egallashi, jismonan va ma'nan yetuk insonlar bo'lib ulg'ayishi, ularning qobiliyat va iste'dodini, intellektual salohiyatini yuzaga chiqarish, yosh avlod qalbida Vatanga sadoqat va fidoyilik tuyg'ularini yuksaltirish borasida ulkan ishlar amalga oshirilmoqda. Mamlakatimizda demokratik islohotlarni yanada chuqurlashtirish va fuqarolik jamiyatini rivojlantirish konsepsiyasini amalga oshirishda biz, ilgarigidek, fuqarolarning o‘zini o‘zi boshqarish organlari - mahallalar, shuningdek, nodavlat notijorat tashkilotlar, erkin va xolis ommaviy axborot vositalari faol o‘rin egallaydi, deb ishonaman.

Binobarin, ta’limga tarbiya tizimini va shu asosda ongni o‘zgartirmasdan turib ma’naviyatni rivojlantirib bo‘lmaydi. Buning uchun har qaysi ota - ona ustoz va murabbiy har bir bola timsolida avvalo shaxsni ko‘rishi zarur. Ana shu oddiy haqiqatdan kelib chiqqan holda, farzandlarimizni mustaqil va keng fikrlash qobiliyatiga ega bo‘lgan, ongli yashaydigan komil insonlar etib voyaga yetkazish – ta’lim-tarbiya sohasining asosiy maqsadi va vazifasi bo‘lishi lozim, deb qabul qilishimiz kerak. Bu esa ta’lim - tarbiyani uyg‘un holda olib borishni talab etadi[3]

Bugungi kunda O‘zbekistonda ta’lim sohasida amalga oshirilayotgan islohotlar ko‘p jihatdan mamlakatimizni modernizatsiya qilish jarayonlari bilan hamohang tarzda olib borilmoqda. Bunda asosiy yo‘nalishlar sifatida oliy va o‘rta maxsus ta’lim tizimida o‘quv, o‘quv - uslubiy va ilmiy faoliyatni modernizatsiya qilish, ta’lim va tadqiqot jarayonlaridagi innovatsion yo‘nalishlarni kuchaytirish tadbirlari izchil amalga oshirilmoqda. Mazkur tadbirlardan kutilayotgan asosiy maqsad yuqori darajadagi intellektual salohiyatga ega bo‘lgan milliy mutaxasisslar kadrlarni tayyorlash texnologiyasi hamda ta’limning mazmunini yangicha bosqichga ko‘tarishdan iboratdir. Bu o‘rinda 1-Prezidentimizning quyidagi fikrlari ushbu jarayonlarning ahamiyatini belgilab beruvchi va maqsad sari yo‘naltiruvchi dasturi amal bo‘lib hisoblanadi: “Bugun hech kimga sir emaski, biz yashayotgan

XXI asr - intellektual boylik hukmronlik qiladigan asr. Kimki bu haqiqatni o‘z vaqtida anglab olmasa, intellektual boylikka intilish har qaysi millat va davlat uchun kundalik hayot mazmuniga aylanmasa - bunday davlat jahon taraqqiyoti yo‘lidan chetda qolib ketishi muqarrar”[4]

Bu borada prezident Sh.Mirziyoyevning 2017-2021-yillarga rejalashtirilgan “Harakatlar strategiyasi”da **ta’lim va fan sohasini rivojlantirish haqida** shunday deyilgan:

- uzluksiz ta’lim tizimini yanada takomillashtirish, sifatli ta’lim xizmatlari imkoniyatlarini oshirish, mehnat bozorining zamonaviy ehtiyojlariga mos yuqori malakali kadrlar tayyorlash siyosatini davom ettirish;
- ta’lim muassasalarini qurish, rekonstruksiya qilish va kapital ta’mirlash, ularni zamonaviy o‘quv va laboratoriya asboblari, komp yuter texnikasi va o‘quv-metodik qo‘llanmalar bilan jihozlash orqali ularning moddiy-texnika bazasini mustahkamlash yuzasidan maqsadli chora-tadbirlarni ko‘rish;
- maktabgacha ta’lim muassasalari tarmog’ini kengaytirish va ushbu muassasalarda bolalarning har tomonlama intellektual, estetik va jismoniy rivojlanishi uchun shart-sharoitlarni tubdan yaxshilash, bolalarning maktabgacha ta’lim bilan qamrab olinishini jiddiy oshirish va foydalanish imkoniyatlarini ta’minlash, pedagog va mutaxassislarning malaka darajasini yuksaltirish;
- umumiy o‘rta ta’lim sifatini tubdan oshirish, chet tillar, informatika hamda matematika, fizika, kimyo, biologiya kabi boshqa muhim va talab yuqori bo‘lgan fanlarni chuqurlashtirilgan tarzda o‘rganish;
- bolalarni sport bilan ommaviy tarzda shug’ullanishga, ularni musiqa hamda san’at dunyosiga jalb qilish maqsadida yangi bolalar sporti ob’ektlarini, bolalar musiqa va san’at maktablarini qurish, mavjudlarini rekonstruksiya qilish;
- ta’lim va o‘qitish sifatini baholashning xalqaro standartlarini joriy etish asosida oliy ta’lim muassasalari faoliyatining sifati hamda samaradorligini oshirish, oliy ta’lim muassasalariga qabul kvotalarini bosqichma-bosqich ko‘paytirish;

Bu borada prezident Sh.Mirziyoyevning 2909-soni qarorida shunday deyilgan:

Ta’kidlash joizki, 2011 — 2016 yillarda Oliy ta’lim muassasalarining moddiy-texnika bazasini mustahkamlash va yuqori malakali mutaxassislar tayyorlash sifatini tubdan yaxshilash chora-tadbirlari dasturini amalga oshirish doirasida 25 ta oliy ta’lim muassasasining 202 ta ob’ektida yangi qurilish, kapital ta’mirlash va rekonstrukstiya ishlari bajarildi.

Iqtisodiyotning real sektori talablaridan kelib chiqib, muhandislik, ishlab chiqarish va qurilish yo‘nalishlari va ixtisosliklari bo‘yicha o‘qishga qabul qilish, uning umumiy soniga nisbatan 23 foizdan 33,2 foizga oshdi. Oliy ta’lim sohasida mutaxassislar tayyorlash, shuningdek, pedagog kadrlarni qayta tayyorlash va malakasini oshirish bo‘yicha yangilangan davlat oliy ta’lim standartlari va o‘quv dasturlari joriy qilindi.[1]

Bugungi kunda axborot-kommunikatsion texnologiyalari jadal sur’atlarda rivojlanib, imkoniyatlari tobora kengayib bormoqda. Ushbu imkoniyatlardan yoshlar ongli ravishda foydalanib, bilimlarini boyitsa, vatanimiz taraqqiyotining omillaridan biriga aylanadi. Buning uchun yoshlarni kichikligidan, maktabgacha bo’lgan davrdayoq media madaniyatini shakllantirish joiz. Bu sohaga O’zbekiston Respublikasi prezidenti Shavkat Mirziyoyevning 2016-yil 29-dekabrdagi “2017-2021-yillarda maktabgacha ta’lim tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”[2]gi qarorida ham keng e’tibor berilgan.

**Mavzuning asoslanishi va uning ahamiyati.**

Jahondagi ilmiy-texnik taraqqiyotning tez sur`atlar bilan rivojlanishi sababli murakkab sistemalarni boshqarishda matematik usullar muhim vosita sifatida katta ahamiyat kasb etadi. Dunyo aholisinining tez suratlarda oshib borayotgani, bu esa o’z navbatida energiya tanqisligi muammosini keltirib chiqarayotgani sababli bugungi kunda mavjud energiya resurslaridan oqilona foydalanishni, ulardan foydalanish jarayonlarida yangicha innovatsion yondashuvni talab etadi. Aholini energiya bilan ta’minlash, mavjud imkoniyatlardan maksimal darajada samarali

[1]O’zbekiston Respublikasi Prezidenti Shavkat Mirziyoyevning “Oliy ta’lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida qarori 2017 yil 20 aprel Qonun xujjatlari to’plami.

[2]O ’zbekiston Respublikasi Prezidenti Shavkat Mirziyoyevning “2017-2021-yillarda maktabgacha ta’lim tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida qarori 2016- yil 29-dekabr Qonun xujjatlari to’plami

foydalanish masalasini hal qilish, unga ijobiy yechim topish esa birinchi navbatda iqtisodiy jihatdan foydalidir. Boshqacha aytganda bugungi ishlab chiqarishning deyarli barcha yo'nalishlari ayniqsa metallarni qayta ishlash, elektr energiyasini ishlab chiqarish va uni yetkazish singari katta tarmoqlarda issiqlik o'tkazishi masalasining qo'llanishi ahamiyatlidir. Bundan tashqari bugungi axborot kommunikatsion texnologiyalarning jadal suratlarda rivojlangan davri bizdan turli hayotiy masalalarni kompyuter yordamida hal etishni talab etadi. Masalalarning kompyuter yordamida yuqori darajada aniqlikda hal etilishi yuzaga kelgan va kelishi mumkin bo'lgan muammolarni yechimiga olib keladi. Masalalarni kompyuterda hal qilish uchun esa bilamizki ularni kompyuter tushunadigan tilda ifodalash kerak. Ushbu magistrlik dissertatsiyasi doirasida qaralgan issiqlik o'tkazishining chiziqli va nochiziq hollarini kompyuter yordamida yechish nazarda tutilgan bo'lib, bu masalalar yuqoridagilardan kelib chiqib dolzarb va ahamiyatlidir.

**Dissertatsiyani dolzarbligi:**

1. Parabolik tipdagi differensial tenglamalarga keltiriladigan masalalar, xususan issiqik o'tkazish masalalarini xal etishda kompyuter imkoniyatlaridan foydalanish, bunda masalalarning yechimlarini sonli usullar yordamida aniqlash, aniq va taqribiy yechimlar orasidagi xatoliklarni baholash, yechimlar grafiklarini kompyuter yordamida tashkil etishni o`rganish muhim ahamiyatliligi.
2. Issiqlik o'tkazish tenglamalarini hal etishda chekli ayirmali sxemalarni ishlab chiqish orqali ularni taqribiy yechimlarini aniqlash imkoniyatini vujudga kelishi.
3. Issiqlik o'tkazish tenglamalarining chiziqli hamda nochiziq hollari berilganda, chegaralar turli qo`yilganda masalani taqribiy yechish algoritmini ishlab chiqish va dasturini yaratish orqali natijalarga erishish mumkinligi.
4. Bugungi kunda issiqlik o'tkazish masalalari nazariy jihatdan yetarli o`rganilgani, lekin amaliyotga tadbiq etish uchun kompyuter imkoniyatlaridan foydalanish va amaliy masalalarga yanada kengroq tadbiq etish lozimligi singari bir qator sabablar ushbu magistrlik dissertatsiyasining dolzarbligini bildiradi.

**Dissertatsiyaning maqsadi va vazifalari.**

Mazkur dissertatsiya asosiy maqsadi issiqlik o'tkazish tenlamasini taqribiy yechish algoritmini ishlab chiqish va dasturiy ta'minotini yaratish**.**

Ushbu dissertatsiya mavzusi doirasida quyidagi masalalarni hal qilish vazifasi qo`yilgan:

1. Differensial tenglamalar, Issiqlik o'tkazish tenglamasini ifodalovchi parabolik tipdagi differensial tenglamalar haqida ma'lumotlar berish, ularga qo'yiladigan boshlang'ich va chegara shartlarni tahlil etish

2. Issiqlik o'tkazish tenglamasini yechish uchun chekli ayirmali sxemalar yordamida sonli yechishni tashkil etish bo'yicha nazariy ma'lumotlar berish

3. C++ dasturlash tilining imkoniyatlarini qisqacha yoritish, algoritmini ishlab chiqish, dasturni yaratish, natijalarni tahlil qilish.

**Dissertatsiyaning ilmiy yangiligi va amaliy ahamiyati** quydagilardan iborat: Issiqlik o'tkazish tenglamalarida chiziqli va nochiziq hollar uchun chekli ayirmalarni tashkil etishda, to'rlarni qurish masalasi uchun yechimlarni C++ dasturlash yordamida aniqlashni tashkil etilganligi dissertatsiyaning ilmiy yangiligini, mazkur ishdan differensial tenglamalar, Chiziqsiz jarayonlarni matematik modellashtirish va hisoblash eksperimenti fanlaridan amaliy mashg'ulot mavzularida qo'llash mumkinligi esa uning amaliy ahamiyatini bildiradi.

**Tadqiqotning ob`ektini** chiziqli va nochiziq bo'lgan issiqlik o'tkazish masalasi tashkil etadi.

**Tadqiqotning predmeti** sonli usullar, taqribiy usullar, yechish algoritmlardan iborat.

**Dissertatsiyaning hajmi va tuzilishi.**

Ushbu dissertatsiya ____ sahifadan iborat bo'lib, kirish qismi, asosiy qism, xulosa, foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati va ilovalardan tashkil topgan. Qo'shimcha ___ ta grafik va ___ ta dasturdan iborat.

I bob. **Parabolik differensial tenglamalarga keltiriladigan jarayonlar: issiqlik o'tkazish tenglamalari**.

## 1.1 Differensial tenglamalar haqida tushuncha.

Ko'pgina hayotiy masalalarni matematik tilga o'girganda bu masalalar qandaydir differensial ko'rinishdagi tenglamalar orqali ifodalanib qoladi. Dastavval biz differensial tenglamalar haqidagi dastlabki tushunchalarni keltirib o'tgamiz.

Differensial tenglama deb erkli o'zgaruvchi x, noma'lum y=f(x) funksiya va uning $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ hosilalari orasidagi bog'lanishni ifodalaydigan tenglamaga aytiladi.

Agar izlangan funksiya y=f(x) bitta erkli o'zgaruvchining funksiyasi bo'lsa, u holda differensial tenglama oddiy differentsial tenglama, bir nechta o'zgaruvchilarning funksiyasi bo'lsa $u=u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ xususiy hosilali differensial tenglama deyiladi.

2-ta'rif. Differensial tenglamaning tartibi deb tenglamaga kirgan hosilaning eng yuqori tartibiga aytiladi.

3-ta'rif. Differensial tenglamaning yechimi yoki integrali deb differensial tenglamaga qo'yganda uni ayniyatga aylantiradigan har qanday y=f(x) funksiyaga aytiladi.

Birinchi tartibli differentsial tenglama umumiy holda quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$F(x,y,y')=0 \qquad (1.1)$$

Agar bu tenglamani birinchi tartibli xosilaga nisbatan yechish mumkin bo'lsa, u holda

$$y'=f(x,y) \qquad (1.2)$$

tenglamaga ega bo'lamiz. Odatda, (1.2) tenglama hosilaga nisbatan yechilgan tenglama deyiladi. (1.2) tenglama uchun yechimning mavjudligi va yagonaligi haqidagi teorema o'rinli :

Teorema. Agar (1.2) tenglamada f(x,y) funksiya va undan y bo'yicha olingan df/dy xususiy hosila X0Y tekisligidagi $(x_0,y_0)$ nuqtani o'z ichiga oluvchi biror sohada uzluksiz funksiyalar bo'lsa, u holda berilgan tenglamaning $y(x_0)=y_0$ shartni qanoatlantiruvchi birgina $y=\varphi(x)$ yechimi mavjud.

$x=x_0$ da $y(x)$ funksiya $y_0$ songa teng bo'lishi kerak degan shart boshlang'ich shart deyiladi:

$$y(x_0)=y_0$$

4 – ta'rif. Birinchi tartibli differensial tenglamaning umumiy yechimi deb bitta ixtiyoriy C o'zgarmas miqdorga bog'liq quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi

$$y=\varphi(x,c)$$

funksiyaga aytiladi:

a) bu funksiya differensial tenglamani ixtiyoriy c da qanoatlantiradi;

b) $x=x_0$ da $y=y_0$ boshlang'ich shart har qanday bo'lganda ham shunday $c=c_0$ qiymat topiladiki, $y=\varphi(x,c_0)$ funksiya berilgan boshlang'ich shartni qanoatlantiradi.

5 – ta'rif. Umumiy yechimni oshkormas holda ifodalovchi $F(x,y,c)=0$ tenglik (1.1) differentsial tenglamaning umumiy integrali deyiladi.

6 – ta'rif. Ixtiyoriy c - o'zgarmas miqdorda $c=c_0$ ma'lum qiymat berish natijasida $y=\varphi(x,c)$ umumiy yechimdan hosil bo'ladigan har qanday $y=\varphi(x,c_0)$ funksiya xususiy yechim deyiladi. $F(x,y,c_0)$ - xususiy integral deyiladi.

7-ta'rif. (1.1) differensial tenglama uchun $dy/dx=c=const$ munosabat bajariladigan nuqtalarning geometrik o'rni berilgan differensial tenglamaning izoklinasi deyiladi.

1. Yechimning mavjudligi va yagonaligi.

Quyidagi differansial tenglamalar sistemasini qaraymiz:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dot{x}_2 = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \end{cases} \qquad (1.1.1)$$

bu yerda $f_i,\ i = 1, 2, \dots, n,$ fuksiyalar $R^{n+1}$ fazoning biror $G$ qism to'plamida aniqlangan. $f_i,\ i = 1, 2, \dots, n,$ funksiyalar $t$ ning har-bir fiksirlangan qiymatida $x_1, x_2, \dots, x_n$ argumentlari bo'yicha uzluksiz hamda $x_1, x_2, \dots, x_n$

o'zgaruvchilarning har-bir fiksirlangan qiymatida $t$ argumenti bo'yicha o'lchovli bo'lsin. (1.1.1) sistemani vektorli ko'rinishda quyidagicha yozish mumkin:

$$\dot{x} = f(t, x). \qquad (1.1.2)$$

Agar $x(t), t \in [t_1, t_2]$, vektor funksiya absolyut uzluksiz bo'lib deyarli barcha $t \in [t_1, t_2]$ larda $\dot{x}(t) = f\big(t, x(t)\big)$ tenglik o'rinli bo'lsa $x(t)$ (1.1.2) sistemaning yechimi deyiladi. (1.1.2 sistemaning $x(t_0) = x_0$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasi Koshi masalasi deyiladi.

(1.1.2) sistemaning $x(t_0) = x_0$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi mavjudligi, yagonaligi va davom ettiriluvchanligi haqidagi teoremani keltirib o'tamiz:

**Teorema**. Agar

1) $\Pi = \{(t, x): |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\} \subset G$;

2) $|f(t, x)| \leq m(t)$;

3) $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq m(t) \cdot |x_1 - x_2|, (t, x_1), (t, x_2) \in \Pi$;

4) $\left|\int_{t_0-a}^{t_0+a} m(t)dt\right| \leq b$;

shartlarni qanoatlantiruvchi $a, b$ musbat sonlar va nomanfiy jamlanuvchi $m(t), t \in [t_0 - a, t_0 + a]$ funksiya topilsa, u holda (1.1.2) sistemaning $x(t_0) = x_0$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yagona $x(t), t \in [t_0 - a, t_0 + a]$, yechimi mavjud.

(1.1.2) sistemaning muhim hususiy ko'rinishi bo'lgan chiziqli differensial tenglamalar sistemasini qaraylik:

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \qquad (1.1.3)$$

bu yerda, $x \in R^n, t \in [a, b]$, $A(t) = \{a_{ij}(t)\}$ – matritsa, uning $a_{ij}(t), 1 \leq i, j \leq n$, elementlari jamlanuvchi funksiyalar, $b(t)$ – vektor-funksiya ustun ko'rinishda bo'lib, uning $b_i(t), 1 \leq i \leq n$, elementlari ham jamlanuvchi funksiyalardir. (1.1.3) sistema uchun $G = [a, b] \times R^n$. Bu sistema uchun yuqorida keltirilgan teoremaning barcha shartlari bajariladi. O'z navbatida $G$ to'plamning har bir $(t_0, x_0)$ nuqtasidan (1.1.3) sistemaning $[a, b]$ segmentda aniqlangan yagona yechimi o'tadi.

$$\dot{y} = A(t)y \qquad (1.1.4)$$

chiziqli sistema (1.1.3) ga mos bir jinsli sistema deyiladi. (1.1.4) sistemaning $t = t_0,\ y_1 = 1, y_2 = 0, \dots, y_n = 0$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini $y_1 = e_{11}, y_2 = e_{12}, \dots, y_n = e_{1n}$ orqali, $t = t_0, y_1 = 0, y_2 = 1, \dots, y_n = 0$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini $y_1 = e_{21}, y_2 = e_{22}, \dots, y_n = e_{2n}$ orqali, va shu tarzda davom etib $t = t_0, y_1 = 0, y_2 = 0, \dots, y_n = 1$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini $y_1 = e_{n1}, y_2 = e_{n2}, \dots, y_n = e_{nn}$ orqali belgilaylik.

$$X(t, t_0) = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{21} & \dots & e_{n1} \\ e_{12} & e_{22} & \dots & e_{n2} \\ . & . & . & . \\ e_{1n} & e_{2n} & \dots & e_{nn} \end{pmatrix}$$

matritsa (1.1.4) sistemaning fundamental matritsasi deyiladi. Bu matritsa yordamida (1.1.3) bir jinsli bo'lmagan sitemaning $x(t_0) = x_0$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi $x(t), t \in [a, b]$, yechimini

$$x(t) = X(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t, r)b(r)dr$$

Koshi formulasi bilan ifodalash mumkin.

