O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI

OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI

“Himoyaga ruxsat etildi”
Magistratura bo‘limi boshlig‘i,
dotsent______________G‘. A. Doliyev
“______”________________2019 yil

5A130101-“Matematika (Matematik analiz)” mutaxassislik magistranti
Tojiboyev Baxtiyor Zokirjon o‘g‘li

“**KELI DARAXTIDA QATTIQ DISKLI MODELLAR UCHUN LIMIT GIBBS O‘LCHOVLARI**”

mavzusidagi

MAGISTRLIK DISSERTATSIYA ISHI

Matematika kafedra mudiri: ______ f.-m.f.d.(DSc), prof. M.M. Raxmatullayev.

MDI raxbari: _____ f.-m.f. n.(PhD), dots. R.M.Xakimov.

NAMANGAN-2019

MUNDARIJA

K I R I S H

Hozirgi kunda xalqimizning turmush darajasini yangi bosqichga olib chiqish, davlatimizni ijtimoiy-iqtisodiy jihatdan rivojlantirishga qaratilgan keng koʻlamdagi chora-tadbirlarni qamrab olgan Harakatlar strategiyasi mavjug.Harakatlar strategiyasida ilm-fan, taʼlim-tarbiya sohalarini rivojlantirishga ham alohida oʻrin ajratilgan. Hammamiz yaxshi bilamiz, bugungi davr yuqori texnologiyalar, innovatsiyalar zamonidir. Dunyodagi rivojlangan mamlakatlar oʻz oldiga nafaqat koʻplab mahsulotlar ishlab chiqarish va ularni bozorga olib chiqishni, balki chuqur bilim va ilmiy yutuqlarga asoslangan innovatsion iqtisodiyotga oʻtish vazifasini qoʻymoqda. Yaʼni, oʻz iqtisodiyotini mavjud tabiiy resurslarni sarflash evaziga emas, innovatsion mahsulotlar yaratish, oʻzlashtirish va ilgʻor texnologiyalarni ishlab chiqarishga joriy qilish orqali rivojlantirish taraqqiyotning asosiy omiliga aylanmoqda[1].

Bugungi kunda Prezidentimiz Sh.M.Mirziyoyev tomonidan Oliy taʼlim tizimini yanada rivojlantirish boʻyicha qabul qilingan va qilinayotgan qarorlar oliy taʼlim tizimida yangi oʻzgarishlarga qaratilmoqda.

Xususan Prezidentimiz Sh.M.Mirziyoyevning 2017-yil 20-apreldagi 2909-sonli “Oliy taʼlim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari toʻgʻrisida”gi qarorida mamlakatimizda kadrlar tayyorlash tizimini yanada takomillashtirish, iqtisodiyot va ijtimoiy soha tarmoqlarini yuqori malakali mutaxassislar bilan taʼminlash, bakalavr va magistrlarni tayyorlashda ish beruvchilarning joriy va istiqboldagi extiyojlarini inobatga olgan holda son va taʼlim yoʻnalishlari uygʻunligiga erishish, oliy taʼlim muassasalari bitiruvchilari mehnatidan foydalanishni yaxshilash, shuningdek, iqtisodiyotda tarkibiy oʻzgarishlarni amalga oshirishning oʻrtacha muddatga moʻljallangan maqsadli dasturlarini joriy etish, tarmoqlarni modernizatsiya qilish, texnik va texnologik

[1] Oʻzbekiston Respublikasi prezidenti Mirziyoyev SH.M. “Milliy taraqqiyot yoʻlimizni qaʼtiyat bilan davom ettirib , yangi bosqichga koʻtaramiz”. Toshkent – “Oʻzbekiston”-2017-yil.

qayta jihozlash va diversifikatsiyalash, hududlarni kompleks ijtimoiy-iqtisodiy rivojlantirish maqsadlar ko‘zda tutigan[2].

Shu bilan birga, O‘zbekiston Respublikasi Prezidenti SH.M.Mirziyoyevning 2016 yil 8 oktyabrdagi F-4724-son farmoyishi bilan tashkil qilingan Ishchi guruh tomonidan oliy ta’lim tizimidagi holatni o‘rganish natijalariga ko‘ra, bir qator oliy ta’lim muassasalarida hali ham ilmiy-pedagogik salohiyatning pastligi, ta’lim jarayonlarini axborot-uslubiy va o‘quv adabiyotlari bilan ta’minlash zamonaviy talablarga javob bermasligi, ularning moddiy-texnika bazasini tizimli yangilashga ehtiyoj mavjudligi aniqlandi.

Bu kabi kamchiliklarni bartaraf etish maqsadida, kadrlar tayyorlash mazmunini tubdan qayta ko‘rish, xalqaro standartlar darajasiga mos oliy ma’lumotli mutaxassislar tayyorlash uchun zarur sharoitlar yaratilishini ta’minlash hamda oliy ta’lim tizimini kelgusida yanada takomillashtirish va kompleks rivojlantirish bo‘yicha eng muhim vazifalar etib quyidagilar belgilandi:

1. Har bir oliy ta’lim muassasasi jahonning yetakchi ilmiy-ta’lim muassasalari bilan yaqin hamkorlik aloqalari o‘rnatish, o‘quv jarayoniga xalqaro ta’lim standartlariga asoslangan ilg‘or pedagogik texnologiyalar, o‘quv dasturlari va o‘quv-uslubiy materiallarini keng joriy qilish, o‘quv-pedagogik faoliyatga, master-klasslar o‘tkazishga, malaka oshirish kurslariga xorijiy hamkor ta’lim muassasalaridan yuqori malakali o‘qituvchilar va olimlarni faol jalb qilish, ularning bazasida tizimli asosda respublikamiz oliy ta’lim muassasalari magistrant, yosh o‘qituvchi va ilmiy xodimlarining stajirovka o‘tashlarini, professor-o‘qituvchilarni qayta tayyorlash va malakasini oshirishni tashkil qilish;

2. Oliy ma’lumotli mutaxassislar tayyorlashning maqsadli parametrlarini shakllantirish, oliy ta’lim muassasalarida o‘qitish yo‘nalishlari va mutaxassisliklarini istiqbolda mintaqalar va iqtisodiyot tarmoqlarini kompleks

[2] SH.M. Mirziyoyev. PQ-2909 sonli “Oliy ta’lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari tog‘risida”gi qarori. 2017-yil 20-aprel.

rivojlantirish, amalga oshirilayotgan hududiy va tarmoq dasturlarining talablarini inobatga olgan holda optimallashtirish;

3. Ta’lim jarayonini, oliy ta’limning o‘quv reja va dasturlarini yangi pedagogik texnologiyalar va o‘qitish usullarini keng joriy etish, magistratura ilmiy-ta’lim jarayonini sifat jihatidan yangilash va zamonaviy tashkiliy shakllarni joriy etish asosida yanada takomillashtirish;

4. Yangi avlod o‘quv adabiyotlarini yaratish va ularni oliy ta’lim muassasalarining ta’lim jarayoniga keng tatbiq etish, oliy ta’lim muassasalarini zamonaviy o‘quv, o‘quv-metodik va ilmiy adabiyotlar bilan ta’minlash, shu jumladan, eng yangi xorijiy adabiyotlar sotib olish va tarjima qilish, axborot-resurs markazlari fondlarini muntazam yangilab borish;

5. Pedagog kadrlarning kasb mahorati sifati va saviyasini uzluksiz yuksaltirish, xorijda pedagog va ilmiy xodimlarning malakasini oshirish va stajirovkasini o‘tkazish, oliy ta’lim muassasalari bitiruvchilarini PhD va magistratura dasturlari bo‘yicha o‘qitish, oliy ta’lim muassasalari va qayta tayyorlash va malaka oshirish markazlari o‘quv jarayonlariga yuqori malakali xorijiy olimlar, o‘qituvchi va mutaxassislarni keng jalb qilish;

6. Oliy ta’lim muassasalari ilmiy salohiyatini mustahkamlash, oliy ta’limda ilm-fanni yanada rivojlantirish, uning akademik ilm-fan bilan integratsiyalashuvini kuchaytirish, oliy ta’lim muassasalari professor-o‘qituvchilarining ilmiy-tadqiqot faoliyati samaradorligi va natijadorligini oshirish, iqtidorli talaba-yoshlarni ilmiy faoliyat bilan shug‘ullanishga keng jalb etish;

7. Oliy ta’limning ma’naviy-axloqiy mazmunini oshirish, talaba-yoshlarga mustaqillik g‘oyalariga, yuksak ma’naviyat va insoniylikning milliy an’analariga sodiqlik ruhini chuqur singdirish, ularda yot g‘oya va mafkuralarga nisbatan immunitet va tanqidiy tafakkurni mustahkamlash bo‘yicha keng ko‘lamli ma’rifiy va tarbiyaviy ishlarni olib borish;

8. Oliy ta’lim muassasalari moddiy-texnika bazasini o‘quv va ilmiy-laboratoriya bino va korpuslari, sport inshootlari, ijtimoiy-muhandislik

infratuzilmasi ob’ektlarini qurish, rekonstruksiya qilish va kapital ta’mirlash, oliy ta’lim ilm-fanining ustuvor yo‘nalishlari bo‘yicha o‘quv-ilmiy laboratoriyalarini zamonaviy asbob va uskunalar bilan jihozlash orqali yanada mustahkamlash;

9. Oliy ta’lim muassasalarini zamonaviy axborot-kommunikatsiya texnologiyalari vositalari bilan jihozlash, oliy ta’lim muassasalari talabalari, o‘qituvchilari va yosh tadqiqotchilarining jahon ta’lim resurslari, zamonaviy ilmiy adabiyotlarning elektron kataloglari va ma’lumotlar bazalariga kirish imkoniyatlarini kengaytirish.

Qarorda belgilangan vazifalarning samarali yechimini to‘liq ta’minlash maqsadida oliy ta’lim darajasini sifat jihatidan oshirish va tubdan takomillashtirish, oliy ta’lim muassasalari moddiy-texnika bazasini mustahkamlash va modernizatsiya qilish, ularni zamonaviy o‘quv-ilmiy laboratoriyalari, axborot-kommunikatsiya texnologiyalari bilan jihozlash maqsadida Oliy ta’lim tizimini 2017-2021 yillarga mo‘ljallangan kompleks rivojlantirish dasturi tasdiqlandi. Dasturga muvofiq, 2017-2021 yillarda 48 ta oliy ta’lim muassasasida jami 180 ta o‘quv, ilmiy-laboratoriya binosi, sport inshootlari va ijtimoiy-muhandislik infratuzilmalari ob’ektlarida qurilish, rekonstruksiya va kapital ta’mirlash ishlari olib boriladi. SHuningdek, 53 ta oliy ta’lim muassasasida 400 ta o‘quv laboratoriyasi bosqichma-bosqich eng zamonaviy o‘quv-laboratoriya uskunalari bilan jihozlanadi, 7 ta oliy ta’lim muassasasida barcha oliy ta’lim muassasalari o‘zaro hamkorlikda foydalanadigan ilmiy laboratoriyalar tashkil etiladi. Qarorning muhim ahamiyatini ko‘rsatadigan yana bir jihat shundan iboratki, mamlakatimiz Prezidenti tomonidan har bir oliy ta’lim muassasasi bo‘yicha quyidagi konkret parametr va ko‘rsatkichlarni o‘z ichiga olgan manzilli rivojlantirish dasturlari tasdiqlandi:

1.Oliy ta’lim tizimida yangi ta’lim ixtisoslik yo‘nalishlari va mutaxassisliklarning, shuningdek, iqtisodiyot sohalari va hududlarni kompleks rivojlantirishning joriy va istiqboldagi ehtiyojlaridan kelib chiqqan holda ishlab chiqilgan va bakalavriat va magistraturaga talabalar qabul qilishning umumiy ko‘rsatkichlarini 2021 yilgacha bosqichma-bosqich ravishda 18 foizgacha oshirishni nazarda tutadigan 2017-2021 yillarga mo‘ljallangan parametr va ko‘rsatkichlari;

2.O‘quv binolari, talabalar turar-joylari, axborot-resurs markazlari va boshqa ob’ektlarni qurish, rekonstruksiya qilish va kapital ta’mirlash hisobidan yangi o‘quv o‘rinlarini tashkil etish, yangi o‘quv-laboratoriya komplekslarini sotib olish, auditoriyalarni kompyuter texnikasi bilan jihozlash;

3.Professor-o‘qituvchilarning kasb mahoratini, pedagog xodimlarning malakasini oshirish, shuningdek, ularning xorijiy hamkor oliy o‘quv yurtlarida malaka oshirishi,magistratura,doktoranturada ta’lim olishi,hamda respublikamizning tayanch oliy o‘quv yurtlari qoshida qayta tayyorgarlikdan o‘tishi va malaka oshirishi.

Mazkur dasturda asosan mamlakatimizning har bir oliy ta’lim muassasasi bilan AQSH, Buyuk Britaniya, Fransiya, Italiya, Niderlandiya, Rossiya, Yaponiya, Janubiy Koreya, Xitoy va shu kabi boshqa davlatlarning etakchi ilmiy-ta’lim muassasalari bilan hamkorlik aloqalarining o‘rnatilgani o‘ta muhim ahamiyat kasb etadi. Shu asosda har yili 350 nafardan ortiq xorijlik olimlarning mamlakatimiz oliy o‘quv yurtlariga o‘quv jarayoniga jalb etilishi ko‘zda tutilmoqda.

Amaliyot shuni ko‘rsatmoqdaki, oliy ta’lim muassasalari pedagog xodimlarining mehnatiga haq to‘lash bo‘yicha amaldagi tizimni jiddiy takomillashtirish va bu borada moddiy rag‘batlantirishning yangi mexanizmlarini joriy etishga ehtiyoj sezilmoqda. SHu munosabat bilan O‘zbekiston Respublikasining Moliya vazirligi, Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi, Mehnat vazirligi, Sog‘liqni saqlash vazirligi va Xalq ta’lim vazirligiga uch oy muddatda ilg‘or xalqaro tajribadan kelib chiqib, oliy o‘quv yurtlari pedagog xodimlariga ularning kasb mahorati, faoliyatidagi yuqori natijadorlik va tarbiyaviy sohadagi samarali ishtirokini inobatga olib, ustama haq to‘lashni belgilash tizimi bo‘yicha Vazirlar Mahkamasiga takliflar kiritish vazifasi topshirildi.

Qarorga muvofiq, Vazirlar Mahkamasiga ikki oy muddatda iqtidorli yosh pedagog va ilmiy xodimlarning malakasini oshirish bo‘yicha O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining “Iste’dod” jamg‘armasi faoliyatini tubdan qayta ko‘rib chiqish, xorijiy ta’lim muassasalari va ilmiy markazlarida ilmiy-pedagog xodimlarning malaka oshirishi va qayta tayyorgarlikdan o‘tishini, oliy ta’lim muassasalari bitiruvchilarining PhD dasturi va ularning magistraturada o‘qishini tashkil etish bo‘yicha chora-tadbirlar ko‘zda tutilgan takliflar kiritish topshirilmoqda.

Ta’kidlash joizki, oliy ta’lim muassasalarining ilmiy salohiyatini mustahkamlash maqsadida korxonalarning buyurtmasiga asosan amaliy va innovatsion ilmiy-tadqiqot va tajriba-konstruktorlik faoliyatini amalga oshiradigan ta’lim va ilmiy-tadqiqot muassasalari yuridik shaxslardan olinadigan daromad solig‘idan, yagona soliq to‘lovidan, maqsadli davlat jamg‘armalariga majburiy to‘lov va qo‘shimcha qiymat solig‘idan ozod qilindi. Ta’lim-tarbiy a jarayonlarining sifati ustidan samarali davlat nazoratini o‘rnatish maqsadida Vazirlar Mahkamasi huzurida Ta’lim sifatini nazorat qilish bo‘yicha davlat inspeksiyasi tashkil etiladi. Uning asosiy vazifasi – ta’lim-tarbiya jarayoni, professor-o‘qituvchilar tarkibi, ta’lim tizimida kadrlar tayyorlash va ularning malakasini oshirish sifati hamda ta’lim muassasalarini attestatsiya va davlat akkreditatsiyasidan o‘tkazish, ta’lim-tarbiya sifatini nazorat qilish bo‘yicha davlat siyosatini amalga oshirishdan iborat.