2. Eksponensial matritsa.

Bizga chiziqli o'zgarmas koeffitsientli birjinsli tenglamalar sistemasi berilgan

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n, \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n. \end{cases} \qquad (1.1.5)$$

Bu sistemaning matritsalar yordamida

$$Y' = AY$$

ko'rinishda yozish mumkin, bu erda

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

**Eslatma**.

$$F=\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ . & . & . & . \\ f_{m1} & f_{m2} & \cdots & f_{mn} \end{pmatrix}$$

matritsaning xosilasi deb

$$F'=\begin{pmatrix} f'_{11} & f'_{12} & \cdots & f'_{1n} \\ f'_{21} & f'_{22} & \cdots & f'_{2n} \\ . & . & . & . \\ f'_{m1} & f'_{m2} & \cdots & f'_{mn} \end{pmatrix}$$

matritsaga aytiladi.

(1.1.5) sistemaning $x=0,\ y_1=1,\ y_2=0,\ y_3=0,\ \dots,\ y_n=0$ boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi echimi $y_1=e_{11},\ y_2=e_{21},\dots,\ y_n=e_{n1}$ bo‘lsin. Sistemaning $x=0,\ y_1=0,\ y_2=1,\ y_3=0,\ \dots,\ y_n=0$ boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi echimi $y_1=e_{12},\ y_2=e_{22},\dots,\ y_n=e_{n2}$ bo‘lsin va x.k. $x=0,\ y_1=0,\ y_2=0,\ \dots,\ y_{n-1}=0,\ y_n=1$ boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi echimi $y_1=e_{1n},\ y_2=e_{2n},\dots,\ y_n=e_{nn}$ bo‘lsin.

Quyidagi matritsa (1.1.5) sistemaning eksponensial matritsasi deyiladi va $e^{Ax}$ orqali belgilanadi:

$$e^{Ax}=\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2n} \\ . & . & . & . \\ e_{n1} & e_{n2} & \cdots & e_{nn} \end{pmatrix}$$

Eksponensial matritsaning xossalari.

**1-tasdiq.** $e^{A\cdot 0}=E$, bu erda $E$ – birlik matritsa;

**2-tasdiq.** $(e^{Ax})'=Ae^{Ax}$;

**3-tasdiq.** $e^{Ax}$ matritsaning teylor qatoriga yoyilmasi

$$e^{Ax}=E+Ax+\frac{A^2x^2}{2!}+\cdots+\frac{A^nx^n}{n!}+\cdots$$

ko‘rinishga ega.

**Eslatma**. $F(x)$ matritsani Teylor qatoriga yoyilmasi deb

$$F(x)=F(0)+F'(0)x+\frac{F''(0)x^2}{2!}+\cdots+\frac{F^{(n)}(0)x^n}{2!}+\cdots$$

matritsali qatorga aytamiz.

**4-tasdiq.** $e^{Ax_1} \cdot e^{Ax_2} = e^{A(x_1+x_2)}$;

**5-tasdiq.** (1.1.5) sistemaning umumiy echimini $Y = e^{Ax}C$ ko‘rinishda yozish mumkin, bu erda

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{pmatrix}$$

1-tasdiqning isboti.

$$e^{A\cdot 0} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & \dots & e_{2n} \\ . & . & . & . \\ e_{n1} & e_{n2} & \dots & e_{nn} \end{pmatrix}_{x=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

2-tasdiqning isboti. $e^{Ax}$ matritsaning xar bir ustuni (1.1.5) sistemaning echimdan iborat bo‘lgani uchun

$$\begin{pmatrix} e_{1i} \\ e_{2i} \\ \dots \\ e_{ni} \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} e_{1i} \\ e_{2i} \\ \dots \\ e_{ni} \end{pmatrix}, \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

ayniyatlar o‘rinli. Bundan

$$\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & \dots & e_{2n} \\ . & . & . & . \\ e_{n1} & e_{n2} & \dots & e_{nn} \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & \dots & e_{2n} \\ . & . & . & . \\ e_{n1} & e_{n2} & \dots & e_{nn} \end{pmatrix}$$

ya’ni 2-tasdiqning to‘g‘riligi ko‘rinadi.

3-tasdiqning isboti.

$$e^{Ax} = e^{A\cdot 0} + [e^{Ax}]'_{x=0} + \frac{[e^{Ax}]''_{x=0}}{2!}x^2 + \dots + \frac{[e^{Ax}]^{(n)}_{x=0}}{n!}x^n + \dots$$

1-tasdiqqa ko‘ra $e^{A\cdot 0} = E$. 2-tasdiqqa ko‘ra

$$[e^{Ax}]'_{x=0} = A \cdot E = A, \qquad [e^{Ax}]''_{x=0} = A^2 \cdot E = A^2, \qquad \dots \quad , [e^{Ax}]^{(n)}_{x=0} = A^n$$

Bu tengliklardan

$$e^{Ax} = E + Ax + \frac{A^2x^2}{2!} + \dots + \frac{A^nx^n}{n!} + \dots \qquad (1.1.6)$$

tenglik kelib chiqadi.

4-tasdiqning isboti. 3-tasdiqda isbotlangan (1.1.6) formulani xisobga olib $e^{Ax_1} \cdot e^{Ax_2}$ ko‘paytmani xisoblaymiz:

$$e^{Ax_1} \cdot e^{Ax_2} = \left(E + Ax_1 + \frac{A^2x_1^2}{2!} + \cdots + \frac{A^nx_1^n}{n!} + \cdots\right) \times$$

$$\times \left(E + Ax_2 + \frac{A^2x_2^2}{2!} + \cdots + \frac{A^nx_2^n}{n!} + \cdots\right) =$$

$$= E + A(x_1 + x_2) + A^2\left(\frac{x_1^2}{2!} + x_1x_2 + \frac{x_2^2}{2!}\right) + \cdots$$

$$+ A^n\left(\frac{x_1^n}{n!} + \frac{x_1^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{x_2}{1!} + \cdots \frac{x_1^{n-k}}{(n-k)!} \cdot \frac{x_2^k}{k!} + \cdots \frac{x_2^n}{n!}\right) + \cdots =$$

$$= E + A(x_1 + x_2) + \frac{A^2}{2!}(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) + \cdots$$

$$+ \frac{A^n}{n!}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!\,k!} x_1^{n-k}x_2^k + \cdots =$$

$$= E + A(x_1 + x_2) + \frac{A^2(x_1 + x_2)^2}{2!} + \cdots + \frac{A^n(x_1 + x_2)^n}{n!} + \cdots =$$

$$= e^{A(x_1+x_2)}.$$

5-tasdiqning isboti. $e^{Ax}$ matritsaning har bir ustuni (1.1.5) sistemaning echimidan iborat. Bu $n$ ta echimning Vronskiy determinanti $x = 0$ nuqtada birlik matritsa determinantidan iborat, ya’ni qiymati 1 ga teng. Demak $e^{Ax}$ matritsaning ustunlari (1.1.5) sistemaning fundamental echimlar sitemasidan iborat va sistemaning umumiy echimni

$$Y = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ \dots \\ e_{1n} \end{pmatrix} C_1 + \begin{pmatrix} e_{21} \\ e_{22} \\ \dots \\ e_{2n} \end{pmatrix} C_2 + \cdots + \begin{pmatrix} e_{n1} \\ e_{n2} \\ \dots \\ e_{nn} \end{pmatrix} C_n = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{21} & \dots & e_{n1} \\ e_{12} & e_{22} & \dots & e_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{1n} & e_{2n} & \dots & e_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{pmatrix}$$

$$= e^{Ax}C.$$

ko‘rinishda ifodalash mumkin.

**2-misol**. Sistemaning eksponensial matritsasini tuzing

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = -y \end{cases} \quad (1.1.7)$$

Bu sistemaning umumiy echimi $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$, $z = C_1 \cos x - C_2 \sin x$. (1.1.7) sistemaning $y(0) = 1, z(0) = 0$ boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi echimini aniqlaymiz:

$$y = \cos x, \qquad z = -\sin x$$

Demak $e^{Ax}$ matritsaning birinchi ustuni $\begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}$ dan iborat. $y(0) = 0$, $z(0) = 1$ boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi echim $y = \sin x$, $z = \cos x$ bo‘lgani uchun $e^{Ax}$ matritsaning ikkinchi ustuni $\begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$ ko‘rinishdadir. Shunday qilib

$$e^{Ax} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}.$$

3. Chiziqli o’zgarmas koeffisiyentli sistema yechimi uchun Koshi formulasi.

Chiziqli o’zgarmas koeffisientli bir jinsli bo’lamagan

$$y_i' = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ldots + a_{in}y_n + b_i(x), \qquad (i = 1,2, \ldots, n)$$

sistemani qaraymiz. Uni matritsalar yordamida yozib olamiz

$$Y' = AY + B(x) \qquad (1.1.8)$$

(1.1.8) sistemaning yechimini

$Y = e^{Ax}C(x)$ (1.1.9)

ko’rinishda qidiramiz, bu yerda $e^{Ax}$ – exponentsial matritsa, $C(x) = (C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x))^T$. (1.1.9) ni (1.1.8) ga olib borib qo’yamiz:

$$Y' = Ae^{Ax}C(x) + e^{Ax}C'(x) = Ae^{Ax}C(x) + B(x)$$

Bundan

$$e^{Ax}C'(x) = B(x)$$

Bu tenglikni chapdan $e^{-Ax}$ ga ko’paytiramiz. Eksponensial matrisaning 2- va 4-xossalariga ko’ra $e^{-Ax} \cdot e^{Ax} = e^{A(-x+x)} = E$. Natijada

$$C'(x) = e^{-Ax}B(x), \quad C(x) = \int e^{-Ax}B(x)dx + C,$$

bu yerda $C = (C_1, C_2, \ldots, C_n)^T$ – ihtiyoriy o’zgarmas vektor. $C(x)$ ning topilgan ifodasini (1.1.9) ga qo’yib (1.1.8) sistemaning umumiy yechimini hosil qilamiz:

$$Y = e^{Ax}\left(\int e^{-Ax}B(x)dx + C\right) \qquad (1.1.10)$$

Bu umumiy yechim formulasidan foydalanib (1.1.8) sistemaning $y_1(x_0) = y_1^0$, $y_2(x_0) = y_2^0, \dots, y_n(x_0) = y_n^0$ shartni qanoatlantiruvchi yechimini aniqlaymiz:

$$Y = e^{Ax}\left(Y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{-At}B(t)dt\right)$$

yoki

$$Y = e^{Ax}Y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{A(x-t)}B(t)dt$$

bu yerda $Y_0 = (y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)^T$. Bu formula **Koshi formulasi** deb ataladi.

## 1.2. Parabolik tipdagi differensial tenglamalarga keltiriladigan jarayonlar. Issiqlik o'tkazish tenglamasi

Ko'pgina fizik jarayonlarda fizik maydonni tahlil qilish xususiy hosilali differensial tenglamalarni yechishga olib kelinadi.Amalda bunday masalalarni analitik usulda yechishning imkoniyati juda kam. Bu tahlil sohasining murakkabligidan va birjinslimaslik xossasidan bog'liq. Shunga qaramasdan bunday masalalarni yechishni kompyuter yordamida sonli tahlil qilish mumkin.Buning uchun dastlab tadqiqot sohasini ifodalovchi matematik-fizika tenglamalarning turi aniqlab olinadi. Masalan, muhitning erkin tebranish jarayoni quyidagi to'lqin tenglamasiga olib kelinadi:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad (1.2.1)$$

Buyerda $u(x, y, z, t)$ to'lqin jarayonini ifodalovchi funksiya, x,y,z fazoviy kordinatalar. c – shu muhitda to'lqin o'tkazishi tezligi; t – vaqt. Bunda Laplas operatori deb ataluvchi ushbu $\Delta u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$ belgilash qabul qilingan.

Shunga ko'ra (1.1) sodda qilib $\Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ kabi yoziladi. Muhitda issiqlik o'tkazishi jarayonlarini quyidagi issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi tavsiflaydi:

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t} - k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = Q \qquad (1.2.2)$$

bu yerda $\rho$ va c – moddaning jichligi va issiqlik sig'imi; T – temperatira; k – issiqlik o'tkazuvchanlik koeffisiyenti; Q – issiqlik manbalari zichligi.

Statsionar jarayonlarni tahlil qilish, masalan, statik issiqlik, elektr, magnit maydonlari yoki statik yuklanishda deformatsiyalar quyidagi Puasson tenglamasiga olib kelinadi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + f(x,y,z) = 0 \qquad (1.2.3)$$

bu yerda u(x,y,z) – statik maydonni ifodalovchi funksiya; f(x,y,z) – taqsimlangan manbalar. Agar (1.3) da f(x,y,z)=0 bo'lsa, u holda quyidagi Laplas tenglamasiga kelamiz

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad (1.2.4)$$

Bulardan tashqari boshqa masalalar ham va ularga mos xususiy hosilali tenglamalar ham mavjud, masalan, diffuziya tenglamasi yoki Gelmgolts tenglamasi.

Yuqorida qayd etilga tenglamalar bilan ifodalanuvchi jarayonlarning turlicha bo'lishiga qaramasdan, ular matematik nuqtai nazardan umumlashgan ikkinchi tartibli differensial tenglama bilan ifodalanishi mumkin.

Ikkita x va y erkli o'zgaruvchili quyidagi ikkinchi tartibli tenglamani qaraylik:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + D = 0 \qquad (1.2.5)$$

bu yerda A, B, C, D – umumiy holda $x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ lardan bogliq biror funksiyalar bo'lib, bunda A, B va C lar bir vaqtning o'zida nolga aylanishi mumkin emas.Fizik maydonni ifodalovchi differensial tenglamalar nochiziqli bo'lishi ham mumkin. Ammo amaliyotda ko'pgina masalalar chiziqli ifodalanadi, ya'ni xususiy hosilali tenglama noma'lum u funksiya va uning xususiy hosilalariga nisbatan chiziqli.

(1.5) tenglamaga mos ushbu $A\xi_1^2 + B\xi_1\xi_2 + C\xi_2^2 = 0$ kvadratik formani qo'yish mumkin, bunga ko'ra (1.5) tenglamani quyidagi turlarga ajratish mumkin:

1) **giperbolik** – agar $B^2$-4AC>0 bo'lsa, masalan, (1.1) to'lqin tenglamasi;
2) **parabolik** – agar $B^2$-4AC=0 bo'lsa, masalan, (1.2) issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi;
3) **elliptik** – agar $B^2$-4AC<0 bo'lsa, masalan, (1.3) Puasson tenglamasi yoki (1.4) Laplas tenglamasi.

Xususiy hosilali differensial tenglamalar bilan ifodalanuvchi jarayonlarning muhim tashkil etuvchilaridan biri bu tenglamalarning o'zidan tashqari ularga mos qo'shimcha shartlardir. Giperbolik vaparabolik tipdagi tenglamalar uchun erkli o'zgaruvchi t vaqtga nisbatan muhit yoki sistemaning boshlang'ich holatini ifodalovchi boshlang'ich shartlar kiritiladi. x,y,z koordinatalar bo'yicha esa chegaraviy shartlar kiritiladi.Issiqlik jarayonlari masalalarida, masalan ular muhit tadqiqot sohasining chegaralaridagi temperatura taqsimotini tavsiflaydi.Elliptik tenglamali masalalarda esa t vaqt qatnashmaydi, unda faqat x,y,z koordinatalar bo'yicha chegaraviy shartlar kiritiladi,masalaning o'zi esa chegaraviy masala deb ataladi.

Agar chegaraviy shart u funksiyaning chegaradagi taqsimotini ifodalasa, u holda bu shart Dirixle sharti deb ataladi.Hisob sohasining chegarasida hosila bilan ifodalanuvchi ushbu shart bilan yozilsa, u holda bus shart Neyman sharti deb ataladi, bu yerda n – tadqiqot sohasi chegarasiga qo'yilgan birlik normal.Agar chegaraviy shart yuqoridagi ikkala chegaraviy shartlar kombinatsiyasidan tuzilgan bo'lsa, u holda bu aralash chegaraviy shart deb ataladi. Amaliyotda bunday chegaraviy masalalarni yechishning ko'pgina usullari mavjud, masalan, xarakteristikalar usuli, o'zgaruvchilarni ajratish usuli, manbalar usuli, taqribiy hisob usullari.Ana shu usullardan taqribiy hisob usullariga kiruvchi chekli ayirmalar usuli bilan bir necha chegaraviy masalalarni yechish ushbu magistrlik dissertatsiyasining ikkinchi bobida ochib berilgan. Quyida esa biz bunday tenglamalarni kanonik shaklga keltirishni qaraylik. Buning eng sodda misoli sifatida

$$u_t = u_{xx}$$

issiqlikning Ox o'qi bo'ylab erkin o'tkazish tenglamasi hisoblanadi. Bu shakldagi tenglamalar chekli uzulikdagi sterjen, yaxlit uzun metal o'tkazgich bo'ylab tarqalayotgan issiqlik miqdorini uning x nuqtasiga mos kesimning t vaqtdagi $u(x,t)$, temperaturasi orqali o'rganishda hosil bo'ladi.

Biz mavzuning bu qismida tashqi muhitdan issiqlikdan himoyalangan l uzunlikdagi yatarlicha ingichka sterjenni qaraymiz. Aniqlik uchun sterjenni Ox o'qi bo'ylab bir uchini $x_0$ nuqtaga, uning ikkinchi uchini esa $x_1$ nuqtaga joylashtiramiz. Sterjen x nuqtasiga mos kesimning t vaqtdagi temperaturasini $u(x,t)$ bilan belgilaymiz. Dastlab eng sodda masalalarni qaraymiz. Faraz qilaylik, sterjen uchlarida doimiy $T_1$va$T_2$ temperaturalar ushlab turilgan bo'lsa, u holda bir jinsli sterjenda biz issiqlikning uning nuqtalari bo'ylab chiziqli uzatilishiga ega bo'lamiz:

$$u(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{l} * x \qquad (1.2.6)$$

Ma'lumki, bunda issiqlik yuqori temperaturali uchdan past temperaturali uchga tomon oqadi. Bunda biz agar issiqlik oqimi Ox o'qining musbat yo'nalishida bo'lsa, uni musbat, aks holda manfiy deb qaraymiz. Bu holda sterjenning S kesim yuzidan birlik vaqt mobaynida oqib o'tga issiqlik miqdori

$$Q = -k\frac{T_2 - T_1}{l}S = ks\frac{\partial u}{\partial x} \qquad (1.2.7)$$

Formula bilan hisoblanadi. Bunda k- sterjenning issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsiyenti bo'lib, u sterjen materialiga bog'liq. Endi sterjenda issiqlik o'tkazishining umumiy holini qaraymiz, ya'ni bu holda $u(x,t)$ funksiya qanday parametrlar orqali aniqlanishi va qanday qonuniyatga bo'ysinishi haqida to'xtalamiz.

1)Sterjenning x nuqtasiga mos ko'ndalang kesim yuzidan $(t_1, t_2)$ vaqt oralig'ida oqibo'tgan isiqlik miqdori

$$Q_1 = -S\int_{t_1}^{t_2} k(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}dt \qquad (1.2.8)$$

formula bilan ifodalanadi. k(x) - sterjen nuqtasiga mos kesimning issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsiyenti.

2)Elementar fizikadan ma'lumki, bir jinsli issiqlik o'tkazuvchi jism temperaturasini $\Delta u$ ga oshirish uchun unga

$$Q_2 = cm\Delta u = c\rho V\Delta u$$

miqdordagi issiqlik miqdorini berish kerak. Bunda c-jismning solishtirma issiqlik sig'imi, m-jism massasi, $\rho$ jism zichligi,V- jism hajmi bo'lib, jism bir jinsli bo'lganligi uchun bu parametrlar doimiy, ya'ni jism nuqtalariga va vaqtga bog'liq emas.

Agarda sterjen bir jinsli bo'lmasa, bu qiymatlar sterjen nuqtalariga bog'liq bo'lib, unga berilgan issiqlik miqdori quyidagicha ko'rinish oladi:

$$Q_2 = S\int_{t_1}^{t_2} c(x)\rho(x)\Delta u(x,t)\,dx \quad (1.2.9)$$

3) Sterjen ichki nuqtalarida issiqlik hosil bo'lishi mumkin. Bu issiqlik miqdori t vaqtda x nuqtadagi issiqlik manbalarining F(x,t) zichligi bilan tavsiflanadi. Ushbu issiqlik manbalarining sterjen $(x_1, x_2)$ qismiga $(t_1, t_2)$ vaqt mobaynida bergan jami issiqlik miqdori:

$$Q_2 = S\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} F(x,t)\,dxdt \quad (1.2.10)$$

Formula bilan beriladi. Ushbu topilgan uchta issiqlik miqdorlari orqali sterjen($x_1, x_2$ qismi uchun $(t_1, t_2)$ vaqt oralig'ida issiqlik balansi tenglamasi tuzib, sterjenda issiqlikning o'tkazish tenglamasini hosil qilishimiz mumkin bo'ladi. Buning uchun energiyaning saqlanish qonuni va (3), (4) va (5) formulalardan foydalansak, quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$\int_{t_1}^{t_2}[k(x_2)\frac{\partial u(x_2,t)}{\partial x} - k(x_1)\frac{\partial u(x_1,t)}{\partial x}]dt + \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} F(x,t)\,dxdt \quad (1.2.11)$$

(1.2.11) sterjenda issiqlik o'tkazishining integral ko'rinishdagi tenglamasidir. Undagi integrallarga o'rta qiymat haqidagi teoremani qo'llab, issiqlik o'tkazishining differensial formadagi

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) + F(x,t) = c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} \quad (1.2.12$$

Agar sterjen bir jinsli bo'lsa (1.2.12) tenglamada $k, c, \rho$ lar doimiy bo'lib, (1.2.12) tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t) \quad (1.2.13)$$

Bunda $a^2 = \frac{k}{c\rho}, f(x,t) = \frac{F(x,t)}{c\rho}$.