Oliy ta’lim tizimini 2017-2021 yillarga mo‘ljallangan kompleks rivojlantirish dasturini amalga oshirish uchun yo‘naltiriladigan moliyaviy mablag‘lar 1,7 trillion so‘mdan ziyod bo‘lib, ulardan 1,2 trillion so‘mi o‘quv-laboratoriya binolari, sport zallari va talabalar turar-joylarini rekonstruksiya qilish va kapital ta’mirlashga, 500 milliard so‘mdan ortiq mablag‘ esa o‘quv - laboratoriya uskunalari, mebel va inventar bilan ta’minlash, umumiy tartibda foydalanishga mo‘ljallangan, barcha ta’lim muassasalariga xizmat ko‘rsatadigan laboratoriya komplekslarini tashkil etish hamda axborot- kommunikatsiya texnologiyalarini rivojlantirishga sarflanadi.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining “Oliy ta’lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi qarori uzluksiz ta’lim tizimini rivojlantirish, mamlakatimizning izchil rivojlanib borayotgan iqtisodiyotini yuqori malakali kadrlar bilan ta’minlash, barcha hududlar va tarmoqlarni strategik jihatdan kompleks rivojlantirish masalalarini hal qilish borasida oliy ta’lim tizimi ishtirokini kengaytirish yo‘lidagi yana bir muhim amaliy qadamdir[3].

Endi – matematikaning o‘tmishi, xozirgi kuni va kelajagi haqida biroz to‘xtalib o‘tamiz.

Matematika fani insoniyat hayotida eng asosiy ahamiyat kasb etuvchi fan ekani butun dunyo tan olgandir. Uning har bir kishi uchun har soniyada zarur ekani ravshan, undan hamma u yoki – bu darajada foydalanadi, lekin ushbu jarayonni o‘zi anglab yetmaydi. Bunga misol qilib vaqt o‘lchovini, kundalik harajatlarni, o‘qiladigan fanlar va darslar soni, mavzular, transport, yo‘nalishlar nomeri va hakazolar.

Matematikaning turli sohalarga: xalq xo‘jaligiga, transportga, sanoatga. meditsinaga, biologiya, kimyo, fizika, genetika va boshqa o‘nlab fanlarga tatbiqlari turmush darajasi va turli fanlarning shahdam qadamlar bilan olg‘a ketishiga omil ekani ravshan.

Matematika, bir qarashda, matematikadan yiroq bo‘lgan sohalarga, masalan adabiyotga, tilshunoslikka, sport sohasiga, psixologiyaga, tarixga va boshqa sohalarga kirib bormoqda. Matematikaning insoniyat tarixida va rivojlanish jaryonida nechog‘lik ahamiyatga ega ekanini juda ko‘p allomalar munosib baholaganlar. Masalan, *ulug‘ shoh va shoir*, *astronom*, *matematik alloma* – Mirzo Ulug‘bek matematika haqida shunday yozgan: - "Matematika g‘oyat bir yuksak. fanki, unda bir olam mo‘jiza yotadi”.

Haqiqatan ham matematika ilmi-insoniyat uchun bebaho-ekaniligini tan olmaydigan aqlli odamni topish amri mahol, chunki har bir fanning

---

[3] SH.M.Mirziyoyev. F-4724-sonli “Oliy ta’lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari tog‘risida”gi farmoyish. 2016-yil 8-oktyabr .

rivojlanishi darajasi-bu fan matematik bilimlardan qanchalik foydalana olishi bilan baholanadi.

Hozirgi zamon matematikasining barcha yutuqlari haqida batafsil so‘zlash imkoni kichik bir ish ichida beimkon muammodir, chunki matematika fani shunchalik rivojlanib ketganki, uning yuzlab tarmoqlarida minglab ilmiy ishlar qilinmoqda, chop etilgan ishlarning bir necha foizigina o‘rganilib, kundalik hayot ehtiyojlariga tatbiq etiladi xolos.

Magistrlik dissertatsiyasi mavzusining asoslanishi va uning dolzarbligi. Jahon miqyosida fizik va biologik sistemalarning termodinamik xossalarini o`rganish uchun olib borilayotgan ko`plab ilmiy-amaliy tadqiqotlar natijasida vujudga keladigan muammolarning yechimlari aksariyat hollarda Gibbs o`lchovlari nazariyasi masalalariga keltiriladi. Klassik statistikaning doimiy harorat saqlanadigan va atrof-muhit bilan issiqlik muvozanatida bo`lgan sistemalari uchun amerikalik olim Dj.U.Gibbs tomonidan kanonik Gibbs taqsimoti yaratilgan. Gibbs taqsimotlarini o`rganish fanning fizika, biologiya, xizmat ko`rsatish va ma`lumotlar nazariyasi kabi yo`nalishlari hamda statistik mexanikaning turli modellari uchun faza almashishlar nazariyasining muhim vazifalaridan biri bo`lib qolmoqda.

Gibbs o‘lchovlari nazariyasi statistik fizika va Evklid kvant nazariyasini o‘rganishning asosiy ob'yekti bo‘lishi bilan birga bu o‘lchov, o‘lchovlar nazariyasining nisbatan yangi sohasini tashkil qiladi.

Gibbsning limit o‘lchovlari umumiy xarakteristikasi R.L.Dobrushin, O.Lanford va D.Ryuellarning ishlarida[4,5,6,7] keltirilgan. Bu tushunchaning xususiy hollari avvalroq N.N.Bogolyubov va B.I.Xatsetlar tomonidan o‘rganilgan. Yuqoridagi ishlarning kengaytirilgan va zamonaviylashtirilgan ko‘rinishi

---

[4] Dobrushin R.L. The description of a random field by means of conditional probab ilities and conditions of its regularity. // Theory Probab. Appl. 13 (1968), p. 197-224.

[5] Lanford O.E., Ruelle D. Observables at infinity and states with short range correlations in statistical mechanics. // Comm. Math. Phys. - 1969. - V. 13. - P. 194-215.

[6] Рюэль Д. Статистическая механика. Строгие результаты. - М.: Мир, 1971. - 367 с.

[7] Рюэль Д. О многообразиях сосуществования фаз. // Теор. и матем. физика. - Москва, 1977. -Т. 30. - № 1. - С. 40-52.

N.N.Bogolyubov, D.Ya.Petrina va B.I.Xatsetlarning ilmiy maqolalarida[8] tadqiq etilgan. Shuningdek, R.A.Minlos va D.Ryuellarning ilmiy ishlarini ham eslatib oʻtamiz. Shu mavzu boʻyicha Oʻzbek olimlaridan professorlar N.N.Gʻanihoʻjayev, U.A.Rozikov, F.Muhammedovlar, M.Rahmatullayev, fan nomzodlari N.N.Xatamov, E.Normatov, R.Xakimov va boshqalar ilmiy ish olib borishmoqda.

Gibbsning limit oʻlchovlarining nazariy ehtimollik koʻrinishlarini K.Prestonning kitobidan koʻrish mumkin.

Gibbsning limit oʻlchovlari nuqtai nazaridan Gauss oʻlchovlarini Yu.A.Rozanov, F.Spitser, R.L.Dobrushinlarning ilmiy ishlarida[9] muhokama qilingan.

Gibbs oʻlchovining mavjudligi haqidagi teorema va uning isboti R.L.Dobrushin tomonidan keltirilgan. Kvant maydonlari nazariyasining panjarasimon modellariga ta'luqli va bu teoremani qoʻllanishiga K.M.Xinin tomonidan misol koʻrilgan. Uning ilmiy ishida bir nechta umumiy hollar oʻrganilgan.

Yang va Li ishlarida, ilk bor, termodinamik limitga oʻtishning statistik mexanikaning turli masalalariga va ayniqsa faza almashishlar nazariyasiga qoʻllashning ahamiyati koʻrsatilgan.

Markov tasodifiy maydonlar nazariyasi va bu nazariyaning rekurrent tenglamalari usullaridan foydalanib, xususan P.M.Blexer, N.Gʻanixoʻjaev, S.Zahari, F.Spitser, Yu.Suxov, U.Roziqov va boshqalar tomonidan Keli daraxtida statistik mexanikaning modellari oʻrganilgan[10,11,12,13,14] , davriy Gibbs

[8] Боголюбов Н.Н., Хацет Б.И. О некоторых математических вопросах статистического равновесия. // ДАН СССР. – 1949. – Т. 66, № 3 – С. 321-324.

[9] Dobrushin R.L. The description of a random field by means of conditional probab ilities and conditions of its regularity. // Theory Probab. Appl. 13 (1968), p. 197-224.

[10] Ганиходжаев Н.Н. О чистых фазах ферромагнитной модели Поттса с тремя состояниями на решетке Бете второго порядка. // Теор. и матем. физика. – Москва, 1990. – Т. 85, № 2. – С. 163-175.

[11] Ганиходжаев Н.Н., Розиков У.А. Классы нормальных делителей конечного индекса группового представления дерева Кэли. // УзМЖ. – Ташкент, 1997. – № 4. – С. 31-39.

[12] Suhov Yu.M., Rozikov U.A. A hard-core model on a Cayley tree: an example of a loss network. // Queueing Syst. 46 (1/2) (2004), – P. 197-212.

[13] Rozikov U.A. Gibbs measures on Cayley trees. World Sci. Publ. Singapore. 2013, 404 p.

[14] Розиков У.А., Шоюсупов Ш.А. Плодородные НС-модели с тремя состояниями на дереве Кэли // Теор. и матем. физика, 156:3 (2008), –С. 412-424.

o‘lchovlar to‘plami bayon etilgan. Bunday o‘lchovlar faqat yoki translyasion-invariant, yoki davri ikkiga teng bo‘lgan davriy o‘lchovlar bo‘lishi isbotlangan.

Shuning uchun davriylikni umumiyroq ta'rifini keltirish va yangi Gibbs o‘lchovlarini olish zarur bo‘ldi. U.A.Rozikov va M.M.Rahmatullayevlarning ilmiy ishlarida[15] Izing modeli uchun kuchsiz davriy Gibbs o‘lchovlari va kuchsiz davriy asosiy holatlar tushunchasi kiritiladi va o‘rganiladi. Potts modeli uchun bunday o‘lchovlar R.M.Xakimov ilmiy ishlarida[16,17,18] o‘rganilgan. Potts modeli uchun hozirgacha faqat translyatsion-invariant va davriy o‘lchovlargina o‘rganilgan. Ushbu Magistrlik dissertatsiyasida HC-model uchun translatsion-invariant Gibbs o‘lchovlari o‘rganiladi.

Hozirgi kunda jahonda fizika, statistik mexanika modellari uchun translyatsion-invariant, davriy, kuchsiz davriy va boshqa Gibbs o`lchovlarini qurish muhim ahamiyat kasb etmoqda. Bu borada maqsadli ilmiy tadqiqotlarni, jumladan, quyidagi yo`nalishlardagi ilmiy izlanishlarni amalga oshirish muhim vazifalardan biri hisoblanadi: berilgan gamil’tonian uchun Gibbs o`lchovi mavjudligini aniqlash; barcha bunday o`lchovlar to`plamining stukturasini tahlil qilish; haroratning faza almashishini ta`minlovchi kritik qiymatlarini aniqlash. Yuqorida keltirilgan ilmiy-tadqiqotlar yo`nalishida bajarilayotgan ilmiy izlanishlar mazkur dissertatsiya mavzusining dolzarbligini izohlaydi.

Har bir Gibbs o‘lchoviga bitta fizik sistemaning fazasi mos qo‘yiladi. Agar bittadan ko‘p Gibbs o‘lchovi mavjud bo‘lsa u holda fazoviy o‘tish bor deb ataladi.

Ba'zi modellar (Hard-Core, Izing, Potts, SOS, λ-model va h.z.) uchun translyatsion-invariant va davriy Gibbs o‘lchovlari N.N.G‘anixo‘jaev, U.A.Roziqov, F.Muxammedov, Dj.Libovits, ye.Prezutti Yu.M.Suxov,

[15] Розиков У.А., Рахматуллаев М.М. Описание слабо периодических мер Гиббса модели Изинга на дереве Кэли // Теор. и матем. физика, 156: 2 (2008), –С. 292-302.

[16] Хакимов Р.М. О существовании периодических гиббсовских мер для одной модели. // «Всероссийская конференция по математике и механике». Россия, -Томск, 2013. - С. 242.

[17] Хакимов Р.М. О существовании периодических мер Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли. // Узб. мат. журнал, - 2014. - № 3. С. 134-142.

[18] Хакимов Р.М. Периодические меры Гиббса для модели Поттса с нулевым внешним полем. // «Статистика и ее применения». Тез. докл. Рес. науч. конф. - Ташкент, 2012. - С. 142-147.

M.Rahmatullaev, R.Xakimov va boshqalar tomonidan, Markov tasodifiy maydonlar nazariyasi va bu nazariyaning rekurrent tenglamalari usullaridan foydalanib o‘rganilgan. Shuningdek, ba'zi bir davriy bo‘lmagan Gibbs o‘lchovlari sinfi ham o‘rganilgan.

Keli daraxtida p-adik Gibbs o‘lchovlari nazariyasi U.A.Rozikov, F.M.Muxammedov va O.Xakimovlar tomonidan rivojlantirilgan.

Asosan Izing, Potts λ-modellari va bu modellarning ba'zi bir umumlashmalari uchun fazoviy o‘tish mavjud emasligi (p-adik Gibbs o‘lchovi yagonaligi) isbotlangan. Shuningdek, parametrlarning fazoviy o‘tish mavjud bo‘ladigan qiymatlari ko‘rsatilgan. Masalan, spin qiymatlari {1,2,…,q} to‘plamga tegishli bo‘lgan p-adik Potts modeli uchun faqat va faqat q son p ga karrali bo‘lganda fazoviy o‘tish mavjud bo‘lishi isbotlangan.

U.A.Rozikov tomonidan Keli daraxtida sanoqli davriy Gibbs o‘lchovlari tushunchasi kiritilgan va bunday o‘lchovlar to‘plami bir jinsli bo‘lmagan Izing modeli uchun ko‘rsatilgan.

U.A.Rozikov va M.M.Rahmatullayevlar tomonidan ilk bor kuchsiz davriy Gibbs o‘lchovi tushunchasi kiritildi[19], hamda Izing modeli uchun ma’lum shartlar asosida kuchsiz davriy Gibbs o‘lchovlari va kuchsiz davriy asosiy holatlar olindi.

Modellar gamil’tonianlariga bog‘liq masalalarga bag‘ishlangan ilmiy ishlar ko‘pligiga qaramasdan, haligacha yechilmagan (ochiq) masalalar qolmoqda. Masalan, Gibbs limit o‘lchovlari to‘plamini to‘la tasniflash masalasi hal bo‘lishiga (yakunlanishiga) hali ancha bor.

Tadqiqotning maqsadi. Ushbu magistrlik dissertasiyasida qattiq diskli ikki holatli model uchun translyatsion-invariant Gibbs o‘lchovlarining chekka o‘lchov bo‘lish oraliqlarini topish, ikki holatli Hard-Core modeli uchun davri to‘rtga teng kuchsiz davriy Gibbs o‘lchovlarining mavjudlik va yagona emaslik

[19] Розиков У.А., Рахматуллаев М.М. Слабо периодические основные состояния и меры Гиббса для модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли // Теор. и матем. физика, 160: 3 (2009), 507-516.

shartlarini aniqlash, qattiq diskli ikki holatli model uchun davri to‘rtga teng kuchsiz davriy Gibbs o‘lchovlarining mavjudlik va yagonalik shartlarini topish, qattiq diskli uch holatli modellar uchun translyatsion-invariant Gibbs o‘lchovlarining chekka o‘lchov bo‘lish va bo‘lmaslik shartlarini aniqlash masalalarini o‘rganiladi.

Tadqiqotning vazifalari:

- Keli daraxti uchlari to‘plami V va G_k gruppa o‘rtasida o‘zaro bir qiymatli moslik mavjudligini o‘rganish;
- Qattiq diskli ikki holatli model uchun translyatsion-invariant Gibbs o‘lchovlarining chekka o‘lchov bo‘lish oraliqlarini masalasini o‘rganish;
- Hard-Core modeli uchun davri ikkiga teng bo‘lgan kuchsiz davriy Gibbs o‘lchovlarining yagonalik va yagonamaslik shartlarini o‘rganish;
- Qattiq diskli uch holatli modellar uchun translyatsion-invariant Gibbs o‘lchovlari bo‘yicha olingan natijalar bilan tanishish;
- Qattiq diskli uch holatli modellar uchun translyatsion-invariant Gibbs o‘lchovlarining chekka o‘lchov bo‘lish oraliqlarini kengaytirish.

Tadqiqotning ob`ekti. Keli daraxti ustida qattiq diskli ikki va uch holatli modellar.

Tadqiqotning predmeti. Qattiq diskli ikki va uch holatli modellar uchun translyatsion-invariant va kuchsiz davriy Gibbs o‘lchovlaridan iboratdir.

Tadqiqotning usullari. Tadqiqot ishida Markov tasodifiy miqdorlar nazariyasiga hamda shu nazariyaning rekkurent tenglamalariga asoslangan usullardan foydalanilgan. Shuningdek, o‘lchovlar nazariyasi, nochiziqli analiz, chiziqli algebra, qisqartirib akslantirish usullaridan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

Qattiq diskli uch holatli modellar uchun graf “sirtmoq” bo‘lgan holda translyatsion-invariant Gibbs o‘lchovlarining chekka o‘lchov bo‘lish oraliqlari kengaytirilgan;

Qattiq diskli uch holatli modellar uchun graf “jezl” bo‘lgan holda chekka translyatsion-invariant Gibbs o‘lchovi yagona bo‘lmaydigan oraliqlar topilgan.

Tadqiqotning amaliy natijalari. Gibbs o‘lchovlari nazariyasida muhim bo‘lgan chekka Gibbs o‘lchovlari sinfini kengaytirishdan iborat. Barcha chekka Gibbs o‘lchovlari tasnifi o‘rganilayotgan modellar uchun faza almashishlarni aniqlashni ta`minlaydi.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi. Funktsional analiz, chiziqli algebra, Markov tasodifiy miqdorlar nazariyasi usullaridan va Maple dasturidan foydalanilganligi hamda matematik mulohazalarning qat`iyligi bilan asoslangan.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati fizika va statistik mexanikaning modellari bo‘lmish Hard-Core modellari uchun faza almashishlar mavjudligini aniqlanganligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati limit Gibbs o‘lchovlarining mavjudligi fizik sistema holatining o‘zgarishini tadqiq qilish uchun xizmat qiladi.

Ishning tuzulishi. Ushbu magistrlik dissertatsiyasi kirish, asosiy qism, xulosa, foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati va internet ma’lumotlaridan tashkil topgan. Tadqiqotning kirish qismida hozirgi kunda olib borilayotgan ta’lim tizimidagi islohotlar haqida so‘z boradi. Shu bilan birga dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustivor yo‘nalishlariga mosligi ko‘rsatilgan, mavzu bo‘yicha xorijiy ilmiy-tadqiqotlar sharhi, muammoning o‘rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, ob`ekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi va dissertatsiya tuzilishi bo‘yicha ma`lumotlar keltirilgan.

Asosiy qism uchta bobdan iborat bo‘lib, birinchi bobda qattiq diskli modellar uchun boshlang‘ich tushunchalar va ma`lum faktlar keltirilgan. Shuningdek, ikki holatli qattiq disklar modeli uchun translyatsion-invariant Gibbs o‘lchovlarining chekka o‘lchov bo‘lish shartlari o‘rganilgan. Ikkinchi bobda esa ikki holatli qattiq disklar modeli uchun davri to‘rtga teng bo‘lgan kuchsiz davriy Gibbs o‘lchovlarining yagona va yagonamaslik shartlarini o‘rganishga bag‘ishlangan. Uchinchi bobda uch holatli unumdor qattiq disklar modellari uchun translyatsion-invariant Gibbs o‘lchovlari o‘rganilgan. Ba`zi modellar uchun $k = 2$ bo‘lganda esa mavjud translyatsion-invariant Gibbs o‘lchovlarining chekka o‘lchov bo‘lish va bo‘lmaslik shartlari aniqlangan.

Internet ma’lumotlarida dissertatsiya mavzusiga oid eng yangi natijalardan namunalar keltirilgan. Dissertatsiyaning ilova qismida asosiy qismda foydalanilgan faktlar haqida ma’lumotlar, muallifning chop etgan maqolasi joy olgan. Shuningdek, ilovada dissertatsiya mavzusiga oid internetdan olingan maqolalardan ham namunalar keltirilgan.

I-BOB. BOSHLANG‘ICH TUSHUNCHALAR

1.1 Boshlang‘ich tushunchalar va ma`lum faktlar

Hard-Core modeli uchun kuchsiz Gibbs o‘lchovlarining mavjudligi haqida gap ketganda, dastlab translyatsion-invariant, davriy va kuchsiz davriy Gibbs o‘lchovlari borasidagi muhim tushunchalar hamda bazi bir ma’lum dalillarni keltirib o‘tamiz.

Keli daraxtining gruppali tasvirlanishi. Oxirgi yillarda daraxtlarning avtomorfizmlar gruppasini o‘rganishga doir juda ko‘p ilmiy maqolalar vujudga kela boshladi, ayniqsa Keli daraxti T^k da (Keli daraxti ba’zi bir terminalogiyada Bete panjarasi ham deyiladi). Keli daraxti T^k, bu $\kappa \geq 1$ tartibli cheksiz daraxt bo‘lib, ya’ni har bir uchidan roppa-rosa $\kappa+1$ ta qirra chiquvchi, siklsiz cheksiz grafdir.

Faraz qilaylik, $T^k=(V,L,i)$, bu yerda V - T^k-ning uchlar to‘plami, L-uning qirralar to‘plami va $i-$ insidentlik funksiyasi bo‘lib, har bir $l\in L$ qirraga uning chetki nuqtalari $x,y\in V$ ni mos qo‘yadi.

Agar $i(e)=\{x,y\}$ bo‘lsa, u holda x,y yaqin qo‘shnilar deyiladi va bunda $l=<x,y>$ ko‘rinishda yozamiz.

Keli daraxtida $d(x,y)$, $x,y\in V$ masofa

$$d(x,y)=\min\{d:\exists x=x_0,x_1,...x_{d-1,}x_d\ =y\in V\ \},$$

bu yerda $<x_0x_1>,<x_1,x_2>,...,<x_{d-1,}x_d>$ yaqin qo‘shnilar, formula yordamida kiritiladi.

Yuqoridagi minimumni aniqlovchi $\pi=\{x=x_0,x_1......,x_{d-1},x_d\ =y\in V\}$ ketma-ketlik x dan y ga yo‘l deyiladi .

Bizga N.N.G‘anixo‘jaev va Blexerlarning birgalikdagi ishlaridan va U.A.Roziqov ilmiy maqolalaridan ma’lumki, Keli daraxtini, tashkil etuvchilari $a_1,a_2,...,a_{k+1}$ bo‘lgan ikkinchi tartibli $(k+1)$ ta siklik gruppalarni erkin ko‘paytmasidan iborat bo‘lgan G_k gruppa orqali tasvirlash mumkin. Buning uchun asosiy tushuncha va tasdiqlarni beramiz.

Ta'rif 1.1.1. G gruppa A_α qism gruppalarni erkin ko'paytmasi deyiladi , agar A_α qism gruppa birgalikda butun G gruppani hosil qilsa , ya'ni G ning har bir g elementi A_α dan olingan chekli elementlar ko'paytmasidan iborat bo'lsa :

$$g = a_1 a_2 \ldots a_n, a_i \in A_\alpha, \ \overline{i = 1, n} \qquad (1.1)$$

va agar G ning har bir elementi quyidagi shartlar ostida yagona (1.1) ko'rinishda bo'lsa

1) barcha a_i elementlar birdan farqli;

2) (1.1) da A_α qism gruppadan ikkita element yonma-yon turmaydi, umuman olganda (1.1) ko'paytmada bitta qism gruppaga kirgan bir necha ko'paytuvchini o'z ichiga olgan bo'lsa ham.

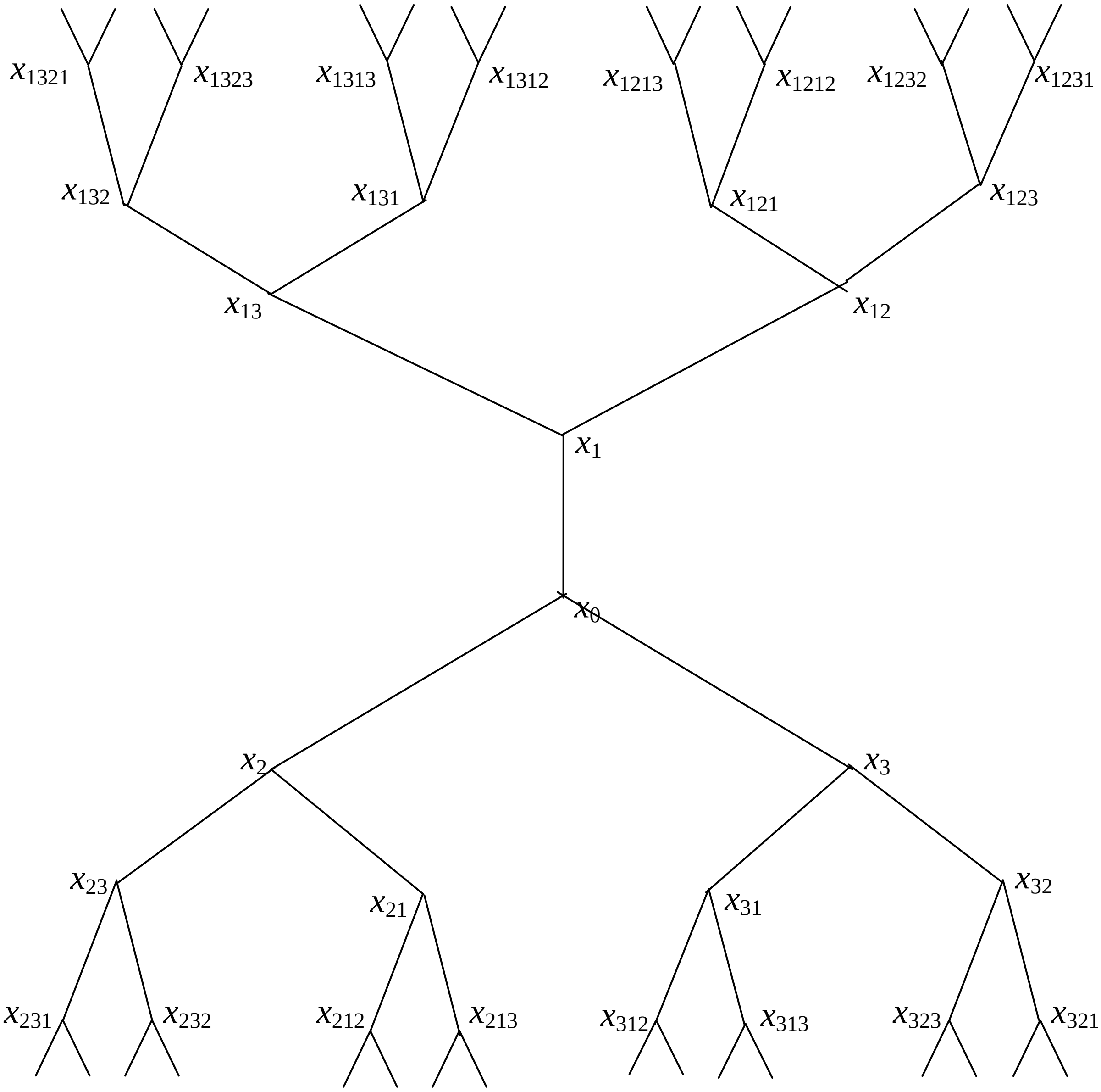
Faraz qilaylik, G_K – tashkil etuvchilari $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ bo'lgan, $(\kappa + 1)$ ta ikkinchi tartibli siklik gruppalarni erkin ko'paytmasi bo'lsin.

Tasdiq 1.1.1. Keli daraxtining V uchlar to'plami bilan G_κ gruppa orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud.

Isboti: Bu moslik quyidagicha quriladi. Fiksrlangan ihtiyoriy $x_0 \in V$ uchga G_κ gruppaning e birlik elementini mos qo'yamiz. Umumiylikka zid bo'lmagan holda ko'rilayotgan grafni tekislikda deb qarashimiz mumkin. Keyin x_0 uchga qo'shni bo'lgan uchlarni soat strelkasi yo'nalishiga qarama-qarshi yo'nalish bilan $x_i \in V$ lar bilan nomerlab chiqamiz.

Har bir $x_i \in V$ uch uchun gruppaning $a_i, i = 1, k+1$ tashkil etuvchilarini mos qo'yamiz. Endi har bir $x_i \in V$ uchlar uchun ikkilik x_{ij} nomerlashni aniqlaymiz, bular x_i —ni qo'shnilari bo'ladi. x_i —ni bitta qo'shnilaridan biri x_0 bo'lib, unga $x_{ii} = x_0$ mos qo'yamiz va u holda qolgan $x_i \in V$ qo'shnilarni nomerlash yuqoridagi nomerlash qoidasi bo'yicha bo'ladi. Har bir x_{ij} uch uchun $a_i \ a_j, \quad i, j = \overline{1, \ k+1}$ so'zni mos qo'yamiz, $x_{ii} = x_0$ va $a_i^2 = e$ bo'lgani uchun, u holda bu akslantirish keyingi qadamlarda ham saqlanadi.

$x_{i,j}$ uchlarning qo‘shnilari uchun uchtali nomerlashni quyidagicha kiritamiz. $x_{i,j}$ - ni bitta qo‘shnisi x_i bo‘lgani uchun ,unga $x_{ijj} = x_i$ mos qo‘yamiz va u holda qolgan qo‘shnilarni nomerlash yuqoridagi kabi bir qiymatli aniqlanadi. Har bir $x_{ij\kappa}$ uch uchun $a_j a_j a_k$ so‘zni mos qo‘yamiz. Bu akslantirish oldingi qadam bilan mos keladi, chunki $x_{ijj} = x_i$ va $a_j a_j a_j = a_j a_j^2 = a_i$. Shunday qilib, T^k-Keli daraxtida uchlar to‘plami V bilan G_k gruppa orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatish mumkin. Tasdiq isbot bo‘ldi. Uni quyidagi rasmdan ham ko‘rish mumkin.



1.1 rasm

Yuqoridagi ko‘rinishni o‘ng ko‘rinish deyiladi, chunki bu holda x va y - yon qo‘shnilar va ularga mos keluvchi g va l G_k - gruppa elementlari yoki $g = ha_i$ yoki $h = ga_j$ ba’zi bir i, j uchun bo‘lishi mumkin. Chap ko‘rinishi ham xuddi yuqoridagiday aniqlanadi.

Faraz qilaylik, G_k - T^k, $k \geq 1$ Keli daraxtining o‘ng ko‘rinishi bo‘lsin. Ixtiyoriy $x \in G_k$ element quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$x = a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3} ... a_{i_n}, \ \textit{bu yerda} \quad 1 \leq i_m \leq k+1 \ , \quad m = \overline{1,n}$$

n-soni x so‘zining uzunligi deyiladi va $l(x)$ ko‘rinishda belgilanadi.

x so‘zning qisqarmaydigan yozilishda a_i, $i = 1, 2, ..., k+1$ harflar sonini $w_x(a_i)$ bilan belgilaymiz. Masalan, $x = a_3 a_5 a_4 a_5 a_2$, u holda

$$w_x(a_2) = w_x(a_3) = w_x(a_4) = 1, \qquad w_x(a_5) = 2$$

Ravshanki, x so‘zning uzunligi $l(x) = \sum_{i=1}^{k+1} w_x(a_i)$ bo‘ladi, yuqoridagi misolda

$$l(x) = l(a_3 a_5 a_4 a_5 a_2) = 1 + 1 + 1 + 2 = 5 .$$

N.N.G‘anixo‘jayev va U.A.Roziqov ishlarida quyidagicha ta’riflar va teorema bor.

Ta’rif 1.1.2. Faraz qilaylik, $M_1, M_2, ..., M_m$ biror bir to‘plamlar va

$$M_i \neq M_j, \ \ i \neq j \quad (i, j = \overline{1,m})$$

bo‘lsin. Agar shunday $i_0 (1 \leq i_0 \leq m)$ mavjud bo‘lib,

$$\bigcap_{i=1}^{m} M_i = (\bigcap_{i=1}^{i_0 - 1} M_i) \cap (\bigcap_{i=i_0+1}^{m} M_i)$$

o‘rinli bo‘lsa, u holda $\bigcap_{i=1}^{m} M_i$ kesishma qisqaruvchi deyiladi.

Endi $N_k = \{1, 2, ..., k+1\}$ belgilash kiritaylik.