Agarda sterjenda tashqi issiqlik manbalari bo'lmasa, $F(x,t) = 0$ bo'lib, issiqlik o'tkazish tenglamasi quyidagi sodda ko'rinishga keladi:

$$u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t) \qquad (1.2.14)$$

**Gaz diffuziyasi tenglamasi.** Agar muhit turli gazlar bilan notekis to'ldirilgan bo'lsa, u holda yuqori konsentratsiyali nuqtalardan past konsentratsiyali nuqtalarga tomon gaz diffuziyasi kuzatiladi. Ushbu hodisa notekis aralashgan suyuqlik aralashmalarida ham uchraydi. Ushbu harakatni biz gaz tarqalayotgan trubka nuqtasining ondagi $u(x,t)$ gaz yoki suyuqlik konsentratsiyasi orqali tavsiflaymiz. Biz soddalik uchun trubkada gaz yoki suyuqlik manbalari yoq va uning ichki devorlarida diffuziya sodir bo'lmaydi deb faraz qilamiz. Nernst qonuniga asosan, trubka x nuqtasidan dt vaqt intervalida oqib o'tgan gaz massasi

$$dQ = -D(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}S(x)dt = W(x,t)S(x)dt$$

formula bilan beriladi. Bunda D - diffuziya koeffisienti, S - trubka ko'ndalang kesim yuzi, W (x,t) - gaz vaqt birligida birlik yuzadan oqib o'tgan gaz massasi bo'lib, diffuziya oqimi zichligi deyiladi.

Konsentratsiyaning ta'rifidan V hajmdagi gaz miqdori

$$Q = uV$$

ga teng bo'ladi. Bundan gaz konsentratsiyasi $\Delta u$ ga o'zgarganda trubkaning $(x_1, x_2)$ qismida gaz massasining o'zgarishi uchun

$$\Delta Q = \int_{x_1}^{x_2} c(x)\Delta u(x,t)dx$$

ifodani hosil qilamiz. Trubkaning har bir nuqtasi ko'ndalang kesimi bir xil bo'lsin, ya'ni $S(x) = S = const$ deb qaraymiz.

Trubka $(x_1, x_2)$ qismi uchun $(t_1, t_2)$ vaqt intervalida gaz massasi balansi tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$S\int_{t_1}^{t_2}[D(x_2,t)\frac{\partial u(x_2,t)}{\partial x}-D(x_1,t)\frac{\partial u(x_1,t)}{\partial x}]dt$$
$$-S\int_{x_1}^{x_2}c(x)[u(x,t_2)-u(x,t_1)]dx$$

Ushbu integrallarga ham o'rta qiymat haqidagi teoremani qo'llab, gaz yoki suyuqlik diffuziya uchun differensial shakldagi tenglamaga ega bo'lamiz:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)=c(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \qquad (1.2.15)$$

Ko'rinib turibdiki, (10) diffuziya tenglamasi ham xuddi sterjenda issiqlik o'tkazish tenglamasi (9) ga o'xshash ko'rinishga ega. Ulardagi asosiy farq noma'lum funksiya shu fizik jarayonni xarakterlovchi turli kattaliklarni ifodalaydi. Agar shu bo'lim boshida yo'qligi talab qilingan trubkada manbalar bo'lishi yoki uning devorlari ham diffuziya jarayoniga ishtirok etishi mumkinligi hisobga olinsa, diffuziyaning issiqlik o'tkazish tenglamasining umumiyroq ko'rinishidagi (7) yoki (8) ga o'xshash differensial tenglamalarni hosil qilgan bo'lar edik. Xuddi shu kabi issiqlikning fazoda o'tkazish masalasi ham parabolik tipdagi tenglamalarga keltiriladi. Bu jarayon issiqlik tarqalayotgan muhitning (x,y,z) nuqtasining t vaqtdagi temmperaturasi u(x,y,z,t) orqali tavsiflanadi. Bu holda ham Fur'e qonunidan va issiqlik balansi tenglamasidan foydalanib issiqlikning fazoda o'tkazish jarayonini to'rt o'zgaruvchili u(x,y,z,t) funksiyaga nisbatan ikkinchi tartibli xususiy hosilali

$$c\rho u_t=\frac{\partial u}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial u}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial u}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}+F(x,y,z,t)\right)$$

Bunda $k=k(x,y,z,t)$ issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsiyenti [3]. Agar muhit bir jinsli bo'lsa$c=const,\rho=const,k=const$ bo'lib, yuqoridagi tenglama

$$u_t=\alpha^2\left(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}\right)+F(x,y,z,t)$$

ko'rinishga keladi. Bu yerda:

$\alpha^2=\frac{k}{c\rho},f=\frac{F}{c\rho}$.

## Chegaraviy masalalarning qo'yilishi

Yuqorida ta'kidlanganidek, issiqlik o'tkazish va diffuziya tenglamalarini ifodalovchi matematik modellar ikkinchi tartibli xususiy hosilali tenglamalardan iborat bo'lib, bu tenglamalar cheksiz ko'p yechimga ega [1,2,4]. Bu tenglamalar qaralayotgan jarayonni bir qiymatli aniqlashi uchun unga shu charayonni tavsiflovchi qo'shimcha shartlar ilova qilinishi lozim.

Issiqlik o'tkazish tenglamalarida t bo'yicha birinchi tartibli xususiy hosila ishtirok etayotganligi uchun boshlang'ich shart sifatida jarayonning boshida sterjen nuqtalarida o'rnatilgan temperaturani ifodalovchi shart, ya'ni $u(x,t)$ funksiyaning tajriba boshlangan $t_0$ ondagi qiymati berilishidan iborat bo'ladi:

$u(x,t_0) = \varphi(x)$ (1.2.16)

Bunda $\varphi(x), o \leq x \leq l$ -berilgan uzluksiz funksiya, $l$ –sterjen uzunligi. Odatda tajriba boshlangan $t_0$ vaqtni sanoq boshi deb olinadi, ya'ni $t_0 = 0$. Faraz qilaylik, sterjen $Ox$ o'qi boylab gorizontal joylashgan bo'lib, uning bir uchi $x = 0$ nuqtada, ikkinchi uchi esa $x = 1$ nuqtada bo'lsin. Uning uchlaridagi temperatura rejimiga asoslanib chegaraviy shartlar turli ko'rinishlarda qo'yilishi mumkin. Xuddi to'lqin tenglamasiga qo'yilgani kabi issiqlik o'tkazish va diffuziya tenglamalariga ham asosan uch tipdagi chegaraviy shartlar qo'yiladi:

1) Sterjenning $x = 0$ uchida vaqt davomida $u(0,t) = \mu_1(t)$ harorat va $x = l$ uchida esa $u(l,t) = \mu_2(t)$ lar biror harorat belgilangan bo'lsin. Bunda $\mu_1(t)$ va $\mu_2(t)$ lar biror [0,T] vaqt oralig'ida aniqlangan berilgan funksiyalar, T - jarayon kuzatiladigan vaqt uzunligi. Sterjen uchlarida berilgan

$$\begin{cases} u(0,t) = \mu_1(t) \\ u(l,t) = \mu_2(t) \end{cases}$$

ko'rinishdagi chegaraviy shartga birinchi tipdagi chegaraviy shart deb yuritamiz.

2) Sterjen uchlari kesim yuzidan oqib o'tuvchi issiqlik oqimi belgilangan bo'lsin. Masalan uning $x = 0$ cheti kesimidan vaqt davomida o'tuvchi $Q_1(0,t)$ belgilangan rejimga bo'singan bo'lsa

$$Q_1(0,t) = -k\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}$$

tenglik bajariladi. Bundan sterjenning $x = 0$ uchida $u(x_0, t) = v_1(t) = -\frac{Q_1(0,t)}{k}$ shart bajarilishi lozimligiga kelamiz. Xuddi shu kabi sterjen $x = l$ cheti kesimidan vaqt davomida o'tuvchi $Q_2(l, t)$ belgilangan rejimga bo'singan bo'lsa

$$Q_2(l,t) = -k\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}$$

tenglik bajariladi. Bundan sterjenning $x = l$ uchida $u_x(l, t) = v_2(t) = -\frac{Q_2(l,t)}{k}$ shart bajarilishi lozimligiga kelamiz. Shunday qilib sterjen uchlarida issiqlik oqimi o'zgarishi belgilangan rejimga bo'sinishi talab qilinganda, issiqlik o'tkazish tenglamasiga qo'shimcha:

$$\begin{cases} u_x(0,t) = v_1(t) \\ u_x(l,t) = v_2(t) \end{cases}$$

chegaraviy shartlarning bajarilishi lozim ekanligiga kelamiz. Bu ko'rinishdagi chegaraviy shartlarga 2-tipdagi chegaraviy shartlar deb yuritamiz.

3) Faraz qilaylik sterjen temperaturasi vaqt davomida aniq va $\theta(t)$ qonuniyat boyicha o'zgaruvchi tashqi muhit bilan issiqlik almashinuvi belgilangan rejimga bo'ysinsin. Bu holda sterjen $x = 0$ va $x = 1$ uchlari uchun qo'yiladigan qo'shimcha shartlar:

$$\begin{cases} u_x(0,t) = h_1\{u(0,t) - \theta(t)\} \\ u_x(l,t) = h_2\{u(l,t) - \theta(t)\} \end{cases}$$

ko'rinishda ifodalanib, ularga odatda 3-tipdagi chegaraviy shartlar deb yuritiladi. Bulardan tashqari sterjenning ikkala uchida ikki tipdagi chegaraviy shart qo'yilishi ham mumkin. Bu tipdagi chegaraviy shartlarga aralash tipdagi chegaraviy shartlar deb yuritamiz.

**1.1-Ta'rif**. (7) issiqlik o'tkazish masalasining (11) boshlang'ich shart va 1-tipdagi (mos ravishda 2-tipli, 3-tipli yoki aralash tipli) chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasiga 1-tur (mos ravishda 2-tur, 3-tur yoki aralash) chegaraviy masala deyiladi. Chegaraviy masalaning regulyar yechimi deganda issiqlik tenglamasining boshlang'ich va belgilangan chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi hamda ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi yechimiga aytiladi. Ba'zan ta'riflangan chegaraviy masalalrdan tashqari uzunligi chegaralanmagan yoki juda ham uzun sterjenda issiqlikning o'tkazish masalasini ham o'rganishga to'g'ri keladi. Bu holda sterjen bir uchi $-\infty$ likda va ikkinchi uchini esa $+\infty$ likda qarab, (1.1.7) tenglamaning faqat (1.1.11) boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasiga duch kelamiz. Bu masala odatda Koshi masalasi deyiladi.

**1.2-Ta'rif**. (7) issiqlik o'tkazish masalasining $-\infty < x < +\infty, t \geq 0$ sohada aniqlangan va

$$u(x,0) = \varphi(x), -\infty < x < +\infty$$

shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasiga issiqlik o'tkazish tenglamasi uchun qo'yilgan Koshi masalasi deyiladi. Bunda $\varphi(x), -\infty < x < +\infty$ berilgan funksiya. Xuddi shu kabi bir uchi chegaralanmagan sterjen uchun boshlang'ich shart va bitta chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish haqidagi chegaraviy masalalar ham uchraydi.

## 1.3. Issiqlik o'tkazish tenglamasi yechimi uchun maksimum prinsipi. Chegaraviy va Koshi masalasi yechimining yagonaligi

Ushbu va keyingi mavzularda biz alohida ta'kidlanmasa, o'zgarmas koeffitsiyentli

$$w_t = \alpha^2 w_{xx} + \beta w_x + \gamma w \quad (1.3.1)$$

issiqlik o'tkazish masalasini qaraymiz. Ushbu tenglamada

$$w_x(x,t) = e^{\mu x + \lambda t} u(x,t) \qquad (1.3.2)$$

almashtirish bajarib

$$u_t = \lambda e^{\mu x + \lambda t} u + e^{\mu x + \lambda t} u_t \,, w_x = \mu e^{\mu x + \lambda t} u + e^{\mu x + \lambda t} u_x,$$

$$w_{xx} = \mu^2 e^{\mu x + \lambda t} u + 2\mu e^{\mu x + \lambda t} u_x + e^{\mu x + \lambda t} u_{xx}$$

bo'lib, ularni yuqoridagi tenglamaga qo'ysak , unga teng kuchli bo'lgan

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} + (2\mu\alpha^2 + \beta) u_x + (\mu^2\alpha^2 + \beta\mu - \lambda + \gamma) u$$

tenglamaga kelamiz. Agar bu tenglamada $\mu = -\frac{\beta}{\alpha^2}$ , $\lambda = -\frac{\beta^2}{4\alpha^2}$ deb olsak u holda tenglama: $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ sodda ko'rinishga keladi. Demak (1.3.1) va (1.3.2) differensial tenglamalar bir vaqtda yechimga ega yoki ega bo'lmaydi. Shuning uchun (1.3.2) ko'rinishdagi tenglama yechimini tadqiq qilish yetarlidir. Quyidagi teoremada (1.3.2) issiqlik o'tkazish tenglama yechimining ekstremal qiymatlari haqida so'z yuritiladi.

**1.1-Teorema** (Maksimal qiymat prinsipi). Agar u(x,t) funksiya yopiq $0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq l$ sohada aniqlangan va uzluksiz differensiallanuvchi bo'lib, $0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq l$ sohada (1.2.2) tengllani qanoatlantirsa, u holda u(x,t) funksiya o'zining eng katta va eng kichik qiymatiga yo boshlang'ich t □ 0 vaqtda yoki sohaning chegaraviy nuqtalari $x = 0$ yoki $x = l$ nuqtalarda erishadi.

Endi biz maksimal qiymat prinsipidan kelib chiqadigan natijalarga to'xtalamiz. Ushbu natijalardan eng muhimi chegaraviy masala yechimining yagonaligini isbotlashga tatbiqi hisoblanadi. Quyida biz yagonalik teoremasini keltiramiz.

**1.2-Teorema**. **(1-chegaraviy masala yechimining yagonaligi)**

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} + f(x,t), x < x < l, t > 0 \quad (1.3.3)$$

issiqlik o'tkazish tenglamasi

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad (1.3.4)$$

boshlang'ich shart va

$$u(0,t) = \mu_1(t), u(l,t) = \mu_2(t) \quad (1.3.5)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi va $0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq l$ sohada aniqlangan, ikkinchi tartibgacha uzluksiz differensizllanuvchi yechimi yagonadir.

Endi maksimal qiymat prinsipidan to'g'ridan to'g'ri kelib chiqadigan natijalarni keltiramiz:

1**.1-Natija**. Agar (1.2.2) tenglamaning ikkita $u_1(x,t)$ va $u_2(x,t)$ yechimlari uchun

$$u_2(x,0) \geq u_1(x,0), u_2(0,t) \geq u_1(0,t), u_2(l,t) \geq u_1(l,t)$$

tengsizliklar o'rinli bo'lsa u holda barcha $0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq l$ lar uchun

$$u_2(x,t) \geq u_1(x,t)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

**1.2-Natija**. Agar (1.2.2) tenglamaning uchta

$$u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t)$$

yechimlari uchun $u_1(x,0) \le u_2(x,0) \le u_3(x,0)$, $u_1(0,t) \le u_2(0,t) \le u_3(0,t)$ $u_1(l,t) \le u_2(l,t) \le u_3(l,t)$, tengsizliklar o'rinli bo'lsa u holda barcha $0 \le t \le T, 0 \le x \le l$ lar lar uchun

$$u_1(x,t) \le u_2(x,t) \le u_3(x,t)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

1**.3-Natija**. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni va (1.2.2) tenglamaning ikkita $u_1(x,t)$ va $u_2(x,t)$ yechimlari uchun $|u_2(x,0) - u_1(x,0)| \le \varepsilon$, $|u_2(0,t) - u_1(0,t)| \le \varepsilon$, $|u_2(l,t) - u_1(l,t)| \le \varepsilon$ tengsizliklar o'rinli bo'lsa u holda barcha $0 \le t \le T, 0 \le x \le l$ lar uchun,

$$|u_2(x,t) - u_1(x,t)| \le \varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. 1.3-Natija issiqlik o'tkazish tenglamasiga qo'yilgan 1-tur chegaraviy masala yechimi unga qo'yilgan chegaraviy va boshlang'ich shartlarga uzluksiz bog'liqligini, ya'ni chegaraviy masala yechimining turg'unligini ifodalaydi.

Fizikada issiqlikning to'g'ri chiziq bo'ylab cheksizlikka yoki yetarlicha katta oraliqqa o'tkazish masalasi muhim ahamiyatga ega hisoblanadi. Issiqlikning to'g'ri chiziq bo'ylab cheksizlikka o'tkazish tenglamasiga qoyiladigan masala yechimi yagona bo'lishi uchun unga boshlang'ich shartdan tashqari yana qo'shimcha shartlar talab qilinadi. Bu masalada sterjen uchlari cheksizlikda deb faraz qilinganligi uchun chegaraviy shartlar qatnashmaydi. Odatda bu masala Koshi masalasi deb yuritiladi. Ushbu masalada yechimning qaralayotgan sohada chegaralanganligi muhim ahamiyatga ega.

1.3-Ta'rif. Agar shunday $M > 0$ son topilib, ixtiyoriy $-\infty < x < +\infty$ va $t \ge 0$, uchun $|u(x,t)| < M$ tengsizlik bajarilsa, u holda $u(x,t)$ funksiyaga shu sohada chegaralangan deyiladi.

**1.4-Ta'rif**. $-\infty < x < +\infty, t > 0$ sohada

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}$$

issiqlik o'tkazish tenglamasining

$$u(x,0)=\varphi(x), -\infty<x<+\infty$$

boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi uzluksiz va chegaralangan yechimini topish masalasiga issiqlik o'tkazish tenglamasiga qo'yilgan Koshi masalasi deyiladi. Endi ushbu masala yechimining yagonalik teoremasini keltiramiz

**1.3-Teorema**. $-\infty<x<+\infty, t>0$ sohada (1.3.6) tenglamaning (1.3.7) boshlangich shartni qanoatlantiruvchi uzluksiz va chegaralangan yechimi yagonadir. Bu mavzuning asosiy mohiyati xuddi chegaraviy masalaning limitik holi sifatida uchlari cheksizlikda bo'lgan chegaralanmagan sterjenda issiqlikning o'tkazish masalasi, ya'ni Koshi masalasi qo'yilishi va uni yechish usuli bilan tanishishdan iborat. Avvalgi mavzularda biz issiqlik o'tkazish tenglamasiga qo'yilgan uch turdagi chegaraviy masalalar hamda Koshi masalasining qo'yilishi, ular yechimining yagonaligi masalasini hal etilishi bilan tanishgan edik.

Ayytilgandek biz uchlari cheksizlikda bo'lgan chegaralanmagan sterjenda issiqlikning o'tkazish masalasining uzluksiz chegaralangan yechimini topish masalasi bilan tanishamiz. Ushbu fizik masala matematik model sifatida quyidagicha yoziladi:

**1.5-Ta'rif.**

$$u_t=\alpha^2 u_{xx}, -\infty<x<+\infty, t>0 \quad (1.3.8)$$

issiqlik o'tkazish tenglamasining

$$u(x,0)=\varphi(x), -\infty<x<+\infty \qquad (1.3.9)$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi uzluksiz va chegaralangan yechimini topish masalasiga chegaralanmagan sterjenda issiqlik o'tkazish tenglamasi uchun Koshi masalasi deyiladi.

Bu masala issiqlik tarqalayotgan sterjenning uzunligi ahamiyatga ega bo'lmagan va asosiy e'tibot sterjen ichki nuqtalaridagi temperaturaning yetarlicha kichik vaqt intervalidagi holatiga qaratilgan fizik masalalarda hosil bo'ladi. Endi bu masalaning yechimini topish bilan shug'ullanamiz.