Teorema 1.1.1. Ixtiyoriy $\varnothing = A \subset N_k = \{1, 2, ..., k+1\}$ uchun quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $H_A \subset G_k$ qism gruppa mavjud:

a) H_A – indeks 2 ga teng normal bo‘luvchi;

b) $H_A \neq H_B$ ixtiyoriy $A \neq B \subset N_k$ uchun;

s) $|H_A \cap H_B| = \infty$ va $H_A \bigcap H_B \subset H_{A\Delta B}, A, B \subset N_k$

d) Agar $A_1, A_2, ..., A_m \subseteq N_k$ va $A_i \bigcap A_j = \varnothing$ bo‘lsin, ixtiyoriy $i \neq j, i, j = \overline{1,m},$ u holda

$$\bigcap_{i=1}^{m} H_{A_i} \subset \bigcup_{i=1}^{m} H_{A_i}$$

e) Faraz qilaylik, $A_1, A_2, ..., A_m \subset N_k$, agar $\bigcap_{i=1}^{m} H_{A_i}$ -qisqarmaydigan bo‘lsa, u holda u indeksi 2^m-ga teng normal bo‘luvchi bo‘ladi;

f) Har bir $m = \overline{1,2k}$ uchun qisqarmaydigan

$$H_m = \bigcap_{i=1}^{m} H_{A_i}$$

kesishma qurish mumkin.

Konfiguratsiyalar fazosi. $A \subseteq V$ uchun σ_A konfiguratsiya A da quydagi funksiya ko‘rinishida aniqanadi.

$$x \in A \to \sigma_A(x) \in \Phi = \{0,1,...,q\}$$

Barcha konfiguratsiyalar to‘plami $\Omega_A\, \Phi^A$ bilan ustma-ust tushadi $\Omega_A = \Phi^A$. Quydagicha belgilaymiz $\Omega = \Omega_V$ va $\sigma = \sigma_V$.

$G_k^* - G_k$ gruppaning qism gruppasi bo‘lsin. Agar ixtiyoriy $x \in G_k$ va $y \in G_k^*$ uchun $\sigma(yx) = \sigma(x)$ bajarilsa, $\sigma \in \Omega$ konfiguratsiya G_k^*-davriy deyiladi.

Barcha siljishlarga nisbatan invariant bo‘lgan konfiguratsiyalar translyatsion-invariant deyiladi.

Gamil’tonian. $\sigma \in \Omega$ konfiguratsiya energiyasi quydagi gamil’tonian yordamida aniqlanadi

$$H(\sigma) = \sum_{\substack{A \subset V: \\ diam(A) \leq r}} I(\sigma_A), \tag{1.2}$$

bu yerda $r \in N$, $diam(A) = \max_{x,y \in A} d(x,y)$ va $I(\sigma_A) : \Omega_A \to R -$berilgan potensial.

φ_{D^c} chegara shartga ega bo‘lgan va uning to‘ldiruvchisida berilgan $D^c = V \setminus D$ chekli $D \subset V$ soha uchun shartli gamil’tonian quydagi ko‘rinishga ega.

$$H(\sigma_D \mid \varphi_{D^c}) = \sum_{\substack{A \subset V: A \cap D \neq \emptyset \\ diam(A) \leq r}} I(\sigma_A) \ ,$$

bu yerda,

$$\sigma_A(x) = \begin{cases} \sigma(x), \ agar \ x \in A \bigcap D \\ \varphi(x), \ agar \ \ x \in A \bigcap D^c. \end{cases}$$

Gibbs o‘lchovi. $(\Omega, \mathbf{B})$ da berilgan μ ehtimollik (bu yerda $\mathbf{B} - \Omega$ to‘plamning slindrik qism to‘plamlaridan tashkil topgan σ-algebra) Dobrushin-Lanford-Ryuel ([1], [2]) tenglamasini ixtiyoriy $D \subset V$ va $\sigma_D \in \Omega_D$ lar uchun qanoatlantirsa, u holda Gibbs o‘lchovi (H gamil’tonian bilan) deyiladi va quydagicha yoziladi:

$$\mu(\{\omega \in \Omega : \omega|_D = \sigma_D\}) = \int_\Omega \mu(d\varphi) \nu_\varphi^D(\sigma_D) \, ,$$

bu yerda ν_φ^D – shartli ehtimollik:

$$\nu_\varphi^D(\sigma_D) = \frac{1}{Z_{D,\varphi}} \exp\left(-\beta H(\sigma_D \mid \varphi_{D^c})\right).$$

bunda $\beta = \frac{1}{T}, T > 0$ – harorat va $Z_{D,\varphi}$ – statistik yig‘indi (normal bo‘luvchi) D chegaraviy shart bilan:

$$Z_{D,\varphi} = \sum_{\tilde{\sigma}_D \in \Omega_D} \exp\left(-\beta H(\tilde{\sigma}_D \mid \varphi_{D^c})\right).$$

$\mathrm{G}(H)$ – barcha limit Gibbs o‘lchovlari to‘plami bo‘lsin. Agar $\nu_1 \neq \nu_2$ uchun $\mu = \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2)$ tenglik bajariladigan $\nu_1, \nu_2 \in \mathrm{G}(H)$ lar mavjud bo‘lmasa, u holda $\mu \in \mathrm{G}(H)$ nuqta $\mathrm{G}(H)$ to‘plamning chekka nuqtasi deyiladi.

1.2 Qattiq diskli ikki holatli model uchun translyatsion-invariant Gibbs o‘lchovlarining chekka o‘lchov bo‘lish oraliqlari

Asosiy muammolar. Bizni quydagi ikki muammo qiziqtiradi:

1) Berilgan gameltonian uchun hech bolmaganda bitta Gibbs o‘lchovi mavjudligini aniqlash.

2) Berilgan gamil’tonianga mos keluvchi barcha Gibbs o‘lchovlari to‘plami $G(H)$ strukturasini o‘rganish.

Qattiq diskli (HC) ikki holatli model. Faraz qilaylik, $\Phi=\{0,1\}$ - spin qiymatlar va $\sigma\in\Phi^V$ -konfiguratsiya bo‘lsin, ya`ni $\sigma=\{\sigma(x)\in\Phi:\ x\in V\}$, bu yerda $\sigma(x)=1$ sharti Keli daraxtida x uch bandligini, $\sigma(x)=0$ sharti esa x uch bo‘shligini bildiradi.

Agar V (mos ravishda V_n yoki W_n) dagi har qanday qo‘shni $<x,y>$ lar uchun $\sigma(x)\sigma(y)=0$ bo‘lsa, u holda σ - joiz konfiguratsiya deyiladi va bunday konfiguratsiyalar to‘plamini Ω (Ω_{V_n} va Ω_{W_n}) deb belgilaymiz. Ravshanki, $\Omega\subset\Phi^V$.

Izoh 1.2.1. Konfiguratsiya uchun joiz bo‘lish shartini xizmat ko‘rsatish nazariyasi misolida tushuntirish mumkin: bir qirraning *x* va *y* (eng yaqin qo‘shni nuqtalar) ikki uchlarini xizmat ko‘rsatish obyektlari (pochta, aeroport, supermarket va h. k.) deb hisoblasak, bu ikki bir-biriga yaqin nuqtalarga bir xil bo‘lgan xizmat ko‘rsatish obyektlarini qurish nafli (foydali) emas; fizikada: ikki qattiq sharlarning markazlari bir-biridan uzoq bo‘lishi kerak, ya’ni *x* nuqtada (1 spinli) qattiq shar joylashgan bo‘lsa, *y* nuqtada xuddi shunday shar joylashishi mumkin emas.

HC-modelining gamil’toniani quyidagicha aniqlanadi:

$$H(\sigma)=\begin{cases} J\sum\limits_{x\in V}\sigma(x), & agar\quad \sigma\in\Omega \\ +\infty, & agar\quad \sigma\notin\Omega, \end{cases} \tag{1.3}$$

bu yerda $J\in R$.

Faraz qilaylik, **B** - Ω ning silindrik qism to‘plamlaridan hosil bo‘luvchi $\sigma-$algebra bo‘lsin. Ixtiyoriy n uchun $\mathbf{B}_{V_n}=\left\{\sigma\in\Omega\ :\ \sigma\big|_{V_n}=\sigma_n\right\}$ orqali **B-** qism algebrani belgilaymiz, bu yerda $\sigma\big|_{V_n}$ σ ning V_n dagi izi, $\sigma_n : x\in V_n\to\sigma_n(x)-V_n$ dagi joiz konfiguratsiyani

$$\sigma_A\vee\tilde{\sigma}_{V\setminus A}(x)=\begin{cases}\sigma(x),\ agar\ x\in A,\\ \tilde{\sigma}(x),\ agar\ x\in V\setminus A.\end{cases}$$

kabi belgilab olaylik.

Ta’rif 1.2.1. $\sigma-$algebradagi μ ehtimollik o‘lchovi Gibbsning chekli o‘lchovi deyiladi, agar ixtiyoriy chekli $A\subset V$ uchun quyidagi tengliklar o‘rinli bo‘lsa:

$$\mu\{\sigma_A\mid\tilde{\sigma}_{V\setminus A}\}=\frac{e^{-\beta H(\sigma_A\vee\tilde{\sigma}_{V\setminus A})}}{Z_{A,\tilde{\sigma}}},$$

bu yerda $H(\sigma)$ Gamil’tonian (1.3) orqali aniqlangan, $\beta=\dfrac{1}{T}$, $T>0-$da aniqlangan temperatura va

$$Z_{A,\tilde{\sigma}}=\sum_{\varphi\in\Omega_A}e^{-\beta H(\varphi_A\vee\tilde{\sigma}_{V|A})}.$$

Istalgan joiz $\sigma_n\in\Omega_{V_n}$ konfiguratsiya uchun $\#\sigma_n=\sum_{x\in V_n}\sigma_n(x)$ deb belgilab olaylik, ya’ni $\#\sigma_n-V_n$ dagi band bo‘lgan uchlar (birlar) soni.

$z : x\mapsto z_x=(z_{0,x},z_{1,x})\in R_+^2\ V$ dagi vektor funksiya bo‘lsin. $n=1,2,\dots$ uchun

$$\mu^{(n)}(\sigma_n)=\frac{1}{Z_n}\lambda^{\#\sigma_n}\prod_{x\in W_n}z_{\sigma_n(x),x}. \tag{1.4}$$

kabi aniqlangan Ω_{V_n} to‘plamda $\mu^{(n)}$ ni ehtimollik taqsimotini ko‘raylik.

bu yerda Z_n-normallovchi bo‘luvchi:

$$Z_n = \sum_{\varphi_n \in \Omega_{V_n}} \lambda^{\#\varphi_n} \prod_{x \in W_n} z_{\varphi_n(x),x}.$$

$\mu^{(n)}$ ehtimollik o‘lchovlari ketma-ketligi muvofiqlashgan deyiladi, agaristalgan $n \geq 1$ va $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$ uchun quyidagi tenglik bajarilsa:

$$\sum_{\omega_n \in \Omega_{W_n}} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n)\mathbf{1}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n \in \Omega_{V_n}) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}),$$

bu yerda

$$\mathbf{1}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n \in \Omega_{V_n}) = \begin{cases} 1, \text{ agar } \ \sigma_{n-1} \vee \omega_n \in \Omega_{V_n} \\ 0, \text{ agar } \ \sigma_{n-1} \vee \omega_n \notin \Omega_{V_n}. \end{cases}$$

$$\mu(\{\sigma \in \Omega : \sigma|_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu^{(n)}(\sigma_n).$$

Bu holda Kolmogorov teoremasiga ko‘ra, $(\Omega, \mathbf{B})$ da barcha n va $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$ uchun yagona μ o‘lchovi mavjud.

Quyidagilar ma’lum:

Teorema 1.2.1.[4]. (1.4) dagi $n = 1, 2, \ldots \mu_n(\sigma_n)$ ehtimollik taqsimotlari ketma-ketligi muvofiqlashgan bo‘lishi uchun istalgan $x \in V$ uchun ushbu

$$z'_x = \prod_{y \in S(x)} \frac{1}{1 + \lambda z'_y}, \tag{1.5}$$

tenglik bajarilishi zarur va yetarli.

Bu yerda $z'_x = \dfrac{z_{1,x}}{z_{0,x}}$, $\lambda = e^{J\beta} > 0 -$parametr va $S(x) - x$ nuqtaning to‘g‘ri avlodlari to‘plami (1.2 Rasm).

$$f(z) \equiv f(z, \lambda) = \frac{1}{(1 + \lambda z)^k}, \ \lambda_{\rm cr} = \frac{k^k}{(k-1)^{k+1}}$$

deb belgilab olaylik.

Tasdiq 1.2.1.[4]. 1) Agar $\lambda \le \lambda_{cr}$ bo‘lsa, (1.5) funksional tenglama yagona $z_x = z^*$ yechimga ega, bu yerda $z^* > 0$ $z = f(z)$ ning yagona yechimi.

2) Agar $\lambda > \lambda_{cr}$ bolsa, u holda (1.5) funksional tenglamaning ixtiyoriy z_x yechimi ushbu

$$z_- \le z_x \le z_+, \ \forall x \in V,$$

shartni qanoatlantiradi, bunda

$$z_-, z_+ > 0 \ z_- = f(f(z_-)), \ z_+ = f(z_-)$$

kabi aniqlangan, yoki yana quyidagicha yozish mumkin:

$$z_- = \lim_{n\to\infty} f^{(2n-1)}(1), \quad z_+ = \lim_{n\to\infty} f^{(2n)}(1),$$

Xususan,

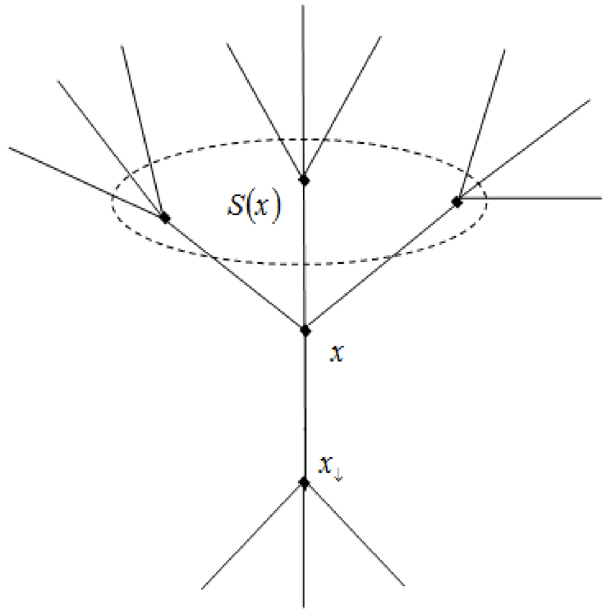
$$(1+\lambda)^{-k} < z_x < 1, \ x \in V.$$

Bu yerda $f^{(n+1)}(z) = f(f^{(n)}(z)), \quad n = 0,1,2,\ldots$

G_k^* qism gruppa G_k gruppaning $r \ge 1$ indeksli normal bo‘luvchisi bo‘lsin va $G_k / G_k^* = \{H_1, ..., H_r\}$ faktor-gruppa bo‘lsin.

Ta’rif 1.2.2. Agar har qanday $x \in G_k, \quad y \in G_k^*$ lar uchun $z_{yx} = z_x$ bo‘lsa, u holda $z = \{z_x, x \in G_k\}$ miqdorlar G_k^* - davriy deyiladi. G_k -davriy kattaliklar translyatsion invariant deyiladi.

Istalgan $x \in G_k$ uchun $\{y \in G_k : \langle x, y\rangle\} \setminus S(x)$ to‘plam $x_\downarrow$ kabi belgilangan yagona elementga ega bo‘ladi (1.2 rasm)



1.2 rasm

$S(x)-$to‘g‘ri avlodlar to‘plami va $x_{\downarrow}-$ x nuqtasining ajdodi.

Ta’rif 1.2.3. Agar $x\in H_i,\, x_{\downarrow}\in H_j$ da $\forall x\in G_k$ uchun, $z_x=z_{ij}$ bo‘lsa, $z=\{z_x, x\in G_k\}$ qiymatlar G_k^*-kuchsiz davriy deyiladi.

Izoh 1.2.2. Agar z_x qiymati $x_{\downarrow}$ ga bog‘liq bo‘lmasa, z kuchsiz davriy kattalik oddiy davriyga mos keladi.

Ta’rif 1.2.4. Agar μ o‘lchovi, G_k^*- (kuchsiz) davriy z kattaliklarga mos kelsa, G_k^*-(kuchsiz) davriy deb ataladi.

Translyasion-invariant Gibbs o‘lchovlari. HC modeli uchun translyatsion-invariant Gibbs o‘lchovining yagonaligini yangi isbotini keltiramiz.

Tasdiq 1.2.2. $\forall\lambda>0$ va $k\geq 2$ bo‘lganda HC modeli uchun translyatsion-invariant Gibbs o‘lchovi yagonadir.

Isboti. Translyatsion-invariant Gibbs o‘lchovi barcha $x\in V$ bo‘lgandagi (1.5) ning $z_{x'}=z$ korinishidagi yechimiga mos kelishiga e’tibor beraylik. Bu yerda z ushbu

$$z=\frac{1}{(1+\lambda z)^k}. \tag{1.6}$$

tenglamani qanoatlantiradi.

(1.6) istalgan $\lambda > 0$ va $k \geq 2$ qiymatlari uchun yagona musbat yechimga ega bo‘lishini ko‘rsatamiz. (1.6) tenglikni quyidagi ko‘rinishda yozib olamiz:

$$f(z) = \lambda^k z^{k+1} + k\lambda^{k-1} z^k + ... + z - 1 = 0.$$

$f(0) = -1$ va $f(+\infty) = +\infty$ ekanligi ma’lum. Shuning uchun $f(z) = 0$ tenglama kamida bitta yechimga ega. Bundan tashqari, ko‘phadlar nazariyasidagi Dekart teoremasiga ko‘ra $f(z) = 0$ tenglama bittadan ko‘p bo‘lmagan musbat yechimga ega bo‘ladi. Shu sababli (1.6) tenlama yagona musbat yechimga ega bo‘ladi. Isbotlandi.

Izoh 1.2.3. [4] ishda (1.6) tenglamaning o‘ng tomonidagi funksiya monotinligidan foydalanga holda uning yechimi yagonaligi isbotlangan.

μ^* o‘lchov (1.6) tenglamaning yechimiga mos keluvchi translyatsion-invariant Gibbs o‘lchovi bo‘lsin. [7] ishdan ma’lumki,

$$\lambda \leq \lambda_{cr} = \lambda_{cr}(k) = \frac{k^k}{(k-1)^{k+1}} \tag{1.7}$$

bo‘lganda $G_k^{(2)}$ – davriy HC o‘lchovi μ^* bilan ustma-ust tushadi, $\lambda > \lambda_{cr}$ da esa biri μ^* bo‘lgan kamida uchta $G_k^{(2)}$ – davriy Gibbs o‘lchovlari mavjud. [6] va [8] ishlardan quyidagi teorema va tasdiqlar ma’lum:

Teorema 1.2.2.[4]. $k \geq 2$ va

$$\lambda > \frac{1}{\sqrt{k}-1}\left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}-1}\right)^k \tag{1.8}$$

bo‘lganda μ^* Translyatsion-invariant Gibbs o‘lchovi chekka o‘lchov bo‘lmaydi.

Tasdiq 1.2.3.[4]. Agar berilgan k va λ_0 uchun μ^* chekka o‘lchov bo‘lmasa, u har qanday $\lambda > \lambda_0$ da ham chekka o‘lchov bo‘lmaydi.

Teorema 1.2.3.[8]. $k \geq 2$ va $\lambda = 1$ da μ^* translyatsion-invariant Gibbs o‘lchov chekka o‘lchov bo‘ladi.

Teorema 1.2.2 va Tasdiq 1.2.1dan quyidagiga ega bo‘lamiz

Natija 1.2.1. $k \geq 2$ va $\lambda \in (0,1]$da μ^* o‘lchovi chekka o‘lchov bo‘ladi. Joriy paragrafning asosiy naijasi quyidagilar hisoblanadi:

Teorema 1.2.4. $k \geq 2$ va $\lambda \in (0, \lambda_*)$da μ^* TIGO‘ ekstremal hisoblanadi. Bu yerda

$$\lambda_* = \lambda_*(k) = \frac{1}{t_*^k}\left(\frac{1}{t_*} - 1\right), \tag{1.9}$$

va $t_* \in (0,1)$ quyidagi tenglamaning yagona yechimi hisoblanadi:

$$t^{k+1} - kt^2 + (2k-1)t - k + 1 = 0. \tag{1.10}$$

Izoh 1.2.4. $k \geq 4$ bolgani uchun (1.10) tenglama radikallarda yechilmaydi, shu sababli $\lambda_*(k)$ ning oshkor qiymatini olish oson bo‘lmaydi. Lekin har bir fiksirlangan $k \geq 2$ qiymatida kompyuter tahlili taqribiy $\lambda_*(k)$ qiymatini beradi. Bu qiymatlarni ba’zi k larda keltiraylik:

$$\lambda_*(2) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{388 + 12\sqrt{69}} + \frac{52}{3\sqrt[3]{388 + 12\sqrt{69}}} + \frac{7}{3} \approx 7.159191247,$$

$$\lambda_*(3) \approx 3.771210223, \ \lambda_*(4) \approx 2.745407267, \ \lambda_*(5) \approx 2.242274271,$$

$$\lambda_*(18) \approx 1.015307312, \ \lambda_*(19) \approx 0.9900721365,$$

$$\lambda_*(2019) \approx 0.2680425412, \quad \lambda_*(3000) \approx 0.2497937373.$$

Natijada Teorema 1.2.3 barcha $k \leq 18$da Natija 1.2.1 qiymatlarini yaxshilaydi.

Izoh 1.2.5. (1.10) tenglamasining ikkala tomonini k ga bo‘lib yuborsak va $k \to \infty$ dagi limitni ko‘rib chiqsak, $t \in (0,1)$ da tenglama $t^2 - 2t + 1 = 0$ ko‘rinishga ega bo‘ladi, ya’ni $t_* \to 1$ $k \to \infty$ da. Natijada $\lim\limits_{k \to \infty} \lambda_*(k) = 0$.

Izoh 1.2.6. $\lambda_k = \lambda_*(k) - \lambda_{cr}(k), k \geq 2$ bo‘lsin. Bu yerda λ_{cr} (1.7) tengsizligida aniqlangan. Bunda $\lambda_2 = 3{,}159191247$, $\lambda_3 = 2{,}083710221$, $\lambda_4 \approx 1{,}691909325$, $\lambda_5 \approx 1{,}479334818$.

(1.6) tenglamaning $k = 2$ bo‘lgan holdagi yechimini ko‘rib chiqamiz. Kardano formulasiga ko‘ra (1.6) tenglamaning yechimi quyidagicha ko‘rinishga keladi:

$$z^*(\lambda) = \frac{1}{6\lambda}\sqrt[3]{8 + 108\lambda + 12\sqrt{3}\lambda\sqrt{\frac{4+27\lambda}{\lambda}}} + \frac{2}{3\lambda\sqrt[3]{8+108\lambda+12\sqrt{3}\lambda\sqrt{4+27\lambda\lambda}}} - \frac{2}{3\lambda}.$$

μ^* o‘lchov $z^*(\lambda)$ yechimga mos translyatsion –invariant Gibbs o‘lchov bo‘lsin. $\mathbf{P}_{\mu^*}$ matritsaning xos sonlarini topamiz:

$$s_1 = 1, \ s_2 = -\frac{\lambda z}{\lambda z + 1}, \ |s_2| < s_1 = 1.$$

μ^* o‘lchovlarning chekka bo‘lmaslik shartini tekshiramiz:

$$g(\lambda) = 2s_2^2 - 1 = \frac{2(\lambda z^*)^2}{(\lambda z^* + 1)^2} - 1 > 0.$$

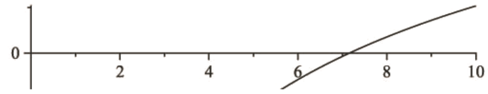
Bundan ko‘rish mumkinki, $\lambda > \lambda_0 = 2(5\sqrt{2} + 7) \approx 28.14213562373$ bo‘lganda $g(\lambda) > 0$ bo‘ladi (1.3 rasmga qarang), ya’ni bu shartda μ^* o‘lchov chekka bo‘lmaydi.

1.3 rasm. ($g(\lambda) = 2s_2^2 - 1$ funksiya grafigi)

μ^* o‘lchovlar chekka bo‘lishi uchun

$$2 \cdot \frac{\lambda z^*}{1+\lambda z^*} \cdot \frac{\lambda}{\lambda+1} < 1, \qquad (1.11)$$

tengsizlikning bajarilishi yetarli.Bu tengsizlik esa $\lambda < \lambda_1 \approx 7.159191247$ bo‘lganda o‘rinli bo‘ladi.(1.4 rasmga qarang)



1.4 rasm ($2\kappa\gamma - 1$ funksiya grafigi)

So‘ngra , oxirgi natijani boshqa usulda topamiz. $k = 2$ bo‘lganda (1.4) va (1.11) dan $\lambda z^* < \frac{\lambda+1}{\lambda-1}$ natijaga ega bo‘lamiz. Bu yerdan $\lambda^3 - 7\lambda^2 - \lambda - 1 < 0$ tengsizlik bilan ekvivalent bo‘lgan

$$\lambda < \frac{\lambda+1}{\lambda-1} \cdot (1+\lambda z^*)^2 < \frac{\lambda+1}{\lambda-1} \cdot \left(1 + \frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right)^2,$$

tengsizlikga ega bo‘lamiz.Oxirgi tengsizligimizni Kardano formulasini qo‘llagan holda yechib, $\lambda < \lambda_1$ ko‘rinishdagi yechimga ega bo‘lamiz, bu yerda

$$\lambda_1 = \frac{1}{3}\sqrt[3]{388+12\sqrt{69}} + \frac{52}{3\sqrt[3]{388+12\sqrt{69}}} + \frac{7}{3} \approx 7.159191247 \qquad (1.12)$$

va bu olingan yechim (1.11) natija bilan mos keladi.Shunday qilib quyidagi teorema isbotlandi.

Teorema 1.2.5. $k=2$ bo‘lsin.U holda μ^* translyatsion –invariant Gibbs o‘lchovi $\lambda>\lambda_0$ da chekka o‘lchov bo‘lmaydi va $0<\lambda<\lambda_1$ bo‘lganda chekka o‘lchov bo‘ladi.

Quyidagi teorema o‘rinli.

Teorema 1.2.6. Agar $k=2$ bo‘lsa, u holda $4<\lambda<\lambda_1$ bo‘lganda HC modeli uchun kamida 2 ta chekka Gibbs o‘lchovlari mavjud. Bu yerda λ_1 (1.12) da aniqlangan.

Isbot: $k=2$ bo‘lsin. (1.6) dan ma’lumki, $0<\lambda\leq\lambda_{cr}$ da yagona μ^* translyatsion –invariant Gibbs o‘lchovi mavjud. Teorema 1.2.5 ga ko‘ra $0<\lambda<\lambda_1$ bo‘lganda μ^* o‘lchov chekka bo‘ladi. $\lambda>\lambda_{cr}(2)=4$ bo‘lganda esa , μ^* o‘lchov hamda 2 ta μ_1 va μ_2 davriy o‘lchovlarga ega bo‘lamiz, bu yerda $\lambda_{cr}(k)$ (1.6) da aniqlangan. Shuningdek, [37] ishda $\lambda>4$ va $k=2$ bo‘lganda HC modellar uchun 2 tadan kam bo‘lmagan sust davriy (davriy bo‘lmagan) Gibbs o‘lchovlari mavjudligi isbotlangan. Agar ushbu barcha yangi o‘lchovlar $(4,\lambda_1)$ intervalda chekka emas deb faraz qilsak , u holda faqatgina bitta μ^* chekka o‘lchov qoladi.Ammo bu holda chekka bo‘lmagan o‘lchovni yagona μ^* o‘lchov orqali ifodalab bo‘lmaydi. Natijada, $4<\lambda<\lambda_1$ bo‘lgan holda kamida bitta yangi o‘lchov chekka bo‘lishi shart. Teorema isbotlandi.

II-BOB. KUCHSIZ DAVRIY GIBBS O‘LCHOVLARI

2.1 Invariant to‘plamlarning mavjudligi

Bu paragrafda invariant to‘plamlarning mavjudligini ko‘rsatamiz. $A\subset\{1,2,...,k+1\}$ va $H_A=\{x\in G_k:\sum_{i\in A}w_x(a_i)-\text{juft son}\}$ bo‘lsin, bu yerda x so‘zidagi a_i harflar soni bo‘lib $x\in G_k$, $G_k^{(2)}=\{x\in G_k:|x|-\textit{juft son}\}$, bu yerda$|x|-$so‘zning uzunligi $x\in G_k$ va $G_k^{(4)}=H_A\cap G_k^{(2)}-$ 4 indeksli normal bo‘luvchi.

$$H_0=\{x\in G_k:\sum_{i\in A}w_x(a_i)-juft,|x|-juft\}$$

$$H_1=\{x\in G_k:\sum_{i\in A}w_x(a_i)-toq,|x|-juft\}$$

$$H_2=\{x\in G_k:\sum_{i\in A}w_x(a_i)-juft,|x|-toq\}$$

$$H_3=\{x\in G_k:\sum_{i\in A}w_x(a_i)-toq,|x|-toq\}$$

Bo‘lgan $G_k/G_k^{(4)}=\{H_0,H_1,H_2,H_3\}$ faktor gurupani qaraymiz.

U holda (1.4) ga ko‘ra $G_k^{(4)}-z_x$ miqdorlarning cheksiz davriy to‘plami quyidagi ko‘rinishda bo‘lada:

$$z_x=\begin{cases} z_1,\ x\in H_3,\ x_\downarrow\in H_1\\ z_2,\ x\in H_1,\ x_\downarrow\in H_3\\ z_3,\ x\in H_3,\ x_\downarrow\in H_0\\ z_4,\ x\in H_0,\ x_\downarrow\in H_3\\ z_5,\ x\in H_1,\ x_\downarrow\in H_2\\ z_6,\ x\in H_2,\ x_\downarrow\in H_1\\ z_7,\ x\in H_2,\ x_\downarrow\in H_0\\ z_8,\ x\in H_0,\ x_\downarrow\in H_2, \end{cases}$$

Bu yerda z_x

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{1}{(1+\lambda z_4)^i}\cdot\dfrac{1}{(1+\lambda z_2)^{k-i}}, & z_2 = \dfrac{1}{(1+\lambda z_6)^i}\cdot\dfrac{1}{(1+\lambda z_1)^{k-i}}, \\ z_3 = \dfrac{1}{(1+\lambda z_4)^{i-1}}\cdot\dfrac{1}{(1+\lambda z_2)^{k-i+1}}, & z_4 = \dfrac{1}{(1+\lambda z_3)^{i-1}}\cdot\dfrac{1}{(1+\lambda z_7)^{k-i+1}}, \\ z_5 = \dfrac{1}{(1+\lambda z_6)^{i-1}}\cdot\dfrac{1}{(1+\lambda z_1)^{k-i+1}}, & z_6 = \dfrac{1}{(1+\lambda z_5)^{i-1}}\cdot\dfrac{1}{(1+\lambda z_8)^{k-i+1}}, \\ z_7 = \dfrac{1}{(1+\lambda z_5)^i}\cdot\dfrac{1}{(1+\lambda z_8)^{k-i}}, & z_8 = \dfrac{1}{(1+\lambda z_3)^i}\cdot\dfrac{1}{(1+\lambda z_7)^{k-i}}. \end{cases} \tag{2.1}$$

tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi.