(1.3.8)-(1.3.9) Koshi masalasining nolmas chegaralangan yechimini o'zgaruvchilarni ajratish usulida izlaymiz, ya'ni yechimni

$u(x,t) = X(x)T(t)$ (1.3.10)

ko'rinishda izlaymiz. (1.2.10) ifodani (1.2.8) ga qo'yib xuddi Fur'e usulidagi kabi quyidagi tenglamalarni olamiz:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{\alpha^2 T} = -\lambda^2$$

Bu tenglama esa o'z navbatida ikkita:

$T' + \alpha^2\lambda^2 T = 0$ (1.3.11)

$X'' + \lambda^2 T = 0$ (1.3.12)

oddiy differensial tenglamalarga ajraladi. Bu oddiy differensial tenglamalarni yechish bilan biz tanishmiz:

$$T_\lambda(t) = C_1(\lambda)e^{-(\lambda a)^2 t}, X_\lambda(x) = C_2(\lambda)e^{i\lambda x}$$

Bunda $C_1(\lambda)$ va $C_2(\lambda)$ lar ixtiyoriy chekli doimiylar. Bularga va (1.3.10) ga asosan (1.3.8) tenglamaning chegaralangan yechimi uchun

$$u_\lambda(x,t) = C(\lambda)e^{-(\lambda a)^2 t + i\lambda x}$$

ifodani hosil qilamiz. (1.2.8) chiziqli tenglama bo'lganligi uchun bu yechimlarning $\lambda$ bo'yicha yig'indisi ham yana yechim bo'ladi:

$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\lambda)e^{-(\lambda a)^2 t + i\lambda x} d\lambda$ (1.3.13)

Yechimning bu ko'rinishidagi noma'lum $C(\lambda)$ koeffitsiyentlarni (1.3.9) boshlang'ich shartdan foydalanib topamiz

$u(x,0) = \varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\lambda)e^{i\lambda x} d\lambda$ (1.2.14)

(1.3.14) da teskari Fur'e almashtirishlarini qo'llash bilan noma'lum koeffitsiyentlarni topamiz.

$$C(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(s)e^{i\lambda s}ds\right)e^{-(\lambda a)^2 t + i\lambda x}d\lambda =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(\lambda a)^2 t + i\lambda(x-s)}d\lambda\right)\varphi(s)ds$$

Oxirgi tenglikdagi ichki integralni hisoblaymiz:

$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\lambda a)^2 t + i\lambda(x-s)} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha^{2\alpha}t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(s)e^{-\frac{(x-s)^2}{\alpha^2 t}}ds$ (1.3.16)

Natijada qaralayotgan Koshi masalasi yechimi uchun quyidagi integral tasvirni olamiz

$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha^2 t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-s)^2}{\alpha^2 t}}\varphi(s)ds$ 1.3.17

Ba'zan (1.2.8)-( 1.2.9) Koshi masalsining topilgan (1.2.17) ko'rinishdagi Yechimini

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,s,t)\varphi(s)ds$$

yoziladi. Bunda

$$G(x,s,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha^2 t}} e^{-\frac{(x-s)^2}{\alpha^2 t}}$$

funksiya odatda issiqlik o'tkazish tenglamasining fundamental yechimi deb aytiladi. Bu funksiya quyidagicha fizik ma'no kasb etadi: Agar boshlang'ich $t = t_0$

vaqtda sterjen s nuqtasida $Q = \rho s$ issiqlik miqdori ajralgan bo'lsa, u holda

$$G(x,s,t-t_0) = \frac{1}{s\rho 2\sqrt{\pi\alpha^2(t-t_0)}} e^{-\frac{(x-s)^2}{\alpha^2 t}}$$

funksiya sterjen x nuqtasining t ondagi temperaturasini ifodalaydi. Bundan tashqari $G(x,s,t-t_0)$ funksiya o'zining (x,t) o'zgaruvchilar bo'yicha $u_t = \alpha^2 u_{xx}, -\infty < x < +\infty, t > 0$ issiqlik o'tkazish tenglamasining yechimi bo'ladi. Haqiqatan ham integralni hadlab differensiallash haqidagi teoremani qo'llab quyidagi xususiy hosilalarni topamiz:

$$G_x(x,s,t-t_0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{x-s}{2[a^2(t-t_0)]^{3/2}} e^{-\frac{(x-s)^2}{4\alpha^2 t}}$$

$$G_{xx}(x,s,t-t_0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\{-\frac{1}{2[a^2(t-t_0)]^{\frac{3}{2}}} + \frac{(x-s)^2}{4[a^2(t-t_0)]^{\frac{5}{2}}}\}e^{-\frac{(x-s)^2}{4\alpha^2 t}}$$

$$G_t(x,s,t-t_0) = \frac{a^2}{2\sqrt{\pi}}\{-\frac{1}{2[a^2(t-t_0)]^{\frac{3}{2}}} + \frac{(x-s)^2}{4[a^2(t-t_0)]^{\frac{5}{2}}}\}e^{-\frac{(x-s)^2}{4\alpha^2(t-t_0)}}$$

Bularni o'rniga qo'yib haqiqatan ham $G_t = a^2 G_{xx}$ ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Hisoblashlarga ishonch hosil qilish uchun yuqoridagi xusuiy hosilalarni va tenglama yechimi ekanligini mustaqil tekshirib chiqing. Koshi masalasidagi boshlang'ich shartdagi berilgan $\varphi(x)$ funksiya uzluksiz va chegaralangan funksiyadir. Koshi masalasining integral tasviri, ya'ni (1.3.17) formula odatda chegaralanmagan sohada Koshi masalasi yechimi uchun Puasson formulasi hamda undagi integralga esa Puasson integrali deg yuritiladi.

# II bob. Issiqlik o’tkazish masalalarini chekli ayirmalar usuli yordamida hal yechishni tashkil etish

## 2.1 Matematik model tushunchasi

**Matematik model.** Ilmiy va amaliy tadqiqotlarda real mavjud sistemalarni modellashtirish katta rol o’ynaydi. Modellashtirish mohiyati shundan iboratki, har biri real mavjud yoki abstrakt bo’lgan ikki sistemalar orasida o’xshashlik munosabati o’rnatiladi. Agar bu sistemalardan birinchisi tadqiq qilish uchun ikkinchisiga nisbatan soddaroq bo’lsa, ikkinchi sistemaning xossalari haqida birinchi sistema xulqini kuzatib hukm chiqarish mumkin. Bu holda tadqiqot uchun foydalanilgan sistemani model deyiladi[1].

"Model" so’zi lotincha modulus, so’zidan olingan bo’lib, o’lchov, me`yor, obraz, namuna, analog, "o’rinbosar" degan ma`nolarni bildiradi.
Model tushunchasini ta`riflash juda qiyin.Bir manbada uning 31 ta ta`rifi sanab o’tilgan. Shunday bo’lsada bu tushuncha har birimizga tanish: o’yinchoq samolyot--samolyotning modeli, globus- yerning modeli, planetariy ekrani-osmon va undagi yulduzlar modeli, s=vt formula- jism harakati modeli. Bu bayon qilingan predmetlar grafik tasvirlar, formulalar bir "model" so’zi bilan birlashadilar. Model ta`riflaridan birini yuqorida bayon qilgan edik.
Yana turli shaklda berilgan ta`riflardan ba`zilarini keltiramiz. Keng ma`noda model biror ob`ekt yoki ob`ektlar sistemasining obrazi yoki namunasidir. N. N. Moiseev ta`rifi bo’yicha «Model deganda biz predmet (hodisa) haqida uning u yoki bu ayrim xossalarini aks ettiruvchi ma`lum bir chegaralangan ma`lumotni beruvchi soddalashtirilgan bilimni tushunamiz. Modelni ma`lumotni kodlashning maxsus shakli sifatida qarash mumkin. Oddiy kodlashda bizga barcha dastlabki ma`lumotlar ma`lum bo’ladi va ularni biz faqat boshqa tilga o’tkazamiz, model esa, qaysi tildan foydalansa ham, kishilar ilgari bilmagan ma`lumotni ham kodlaydi». Endi modellashtirish tushunchasi haqida gapiramiz.

Modellashtirishning ham turli shakllardagi bayonini keltiramiz. Modellarni yasash kishilar faoliyatida juda katta ahamiyatga ega. Modelni ko'rish jarayonni modellashtirish deyiladi. Modellashtirish deganda ob`ekt (sistema) ning modeli yordamida shu ob`ektning xossalarini tadqiq qilish jarayoni tushuniladi.

Modellashtirish bilish obe`ktlarini ularning modellari yordamida tadqiq etish, kuzatilayotgan predmet va hodisalarning modellarini yasash va o'rganishdir. Ob`ektni uning modeli yordamida bilish modellashtirishdir. Har qanday bilish modellashtirishdan iborat, chunki bunda tegishli ob`ekt bosh miyada nerv xujayralari majmui yordamida ideal ko'rinishda aks etadi, ya`ni biz ob`ektning modeli bilan ish ko'ramiz. Modellashtirish-turli jarayon va hodisalarni o'rganishning eng keng tarqalgan metodlaridan biri.

Model tushunchasi biologiya, meditcina, ximiya, fizika, iqtisodiyot, sotciologiya, demografiya va boshqa fanlarda ham qo'llaniladi. Matematik model, fizik model, biologik model, iqtisodiy model va boshqa modellar turlari mavjud.

Matematik model tushunchasiga ham turli ta`riflar berilgan. Ulardan ba`zilarini keltiramiz. Jarayonning matematik tavsifini, ya`ni jarayonni matematik tilda bayonlashni matematik model deb yuritamiz. Matematik model olamning ma`lum hodisalari sinfining matematik belgilar bilan ifodalangan taqribiy ifodasidir.

Real sistemaning (aniqrog'i sistema ishlashi jarayonining) matematik modeli deganda biz sistema parametrlariga, kirish signallariga, boshlang'ich shartlar va vaqtga bog'liq sistema holatlari xarakteristikalarini (bular orqali chiqish signallarini) aniqlovchi munosabatlar (masalan, formulalar, tenglamalar, tengsizliklar, mantiqiy shartlar, operatorlar va boshqalar) to'plamini tushunamiz.

O'rganilayotgan jarayon yo hodisani matematik simvollar yordamida bayon qiluvchi matematik munosabatlar sistemasini matematik model deyiladi.

Ob`ektning xarakteristikalarini bayon qiluvchi matematik ifodalarni matematik model deyiladi. Formulalar ko'rinishida yozilgan faqat miqdoriy xarakteristikalarni o'z ichiga olgan modellarni matematik model deyiladi.

Issiqlik o'tkazish masalalari insoniyat tamadunining barcha davrlarida muhim ahamiyat kasb etgan. Shuning uchun energiya resurslaridan foydalanish, maishiy, sanoat, ayniqsa harbiy sohalarda issiqlik o'tkazish, diffuziya, filtratsiya masalalarini hal etish barcha davr olimlarning diqqat e'tibor markazida bo'lgan. Issiqlik o'tkazish masalalari matematik-fizik tenglamalar kursining asosiy masalalaridan biri hisoblanib, bu masalalarni turli usullar yordamida hal etish mumkin va bu usullar yillar davomida shakllana borgan. XX asrga kelib elektron hisoblash mashinalarining yaratilishi, kompyuter va kompyuter texnologiyalarining jadal suratlarda rivojlanishi natijasida qator amaliy masalalarni avtomatik tarzda yuqori aniqlikda yechish imkoniyatini yuzaga keltirdi. Tenglamalarning algoritmini yaratish jarayonini modellashtirishda matematik modellarni qo'llash talab etiladi.

jarayonni matematika yordamida o'rganish uchun o'sha jarayonni ifodalovchi differensial tenglama yoki tenglamalar sistemasini yechishni bilish kerak. Aniq yechiladigan differensial tenglamalar juda kichik sinfni tashkil etganligi uchun amalda o'rganilayotgan jarayonni ifoda etuvchi differensial tenglamalar taqribiy hisoblash metodlari yordamida yechiladi.

Har qanday taqribiy metodni qo'llagandagidek, chekli ayirmali metodni qo'llaganda ham quyidagi savollarga javob berish kerak bo'ladi.

Quyidagicha savollar tugiladi:

-differensial masalaga kiruvchi hosilalar qanday aniqlik bilan approksimasiyaqilinadi?;

- hosil qilingan diskret masala yechimi bo'laklash parametri $h>0$ da qo'yilgan differensial masala echimini beradimi? Agar yechim olinsa qanday aniqlik bilan olinadi?

Bu savollarga oddiy misollar yordamida javob beramiz. Sohani bo'laklashni bir necha usulini ko'rib o'tamiz. $f(x)$ ixtiyoriy tartibli hosilaga ega bo'lsinhamda funksiyaning hosilasini topish talab qilingan bo'lsin.

$$f'(x) = \lim_{h\to\infty} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad (2.1.1)$$

ni hisblash masalasini $f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ yoki $f'(x) = \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$ yoki $f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ formulalar yordamida hisoblash masalasiga almashtirish mumkin. $f''(x)$hosilani topish uchun esa

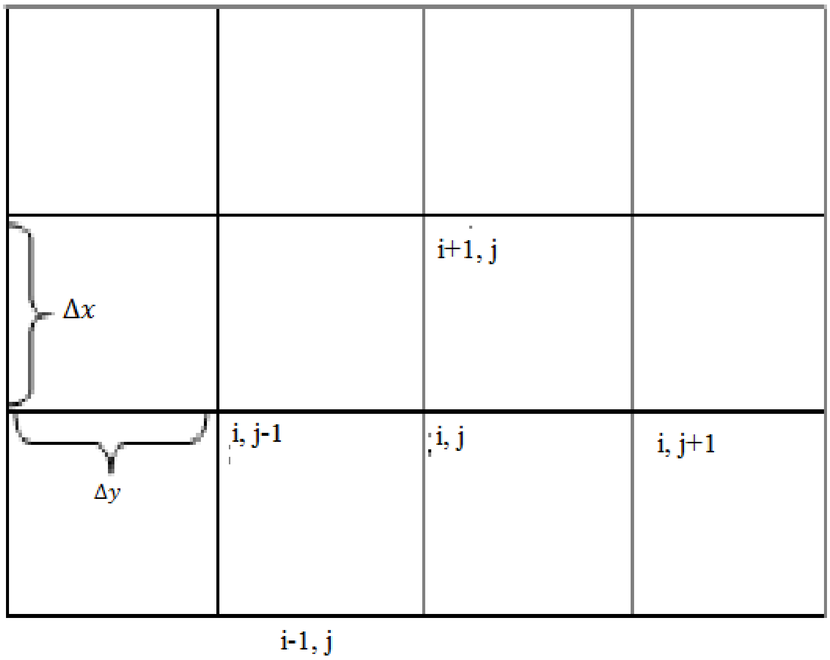
$$f''(x) = \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} \qquad (2.1.2)$$

formuladan foydalanish mumkin.

Bu formulalarning barchasi h kichrayib borgan sari aniqroq bo'laveradilar. Har bir tanlab olingan h uchun bu formulalarda funksiyaning chekli sondagi qiymatlari va chekli sondagi arifmetik amallar qatnashadilar. Bu formulalar hosilani hisoblash masalasini diskretlashtirishga misol bo'la oladilar.

[0,1] kesmani N ta teng bo'laklarga bo'lamiz. Qo'shni nuqtalar orasidagi masofa $x_i - x_{i-1} = h = 1/N$ ni to'rning qadami deb ataymiz. Barcha nuqtalarning $w_m = \{x_i = ih, i = 1 \dots N-1\}$ to'plami kesmadagi to'rni tashkil etadi. Bu to'plamga $x_0 = 0, x_n = 1$ chegaraviy nuqtalarni ham qo'yish mumkin. U holda to'r $w_m = \{x_i = ih, i = 0 \dots N-1, N\}$ deb belgilanadi. [0,1] kesmadagi uzluksiz u(x) funksiyaning o'rniga $y_n(x_t)$ funksiyani qaraymiz. Bu funksiyaning qiymatlari turining X $_t$ nuqtalarida hisoblanadi. Funksiyaning o'zi esa to'rning qadami h parametriga bog'liq bo'ladi. Ikki o'zgaruvchili u(x,t) funksiyalar to'plamini qaraymiz. Aniqlanish sohasi sifatida $D(0 \le x \le 1, 0 \le t \le T)$ to'g'ri to'rtburchakni olamiz. Xo'qining [0,1], T o'qining [0,T] kesmalarini mosravishda $N_1$ va $N_2$ bo'laklarga bo'lamiz. h=1/$N_1$, $\tau = 1/N_2$ belgilashlarni kiritamiz. Bo'linish nuqtalari orqali x va t o'qlariga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz.

Bu to'g'ri chiziqlarning kesishuvi natijasida to'r hosil qiluvchi $(x_i, t_j)$ nuqtalar to'plamini hosilqilamiz(2.2.1-chizma)




*2.1.1-chizma. Tekislikda teng qadamli to'r.*

Bu to'r x o'qi bo'yicha h (rasmda $\Delta x$ ) , t o'qi bo'yicha l (rasmda $\Delta y$) qadamga ega.

Bitta gorizontal yoki vertical chiziqda yotuvchi yonma-yon nuqtalarga qo'shni nuqtalar deyiladi. Ular orasidagi masofa mos ravishda h yoki l ga teng. Yana oldingi misoldek $0 \leq x \leq 1$ kesmani qaraymiz. Ixtiyoriy nuqtalarni olib uni N ta bo'lakka bo'lamiz. NUqtalarning $\{x_i, i = 0 \dots N-1,\ x_0 = 0, x_n = 1\}$ to'plai [0,1] kesmada $w_m$ to'rni tashkil etadi. Qo'shni tugunlar orasidagi masofa $h = x_i - x_{i-1}$ to'rqadamli y ga bog'liq yangi to'r funksiyasi hisoblanadi. Bu misolda to'r qadamlari $\sum_{i=1}^{n} h_i = 1$ shartni qanoatlantiradi. Faraz qilaylik $x = (x_1, x_2)$ tekislikda F chegarali murakkab ko'rinishdagi soha berilgan G bo'lsin

$x_1^i = t_1 * h_1, t_1 = 0,1,2, \dots, h_1 > 0; x_2^i = t_2 * h_2, t_2 = 0,1,2, \dots, h_2 > 0;$ to'g'ri chiziqlarni o'tkazamiz, natijada $(x_1, x_2)$ tekislikda $(t_1 h_1,\ t_2 h_2)$; $t_1, t_2 = 0,1,2,3, \dots.$ nuqtalari bo'lgan to'rni olamiz.

Bu to'r $Ox_1, Ox_2$ yo'nalishlarining har biri bo'yicha teng qadamlidir. Bizni G=G+P sohaga tegishli bo'lgan nuqtalar qiziqtiradi. (chegaradagi nuqtalar ham kiradi) G sohaning ichki qismiga tegishli bo'lgan $(t_1 h_1, t_2 h_2)$ nuqtalarga ichki nuqtalar deb aytiladi, ularning to'plaminiw$_m$ bilan belgilaymiz. Uzluksiz argumentli $u(x), x \in G$ funksiyalar o'rniga $y(x_t)$ to'r funksiyalarni qaraymiz. Bu funksiya $w_m = (x_i)$ to'rning o'rni $x_i$ nuqtasining funksiyasidir. Agar barcha nuqtalarni biror tartibda nomerlasak $x_1, x_2, \dots, x_n$ u holda to'r funksiyasi $\gamma$ ning bu nuqtadagi qiymatlarini $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_n)$ vektorning komponentlari deb qarash mumkin. Agar to'r qurilgan G soha chekli bo'lsa, U vektorning □ o'lchovi ham chekli bo'ladi. Har qanday differensial operatorni taqribiy chekli ayirmali operator bilan almashtirishga differensial operatorni approksimasiyalash (yoki chekli ayirmali approksimasiyalash) deb ataladi. Chekli ayirmali approksimasiyalashni dastlab ayrim olingan ixtiyoriy x nuqtada bajaramiz. Agar $v(x)$ uzluksiz funksiya bo'lsa $v_n(x) = v(x)$ deb olinadi. Ixtiyoriy L – differensial operatorni approksimasiyalashdan oldin shablon tanlash kerak. Shablon bu shunday qo'shni nuqtalarki,ular x nuqta bilan yonma-yon joylashgan bo'lib, x nuqtada L operatorni approksimasiyalash uchun ishlatiladi.

Endi aniq misollarda eng oddiy differensial operatorlarni approksimasiyalashni qarab chiqamiz.

1-Misol: $L_\theta = \frac{\partial \theta}{\partial x}$ Ox o'qida ihtiyoriy nuqtan tanlab x-h va x+h (h>0) nuqtalarni olamiz. Operatorni approksimasiyalash uchun quyidagi ifodalardan ixtiyoriy birini ishlatish mumkin.

$$L_n^+ v = \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = v_x \quad (2.1.3)$$

$$L_n^- v = \frac{v(x) - v(x-h)}{h} = v_x \quad .(2.1.4)$$

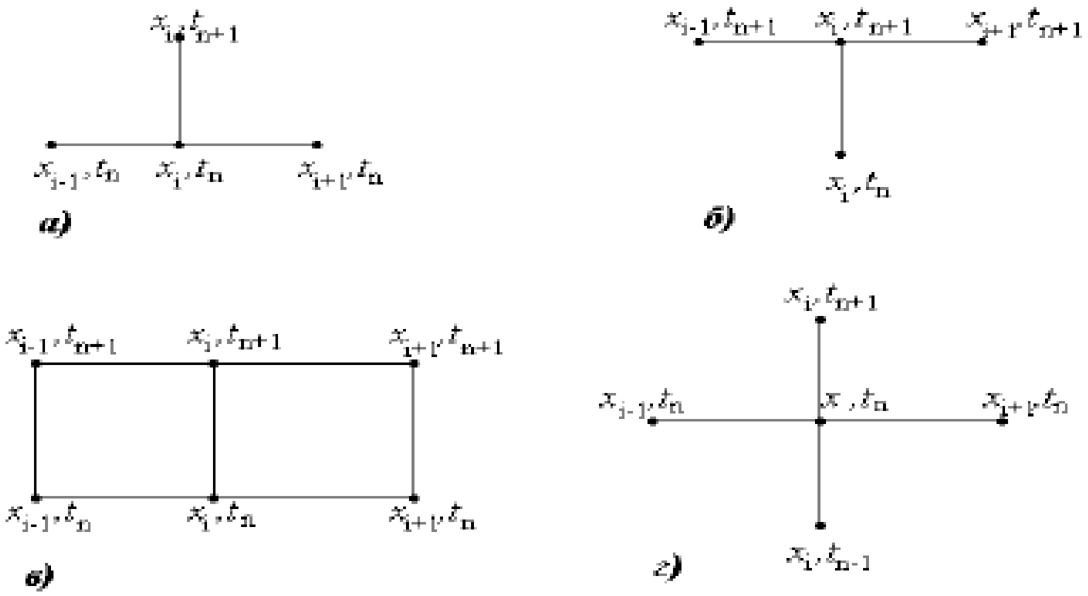
(2.1.3) ifodaga o'ng chekli ayirmali hosila , (2.1.4)da esa chap chekli ayirmali hosila deyiladi.

Shu sababli bu formulalar 2 nuqtali shablonga ega deymiz.

Xuddi shuningdek $\frac{\partial v}{\partial x}$ approksimasiyalashda (2.1.3) va (2.1.4) ifodalarning chiziqli kombinatciyasini olish ham mumkin. Masalan:

$$L_h^c v = \sigma v_x + (1 - \sigma) v_x \quad (2.1.5)$$

Bu yerda $\sigma$- ixtiyoriy haqiqiy son. Agar $\sigma = 0.005$ bo'lsa markaziy chekli ayirmasi hosilani olamiz. Yuqorida keltirilgan chekli ayirmalarni yozishda quyidagi shablonlardan foydalanildi(2.2.2-chizma):



*2.1.2-chizma. Differensial tenglamalardagi xadlarni approksimasiya shablonlari.*

Differensial tenglamalar chekli ayirmali ko'rinishda approksimasiya qilinib, algebraik tenglamaga olib kelingandan keyin tenglamalar biror usul bilan echiladi. Xususiy hosilali differensial tenglamalar approksimasiyalari uch yoki besh diognalli tenglamalar sistemasiga keladi.