Bu yerda $i=|A|-$ A to‘plamning quvvati. (2.1) tenglamalar sistemasini quyidagicha yozamiz.

$$\begin{array}{ll} z_1 = \left(\dfrac{1+\lambda z_2}{1+\lambda z_4}\right)^i\cdot\dfrac{1}{(1+\lambda z_2)^k}, & z_2 = \left(\dfrac{1+\lambda z_1}{1+\lambda z_6}\right)^i\cdot\dfrac{1}{(1+\lambda z_1)^k}, \\ z_3 = \left(\dfrac{1+\lambda z_2}{1+\lambda z_4}\right)^{i-1}\cdot\dfrac{1}{(1+\lambda z_2)^k}, & z_4 = \left(\dfrac{1+\lambda z_7}{1+\lambda z_3}\right)^{i-1}\cdot\dfrac{1}{(1+\lambda z_7)^k}, \\ z_5 = \left(\dfrac{1+\lambda z_1}{1+\lambda z_6}\right)^{i-1}\cdot\dfrac{1}{(1+\lambda z_1)^k}, & z_6 = \left(\dfrac{1+\lambda z_8}{1+\lambda z_5}\right)^{i-1}\cdot\dfrac{1}{(1+\lambda z_8)^k}, \\ z_7 = \left(\dfrac{1+\lambda z_8}{1+\lambda z_5}\right)^i\cdot\dfrac{1}{(1+\lambda z_8)^k}, & z_8 = \left(\dfrac{1+\lambda z_7}{1+\lambda z_3}\right)^i\cdot\dfrac{1}{(1+\lambda z_7)^k}. \end{array} \tag{2.2}$$

Bu sistemadagi 1-tenglamani 3-tenglamaga, 2-tenglamani 5- tenglamaga, 6-tenglamani 7- tenglamaga, 4- tenglamani 8- tenglamaga bo‘lib quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

$$\frac{z_1}{z_3} = \frac{1+\lambda z_2}{1+\lambda z_4}, \quad \frac{z_2}{z_5} = \frac{1+\lambda z_1}{1+\lambda z_6},$$
$$\frac{z_6}{z_7} = \frac{1+\lambda z_5}{1+\lambda z_8}, \quad \frac{z_4}{z_8} = \frac{1+\lambda z_3}{1+\lambda z_7}.$$

Bu sistemadan foydalanib (2.2) tenglamalar sistemasini quyidagicha yechamiz:

$$\begin{aligned}
z_1 &= \left(\frac{z_1}{z_3}\right)^i \cdot \frac{1}{(1+\lambda z_2)^k}, & z_5 &= \left(\frac{z_2}{z_5}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{(1+\lambda z_1)^k},\\
z_2 &= \left(\frac{z_2}{z_5}\right)^i \cdot \frac{1}{(1+\lambda z_1)^k}, & z_6 &= \left(\frac{z_7}{z_6}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{(1+\lambda z_8)^k},\\
z_3 &= \left(\frac{z_1}{z_3}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{(1+\lambda z_2)^k}, & z_7 &= \left(\frac{z_7}{z_6}\right)^i \cdot \frac{1}{(1+\lambda z_8)^k},\\
z_4 &= \left(\frac{z_8}{z_4}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{(1+\lambda z_7)^k}, & z_8 &= \left(\frac{z_8}{z_4}\right)^i \cdot \frac{1}{(1+\lambda z_7)^k}.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

(2.3) tenglamalar sistemasining 1- tenglamasidan $-z_3$ ni, ikkinchisidan $-z_5$ ni, yettinchisidan $-z_6$ ni,sakkizinchisidan $-z_4$ ni topib, ularni (2.1) tenglamalar sistemasidagi sakkizinchi, yettinchi, ikkinchi va birinchi tenglamasiga qo‘yib, mos ravishda quyidagilarni yozamiz:

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{(1+\lambda z_7)^k}{((1+\lambda z_7)^{k/i} + \lambda z_8^{1-1/i})^i} \cdot \frac{1}{(1+\lambda z_2)^{k-i}},\\
z_2 &= \frac{(1+\lambda z_8)^k}{((1+\lambda z_8)^{k/i} + \lambda z_7^{1-1/i})^i} \cdot \frac{1}{(1+\lambda z_1)^{k-i}},\\
z_7 &= \frac{(1+\lambda z_1)^k}{((1+\lambda z_1)^{k/i} + \lambda z_2^{1-1/i})^i} \cdot \frac{1}{(1+\lambda z_8)^{k-i}},\\
z_8 &= \frac{(1+\lambda z_2)^k}{((1+\lambda z_2)^{k/i} + \lambda z_1^{1-1/i})^i} \cdot \frac{1}{(1+\lambda z_7)^{k-i}}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Quyidagicha aniqlangan $W: R^4 \to R^4$ akslantirishni qaraymiz:

$$\begin{aligned}
z_1' &= \frac{(1+\lambda z_7)^k}{((1+\lambda z_7)^{k/i} + \lambda z_8^{1-1/i})^i} \cdot \frac{1}{(1+\lambda z_2)^{k-i}},\\
z_2' &= \frac{(1+\lambda z_8)^k}{((1+\lambda z_8)^{k/i} + \lambda z_7^{1-1/i})^i} \cdot \frac{1}{(1+\lambda z_1)^{k-i}},\\
z_7' &= \frac{(1+\lambda z_1)^k}{((1+\lambda z_1)^{k/i} + \lambda z_2^{1-1/i})^i} \cdot \frac{1}{(1+\lambda z_8)^{k-i}},\\
z_8' &= \frac{(1+\lambda z_2)^k}{((1+\lambda z_2)^{k/i} + \lambda z_1^{1-1/i})^i} \cdot \frac{1}{(1+\lambda z_7)^{k-i}}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

(2.4) tenglamalar sistemasi $z = W(z)$ tenglamaekanligini takidlaymiz. (1.4) tenglamalar sistemasini yechish uchun $z' = W(z)$ akslantirishningqo‘zg‘almas nuqtalarini topish kerak.

Lemma 2.1.1. W akslantirish quyidagi ko‘rinishdagi invariant to‘plamga ega bo‘ladi:

$$I_1 = \{(z_1, z_2, z_7, z_8) \in R^4 : z_1 = z_2 = z_7 = z_8\},\ \ I_2 = \{(z_1, z_2, z_7, z_8) \in R^4 : z_1 = z_7,\ z_2 = z_8\},$$

$$I_3 = \{(z_1, z_2, z_7, z_8) \in R^4 : z_1 = z_2, z_7 = z_8\},\ \ I_4 = \{(z_1, z_2, z_7, z_8) \in R^4 : z_1 = z_8,\ z_2 = z_7\}.$$

Isbot. I_2 ni invariantligini ko‘rsatamiz (I_i ning invariantligi (bunda i=1,3,4) shunga o‘xshash isbotlanadi) har qanday $z^* = (z_1^*, z_2^*, z_7^*, z_8^*) \in I_2$ uchun $z_1^* = z_7^*,\ z_2^* = z_8^*$ bo‘lishi ravshan. Bundanva (2.5) danquyidagilargaegabo‘lamiz:

$$z_1' = \frac{(1+\lambda z_1^*)^k}{[(1+\lambda z_1^*)^{k/i} + \lambda (z_2^*)^{1-1/i}]^i} \cdot \frac{1}{(1+\lambda z_2^*)^{k-i}},$$
$$z_2' = \frac{(1+\lambda z_2^*)^k}{[(1+\lambda z_2^*)^{k/i} + \lambda (z_1^*)^{1-1/i}]^i} \cdot \frac{1}{(1+\lambda z_1^*)^{k-i}},$$
$$z_7' = \frac{(1+\lambda z_1^*)^k}{[(1+\lambda z_1^*)^{k/i} + \lambda (z_2^*)^{1-1/i}]^i} \cdot \frac{1}{(1+\lambda z_2^*)^{k-i}},$$
$$z_8' = \frac{(1+\lambda z_2^*)^k}{[(1+\lambda z_2^*)^{k/i} + \lambda (z_1^*)^{1-1/i}]^i} \cdot \frac{1}{(1+\lambda z_1^*)^{k-i}},$$

Ya’ni $z_1' = z_7', z_2' = z_8'$ bu esa $z' = W(z^*) \in I_2$ demakdir.

Eslatma 2.1.1. 1.1.5 va 1.1.6 ta’riflardan Gibbsning I_2 kuchsiz davriy o‘lchovi (yoki I_3 yoki I_4), davri bilan ustma-ust tushmagan holda agar $z_1 = z_7,\ z_2 = z_8$ (yoki $z_1 = z_2,\ z_7 = z_8$ yoki $z_1 = z_8,\ z_2 = z_7$) shartlardan $z_1 = z_3, z_2 = z_5, z_4 = z_8, z_6 = z_7$ tengliklardan aqalli bittasi bajarilmasa z_i ning qiymatiga bog‘liqli $x_\downarrow$ kelib chiqadi.

Lemma 2.1.2. Agar I_2, I_3, I_4 invariant to‘plamlarda Gibbsning kuchsiz davriy o‘lchovlari mavjud bo‘lsa, ular yoki translyatsion-invariant, yoki kuchsiz davriy (davriy emas) o‘lchov bo‘ladi.

Isboti: Isbotni I_2 uchun keltiramiz (qolgan holda shunga o‘xshash isbotlanadi) $z_1 = z_7, z_2 = z_8$ bo‘lsin. U holda (2.1) tenglamalar sistemasidan $z_2 \neq z_4$ holda:

$$z_1 = \frac{1}{(1+\lambda z_4)^i} \cdot \frac{1}{(1+\lambda z_2)^{k-i}} \neq z_3 = \frac{1}{(1+\lambda z_4)^{i-1}} \cdot \frac{1}{(1+\lambda z_2)^{k-i+1}}$$

ni hosil qilamiz. $z_2 \neq z_4$ ekanligini (2.1) sistemadagi 2- va 4-tenglamalardan ko‘rish mumkin.

2.2 Qattiq diskli ikki holatli model uchun davri to‘rtga teng kuchsiz davriy Gibbs o‘lchovlarining mavjudlik va yagonamaslik shartlari

I_2 **hol.** Bu holda (2.4) tenglamalar sistemasini $k=2,\ i=1$ bo‘lganda

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{(1+\lambda z_1)^2}{(1+\lambda z_1)^2+\lambda}\cdot\dfrac{1}{1+\lambda z_2} \\ z_2 = \dfrac{(1+\lambda z_2)^2}{(1+\lambda z_2)^2+\lambda}\cdot\dfrac{1}{1+\lambda z_1} \end{cases} \tag{2.6}$$

deb yozamiz. $x=1+\lambda z_1$ va $y=1+\lambda z_2$ belgilashlardan so‘ng (2.6) sistemadan

$$\begin{cases} x = f(y) \\ y = f(x) \end{cases}$$

ni hosil qilamiz. Bu yerda

$$f(x)=\frac{\lambda x^2}{(x^2+\lambda)(x-1)}$$

f(x) funksiyaning hosilasini qaraymiz:

$$f'(x)=-\frac{x\lambda(x^3-\lambda x+2\lambda)}{(x^2+\lambda)^2(x-1)^2}$$

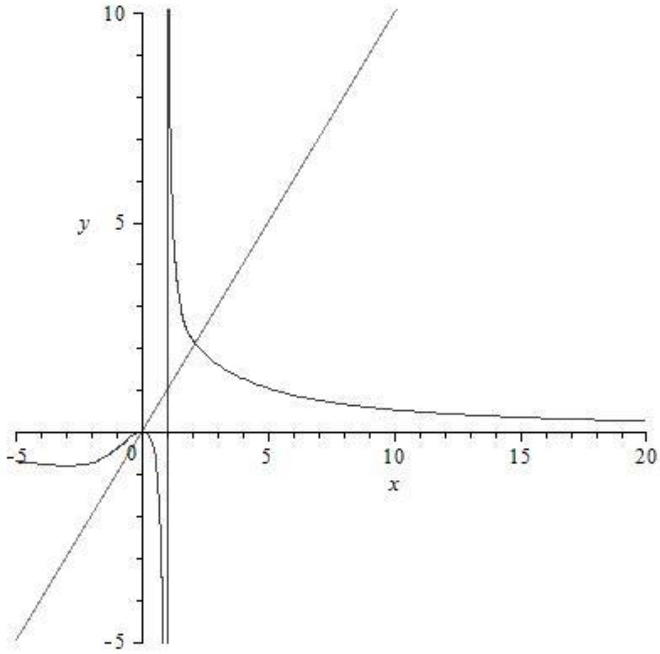
va Kardano formulasidan $x^3-\lambda x+2\lambda$ ko‘phad bo‘lganda uning ildizlarini topamiz. Bu ko‘phad $\lambda\le 27$ bitta haqiqiy manfiy ildizga ega:

$$x=\frac{1}{3}\sqrt[3]{-27\lambda+3\lambda\sqrt{81-3\lambda}}+\frac{\lambda}{\sqrt[3]{-27\lambda+3\lambda\sqrt{81-3\lambda}}}<0.$$

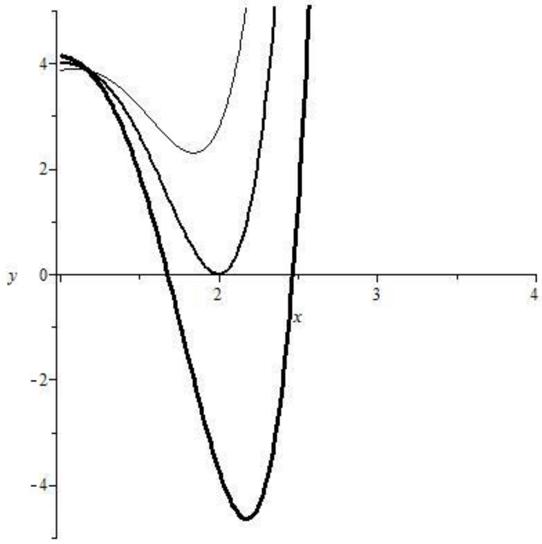
Demak, shu shartda x>1 da $f'(x)<0$ bo‘ladi, ya’ni $f(x)$ funksiya bu intervalda kamayadi va $f(x)=x$ tenglama yagona ildizga ega bo‘ladi.Umuman aytganda $f(x)=x$ tenglama har qanday $\lambda>0$ uchun yagona yechimga ega bo‘ladi.

$$x = \frac{\lambda x^2}{(x^2+\lambda)(x-1)} = f(x)$$

Tenglama $x^3 - x^2 - \lambda = 0$ tenglamaga ekvivalent bo‘lganidan, ko‘phadning musbat ildizlari haqidagi ma’lum teoremaga ko‘ra bittadan ko‘p bo‘lmagan musbat ildizga ega bo‘ladi, shuning uchun koeffitsiyentlar oldidagi ishoralar faqat 1 marta almashadi.(2.1 rasmga qarang)



2.1 rasm. $y = x$ va $y = f(x)$ ($\lambda = 35$) funksiyalarning grafigi



2.2 rasm. $h(x)$ ($k = 2$, $\lambda = 3.88$) (yuqoridagi egri chiziq) kritik $\lambda = 4$ (o‘rtada) va $\lambda = 4.15$ (quyida) funksiyaning grafigi.

Ravshanki, bu yechim birdan kattadir. Bundan tashqari, bu ildiz $f(f(x)) = x$ tenglama ildizlari orasida bo‘ladi. Shuning uchun

$$\frac{x - f(f(x))}{x - f(x)} = 0$$

tenglamani qaraymiz. Bu tenglama

$$h(x) = x^6 - (\lambda + 2)x^5 + (5\lambda + 1)x^4 - \lambda(2\lambda + 5)x^3 + 2\lambda(2\lambda + 1)x^2 - 3\lambda^2 x + \lambda^2 = 0$$

tenglamaga ekivalentdir. Bu tenglamadan $x \to +\infty$ da $h(1) = \lambda > 0$ va $h(x) \to +\infty$ ga ega bo‘lamiz, Bundan tashqari $h(x)$ funksiyaning grafigi $x = 2, \lambda = 4$ da Ox o‘qiga urinadi, chunki $h(2) = -(\lambda - 4)(5\lambda + 4).$ Bundan $h(x) = 0$ tenglama $\lambda < 4$ da yechimga ega bo‘lmaydi $\lambda = 4$ da 1 ta yechimga ega bo‘ladi, $\lambda > 4$ da kamida 2 ta ildizga ega bo‘ladi (2.2 rasmga qarang).

Endi $\lambda > 4$ bo‘lganda $h(x) = 0$ tenglama aniq 2 ta ildizga ega bo‘ladi.U $x = x(\lambda)$ ildizga ega bo‘ladi. Lekin biz bu tenglamani λ o‘zgaruvchiga nisbatan qaraymiz, ya’ni

$$-(x-1)(2x^2 - 2x + 1)\lambda^2 - x^2(x^3 - 5x^2 + 5x - 2)\lambda + x^4(x-1)^2 = 0$$

Bu tenglamadan

$$\lambda_{1,2} = \frac{x^2(x^3 - 5x^2 + 5x - 2) \pm x^3\sqrt{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1}}{-2(x-1)(2x^2 - 2x + 1)}$$

ko‘rinishdagi yechimga ega bo‘lamiz. $\lambda_1 < 0$ va $\lambda_2 > 0$ ligi ravshandir. Bundan

$$\lambda = \lambda_2 = \frac{x^2(x^3 - 5x^2 + 5x - 2) - x^3\sqrt{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1}}{-2(x-1)(2x^2 - 2x + 1)} = \varphi(x)$$

ni qaraymiz.

$$\varphi'(x) = \frac{g_1(x) + g_2(x)\sqrt{D}}{g_3(x)\sqrt{D}} = 0$$

tenglamani yechamiz, bu yerda

$$g_1(x) = 2x^5(4x^7 - 18x^6 + 38x^5 - 52x^4 + 48x^3 - 31x^2 + 13x - 3),$$

$$g_2(x) = -2x(4x^6 - 22x^5 + 52x^4 - 66x^3 + 50x^2 - 21x + 4),$$

$$g_3(x) = 4(2x^3 - 4x^2 + 3x - 1)^2,\ D = x^6(x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1).$$

U holda

$$(x-1)^3\psi(x) = 0$$

tenglamaga ekvivalent bo‘lib, unda

$$\psi(x) = 64x^{12} - 480x^{11} + 1760x^{10} - 4224x^9 + 7312x^8 - 9592x^7 +$$

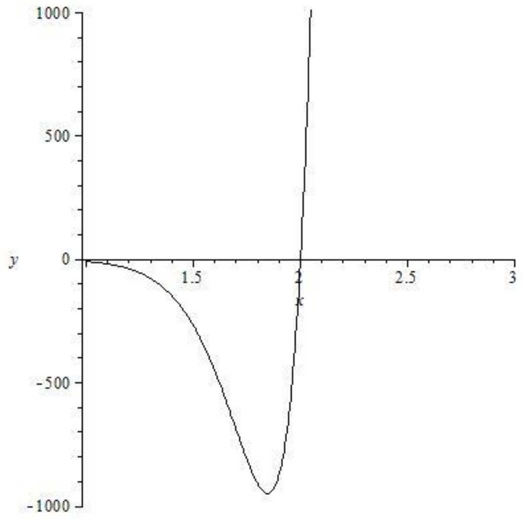
$$+9736x^6 - 7696x^5 + 4696x^4 - 2160x^3 + 712x^2 - 152x + 16$$

Maple dastur yordamida $\psi(x) = 0$ tenglama x>1 bo‘lganda $x_0 = 2$ yagona ildizga ega bo‘ladi.(2.3 rasmga qarang) ya’ni $\varphi(x)$ funksiya x>1 bo‘lganda bitta $x_0 = 2$ kritik nuqtaga ega bo‘ladi. $\varphi(x) \to +\infty$ bo‘ladi $x \to 1$ va $x \to +\infty$ bo‘lganda. Demak, $\varphi(x)$ funksiya $1 < x < 2 = x_{min}$ bo‘lganda kamayadi, va x>2 bo‘lganda o‘sadi (2.4 rasm). Yuqorida aytilganlardan λ ning har bir qiymatiga $\lambda > \lambda_{cr}$ bo‘lganda x ning 2 ta qiymati mos keladiki, bunda

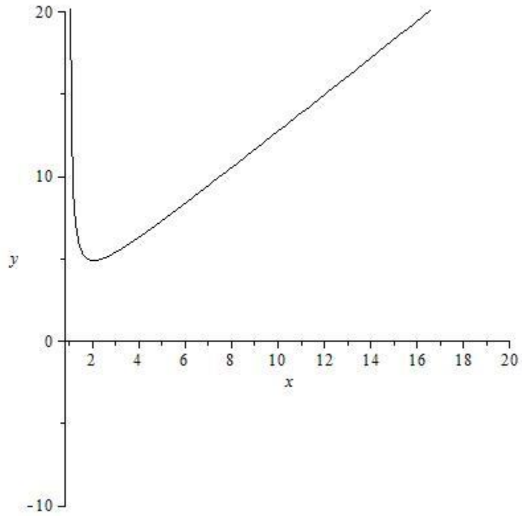
$$\lambda_{cr} = \varphi(2) = 4.$$

Demak, quyidagi tasdiq to‘g‘ridir.

Tasdiq 2.2.1. (2.6) sistema $\lambda < 4$ bo‘lganda 1 ta yechimga, $\lambda = 4$ bo‘lganda 2 ta yechimga ega va $\lambda > 4$ bo‘lganda 3 ta yechimga ega bo‘ladi.



2.3 rasm $\psi(x)$ funksiyaning ($x > 1$) grafigi.



2.4 rasm $\varphi(x)$ funksiyaning (x>1) grafigi

Tasdiq 2.2.2. (2.2) sistema uchun I_2 invariantda $k = 3, i = 1$ bo‘lganda shunday $\lambda_{cr} = \frac{27}{16}$ mavjudki, $0 < \lambda \le \lambda_{cr}$ bo‘lganda yechim yagona, $\lambda > \lambda_{cr}$ bo‘lganda 3 ta yechim mavjud.

Isbot. I_2 invariantda $k = 3, i = 1$ bo‘lganda (2.2) sistema quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi ([24] ga qarang):

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{(1+\lambda z_1)^3}{(1+\lambda z_1)^3 + \lambda\sqrt{z_2}} \cdot \dfrac{1}{(1+\lambda z_2)^2} \\ z_2 = \dfrac{(1+\lambda z_2)^3}{(1+\lambda z_2)^3 + \lambda\sqrt{z_1}} \cdot \dfrac{1}{(1+\lambda z_1)^2} \end{cases} \quad (\lambda > 0)$$

Quyidagicha almashtirish bajaramiz: $x=1+\lambda z_1$, $y=1+\lambda z_2$. U holda $x>1, y>1$ bo‘lib quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases} y^2=\dfrac{\lambda x^3}{(x^3+\lambda)(x-1)}, \\ x^2=\dfrac{\lambda y^3}{(y^3+\lambda)(y-1)}. \end{cases} \tag{2.7}$$

Bu sistemaning birinchisidan y ni topib ikkinchisiga qo‘yamiz. Natijada quyidagi tenglamaga ega bo‘lamiz ([24]ga qarang):

$$f(x,\lambda)=x^{16}-(\lambda+4)x^{15}+3(\lambda+2)x^{14}+4x^{13}+(1-14\lambda)x^{12}+$$

$$+3\lambda(\lambda+8)x^{11}-16\lambda x^{10}-4\lambda(5\lambda-1)x^9+36\lambda^2x^8+\lambda^2(\lambda-24)x^7+\lambda^2(6-13\lambda)x^6+$$

$$+24\lambda^3x^4-16\lambda^3x^4+\lambda^3(4-3\lambda)+6\lambda^4x^2-4\lambda^4x+\lambda^4=0\,.$$

Faraz qilaylik, (2.7) sistemada $x=y$ bo‘lsin. U holda biz

$$x^2=\frac{\lambda x^3}{(x^3+\lambda)(x-1)}$$

tenglamadan $\lambda=x^4-x^3$ bo‘lishini topamiz. Demak $x=y$ bo‘lgan holda yagona yechim mavjud. Endi $f(x,\lambda)$ ni $\lambda-x^4+x^3$ ko‘phadga bo‘lib, $f(x,\lambda)$ ni

$$f(x,\lambda)=(\lambda-x^4+x^3)\cdot g(x,\lambda)$$

ko‘rinishida tasvirlaymiz. Bu yerda

$$g(x,\lambda)=-x^{12}+(\lambda+3)x^{11}-(3+2\lambda)x^{10}+(1-2\lambda)x^9+11\lambda x^8-2\lambda(\lambda+5)x^7+$$
$$+\lambda(3-4\lambda)x^6+14\lambda^2x^5-11\lambda^2x^4+3\lambda^2(1-\lambda)x^3+6\lambda^3x^2-4\lambda^3x+\lambda^3$$

bo‘ladi. Bu funksional tenglama λ ga nisbatan uchinchi darajali tenglama bo‘lgani uchun uni

$$(-3x^3+6x^2-4x+1)\lambda^3+(-2x^7-4x^6+14x^5-11x^4+3x^3)\lambda^2+$$
$$+(x^{11}-2x^{10}-2x^9+11x^8-10x^7+3x^6)\lambda-x^{12}+3x^{11}-3x^{10}+x^9=0$$

ko‘rinishida yozib olamiz. Bu funksional tenglamani λ ga nisbatan Kardano formulasidan foydalanib yechib hamda $f(x,\lambda)$ ni $\lambda-x^4+x^3$ ko‘phadga bo‘lganimizni hisobga olib, quyidagi

$$\lambda_1(x)=x^4-x^3,\ \ \lambda_2(x)=\frac{x^3(x-1)^3}{3x^2-3x+1}\ ,$$

$$\lambda_3(x)=\frac{x^3(-x^2-x+2+x\sqrt{x^2+2x-3})}{2x-2}\ ,$$

$$\lambda_4(x)=\frac{x^3(-x^2-x+2-x\sqrt{x^2+2x-3})}{2x-2}$$

ildizlarni topamiz.

$x>1$ va $\lambda>0$ ekanligini hisobga olsak, u holda $\lambda_4(x)<0$ bo‘ladi va u sistemani qanoatlantimaydi. $\lambda=\lambda_1(x)$ ni qanoatlantiruvchi x lar ($x=1+\lambda z_1$) esa (2.2) sistemaning

$$I_1=\{(z_1,z_2,z_7,z_8)\in R^4: z_1=z_2=z_7=z_8\}$$

invariantdagi $y=x$ yagona yechimiga mos tushadi. I_1 invariantda yagona yechim borligi isbotlangan ([24] ga qarang).

$\lambda=\lambda_2(x)$ yechim (2.7) sistemani qanoatlantirmasligini isbotlaylik. Buning uchun

$$\lambda_2=\frac{x^3(x-1)^3}{3x^2-3x+1}$$

ni (2.7) ning 1-tenglamasiga olib borib qo‘yamiz. Natijada $y=x-1$ tenglikni olamiz. (2.7) sistemaning tenglamalari o‘zaro simmetrik ekanligidan $x=y-1$ tenglik ham o‘rinli. Lekin

$$\begin{cases} y=x-1 \\ x=y-1 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi yechimga ega emas. Demak $\lambda=\lambda_2$ yechim (2.7) sistemani qanoatlantirmaydi.

Endi $\lambda=\lambda_3(x)$ ga λ ning har bir qiymatida nechtadan x mos kelishini aniqlaymiz. Dastlab $\lambda_3(x)$ ning birinchi tartibli hosilasini topib, tekshiraylik:

$$\lambda_3'(x)=\frac{2x^3\left(-x^2-x+2+x\sqrt{(x-1)(x+3)}\right)}{(2x-2)^2}+\frac{3x^2\left(-x^2-x+2+x\sqrt{(x-1)(x+3)}\right)}{2x-2}+$$

$$+\frac{x^3\left(-2x-1+\sqrt{(x-1)(x+3)}+\dfrac{x(x+1)}{\sqrt{(x-1)(x+3)}}\right)}{2x-2}.$$

Endi $\lambda_3'(x)=0$ ning $x>1$ da ildizlarini topaylik:

$$\frac{2x^3\left(-x^2-x+2+x\sqrt{(x-1)(x+3)}\right)}{(2x-2)^2}+\frac{3x^2\left(-x^2-x+2+x\sqrt{(x-1)(x+3)}\right)}{2x-2}+$$

$$+\frac{x^3\left(-2x-1+\sqrt{(x-1)(x+3)}+\dfrac{x(x+1)}{\sqrt{(x-1)(x+3)}}\right)}{2x-2}=0 \quad \Rightarrow$$

$$\left(2(2x-3)(-x^2-x+2)-2(x-1)(2x+1)\right)\sqrt{x^2+2x-3}+$$
$$+2x(2x-3)(x^2+2x-3)+2(x-1)(2x^2+3x-3)=0 \quad \Rightarrow$$

$$\sqrt{x^2+2x-3}=\frac{2x^4+3x^2-11x^2+3x+3}{2x^3+x^2-8x+5} \quad \Rightarrow$$

$$\sqrt{x^2+2x-3}=\frac{(x-1)\left(2x^3+5x^2-6x-3\right)}{(x-1)^2(2x+5)} \quad \Rightarrow$$

$$\sqrt{x^2+2x-3}=\frac{2x^3+5x^2-6x-3}{(x-1)(2x+5)} \tag{2.8}$$

(2.8) tenglikning o‘ng tomoni

$$\frac{2x^3+5x^2-6x-3}{(x-1)(2x+5)} \geq 0 \qquad (2.9)$$

shartni qanoatlantirishini hisobga olib, uni yechaylik. $x>1$ da (2.9) shart

$$2x^3+5x^2-6x-3 \geq 0$$

ga teng kuchli. Dekart teoremasiga ko‘ra $2x^3+5x^2-6x-3$ ko‘phadning ko‘pi bilan 1 ta musbat ildizi borligini ko‘ramiz. Bu ildizni Kardano formulasida topib taqribiy qiymati $x_0 \approx 1.168003803$ ga tengligini ko‘ramiz. Bundan (2.8) tenglamaning ildizlari $x > x_0$ shartni qanoatlantirishi kerakligi kelib chiqadi.

$$\sqrt{x^2+2x-3} = \frac{2x^3+5x^2-6x-3}{(x-1)(2x+5)} \quad \Rightarrow$$

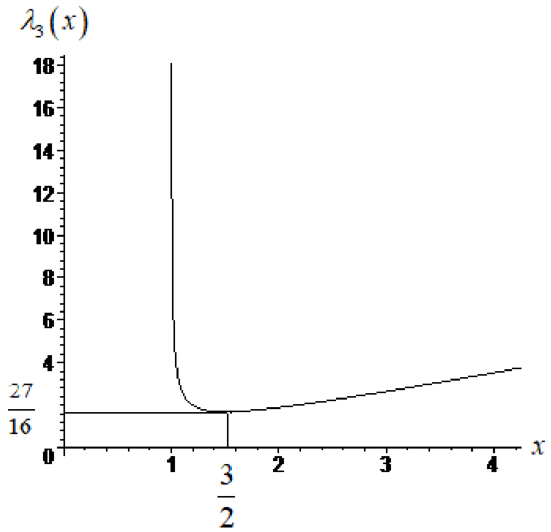
$$x^2+2x-3 = \frac{4x^6+20x^5+x^4-72x^3+6x^2+36x+9}{4x^4+12x^3-11x^2-30x+25} \quad \Rightarrow$$

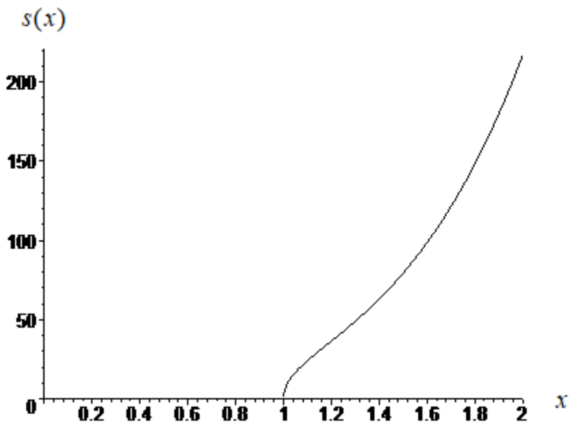
$$4x^6+20x^5+x^4-88x^3-2x^2+140x-75 =$$
$$= 4x^6+20x^5+x^4-72x^3+6x^2+36x+9 \quad \Rightarrow$$

$$-16x^3-8x^2+104x-84=0 \quad \Rightarrow \quad -4(2x-3)\left(2x^2+4x-7\right)=0 \quad \Rightarrow$$

$$x_1=\frac{3}{2}\ , \quad x_2=-1+\frac{3}{2}\sqrt{2}\ , \quad x_3=-1-\frac{3}{2}\sqrt{2}.$$
$$\left(x_1=1{,}5, \quad x_2\approx 1{,}1213203, \quad x_3\approx -3{,}1213203\right).$$

Endi $x > x_0$ $\left(x_0 \approx 1.168003803\right)$ shartni inobatga oladigan bo‘lsak, $\lambda_3^{'}(x)=0$ ning ildizi faqat $x=\frac{3}{2}$ bo‘ladi. $\lambda_3(x)$ funksiya $x=\frac{3}{2}$ da ekstremumga erishadi. $1<x<\frac{3}{2}$ da $\lambda_3^{'}<0$ va $x>\frac{3}{2}$ da $\lambda_3^{'}>0$ bo‘lishidan $\lambda_3(x)$ funksiya $x=\frac{3}{2}$ da minimumga erishishi kelib chiqadi. Demak $\min\left(\lambda_3(x)\right)=\lambda_3\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{27}{16}$ bo‘ladi (2.5.rasmga qarang).





2.5 rasm

2.6 rasm

Endi $\lambda_3''(x)$ ni topib, tekshiraylik:

$$\lambda_3''(x)=\frac{8x^3\left(-x^2-x+2+x\sqrt{(x-1)(x+3)}\right)}{(2x-2)^3}-\frac{12x^2\left(-x^2-x+2+x\sqrt{(x-1)(x+3)}\right)}{(2x-2)^2}-$$

$$-\frac{4x^3\left(-2x-1+\dfrac{2x^2+3x-3}{\sqrt{(x-1)(x+3)}}\right)}{(2x-2)^2}+\frac{6x\left(-x^2-x+2+x\sqrt{(x-1)(x+3)}\right)}{2x-2}+$$

$$\frac{x^3\left(-2+\dfrac{3x+2}{\sqrt{(x-1)(x+3)}}-\dfrac{x(x+1)^2}{\sqrt{(x-1)^3(x+3)^3}}\right)}{2x-2}+\frac{6x^2\left(-2x-1+\dfrac{2x^2+3x-3}{\sqrt{(x-1)(x+3)}}\right)}{2x-2}$$

Endi $\lambda_3''(x)$ ni quyidagicha yozib olamiz:

$$\lambda_3''(x)=\frac{s(x)}{(x-1)^2(x+3)\sqrt{(x-1)(x+3)}}\ . \tag{2.10}$$

Bu yerda

$$s(x)=6x^5+15x^4-12x^3-54x^2+18x+27-$$
$$-\left(4x^4+7x^3-21x^2-21x-9\right)\sqrt{(x-1)(x+3)}$$

ga teng bo‘ladi. $x>1$ da $(x-1)^2(x+3)\sqrt{(x-1)(x+3)}>0$ bo‘lishidan $\lambda_3''(x)$ ning ishorasi $s(x)$ ning ishorasi bilan bir xil bo‘lishi kelib chiqadi. Endi $x>1$ da $s(x)>0$ ekanligidan $\lambda_3''(x)>0$ bo‘lishi kelib chiqadi (2.6-rasm). Bu esa o‘z navbatida

$$\lambda=\lambda_3(x)=\frac{x^3(-x^2-x+2+x\sqrt{x^2+2x-3})}{2x-2}$$

yechim uchun λ ning har bir qiymatiga $\lambda=\frac{27}{16}$ da 1 ta, $\lambda>\frac{27}{16}$ da 2 ta x mos kelishini hamda $0<\lambda<\frac{27}{16}$ bo‘lganda birorta ham x mos kelmasligini bildiradi.