## 2.2. Parabolik differentsial tenglama (PDT) uchun chekli ayirmali sxema

### PDT uchun boshlang'ich chegara masala.

D={0 $\le$ x $\le$1,0 $\le$ t $\le$T} sohada diffuziya tenglamasining boshlang'ich va chegara shartlar

$$Lu = u_t - u_{xx} = f\left(x,t\right), \qquad (1)$$

$$lu = g\ , \qquad (2)$$

bu erda $lu = [u(x,0), u(0,t), u(1,t)], g = [u_0(x), g_1(t), g_2(t)]$,

ga bo'ysunadigan aniq $\bar{u} = \bar{u}(x,t)$ echimini topish talab etiladi. Faraz qilamizki, (1)-(2) masala echimi yagona va mavjud, va yana echim D sohada $\bar{u}_{tt}$, $\bar{u}_{xxxx}$ uzluksiz hosilalarga ega.

**2. ChAS yaratish.** Yechimni ChAS usuli bilan taqribiy topamiz. Buning uchun D sohada to'g'ri chiziqlar $x_k = kh,\ k = 0..m,\ h = 1/m,\ t_j = j\tau,\ j = 0..n,\ \tau > 0,\ \tau \le T < (n+1)\tau$

yordamida $D_h = D_{h\tau} = \{(x_k, t_j) = (kh, j\tau), k = 0..m, j = 0..n, h = 1/m, \tau = T/n\}$ to'r hosil qilamiz .

Asosiy belgilash quyidagidan iborat: $u_k^j = u(x_k, t_j) \approx \bar{u}_k^j = \bar{u}(x_k, t_j)$.

To'rning nuqtalarida (1), (2) tenglamalarni yozamiz:

$$u_t(x_k, t_j) = u_{xx}(x_k, t_j) + f(x_k, t_j), k = 1..m-1, j = 0..n-1. \tag{3}$$

$$u(x_k, 0) = g_0(x_k),\ k = 0..m, u(0, t_j) = g_1(t_j),\ u(1, t_j) = g_2(t_j),\ j = 0..n \tag{4}$$

Qisqalik uchun $u_{xx}(x,t)$ hosilaning chekli ayirmali approksimatsiyasiini kiritamiz:

$$\Lambda u_h = \Lambda_{xx} u(x_k, t_j) = \frac{u(x_{k-1}, t_j) - 2u(x_k, t_j) + u(x_{k+1}, t_j)}{h^2} = u_{xx}(x_k, t_j) + 0(h^2)\,. \tag{5}$$

$\Lambda_{xx}$ operator $u_h = \{u_k^j\}$ ixtiyoriy to'r funktsiyaga ham shu kabi ta'sir e'tadi:

$$\Lambda u_h = \Lambda u_k^j = \frac{u_{k-1}^j - 2u_k^j + u_{k+1}^j}{h^2}\quad . \tag{6}$$

(3) tengliklarga kiruvchi hosilalarni quyidagicha almashtirish mumkin:

$$\bar{u}_t(x_k, t_j) = (\bar{u}(x_k, t_{j+1}) - \bar{u}(x_k, t_j))/\tau + 0(\tau) = (\bar{u}_{k+1}^{j+1} - \bar{u}_k^j)/\tau + 0(\tau)\ , \tag{7}$$

$$u_{xx}(x_k, t_j) = \Lambda u_h + 0(h^2) = (u(x_{k-1}, t_j) - 2u(x_k, t_j) + u(x_{k+1}, t_j))/h^2 + 0(h^2)\,, \tag{8}$$

$$u_{xx}(x_k, t_j) = \Lambda u(x_k, t_{j+1}) + 0(h^2) = (u(x_{k-1}, t_{j+1}) - 2u(x_k, t_{j+1}) + u(x_{k+1}, t_{j+1}))/h^2 + 0(h^2) \tag{9}$$

Hosilani chekli ayirmalar bilan approksimatsiya kilishda ishlatiladigan to'rning nuqtalar to'plamiga ***shablon*** deyiladi. Endi (3) larga hosilalarning ( 7)-(9) qiymatlarini qo'yamiz. Boshlangich chegara shartlarda hosila yuk, ular aniq approksimatsiya qilinadi. (3) ga avval ( 8), keyin (9) ni qo'yib ikki xil tengliklar hosil qilamiz:

$$L_h^{(1)}(\bar{u}(x_k, t_j)) = \frac{\bar{u}(x_k, t_{j-1}) - \bar{u}(x_k, t_j)}{\tau} - \Lambda\bar{u}(x_k, t_j) = f(x_k, t_j) + 0(\tau + h^2)\quad . \tag{10}$$

$$L_h^{(2)}(\bar{u}(x_k, t_j)) = \frac{\bar{u}(x_k, t_{j+1}) - \bar{u}(x_k, t_j)}{\tau} - \Lambda\bar{u}(x_k, t_{j+1}) = f(x_k, t_{j+1}) + 0(\tau + h^2)\quad . \tag{11}$$

Cheksiz kichik miqdorlarni tashlab yuborib va $u_k^j = u(x_k, t_j) \approx \bar{u}(x_k, t_j),\ f_k^j = f(x_k, t_j)$ deb ikki xil chekli ayirmali sxema hosil qilamiz:

$$L_h^{(1)} u_h = \frac{u_k^{j+1} - u_k^j}{\tau} - \Lambda u_k^j = f_k^j; k = 1,...m-1;\ j = 0,...,n-1 \cdot \qquad (12)$$

$$L_h^{(2)} u_h = \frac{u_k^{j+1} - u_k^j}{\tau} - \Lambda u_k^{j+1} = f_k^{j+1},\ k = 1,...m-1;\ j = 0,...,n-1 \ \cdot \qquad (13)$$

(12) sxemaning shabloni teskari (T): $(x_k, t_{j+1}), (x_{k-1}, t_j),\ (x_k, t_j), (x_{k-1}, t_j)$. (13) sxemaniki esa (T): $(x_k, t_j), (x_{k-1}, t_{j+1}),\ (x_k, t_{j+1}), (x_{k+1}, t_{j+1})$. (12) oshkor sxema deyiladi, (13) sof oshkormas sxema deyiladi. Ularni qo'shib, ikkiga bo'lib Krank-Nikolson sxemasini olamiz (yotiq H):

$$L_h^{(3)} u_h = \frac{u_k^{j+1} - u_k^j}{\tau} - 0.5\Lambda(u_k^j + u_k^{j+1}) = 0.5(f_k^j + f_k^{j+1}), k = 1,...m-1;\ j = 0,...,n-1$$

(14)

Endi sxemalarni boshlangich-chegara shartlar bilan birga yozamiz:

| | |
|---|---|
| Oshkor ChAS | $\frac{u_k^{j+1} - u_k^j}{\tau} - \frac{u_{k-1}^j - 2u_k^j + u_{k+1}^j}{h^2} = f_k^j, k = 1..m-1;\ j = 0..n-1$ |
| Sof oshkormas ChAS | $\frac{u_k^{j+1} - u_k^j}{\tau} - \frac{u_{k-1}^{j+1} - 2u_k^{j+1} + u_{k+1}^{j+1}}{h^2} = f_k^{j+1}, k = 1..m-1;\ j = 0..n-1$ |
| Krank Nikolson sxemasi | $\frac{u_k^{j+1} - u_k^j}{\tau} - 0.5\Lambda(u_k^j + u_k^{j+1}) = 0.5(f_k^j + f_k^{j+1}), k = 1,...m-1;\ j = 0,...,n-1$ |
| BCh shartlar | $u_k^0 = g_0(x_k),\ k = 0..m; u_0^{j+1} = g_1^{j+1}, u_m^{j+1} = g_2^{j+1},\ j = 0,...n-1$ |

**3. Approksimatsiyani tekshirish.** Boshlangich-chegara shartlar aniq approksimatsiya qilingani tufayli faqat differentsial tenglamaning approksimatsiyasiningina tekshirish koladi. O'ng tomon ham aniq approksimatsiya qilinayapti, shuning uchun $f_h = f(x_k, t_j)$ va aniq echim jadvali $\bar{u}_k^j = \bar{u}(x_k, t_j)$ ni kiritib ( 10), (11) dan quyidagini topamiz:

$$R_h^{(1)} = L_h^{(1)} \bar{u}_h - f_h = \{L\bar{u}(x_k, t_j) - f(x_k, t_j)\} = \frac{\bar{u}_k^{j+1} - \bar{u}_k^j}{\tau} - \frac{\bar{u}_{k-1}^j - 2\bar{u}_k^j + \bar{u}_{k+1}^j}{h^2} - f_k^j = 0(\tau + h^2),$$

$$R_h^{(2)} = L_h^{(2)}\bar{u}_h - f_h = \{L\bar{u}(x_k, t_{j+1}) - f(x_k, t_{j+1})\} = \frac{\bar{u}_k^{j+1} - \bar{u}_k^j}{\tau} - \frac{\bar{u}_{k-1}^{j+1} - \overline{2}u_k^{j+1} + \bar{u}_{k+1}^{j+1}}{h^2} - f_k^{j+1} = 0(\tau + h^2),$$

Ikkala sxema ham differentsial tenglamani $0(\tau + h^2)$ bilan approksimatsiya qilayapti.

Krank-Nikolson sxemasi aniqligi $R_h^{(3)} = 0(\tau^2 + h^4)$ ga teng.

Demak, $L_h^{(l)}\bar{u}_h - f_h \to Lu - f = 0, l = 1..3$.

**4. Turg'unlikni tekshirish. C**xemalarning xususiy echimlarini garmonika

$$u_k^j = \lambda^j e^{i\alpha k}, \lambda = \lambda(\alpha) = ?,$$

ko'rinishida izlaymiz. Bu xususiy echimni (14) va (15) ga qo'yib quyidagi *dispersion munosabatlarni (xarakteristik tenglamlarni)* topamiz ( $f_k^j = 0$ deb olamiz)

$$(\lambda_1^{j+1} e^{i\alpha k} - \lambda_1^j e^{i\alpha k}) / \tau = \lambda_1^j (e^{i\alpha(k-1)} - 2e^{i\alpha k} + e^{i\alpha(k+1)}) / h^2,$$

$$(\lambda_2^{j+1} e^{i\alpha k} - \lambda_2^j e^{i\alpha k}) / \tau = \lambda_2^{j+1} (e^{i\alpha(k-1)} - 2e^{i\alpha k} + e^{i\alpha(k+1)}) / h^2.$$

Avvalo, $e^{i\alpha(-1)} - 2 + e^{i\alpha(1)} = 2\cos(\alpha) - 2 = 2(\cos(\alpha) - 1) = -4\sin^2(\alpha/2)$. Yuqoridagi tengliklarnii bir xil ko'paytuvchilar $(\lambda^j e^{i\alpha k})$ ga qisqartirib

$$(\lambda_1 - 1)/\tau = (e^{i\alpha(-1)} - 2 + e^{i\alpha(1)})/h^2 \Rightarrow \lambda_1 = 1 - 4r\sin^2(\alpha/2), r = \tau/h^2 \quad , \tag{15}$$

$$(\lambda_2 - 1)/\tau = \lambda_2 (e^{i\alpha(-1)} - 2 + e^{i\alpha(1)})/h^2 \Rightarrow \lambda_2 = 1/(1 + 4r\sin^2(\alpha/2)), r = \tau/h^2, \tag{16}$$

dispertsion munosabatlarni topamiz. Bu munosabatlar $u_k^j = \lambda^j e^{i\alpha k}$ garmonika ayirmali sxemaning qachon echimi bo'lishini bildiradi.

$u_k^j = |\lambda|^j$ ekanidan, agar $|\lambda|>1$ bo'lsa $|u_k^j| \to \infty$ va turg'unlik bo'lishi mumkin emas. $|\lambda| \le 1$ bo'lsa $|u_k^j| \to 0$ turg'unlik bo'lishi mumkin. (16) dan doimo $\lambda_2 < 1$ va oshkormas sxema doimo turg'un ekan. Oshkor sxemada $|\lambda_1| \le 1$ bo'lishi uchun $\tau/h^2 \le 1/2$ bo'lishi kerak.

**Demak,** oshkor sxema $\tau/h^2 \le 1/2$ bo'lsagina turg'un va oshkormas doimo turg'un, ya'ni oshkor sxema shartli turg'un, sof oshkormas, Krank Nikolson sxemasi absolyut turg'un ekan.

**5. Algoritmlar.** a) Oshkor sxemani yechish masalasini ko'raylik. $u_k^{j+1}$ ni topamiz

$$u_k^{j+1} = u_k^j + \frac{\tau(u_{k-1}^j - 2u_k^j + u_{k+1}^j)}{h^2} + \tau f_k^j, \quad j = 0..n-1; \qquad (17)$$

$$u_k^0 = g_{0k}, k = 0,1..m; \quad u_0^j = g_1^j, \quad u_m^j = g_2^j, \quad j = 0,1..n \; .$$

Bu erdan ko'rinadiki, chekli ayirmali sxemada fakat ikki qatlam nuqtalari ishtirok etyapti $(t = t_j, \; t = t_{j+1})$ undan tashkari yuqori katlam( $t = t_{j+1}$) da fakat bitta no'malum qiymat bor $(u_k^{j+1})$. Demak, ( 17) asosida $t = t_0$ katlamda berilgan boshlangich va chegara shart qiymatlaridan foydalanib $t = t_1$ qatlamdagi, so'ng keyingi qatlamdagi qiymatlarni ham rekkurent formulalar (17) yordamida topishimiz mumkin.

b) Endi sof oshkormas sxemani yechish masalasini ko'raylik. Har $t = t_{j+1}$ qatlamda uchta no'malum bor: $u_{k-1}^{j+1}, u_k^{j+1}, u_{k+1}^{j+1}$ . Ularni topish uchun uch dioganalli sistema olamiz:

$$-ru^{j+1}{}_{k-1} + (1+2r)u^{j+1}{}_k - ru_{k+1}{}^{j+1} = u_k{}^j + \tau f_k{}^j, \; k = 1..m-1; \; j = 1..n-1,$$

(18)

$$u_k{}^0 = g_{0k}, \quad u_0{}^{j+1} = g_1{}^{j+1}, \quad u_k{}^{j+1} = g_2{}^{j+1} \quad , j = 0,1..n-1 \; ; \; r = \tau / h^2$$

Bu erda ham ikkita qatlam ishtirok etyapti. Yuqori $t = t_{j+1}$ katlamda uch noma'lum, quyi katlamda bitta qiymat ishtirok etyapti. Shuning uchun ham bu sxemani sof oshkormas sxema deyiladi. Echishni $t = t_1$ qatlamdan boshlanadi. Bu qatlamda (18) ga progonka usuli qo'llaniladi. Birinchi qatlamda noma'lumlar topilgach, ikkinchi qatlamdagi noma'lumlar yana progonka usuli bilan topiladi va hokazo.

Sof oshkormas sxemani quyidagicha yozish mumkin[17]:

$$Au^{<j+1>} = u^{<j>} + \tau f^{<j>}, \; j = 0..n-1, \qquad (19)$$

bu erda $u^{<j>} = [u_0^j, u_1^j, ..., u_m^j]^T$, $f^{<j>} = [f_0^j, f_1^j, ..., f_m^j]^T$ - vektorlar va $A = [a_{ij}]$ matritsa:

$$0) a_{00} = 1, i = 1..m, a_{0i} = 0 \; ;$$

$i) i = 1..m-1, a_{ii-1} = a_{ii+1} = -r, a_{ii} = 1+2r, a_{ij} = 0, j \neq i-1, i, i+1;$

$m) a_{mi} = 0, i = 0..m-1, a_{mm} = 1,$

c) Krank-Nikolson sxemasi ham oshkormas sxema bo'ladi va quyidacha yozish mumkin**:**

$$-u^{j+1}_{k-1} + 2(1+r)u^{j+1}_{k} - u^{j+1}_{k+1} = u^{j+1}_{k-1} - 2(1+r)u^{j+1}_{k} + u_{k+1}^{j} + 2h^2 f_k^{\,j},\ k = 1,...,m-1;\ j = 1,...,n-1,$$

$u_k^{\,0} = g_{0k},\quad u_0^{\,j+1} = g_1^{\,j+1},\ u_k^{\,j+1} = g_2^{\,j+1},\ j = 0..n-1;\ r = \tau / h^2$ .

Kranka-Nikolson sxemasini quyidagicha yozish mumkin:

$$Au^{<j+1>} = Bu^{<j>} + 2h^2 f^{<j>},\ j = 0..n-1,\ f_{i,j} = f(x_i, t_j + \tau/2)$$

(20)

bu erda $u^{<j>} = [u_0^j, u_1^j, ..., u_m^j]^T$, $f^{<j>} = [f_0^{\,j}, f_1^{\,j}, ..., f_m^{\,j}]^T$ - vektorlar va $A = [a_{ij}]$ matritsa:

$0) a_{00} = 1, i = 1..m, a_{0i} = 0; b_{0i} = 0, i = 0..m;$

$i) i = 1..m-1, a_{ii-1} = a_{ii+1} = -1, a_{ii} = 2(1+\mu), a_{ij} = 0, j \neq i-1, i, i+1; \mu = 1/r;$

$$b_{ii-1} = b_{ii+1} = 1, b_{ii} = 2(1-\mu), b_{ij} = 0, j \neq i-1, i, i+1;$$

$m) a_{mi} = 0, i = 0..m-1, a_{mm} = 1; a_{mi} = 0, i = 0..m;$

Demak**,** algoritmik tomondan oshkor sxema qulay, lekin shartli turg'un, sof oshkormas va Krank-Nikolson sxemalari absolyut turg'un, va har bir katlamda uch diogonalli algebraik tenglamalar sistemasini progonka usuli yechish kerak. Shartli turg'unlik to'r qadamlariga jiddiy shart qo'yadi, bu esa ko'p hisoblashlarni bajarishga olib keladi.

(17)-(20) chekli ayirmali sxemalar kompyuterda programma tuzilib yoki matematik tizimlar, masalan, Mathcad yordamida yechilishi mumkin.

### 2.3 Nochiziq parabolik tenglama uchun chekli ayirmali sxema

**Yuqorida biz chiziqli parabolik differensial tenglamani ko'rdik. Quyida esa nochiziq parabolik tenglamani qaraymiz:**

$$u_t = \left(k(u)u_x\right)_x + f(u), \tag{1.}$$

$$u(x,0) = u^0(x),\quad u(0,t) = \mu_1(t),\quad u(1,0) = \mu_2(t),\qquad 0 \le t \le T,\qquad a \le x \le b. \tag{2.}$$

Nochiziq tenglamalarda oldingi $k(u)$ funktsiyaning o'zgarish soxasi aniqmas bo'lganligi uchun oshkormas sxemalargina ishlatiladi. Quyidagi oshkormas chiziqli ChAS ni karaymiz:

$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{h}=\frac{1}{h}\left(a_{i+1}\frac{u_{i+1}^{j+1}-u_i^{j+1}}{h}-a_i\frac{u_i^{j+1}-u_{i-1}^{j+1}}{h}\right)+f\left(u_i^j\right),\qquad \begin{array}{l} i=1...I-1\\ j=0...J-1, \end{array} \qquad (3.)$$

bu erda $a_i=0{,}5\left(k\left(u_i^j\right)+u\left(u_{i-1}^j\right)\right)$. Boshlangich chegara shartlarning approksimatsiyasi aniq bajariladi:

$$u_i^0=u^o\left(x_i\right), i=0.I,\ u_o^j=\mu_1\left(t_j\right),\ u_I^j=\mu_2\left(t_j\right),\ j=0..J \qquad (4)$$

(3) sistemani ushbu uch dioganalli sistema ko'rinishiga keltiramiz:

$$\begin{cases} u_0^j=\mu_1\left(t_j\right),\ j=0..J, \\ -\dfrac{\tau a_i}{h^2}u_{i-1}^j+\left[1+\dfrac{\left(a_i+a_{i+1}\right)}{h^2}\right]u_i^j-\dfrac{\tau a_{i+1}}{h^2}u_{i+1}^j=u_i^{j-1}+\tau f\left(u_i^{j-1}\right),\ \begin{array}{l} i=1..I-1,\\ j=1..J-1, \end{array} \\ u_n^j=\mu_2\left(t_j\right),\ j=0..J,\ u_i^0=u^o\left(x_i\right),\ i=0..I. \end{cases} \qquad (5.)$$

Bu sxemada

$$\alpha_i=-\tau a_i/h^2,\ \beta_i=1+\tau\left(a_i+a_{i+1}\right)/h^2,\ \gamma=-\tau a_{i+1}/h^2,\ d_i^{j-1}=u_u^{j-1}+\tau f\left(u_i^{j-1}\right),\ i=1..I-1, \qquad (6)$$

$$\alpha_0=0,\quad \beta_0=1,\quad \gamma_0=0,\quad d_o=\mu_1(t_j),$$

$$\alpha_n=0,\quad \beta_n=1,\quad \gamma_n=0,\quad d_n=\mu_2(t_j)$$

belgilashlar kiritib standart ko'rinishida yozib olamiz:

$$\begin{cases} \beta_0 u_i^j+\gamma_0 u_1^j=d_0=\mu_1(t_i), \\ \alpha_i u_{i-1}^j+\beta_i u_i^j+\gamma_i=d_i,\qquad i=1..I-1, \\ \alpha_n u_{n-1}+\beta_n u_n^j=d_n=\mu_2(t_j). \end{cases} \qquad \begin{array}{l} j=1..J-1,\quad d_i^{j-1}=u_i^{j-1}+\tau f(u_i^{j-1}),\\ u_i^0=u^0(x_i),\qquad i=0..I \end{array} \qquad (7)$$

Bu uch diognalli sistema echimining progonka usuli bilan

$$u_i^j=v_{i+1}u_{i+1}^j+w_{i+1},\qquad i=0..I-1,$$

ko'rinishda izlaymiz. Ravshanki,

a) $v_{i+1}=\dfrac{-\gamma_i}{(\alpha_i v_i+\beta_i)},\ w_{i+1}=\dfrac{d_i-\alpha_i w_i}{\alpha_i v_i+\beta_i},\quad i=1..I-1,\quad v_0=w_0=0,$ (9)

b) $u_n^j=w_n,\ u_i^j=v_{i+1}u_{i+1}^j+w_{i+1},\quad i=I-1..0.$

**2**. Ko'pincha (1.), (2.) masala uchun

$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\tau}=\frac{1}{h}\left(a\left(u_{i+1}^{j+1}\right)\frac{u_{i+1}^{j+1}-u_i^{j+1}}{h}-a\left(u_i^{j+1}\right)\frac{u_i^{j+1}-u_{i-1}^{j+1}}{h}\right)+f\left(u_i^{j+1}\right), \qquad (10)$$

$$\alpha\left(u_i^{j+1}\right)=0,5\left(k\left(u_i^{j+1}\right)+k\left(u_{i-1}^{j+1}\right)\right),\ i=1..I-1,\ j=0..J-1, \qquad (11)$$

chekli ayirmali sxema ishlatiladi. Bu nochiziq chekli ayirmali sxema. Uni yechish uchun biror iteratsiya usuli ishlatiladi, masalan,

$$\frac{u_i^{(s+1)}-u_i^j}{\tau}=\frac{1}{h}\left(a\left(u_{i+1}^{(s)}\right)\frac{u_{i+1}^{(s+1)}-u_i^{(s+1)}}{h}-a\left(u_i^{(s)}\right)\frac{u_i^{(s+1)}-u_{i-1}^{(s+1)}}{h}\right)+f\left(u_i^{(s)}\right), \qquad (12)$$

$s=0..m-1,\ \ u_i^{(0)}=u_i^j,\ \ u_i^{(m)}=u_i^{j+1}.$

Bu erda s-iteratsiya nomeri. Ko’rinib turibdiki, koeffitsentlar oldingi iteratsiyada hisoblanyapti $\left(a\left(u_{i+1}^{(s)}\right), a\left(u_i^{(s)}\right), f\left(u_i^{(s)}\right)\right)$, boshlangich qiymat sifatida $u_i^{j+1}$ uchun $u_i^j$ olinmokda. Bu boshlangich qiymat $\tau$ qanchalik kichik bo’lsa, shuncha yaxshi. Iteratsiyalar soni m aniqlikka qarab beriladi. Silliq koeffitsentlar uchun $\kappa(u)\ge c_1>0$ bo’lsa 2-3 iteratsiya hisoblash etarli. $u_i^{(s+1)}$ yangi iteratsiyalar (11) dan progonka usuli yordamida topiladi.

Buning uchun (11) quyidagicha yozib olinadi:

$$u_0^j=\mu_1\left(t_j\right),\ j=1..J, \qquad (13)$$

$$\frac{-\tau\, a_i(u_i^{(s-1)})}{h^2}u_{i-1}^{(s)}+\left[1+\tau\frac{\left(a_i\left(u_i^{(s-1)}\right)+a_{i+1}\left(u_{i+1}^{(s-1)}\right)\right)}{h^2}\right]u_i^{(s)}-\frac{\tau\, a_{i+1}(u_{i+1}^{(s-1)})}{h^2}u_i^{(s)}=d_i^j,$$

$$d_l^j=u_i^j+\tau\, f\left(u_i^{(s-1)}\right),\ u_n^j=\mu_2\left(t_j\right),\quad j=1..J,\quad s=0..\ m-1,\quad u_i^{(0)}=u_i^j,\quad u_i^{(m)}=u_i^j$$

yana

$$\alpha_0^{(s-1)}=0,\ \ \beta_0^{(s-1)}=1,\ \ \gamma_0^{(s-1)}=0,\ \ d_0^{(s-1)}=\mu_1(t_j),\ \ \alpha_1^{(s-1)}=0,\ \ \beta_1^{(s-1)}=1,\ \ \gamma_1^{(s-1)}=0,\ \ d_1^{(s-1)}=\mu_2(t_j),$$

$$\alpha_i^{(s-1)}=-\tau\, a_i(u_i^{(s-1)})/h^2,\quad \beta_i^{(s-1)}=1+\tau\left[a_i\left(u_i^{(s-1)}\right)+a_{i+1}\left(u_{i+1}^{(s-1)}\right)\right]/h^2,$$

$$\beta_i^{(s-1)}=-\tau a_{i+1}\left(u_{i+1}^{(s-1)}\right)/h^2,\ d_i^{(s-1)}=u_i^s+\tau\ f\left(u_i^{(s-1)}\right),\quad i=1..I-1, \qquad (14)$$

belgilashlarni kiritib (2.17.12) ni quyidagicha yozib olish mumkin:

$$\begin{cases} \beta_0^{(s-1)}u_0^{(s)}+\gamma_0^{(s-1)}u_1^{(s)}=d_0^{(s-1)}=\mu_1(t_j) \\ \alpha_i^{(s-1)}u_{i-1}^{(s)}+\beta_i^{(s-1)}u_i^{(s)}+\gamma_i^{(s-1)}u_{i+1}^{(s)}=d_i^{(s-1)},\quad d_i^{(s-1)}=u_i^j+\tau\ f\left(u_i^{(s-1)}\right),\quad i=1..I-1, \\ \alpha_n^{(s-1)}u_{n-1}^{(s)}+\beta_n^{(s-1)}u_n^{(s)}=d_n^{(s-1)}=\mu_2\left(t_j\right) \end{cases}$$

Bu uch dioganalli sistema (8), (9) kabi progonka usuli bilan yechiladi.

**3**. Nochiziq parabolik tenglama (1) ni yechish uchun 2- tartibli prediktor-korrektor sxemalar ham ishlatish mumkin. Bu yerda j-katlamdan j=1 katlamga o'tish 2- etapda tashkil etiladi.

Birinchi etapda chiziqli oshkormas sxema

$$\frac{u_i^{j+1/2}-u_i^j}{\tau}=\left(a\left(u_i^j\right)u_{\bar{x}}^{j+1/2}\right)_{x,i}+f\left(u_i^j\right),\qquad i=1..I-1, \tag{15}$$

$$u_0^{j+1/2}=\mu_1\left(t_j+0.5\tau\right),\qquad u_n^{j+1/2}=\mu_2(t_j+0.5\tau).$$

Bu sxemadan progonka usullari yordamida oraliq $u_i^{j+1/2}, i=0..I,$ qiymatlar topiladi. So'ng, ikkinchi etapda shabloni 6 ta nuqtali, o'zgaruvchan koeffitsentli $a(u),$ o'ng tomoni $f(u)$ $u=u_i^{j+1/2}$ nuqtada hisoblanuvchi yana oshkormas sxema

$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^{j+1/2}}{\tau}=\frac{1}{2}(a\left(u_i^{j+1/2}\right)u_{\bar{x}}^{j+1})_{x,i}+(a\left(u_i^{j+1/2}\right)u_{\bar{x}}^{j+1})_{x,i}+f\left(u_i^{j+1/2}\right),\quad i=1..I-1. \tag{16}$$

$$u_0^{j+1}=\mu_1\left(f_{j+1}\right),\qquad u_n^{j+1}=\mu_2\left(f_{j+1}\right),$$

echiladi. Bu sxemani yechishida ham progonka usuli ishlatiladi.

(15), (16) sxemalarning approksimatsiyali $\mathrm{O}\left(\tau^2+h^2\right)$ absolyut turg'un (oshkormas sxemalar yechilmoqda).

**III bob**. **Issiqlik o’tkazish tenglamasini C++ da yechish. Olingan natijalar, yechimlarning vizual ko’rinishi.**

## 3.1 Issiqlik o’tkazish masalasini yechishni C++ dasturlash tilida tashkil etish.

Issiqlik o’tkazish tenglamasining quyidagi ko’rinishini olaylik:

$$u_t + (k(u)u_x)_x + f(x,t) = 0 \qquad (3.1.1)$$

Chegaraviy va boshlang’ich shartlar quyidagicha:

$$u(x,0) = u^0(x), \quad u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(1,0) = \mu_2(t), \qquad 0 \le t \le T, \qquad a \le x \le b.$$

Mazkur masalani hal etish uchun biz yuqoridagi boblarda keltirilgan chekli ayirmalar usulidan foydalanamiz. CHAS qurishning umumiy texnologiyasini esa biz ikkinchi bobda keltirib o’tdik. Biz oldimizga qo’ygan issiqlik o’tkazish tenglamasining sonli yechimini aniq [a,b] oraliqda ko’ramiz. Ma’lumki bizda ikkita kordinataning biri fazoviy kordinata, ikkinchisi vaqt bo’yicha kordinatadir. Fazoviy kordinatani x bilan, vaqt bo’yicha kordinatani esa t bilan belgilaymiz. Albatta issiqlik o’tkazish masalaasining yechimini ham aniq T vaqt oralig’ida ko’rish talab etiladi. Chekli ayirmali sxemalar yordamida masalalarni sonli hal etishning asosini fazoviy kordinata va vaqt bo’yicha qadam nuqtalarni topib to’rlarni qurish tashkil etadi. Dasturimizda umumiy xolda [a,b] oraliq uchun yechim olganmiz, hususy holda esa [0,1] oraliqni qaraylik. FAzoviy kordinata bo’yicha masofa $L = b - a$, vaqtning davomiyligi esa T=0.05 deb olaylik. Qadamlarni har ikki o’zgaruvchilar uchun ham 10 ga teng deb olaylik. Fazoviy kordinata bo’yicha qadam $h = \frac{L}{m}$, vaqt bo’yicha qadam $\tau = \frac{T}{n}$, xatolik esa $r = \frac{\tau}{h^2}$ ga teng deb olsak, kordinatalar bo’yicha qadam nuqtalar fazoviy kordinata bo’yicha $x_i = a + i * h$, vaqt bo’yicha qadam nuqtalarni esa $t_j = j \cdot t$ formula orqali aniqlanadi. Bizda aniq yechimni

$$ua(x,t) = (x - x^2) \cdot e^t \qquad (3.1.2)$$

korinishdagi funksiya bilan berilgan berilgan bo’lsin. Aniq yechimning tugun niuqtalarini quyidagi formulas bilan aniqlaymiz.

$$ua(x,t) = ua(x_i, t_j) \qquad (3.1.3)$$

$$g0(x) := x - x^2 \quad (3.1.4)$$

Issiqli o’tkazuvchanlik koeffitsiyenti: $p(u) = u^2$ (3.1.5)

O’ng tomon funksiya ko’rinishi:

$$f(x,t) = (x - x^2)\cdot e^t \cdot (1 - 2\cdot e^t((1-2x)^2 - (x - x^2)^2)) \quad (3.1.6)$$

Chegara funksiyalarning ko’rinishi:

$$g_1(t) = 0, g_2(t) = 0 \quad (3.1.7)$$

Yechimni qatlam bo’yicha qiymatlari:

$$u_{i,0} = g_0(x_i), u_{0,j} = g_1(t_j), u_{m,j} = g_2(t_j) \quad (3.1.8)$$

Ong tomon funksiyaning tugun qiymatlarini topamiz.

$$f_{i,j} = f(x_i, t_j) \quad (3.1.9)$$

Matritsa hosil qilamiz:

Hosil qilgan A matritsada quyidagi keltirilgsn hisoblashlarni amalga oshiramiz:

$$A_{0,0} = 1, i = 0 \ldots m, A_{0,i} = 0, A_{m,m} = 1 \quad (3.1.10)$$

$$i := 0..m-1 \; A_{m,i} := 0 \quad (3.1.11)$$

$$i := 1..m-1 \; A_{i,i-1} := r \cdot \frac{(p(u_{i-1,i}) + p(u_{i,i}))}{2} \quad (3.1.12)$$

$$A_{i,i+1} := r \cdot \frac{(p(u_{i,i}) + p(u_{i+1,i}))}{2} \quad (3.1.13)$$

$$A_{i,i} := -[1 + (A_{i,i-1} - A_{i,i+1})] \quad (3.1.14)$$

$$i := 1..m-1, \; i := 0..n, \; d_{0,j} := (t_j), \; d_{m,j} := g2(t_j) \quad (3.1.15)$$

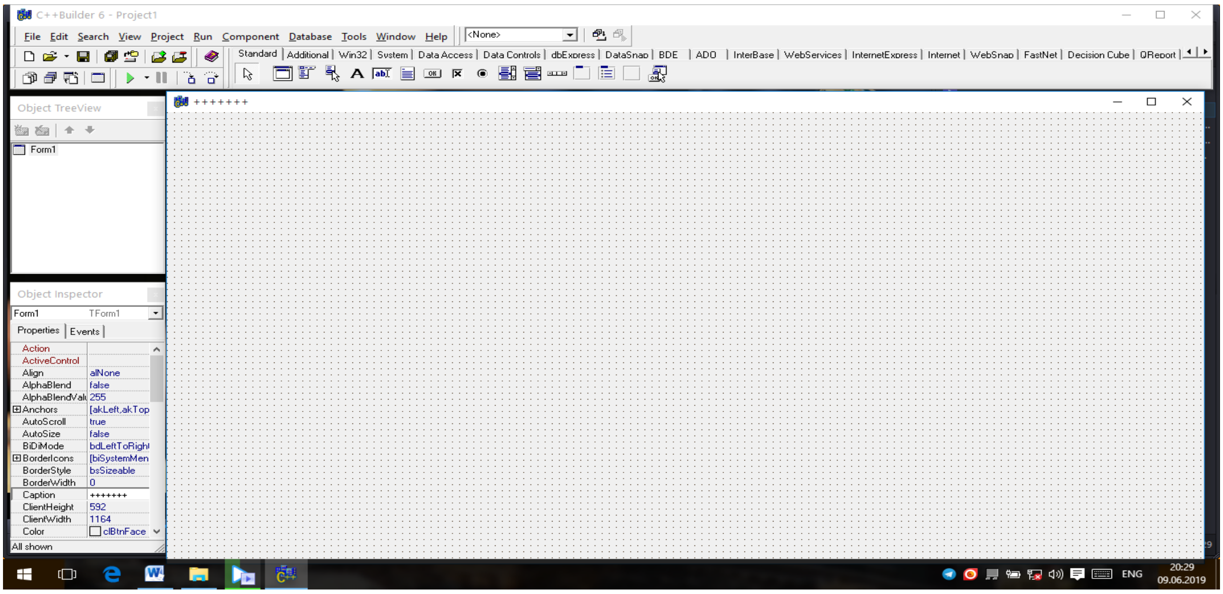
$$d_{i,j} := \tau \cdot f_{i,j} \quad (3.1.16)$$

$$j = 0..n-1, Au_{j+1} = d_j \quad (3.1.17)$$

Yuqoridagi (3.1.2- 3.1.19) formulalar orqali nochiziq parabolik tipdagi issiqlik o’tkazish tenglamasini chekli ayirmalar sxemasini yechishning matematik nuqtai nazarini yaratib beradi. Endi C++ dasturlash tili orqali ushbu nazariyani tashkil etishni qarab chiqaylik.

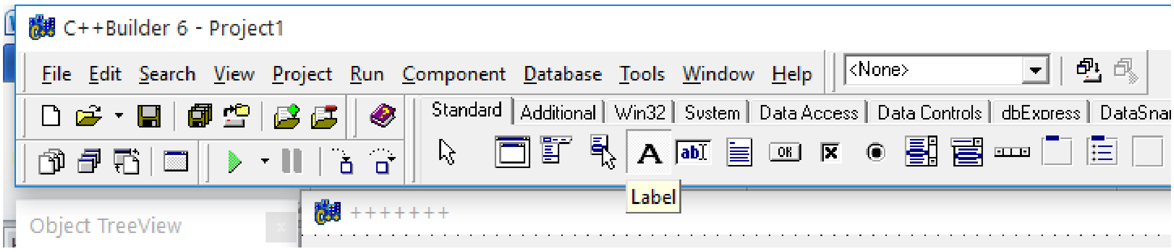
C++ Builder dasturini ishga tushiramiz:


3.1.1- rasm Puskdan C++ Builderni ishga tushirish



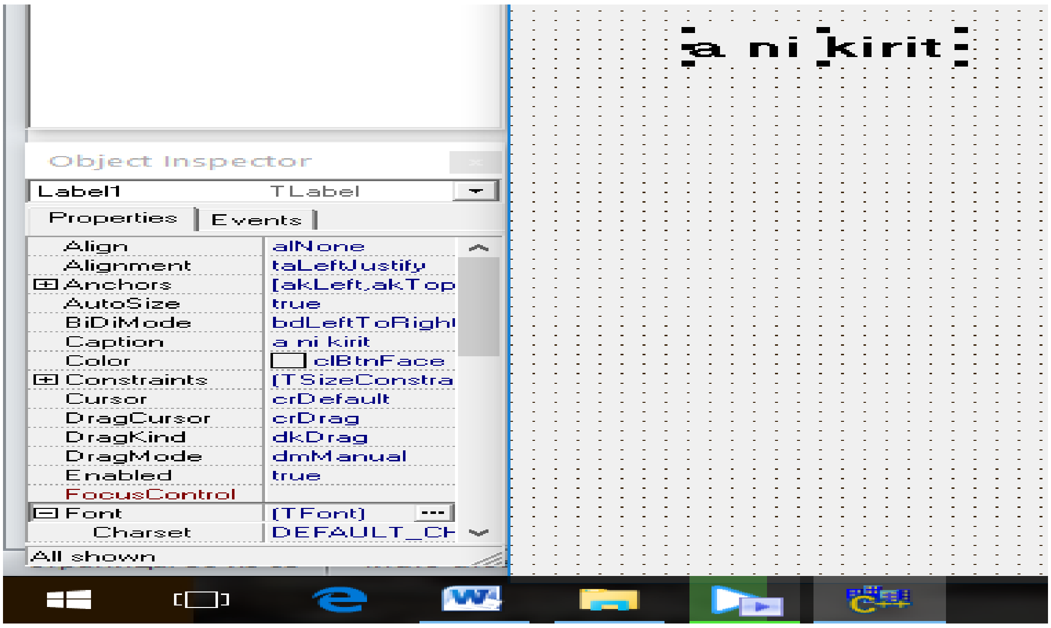

3.1.2-rasm C++ Builder oynasining umumiy ko’rinishi

Kiritiladigan o'zgaruvchilarni tavsiflash uchun formamizga Standard qurolllar panelidan Label komponentalarini joylaymiz:



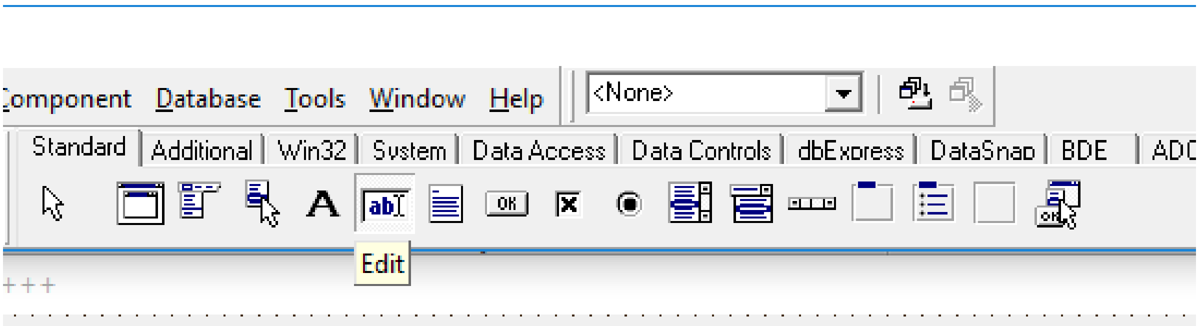

3.1.3- rasm Label komponentasini joylashtirish

Label komponentasi faqat o'zgaruvchilarni tavsiflash uchun ishlatilgani bois uning caption hususiyatini o'zgaruvchiga mos tarzda o'zgartiramiz, o'zgartirish jarayonida esa shrift turlarini tanlashd uning **Font** hususiyatidan foydalaniladi.



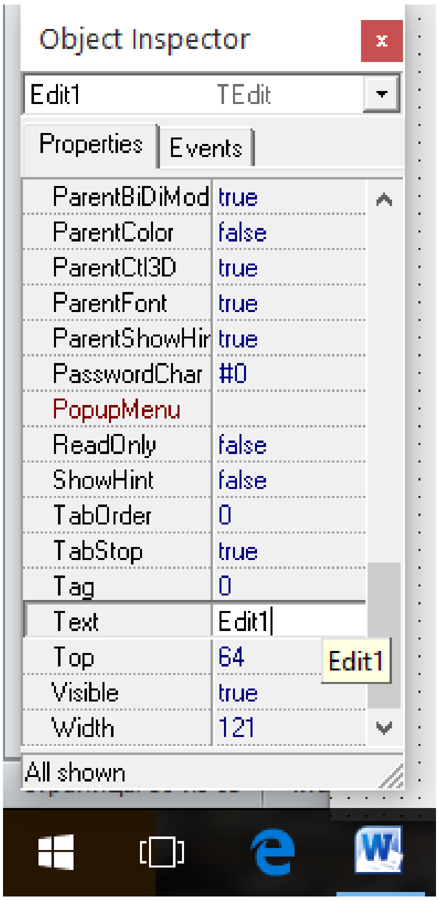

3.1.4- rasm Label komponentasining hususiyatini o'zgartirish

O'zgaruvchilarning qiymatini kiritish uchun Formaga Edit komponentasini joylashtiramiz. Ushbu komponenta ham **Standart** panelida joylashgan.



3.1.5- rasm. Edit komponentasini joylashtirish

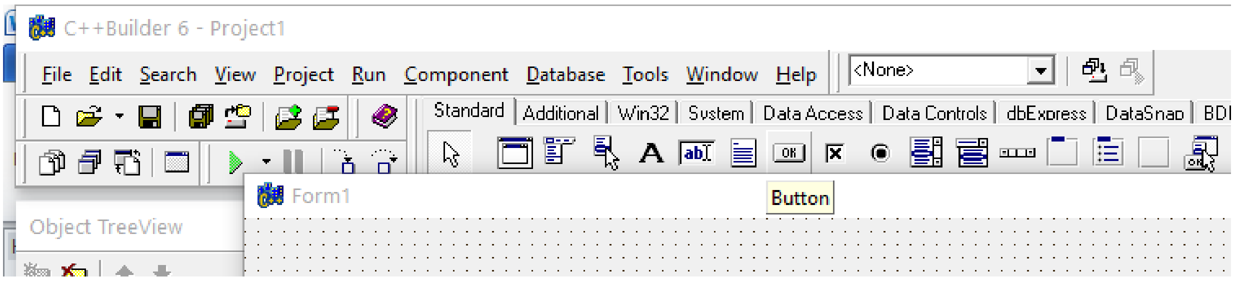
**Edit** komponentasining esa Text hususiyatini o'chirib qo'yamiz.




3.1.5- rasm Edit komponentasining text hususiyatini sozlash.

Barcha kiritiladigan o'zgaruvchilar uchun ana shunday tarzda **Label** va **Edit** komponentalarini joylaymiz.

Hisoblashlarni amalga oshirish uchun Formaga bitta **Button** tugmasini joylashtiramiz.

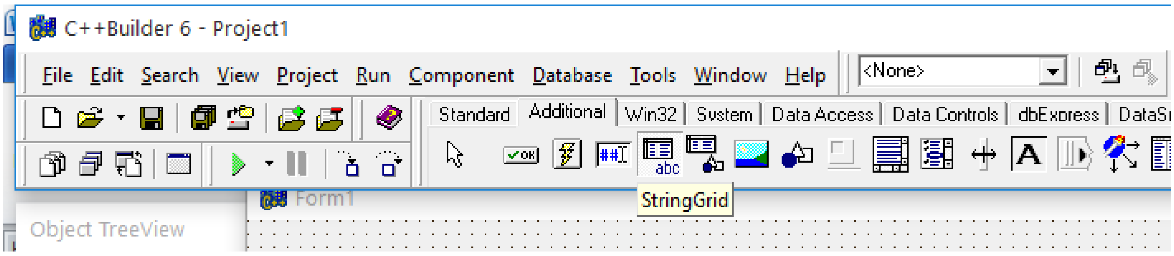



3.1.6- rasm Formaga Button tugmasini joylashtirish.

Button tugmasining **caption** hususiyatini o'zgartiramiz.

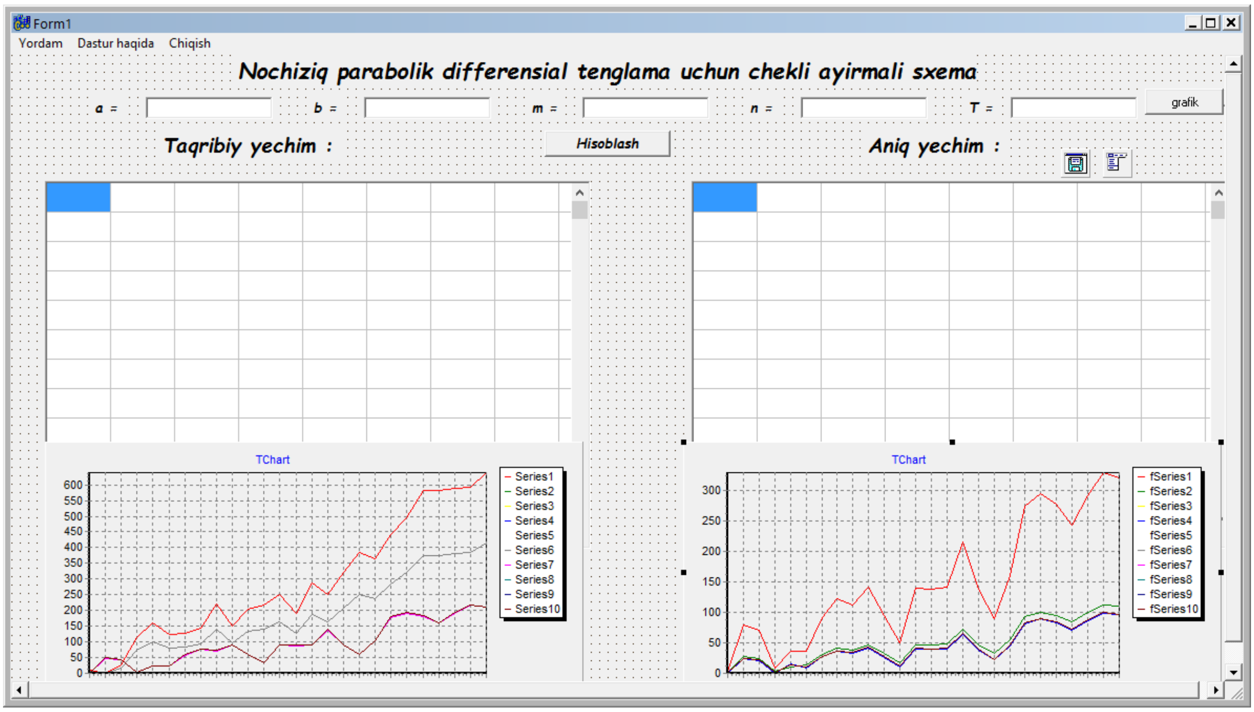
Yechimlarni sonli holatda jdvalga chiqarishimizga to'g'ri keladi. Buning uchun formaga string grid komponentasini joylashtiramiz.

**StringGrid** komponentasi esa **Additional** qurollar panelida joylashgan.




3.1.7- rasm. StringGrid komponentasini joylashtirish

Yechimlarimiz ikkita jadvalga chiqariladi va ularning biri aniq, ikkinchisi taqribiy yechimning qiymatlari jadvali. Chegara qiymatlari turlicha, to'rning bo'linishlari soni ham o'zgaruvchan bo'lganligi uchun har bir hisoblashni ".xls" kengaytmali Excel fayli ko'rinishida saqlab boramiz. Bujarayonni tashkiletish uchun formaga bitta "Save dialog" va bitta "button" tugmasini joylaymiz. Buning uchun quyidagi dastur kodi parchasini kiritamizyidagi dastur kodini




3.1.8- rasm. Dastur oynasining umumiy ko'rinishi

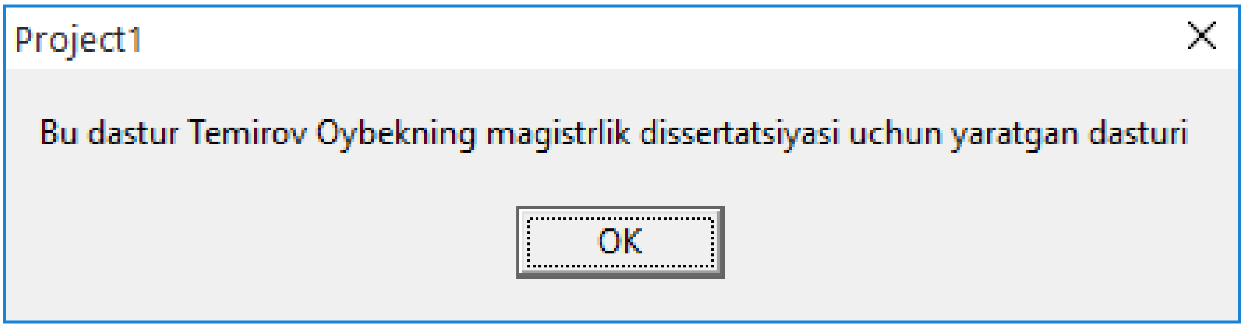
Biz kiritadigan o'zgaruvchilar bu yerda fazoviy kordinata bo'yicha oraliqning chegaralari, a va b , vaqt va fazoviy kordinatalarning bo'linishlar soni m,n va T vaqt davomiyligi.

Edit komponentalariga kiritiladigan qiymatlarni satrdan songa o'girish uchun

a = StrToFloat(Edit1->Text);

```
b = StrToFloat(Edit2->Text);
m = StrToFloat(Edit3->Text);
n = StrToFloat(Edit4->Text);
T = StrToFloat(Edit5->Text);
```

Ko'rinishida kod kiritamiz.




3.1.9- rasm Dastur haqida bandi ma'lumoti

## 3.2 Olingan natijalar va ularning qiyosiy tahlili

Kordinataning chegara qiymatlari, vaqt va kordinata bo'yicha bo'linishlar soni, vaqt davomiyligi kiritilganidan so'ng dastur ikkita yechimni qiymatlarni to'rda hisoblab so'ng uni jadvalga beradi. Aniq yechimni hisoblash hamda uni jadvalga chiqarish uchun quyidagi kod yoziladi:

```
for (i = 0; i <=m; i ++)
 {
  x[i] = a + i * h;
  for (j = 0; j <= n; j ++)
  {
        t[j] = j * tao;
        ua[i][j] = (x[i]-x[i]*x[i])*exp(t[j]);
        f[i][j] =  (x[i]-x[i]*x[i])*exp(t[j])*
        (1-2*exp(2*t[j])*(pow(1-2*x[i],2)-pow(x[i]-x[i]*x[i],2)));
  }
 }
 for(i=1;i<=m;i++)
```

```
for(j=1;j<=n;j++)
  StringGrid2->Cells[i][j] = ua[i-1][j-1];
```

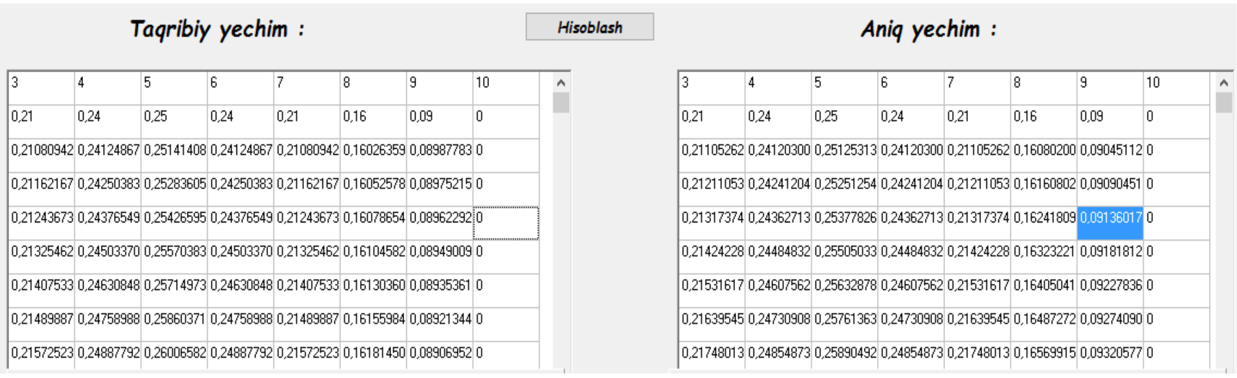
Taqribiy yechimni hisoblash jarayoni esa chekli ayirmali sxemalarni qurish va ularni progonka usuli bilan xal etishni talab qiladi. Progonka usulida taqribiy yechimni topish uchun quyidagi dastur parchasini kiritamiz:

```
for(i=0;i<=m;i++)
        u[i][0]=u0(x[i]);
  for(j=0;j<=n;j++){
        u[0][j]=mu1(t[j]);
        u[m][j]=mu2(t[j]);
  }
  for(j=1;j<=n-1;j++){
          Alfa[0]=0;
          Betta[0]=1;
          Gamma[0]=0;
          d[0][j]=mu1(t[j]);
  for(i=1;i<=m-1;i++)   {
  A[i]=-1/2*(ku(u[i][j-1])+ku(u[i-1][j-1]));
  }
   for(i=1;i<=m-1;i++)
   {
        Alfa[i]=-tao*A[i]/(h*h);
        Betta[i]=1+tao*(A[i]+A[i+1])/(h*h);
        Gamma[i]=Alfa[i];
     d[i][j]=u[i][j-1]+tao*fu(x[i],t[j]);
  }
  Alfa[m]=0;
  Betta[m]=1;
  Gamma[m]=0;
  for(i=0;i<=m-1;i++){
```

```
            Nyu[i+1]=-Gamma[i]/(Alfa[i]*Nyu[i]+Betta[i]);
            Omega[i+1]=(d[i][j]-Alfa[i]*Omega[i])/(Alfa[i]*Nyu[i]+Betta[i]);
            }
            u[m][j]=Omega[m];
            for(i=m-1;i>0;i--){
              u[i][j]=Nyu[i+1]*u[i+1][j]+Omega[i+1];
        }  }
  for(i=1;i<=m;i++)
            for(j=1;j<=n;j++)
             StringGrid1->Cells[i][j] = u[i-1][j-1];
```

Dasturni ishga tushirish uchun F9 funksional tugmasidan foydalanamiz. Qiymatlarni kiritamiz va quyidagi yechimlarg ega bo’lamiz.

Yechimning jadval ko’rinishi:



Taqribiy yechim :

| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,21 | 0,24 | 0,25 | 0,24 | 0,21 | 0,16 | 0,09 | 0 |
| 0,21080942 | 0,24124867 | 0,25141408 | 0,24124867 | 0,21080942 | 0,16026359 | 0,08987783 | 0 |
| 0,21162167 | 0,24250383 | 0,25283605 | 0,24250383 | 0,21162167 | 0,16052578 | 0,08975215 | 0 |
| 0,21243673 | 0,24376549 | 0,25426595 | 0,24376549 | 0,21243673 | 0,16078654 | 0,08962292 | 0 |
| 0,21325462 | 0,24503370 | 0,25570383 | 0,24503370 | 0,21325462 | 0,16104582 | 0,08949009 | 0 |
| 0,21407533 | 0,24630848 | 0,25714973 | 0,24630848 | 0,21407533 | 0,16130360 | 0,08935361 | 0 |
| 0,21489887 | 0,24758988 | 0,25860371 | 0,24758988 | 0,21489887 | 0,16155984 | 0,08921344 | 0 |
| 0,21572523 | 0,24887792 | 0,26006582 | 0,24887792 | 0,21572523 | 0,16181450 | 0,08906952 | 0 |

Hisoblash

Aniq yechim :

| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,21 | 0,24 | 0,25 | 0,24 | 0,21 | 0,16 | 0,09 | 0 |
| 0,21105262 | 0,24120300 | 0,25125313 | 0,24120300 | 0,21105262 | 0,16080200 | 0,09045112 | 0 |
| 0,21211053 | 0,24241204 | 0,25251254 | 0,24241204 | 0,21211053 | 0,16160802 | 0,09090451 | 0 |
| 0,21317374 | 0,24362713 | 0,25377826 | 0,24362713 | 0,21317374 | 0,16241809 | 0,09136017 | 0 |
| 0,21424228 | 0,24484832 | 0,25505033 | 0,24484832 | 0,21424228 | 0,16323221 | 0,09181812 | 0 |
| 0,21531617 | 0,24607562 | 0,25632878 | 0,24607562 | 0,21531617 | 0,16405041 | 0,09227836 | 0 |
| 0,21639545 | 0,24730908 | 0,25761363 | 0,24730908 | 0,21639545 | 0,16487272 | 0,09274090 | 0 |
| 0,21748013 | 0,24854873 | 0,25890492 | 0,24854873 | 0,21748013 | 0,16569915 | 0,09320577 | 0 |

3.1.10- rasm. Yechimning jadval umumiy ko’rinishi

Quyida olingan taqribiy va aniq yechimlarning jadval ko’rinishidagi holatini qarab chiqamiz. Bu ikkita yechimlar orasidagi alohidalilik , ya’ni tugun nuqtalarning farqi dastur bergan natijalarning xatoligini bildiradi, Va ma’lumki chekli ayirmali sxemalarda bu xatolik fazoviy kordinata bo’yicha qadam h ning kvadratiga teng.

**Taqribiy yechim :**

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,13888888 | 0,22222222 | 0,25 | 0,22222222 | 0,13888888 | 0 |
| 1 | 0 | 0,13905528 | 0,22385710 | 0,25236556 | 0,22385710 | 0,13905528 | 0 |
| 2 | 0 | 0,13921463 | 0,22550370 | 0,25475315 | 0,22550370 | 0,13921463 | 0 |
| 3 | 0 | 0,13936673 | 0,22716209 | 0,25716299 | 0,22716209 | 0,13936673 | 0 |
| 4 | 0 | 0,13951136 | 0,22883232 | 0,25959530 | 0,22883232 | 0,13951136 | 0 |
| 5 | 0 | 0,13964833 | 0,23051447 | 0,26205033 | 0,23051447 | 0,13964833 | 0 |
| 6 | 0 | 0,13977743 | 0,23220860 | 0,26452828 | 0,23220860 | 0,13977743 | 0 |

3.1.11- rasm Taqribiy yechimning ko'rinishi

**Aniq yechim :**

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,13888888 | 0,22222222 | 0,25 | 0,22222222 | 0,13888888 | 0 |
| 1 | 0 | 0,14005113 | 0,22408181 | 0,25209203 | 0,22408181 | 0,14005113 | 0 |
| 2 | 0 | 0,14122310 | 0,22595696 | 0,25420158 | 0,22595696 | 0,14122310 | 0 |
| 3 | 0 | 0,14240487 | 0,22784780 | 0,25632878 | 0,22784780 | 0,14240487 | 0 |
| 4 | 0 | 0,14359654 | 0,22975446 | 0,25847377 | 0,22975446 | 0,14359654 | 0 |
| 5 | 0 | 0,14479818 | 0,23167709 | 0,26063672 | 0,23167709 | 0,14479818 | 0 |
| 6 | 0 | 0,14600987 | 0,23361579 | 0,26281777 | 0,23361579 | 0,14600987 | 0 |

3.1.12-rasm aniq yechim jadvali ko'rinishi

Yechimlarni solishtirish imkoni uchun ularni biro qatlamdagi qiymatlarini bitta jadvalga oylashtiramiz

| Taqribiy yechim | Aniq yechim |
|---|---|
| 0,09 | 0,09 |
| 0,0898778300038643 | 0,0904511268773461 |
| 0,0897521538749656 | 0,0909045150375751 |

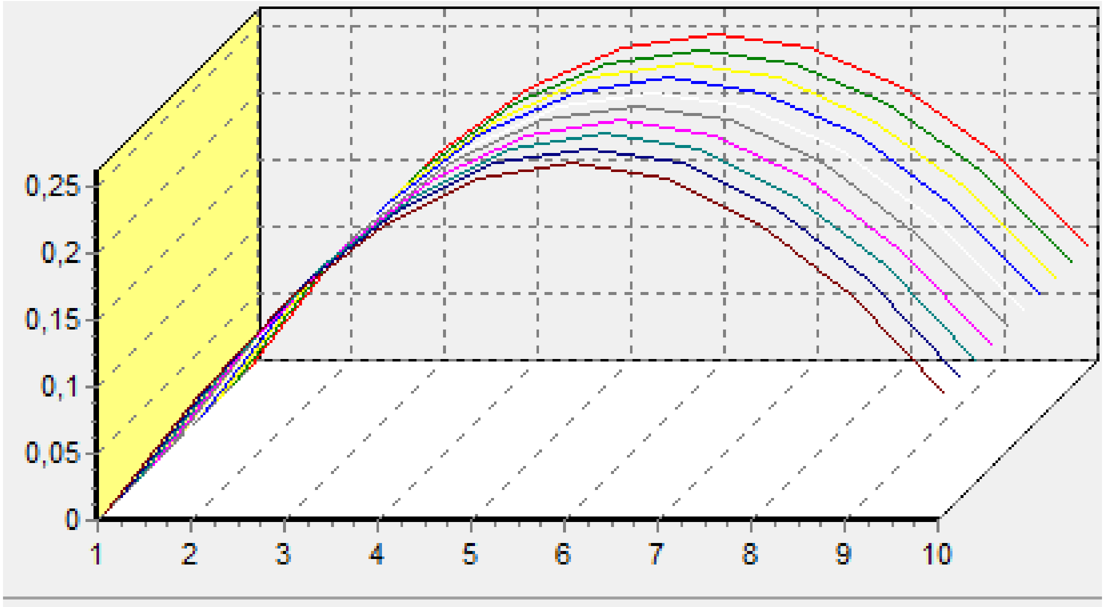
| | |
|---|---|
| 0,0896229249560379 | 0,0913601758154147 |
| 0,089490096063659 | 0,091818120602408 |

3.2.1- jadval Aniq va taqribiy yechimlar

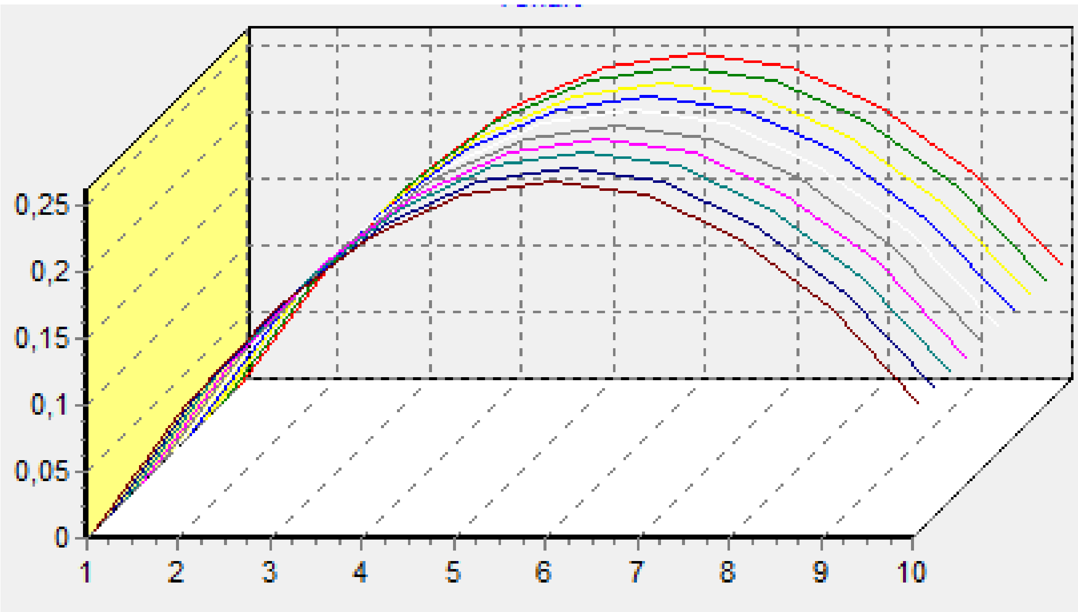
Yechimlarning absolyut xatoligini ko’rsak o’rtacha **0,001158** ga teng bo’ladi. Vizuallashtirish bu ularning yechimlarini jadval hamda grafik ko’rinishlarini yaratishdir. Yechimlarimizning grafiklarini yaratamiz. Yechimlar grafiklarni hosil qilish uchun formaga **Tchart** komponentalarini joylaymiz. Bitta **grafik** degan tugma joylaymiz**.** Bu tugmaga quyidagi kodni yozamiz:

```
int i,j,t; double x,y;

for (i=1;i<StringGrid1->RowCount-1;i++){

    for(j=1;j<StringGrid1->ColCount-1;j++) {

      y=StrToFloat(StringGrid1->Cells[j][i]);

    if (i==1) Series1->AddXY(j,y,"",clBlack);

    if (i==2) Series2->AddXY(j,y,"",clGreen);

    if (i==3) Series3->AddXY(j,y,"",clRed);

    if (i==4) Series4->AddXY(j,y,"",clMaroon);

    if (i==5) Series5->AddXY(j,y,"",clYellow);

    if (i==6) Series6->AddXY(j,y,"",clRed);

    if (i==7) Series7->AddXY(j,y,"",clMaroon);

    if (i==8) Series8->AddXY(j,y,"",clYellow);

    if (i==9) Series9->AddXY(j,y,"",clRed);

    if (i==10) Series10->AddXY(j,y,"",clMaroon);                } }
```

Natija sifatida esa quyidagilarga ega bo’lamiz:




3.1.13-rasm. Taqribiy yechim grafigi




3.1.14- rasm. Aniq yechim grafigi

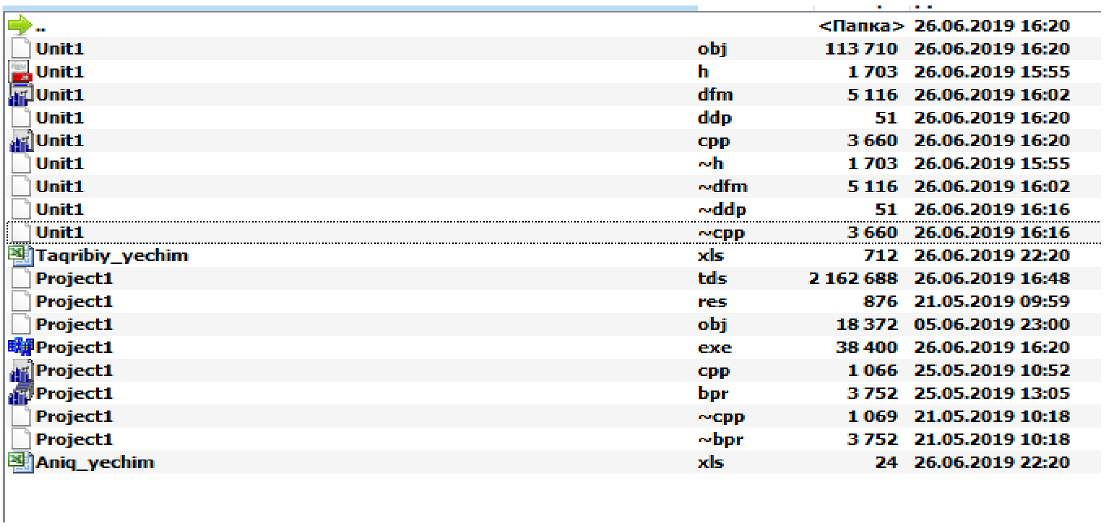
Yechimlarni vizuallashtirish jarayonining asosiy bosqichlari sifatida jadvallarni va grafiklarni aytib o'tdik.. Biz aniq va taqribiy yechimlar qiymatini Excel fayli sifatida saqlab borishni tashkil etamiz. Bu esa o'z navbatida bizga har bir hisoblashlarimiz uchun olingan natijalarni to'plashimiz imkonini yaratib beradi.

C++ Builder muhitida mazkur jarayonni tashkil etish uchun esa quyidagi dastur kodini kiritishimizga to'g'ri keladi.

```
for(int j=0; j<StringGrid1->ColCount;++j)
str+=StringGrid1->Cells[j][i]+"\t";
```

```
s1->Add(Trim(str));
str="\n\r";
}
s1->SaveToFile("taqribiy_yechim.xls");
WideString str1;
TStringList *s2=new TStringList;
for(int i=0; i<StringGrid2->RowCount;++i)
{
for(int j=0; j<StringGrid2->ColCount;++j)
str+=StringGrid2->Cells[j][i]+"\t";
s2->Add(Trim(str1));
str1="\n\r";
}
s2->SaveToFile("Aniq_yechim.xls");
delete s2;
```

Dastur oynasidagi saqlash tugmasini tanlasak aniqva taqribiy yechimlarimiz dasturni saqlagan papkamizda aniq yechim, taqribiy yechim nomlari bilan **".xls"** kengaytmada paydo bo'ladi.



| | | | |
|---|---|---|---|
| .. | | <Папка> | 26.06.2019 16:20 |
| Unit1 | obj | 113 710 | 26.06.2019 16:20 |
| Unit1 | h | 1 703 | 26.06.2019 15:55 |
| Unit1 | dfm | 5 116 | 26.06.2019 16:02 |
| Unit1 | ddp | 51 | 26.06.2019 16:20 |
| Unit1 | cpp | 3 660 | 26.06.2019 16:20 |
| Unit1 | ~h | 1 703 | 26.06.2019 15:55 |
| Unit1 | ~dfm | 5 116 | 26.06.2019 16:02 |
| Unit1 | ~ddp | 51 | 26.06.2019 16:16 |
| Unit1 | ~cpp | 3 660 | 26.06.2019 16:16 |
| Taqribiy_yechim | xls | 712 | 26.06.2019 22:20 |
| Project1 | tds | 2 162 688 | 26.06.2019 16:48 |
| Project1 | res | 876 | 21.05.2019 09:59 |
| Project1 | obj | 18 372 | 05.06.2019 23:00 |
| Project1 | exe | 38 400 | 26.06.2019 16:20 |
| Project1 | cpp | 1 066 | 25.05.2019 10:52 |
| Project1 | bpr | 3 752 | 25.05.2019 13:05 |
| Project1 | ~cpp | 1 069 | 21.05.2019 10:18 |
| Project1 | ~bpr | 3 752 | 21.05.2019 10:18 |
| Aniq_yechim | xls | 24 | 26.06.2019 22:20 |

3.1.13-rasm aniq va taqribiy yechimlar papkadagi saqlanishi

Aniq va taqribiy yechimlarni grafiklarini ko'rish uchun grafik tugmasini chertamiz. Natijada:

Issiqlik o’tkazish masalasining nochiziq hollai uchun tuzgan algoritmimiz va u asosida yaratgan dasturimiz fazoviy kordinataning turli [a,b] oralig’ida, to’rning tugun nuqtalar soni {mxn}, hamda vaqt davomiyligi T bo’lganda yechimlar jadvalini quradi va taqdim etadi, grafiklarni chizadi. Bu esa o’z navbatida MD mizning qo’yilgan vazifalarni bajarilganini, maqsadga erishilganini namoyon qiladi.

## Xulosa

Hayotdagi mavjud barcha jarayonlar o’rganilish jarayonida albatta modellashtiriladi, ana shu o’rganilayotgan model yordamida olingan natijalar esa umumiyga joriy etiladi. Filtratsiya masalalari, diffuziya masalalari, issiqlik o’tkazish masalalari esa matematik modellashtirish yordamida parabolik tipdagi differensial tenglamalarga keltiriladi. Va bu parabolik tipdagi tenglamalar chiziqli va nochiziq ko’rinishda bo’ladi. Chiziqli ko’rinishdagi tenglamalar juda ko’p hollarda real obyektdan bir qancha uzoqlashadi. Shuning uchun masalalar matematik modellashtrirish jarayonida parametrlarni inobatga olgan holda nochiziq ko’rinishdagi giperbolik yoki parabolik tipdagi tenglamalarga keltiriladi. Biz o’rgangan, aniq va taqribiy yechimlarini izlagan issiqlik o’tkazish tenglamamiz esa parabolik tipga mansub. Bizga oddiy differensial tenglamalar, matematik fizik tenglamalar, ChJMMHE kurslarid~~s~~an ma’lumki nochiziq parabolik differensial tenglamalarning har doim ham aniq yechimlarini topishning iloji yo’q. Shuning uchun bunday tenglamalarni yechishda matematikaning turli sonli usullaridan foydalaniladi. ~~Biz~~ ushbu magistrlik dissertatsiya ishini bajarish jarayonida differensial tenglamalar, ularni sonli usullar yordamida taqribiy yechimlarini . chekli ayirmali sxemalar yordamida topish algoritmi, to’rlarni qurish texnologiyalarini yoritilgan. C++ dasturlash tilida dastur ishlab chiqilgan, olingan natijalarni jadval ko’rinishida aks ettiriladi, natijalarning aniq va taqribiy yechimlarni jadvallar yordamida vizuallashtirildi. Yechimlarning jadval qiymatlarini Excelga eksport qilib Excelning o’zida grafiklari qurildi hamda qilingan ishlar natijasida dissertatsiya doirasida qo’yilgan vazifalar bajarildi deya ayta olamiz.

# FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR


1 Sh.M. Mirziyoev . “Erkin va farovon, demokratik O`zbekiston davlatini birgalikda barpo etamiz. O`zbekiston Respublikasi Prezidenti lavozimiga kirishish tantanali marosimiga bag`ishlangan Oliy Majlis palatalarining qo`shma majlisdagi nutq” – Toshkent: << O`zbekiston>> NMIU, 2016. – 56 bet. //13 betda

**2** Sh. Mirziyoyev**.** **“**2017 - 2021 yillarda O’zbekiston Respublikasini rivojlantirishning beshta ustuvor yo’nalishi bo’yicha harakatlar strategiyasi” PF-4947 O`zbekiston Respublikasi Prezidenti Toshkent Shahar. 2017 – yil 7- fevral. 4947 – sonli qarori.

3 Karimov I.A. “Xavfsizlik va barqaror taraqqiyot yo’lidan”. Asarlar, 6-jild. –T.: O’zbekiston, 1998. –429 b.

4 Karimov. I.A "Barkamol avlod-orzusi" T.: "O'zbekiston milliy kutubxonasi" 2000 - yil 159 - 160 b.

5 Karimov I.A. “Yuksak ma'naviyat - yengilmas kuch”. Toshkent: Ma'naviyat, 2008. 142-b

6 Karimov.I.A. "O'zbekiston mustaqillikga erishish ostonasida" T.: O'qituvchi 2011 - yil 273 - 275 b.

7 А. А. Самарский, С. П. Курдюмов, В. А. Галактионов, А. П. Михайлов Режимы с обострением для квазилинейных параболических уравнений. М: Наука 1987.-477с

8 A. Samarskii, G. G. Elenin, N. V. Zmitrenko, S. P. Kurdyumov and A. P. Mikhailov, *The burning of a nonlinear medium in the form of a complex structure.* Soviet Phys. Dokl. 22 (1977), 737–739

9 Арипов М.М. Метод эталонных уравнений для решений нелинейных краевых задач. – Ташкент: ФАН, 1988. 137с.

10 Арипов М.М. Некоторые методы исследования нелинейных задач. //Узбекский Математический журнал. 1999. №6. с.91-93.

11 Bob Swart, Mark Cashman, Paul Gustavson and Jarrod Hollingworth “Borland C++Builder 6 Developer’s Guide” //

12 Begmatov A. H. Ochilov Z. H. “Matematik fizika tenglamalari” O’quv- uslubiy majmua Samarqand - 2013, 552 b.
13 Бицадзе А. В. Калинеченко Д. Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. М. 1977 . 312 С.
14 Говорухин В. Цибулин В. Компютер в математическом исследовании.
15 Imomov A. Xisoblash usullari, 2- qism. N.: NamDU, 2009.
16 Isroilov M.I. Xisoblash usullari – Toshkent: O’qituvchi 1- qism, 2002.
17 Жумаев З.Ш. «Чегаравий қатлам назарияси» фанидан маърузалар матни. Бухоро, 2003.
18 Жумаев Ж., Расулов И. Дастурлаш. Услубий қўлланма. Бухоро-2008.
19 Salohiddinov M. S. Matematik fizika tenglamalari, T. “Ozbekiston”, 2002, 448 b.
20 Salohiddinov M. S., Islomov B. I. Matematik fizika tenglamalari fanidan masalalar to’plami, T. “Mumtoz so’z” , 2010, 372 b.
21 Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений Москва «Наука» 1978
22 Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – Москва: Наука. 1989. 430с.
23 Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. – М.: Наука, 1987, 480с
24 Самарский А.А., Соболь И.М. Примеры численного расчета температурных волн. // ЖВМ и МФ. 1963. т.3, № 4, с.702-719
25 Сергей Бобровский “Технологии C++ Builder”
26 Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука. 1972, 724с.

ILOVALAR

```
//---------------------------------------------------------------------------

#include <vcl.h>
#pragma hdrstop
#include "Unit1.h"
#include<math.h>
//---------------------------------------------------------------------------
#pragma package(smart_init)
#pragma resource "*.dfm"
int i, j, m, n ;
double a,b,L,T,h,tao,r;
double x[100],t[100],ua[100][100],u[100][100],f[100][100],A[100],d[100][100];
TForm1 *Form1;
//---------------------------------------------------------------------------
__fastcall TForm1::TForm1(TComponent* Owner)
        : TForm(Owner)
{
}
//---------------------------------------------------------------------------

void __fastcall TForm1::Yordam1Click(TObject *Sender)
{
   ShowMessage("a va b o`zgaruchilar chegara qiymatlari, T - vaqt birligi");
}
//---------------------------------------------------------------------------
void __fastcall TForm1::Dasturhaqida1Click(TObject *Sender)
{
  ShowMessage("Bu dastur Temirov Oybekning magistrlik dissertatsiyasi uchun yaratgan dasturi");
```

```
}
//---------------------------------------------------------------------------

void __fastcall TForm1::Chiqish1Click(TObject *Sender)
{
  Close();
}
//---------------------------------------------------------------------------

double mu1(double x1)
{
        double temp=0;
        return temp;
}
double mu2(double x1)
{
        double temp=0;
        return temp;
}
double u0(double x1)
{
        double temp=(x1-x1*x1);
        return temp;
}
double ku(double x1)
{
        double temp=x1*x1;
        return temp;
}
```

```
double fu(double x1,double t1)
{
	double	temp=(x1-x1*x1)*exp(t1)*(1-2*exp(t1)*((1-2*x1)*(1-2*x1)-(x1-x1*x1)*(x1-x1*x1)));
	return temp;
}
void __fastcall TForm1::Button1Click(TObject *Sender)
{
a = StrToFloat(Edit1->Text);
b = StrToFloat(Edit2->Text);
m = StrToFloat(Edit3->Text);
n = StrToFloat(Edit4->Text);
T = StrToFloat(Edit5->Text);
L = b - a;
h = L / m;
tao = T / n;
r = tao / (h * h);
m++;
n++;

for (i = 0; i <=m; i ++)
  {
   x[i] = a + i * h;
   for (j = 0; j <= n; j ++)
   {
	t[j] = j * tao;
	ua[i][j] = (x[i]-x[i]*x[i])*exp(t[j]);
	f[i][j] =  (x[i]-x[i]*x[i])*exp(t[j])*
	(1-2*exp(2*t[j])*(pow(1-2*x[i],2)-pow(x[i]-x[i]*x[i],2)));
   }
```

```
}
for(i=1;i<=m;i++)
        for(j=1;j<=n;j++)
          StringGrid2->Cells[i][j] = ua[i-1][j-1];


          for(i=1;i<=m;i++)
                  {
                   StringGrid2->Cells[i][0] = i-1;
                   StringGrid2->Cells[0][i] = i-1;
                   }
 for(i=0;i<=m;i++)
          u[i][0]=u0(x[i]);
 for(j=0;j<=n;j++){
          u[0][j]=mu1(t[j]);
          u[m][j]=mu2(t[j]);
 }
 for(j=1;j<=n-1;j++){
                  Alfa[0]=0;
                  Betta[0]=1;
                  Gamma[0]=0;
                  d[0][j]=mu1(t[j]);
 for(i=1;i<=m-1;i++)   {
 A[i]=-1/2*(ku(u[i][j-1])+ku(u[i-1][j-1]));
 }
  for(i=1;i<=m-1;i++)
  {
        Alfa[i]=-tao*A[i]/(h*h);
        Betta[i]=1+tao*(A[i]+A[i+1])/(h*h);
        Gamma[i]=Alfa[i];
      d[i][j]=u[i][j-1]+tao*fu(x[i],t[j]);
```

```
  }
  Alfa[m]=0;
  Betta[m]=1;
  Gamma[m]=0;
  for(i=0;i<=m-1;i++){
        Nyu[i+1]=-Gamma[i]/(Alfa[i]*Nyu[i]+Betta[i]);
        Omega[i+1]=(d[i][j]-Alfa[i]*Omega[i])/(Alfa[i]*Nyu[i]+Betta[i]);
        }
        u[m][j]=Omega[m];
        for(i=m-1;i>0;i--){
              u[i][j]=Nyu[i+1]*u[i+1][j]+Omega[i+1];
        }   }
  for(i=1;i<=m;i++)
        for(j=1;j<=n;j++)
         StringGrid1->Cells[i][j] = u[i-1][j-1];

        for(i=1;i<=m;i++)
              {
               StringGrid1->Cells[i][0] = i-1;
               StringGrid1->Cells[0][i] = i-1;
               }

}
//---------------------------------------------------------------------------

void __fastcall TForm1::Button2Click(TObject *Sender)
{
WideString str;
TStringList *s1=new TStringList;
for(int i=0; i<StringGrid1->RowCount;++i)
```

```
{
for(int j=0; j<StringGrid1->ColCount;++j)
str+=StringGrid1->Cells[j][i]+"\t";
s1->Add(Trim(str));
str="\n\r";
}
s1->SaveToFile("taqribiy_yechim.xls");
WideString str1;
TStringList *s2=new TStringList;
for(int i=0; i<StringGrid2->RowCount;++i)
{
for(int j=0; j<StringGrid2->ColCount;++j)
str+=StringGrid2->Cells[j][i]+"\t";
s2->Add(Trim(str1));
str1="\n\r";
}
s2->SaveToFile("Aniq_yechim.xls");
delete s2;
}
//---------------------------------------------------------------------------
void __fastcall TForm1::BitBtn1Click(TObject *Sender)
{
int i,j,t; double x,y;
for (i=1;i<StringGrid1->RowCount-1;i++){
        for(j=1;j<StringGrid1->ColCount-1;j++) {
          y=StrToFloat(StringGrid1->Cells[j][i]);
        if (i==1) Series1->AddXY(j,y,"",clBlack);
        if (i==2) Series2->AddXY(j,y,"",clGreen);
        if (i==3) Series3->AddXY(j,y,"",clRed);
        if (i==4) Series4->AddXY(j,y,"",clMaroon);
```

```
        if (i==5) Series5->AddXY(j,y,"",clYellow);
        if (i==6) Series6->AddXY(j,y,"",clRed);
        if (i==7) Series7->AddXY(j,y,"",clMaroon);
        if (i==8) Series8->AddXY(j,y,"",clYellow);
        if (i==9) Series9->AddXY(j,y,"",clRed);
        if (i==10) Series10->AddXY(j,y,"",clMaroon);
                }  }
    for (i=1;i<StringGrid1->RowCount-1;i++){
        for(j=1;j<StringGrid1->ColCount-1;j++) {
          y=StrToFloat(StringGrid2->Cells[j][i]);
        if (i==1) fSeries1->AddXY(j,y,"",clBlack);
        if (i==2) fSeries2->AddXY(j,y,"",clGreen);
        if (i==3) fSeries3->AddXY(j,y,"",clRed);
        if (i==4) fSeries4->AddXY(j,y,"",clMaroon);
        if (i==5) fSeries5->AddXY(j,y,"",clYellow);
        if (i==6) fSeries6->AddXY(j,y,"",clRed);
        if (i==7) fSeries7->AddXY(j,y,"",clMaroon);
        if (i==8) fSeries8->AddXY(j,y,"",clYellow);
        if (i==9) fSeries9->AddXY(j,y,"",clRed);
        if (i==10) fSeries10->AddXY(j,y,"",clMaroon);
                }  }
                }
```