Bundan $\lambda_1(x)=x^4-x^3$ va $\lambda_3(x)=\frac{x^3(-x^2-x+2+x\sqrt{x^2+2x-3})}{2x-2}$ lar uchun

$$\lambda_1\left(\frac{3}{2}\right)=\lambda_3\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{27}{16}$$

bo‘lishini hisobga oladigan bo‘lsak, quyidagicha xulosa berish mumkin:

(2.7) sistema $0<\lambda\le\frac{27}{16}$ bo‘lganda yagona, $\lambda>\frac{27}{16}$ bo‘lganda 3 ta ildizga ega. Tasdiq isbotlandi.

2.3 Qattiq diskli ikki holatli model uchun davri to‘rtga teng kuchsiz davriy Gibbs o‘lchovlarining mavjudlik va yagonalik shartlari

I_3 hol. (2.4) sistemani $k \geq 1, i = 1$ bo‘lganda quyidagicha yozamiz.

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{(1+\lambda z_7)^k}{(1+\lambda z_7)^k + \lambda} \cdot \dfrac{1}{(1+\lambda z_1)^{k-1}} \\ z_7 = \dfrac{(1+\lambda z_1)^k}{(1+\lambda z_1)^k + \lambda} \cdot \dfrac{1}{(1+\lambda z_7)^{k-1}} \end{cases} \tag{2.11}$$

$x = 1 + \lambda z_1$ va $y = 1 + \lambda z_7$ belgilashlardan so‘ng (2.8) sistemadan

$$\begin{cases} x^k - x^{k-1} = \dfrac{\lambda y^k}{y^k + \lambda} \\ y^k - y^{k-1} = \dfrac{\lambda x^k}{x^k + \lambda.} \end{cases}$$

ni topamiz.

Bu sistemaning 1-tenglamasidan 2-tenglamasini ayirib, quyidagi tenglamani hosil qilamiz.Bu tenglama $x > 1$, $y > 1$ bo‘lganda faqat $x = y$ yechimga ega bo‘ladi. Agar $x = y$ bo‘lsa $i = 1$ bo‘lganda

$$z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = z_5 = z_6 = z_7 = z_8$$

bo‘ladi. Haqiqatdan ham, $z_1 = z_2 = z_7 = z_8$ bo‘lsin. U holda (2.1) sistemadagi 1- va 2-tenglamalaridan $z_4 = z_6$ ni, $-z_3 = z_5$ ni 7- va 8-tenglamalaridan esa hosil qilamiz. 3- va 4- tenglamalardan

$$z_3 = \frac{1}{(1+\lambda z_4)^{i-1}} \cdot \frac{1}{(1+\lambda z_1)^{k-i+1}}, \quad z_4 = \frac{1}{(1+\lambda z_3)^{i-1}} \cdot \frac{1}{(1+\lambda z_1)^{k-i+1}}$$

ga ega bo‘lamizki, $i=1$ bo‘lganda $z_3 = z_4$ bo‘ladi. Demak, $z_3 = z_4 = z_5 = z_6$. bo‘ladi. Demak, (2.1) sistemani quyidagicha ko‘rinishda yozish mumkin.

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{1}{(1+\lambda z_3)^i} \cdot \dfrac{1}{(1+\lambda z_1)^{k-i}}, \\ z_3 = \dfrac{1}{(1+\lambda z_3)^{i-1}} \cdot \dfrac{1}{(1+\lambda z_1)^{k-i+1}}. \end{cases}$$

Bu sistemadagi 1-tenglamani 2-tenglamaga bo‘lib $z_1 = z_3$ ni hosil qilamiz. Shunday qilib quyidagi tasdiq o‘rinlidir.

Tasdiq 1.4.3. $k \geq 1, i = 1$ bo‘lsin. U holda (2.11) tenglamalar sistemasi $\lambda > 0$ bo‘lganda yagona yechimga ega bo‘ladi.

I_4 hol I₄ da (2.4) tenglama sistemani $k \geq 1, i = 1$ bo‘lganda

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{1+\lambda z_2}{(1+\lambda z_2)^k + \lambda}, \\ z_2 = \dfrac{1+\lambda z_1}{(1+\lambda z_1)^k + \lambda} \end{cases} \qquad (2.12)$$

deb yozamiz. So‘ng (2.12) sistemada $x = 1+\lambda z_1$ i $y = 1+\lambda z_2$ belgilashlardan

$$\begin{cases} x = f(y) \\ y = f(x) \end{cases}$$

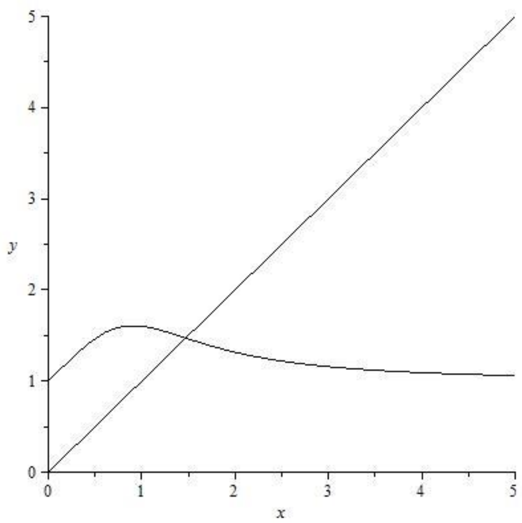
ni hosil qilamizki, bu yerda

$$f(x) = \frac{\lambda x}{x^k + \lambda} + 1. \quad f(0) = 1, \quad f(1) = \frac{\lambda}{1+\lambda} + 1 > 1$$

ekanini hisobga olamiz

$$f'(x) = -\lambda \frac{(k-1)x^k - \lambda}{(x^k + \lambda)^2}.$$

Hosilani hisoblaymiz. Bundan $f(x)$ funksiya $0 < x < \sqrt[k]{\frac{\lambda}{k-1}}$ da o‘sadi va $x > \sqrt[k]{\frac{\lambda}{k-1}}$ da kamayadi, ya’ni $x_{max} = \sqrt[k]{\frac{\lambda}{k-1}}$. Bayon qilinganlardan $f(x) = x$ tenglama $x > 1, \lambda > 0$ bo‘lganda yagona yechimga egaligi kelib chiqadi. Buni ko‘phadning musbat ildizlari soni haqidagi teoremani qo‘llab I_2 holda ham ko‘rish mumkin. (2.7.rasm)



2.7.rasm.

$y = x$ va $y = f(x)$ funksiyalarning $k = 3$, $\lambda = 1.5$ dagi grafigi.

I_2 holga o‘xshash $k = 2,\ i = 1$ va $k = 3, i = 1$ bo‘lganda mos ravishda

$$h_1(x) = (\lambda+1)x^2 + \lambda x + 2\lambda^2 + \lambda,$$

$$h_2(x) = (\lambda+1)x^6 - \lambda x^5 + 2\lambda x^4 + 2\lambda(\lambda+1)x^3 + 2\lambda^2 x + 2\lambda^3 + \lambda^2$$

larni hosil qilamiz. $x > 1, \lambda > 0$ bo‘lganda $h_1(x) > 0, h_2(x) > 0$ ekanligi ravshandir. Demak, (2.12) tenglamalar sistemasi $z_1 = z_2$ dan boshqa yechimga ega bo‘lmaydi, ya’ni quyidagi tasdiq o‘rinlidir.

Tasdiq.2.3.2. (2.12) tenglamalar sistemasi $k = 2$ va $k = 3$ bo‘lganda yagona yechimga ega bo‘ladi.

Barcha tasdiqlar va 2.1.2 lemmaga ko‘ra quyidagi teorema o‘rinli.

Teorema 2.3.1. HC-modelning 4 indeksli normal bo‘luvchi holi uchun quyidagi tasdiqlar o‘rinlidir:

1) $k \geq 1, i \leq k$ da I_1 da Gibbsning kuchsiz davriy o‘lchovi yagonadir. Bundan tashqari bu o‘lchov yagona TIGO‘ bilan ustma-ust tushadi.

2) $k = 2, i = 1, \lambda_{cr} = 4$ bo‘lsin. U holda I_2 da $\lambda < \lambda_{cr}$ bo‘lganda translyatsion-invariant bo‘lgan Gibbsning kuchsiz davriy yagona o‘lchovi mavjud bo‘ladi, $\lambda = \lambda_{cr}$ bo‘lganda biri translyatsion-invariant bo‘lgan, boshqasi kuchsiz davriy bo‘lgan(davriy emas) Gibbsning 2 ta kuchsiz davriy o‘lchovi mavjud bo‘ladi va $\lambda > \lambda_{cr}$ bo‘lganda roppa-rosa 2 ta Gibbsning kuchsiz davriy o‘lchovi mavjud bo‘ladi.

3) $k = 3, i = 1$ bo‘lsin. U holda shunday λ_0 mavjud bo‘ladiki I_2 da $\lambda > \lambda_0$ bo‘lganda Gibbsning 4 tadan kam bo‘lmagan o‘lchovi mavjud bo‘ladiki, ulardan biri translyatsion-invariant bo‘ladi, qolganlari esa kuchsiz davriy (davriy emas) Gibbs o‘lchovlari bo‘ladi.

4) $k \geq 1, i = 1$ bo‘lganda I_3 da Gibbsning kuchsiz davriy o‘lchovi yagonadir.

5) $k = 2,3, i = 1$ bo‘lganda I_4 da Gibbsning kuchsiz davriy o‘lchovi yagonadir.

Endi (2.4) ni I_4 da qaraymiz:

$$\begin{cases} z_1 = \left(\dfrac{1+\lambda z_2}{(1+\lambda z_2)^{k/i} + \lambda z_1^{1-1/i}} \right)^i \\ z_2 = \left(\dfrac{1+\lambda z_1}{(1+\lambda z_1)^{k/i} + \lambda z_2^{1-1/i}} \right)^i . \end{cases} \tag{2.13}$$

$k = i$ bo‘lsin. Ravshanki, $0 < z_1 < 1$, $0 < z_2 < 1$. Belgilash kiritamiz: $\sqrt[k]{z_1} = x$, $\sqrt[k]{z_2} = y$. U holda (2.13) quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\begin{cases} \lambda x^k + \lambda x y^k + x - \lambda y^k = 1 \\ \lambda y^k + \lambda y x^k + y - \lambda x^k = 1. \end{cases} \tag{2.14}$$

(2.14) da birinchi tenglamadan ikkinchisini ayirib ushbu

$$(x-y)\cdot[1+\lambda(x^{k-1}+x^{k-2}y+\ldots+xy^{k-2}+y^{k-1})(2-xy)]=0 \tag{2.15}$$

tenglamaga ega bo‘lamiz. Agar $x=y$ bo‘lsa, u holda $z_1=z_2=\ldots=z_7=z_8$, va bu ko‘rinishdagi yechim ixtiyoriy $\lambda>0$ da mavjud va yagona ekanligini ko‘rsatamiz. (2.14) dan

$$\lambda=\frac{1-x}{x^{k+1}}=\varphi(x)$$

ga ega bo‘lamiz va λ ning har bir qiymatiga faqat bitta x mos kelishini ko‘rsatish oson. Haqiqatan ham, $k\geq 2$, $0<x<1$ da $\varphi'(x)<0$, ya`ni, bu holda $\varphi(x)$ funksiya kamayuvchi va $\varphi''(x)>0$. Demak, $0<x<1$ bo‘lganda λ ning har bir qiymatiga faqat bitta x mos keladi.

Endi $x\neq y$ bo‘lsin. Bu holda (2.15) dan ushbu

$$1+\lambda(x^{k-1}+x^{k-2}y+\ldots+xy^{k-2}+y^{k-1})(2-xy)=0,$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglama λ ning har bir qiymatida $0<x<1, 0<y<1$ bo‘lganda (x,y) ko‘rinishdagi yechimga ega emas.

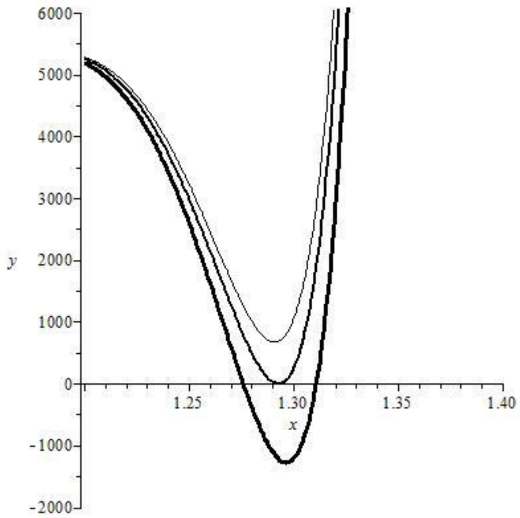
Shunday qilib, quyidagi tasdiq o‘rinli.

Tasdiq 2.3.3. $k=i$ va $\lambda>0$ bo‘lsin. U holda (2.13) tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega bo‘ladi.

Bu tasdiq va 2.1.2 lemmaga ko‘ra quyidagi teorema o‘rinli.

Теорема 2.3.2. HC-modelning 4 indeksli normal bo‘luvchi holi uchun $k=i$ bo‘lganda I_4 da Gibbsning kuchsiz davriy o‘lchovi yagonadir. Bundan tashqari bu o‘lchov yagona TIGO‘ bilan ustma-ust tushadi.

Eslatma.2.3.1. Kompyuter tahlil shuni ko‘rsatadiki, (2.12) sistema $k = 4,5,6$ va $\lambda > 0$ bo‘lganda faqat 1 ta yechimga ega bo‘ladi. $k \geq 7$ bo‘lganda λ ning ayrim qiymatlarida (2.12) sistemaning yechimi yagona emasligini ko‘rish mumkin, ya’ni HC-modellar uchun Gibbsning kuchsiz davriy o‘lchovlari(davriy emas) mavjud bo‘ladi.(2.8.rasm)



2.8.rasm.

$h(x)$ funksiyaning $k = 7$, $\lambda = 1.765$ dagi grafigi (yuqorida), $\lambda \approx 1.768674523476329362$ dagi grafigi (o‘rtada) va $\lambda = 1.775$ dagi grafigi (quyida).

III-BOB. TRANSLYATSION-INVARIANT GIBBS O‘LCHOVLARI

Ushbu bobda uch holatli unumdor HC-modellari uchun translyatsion – invariant Gibbs o‘lchovlari (TIGO‘) o‘rganilgan.Ba’zi modellar uchun $k \geq 2$ tartibli keli daraxtida TIGO‘ lari yagona bo‘lmaydigan λ parametrning aniq qiymatlari topilgan. $k = 2$ bo‘lganda esa mavjud TIGO‘ larning chekka o‘lchov bo‘lish va bo‘lmaslik shartlari aniqlangan.

3.1 Qattiq diskli uch holatli modellar uchun translyatsion-invariant Gibbs o‘lchovlari

Ushbu paragrafda unumdor graf tushunchasi,zarur bo‘lgan ta’riflar va shu model uchun ma’lum bo‘lgan natijalar keltirilgan.

HC-model. Bir jinsli keli daraxtida uch holatli yaqin qo‘shnilarning HC-modelini ko‘rib chiqamiz.Qaralayotgan modelda har bir x uchga $\sigma(x) \in \{0,1,2\}$ qiymatlardan biri mos qo‘yiladi. $\sigma(x) = 1,2$ ekanligi x uchning “band”ligini , $\sigma(x) = 0$ esa uning “vakant” ekanligini ifodalaydi.

Konfiguratsiya. Keli daraxtida konfiguratsiya $V \to \Phi = \{0,1,2\}$ kabi aniqlangan. V da aniqlangan barcha konfiguratsiyalar to‘plami Ω orqali belgilanadi.Xuddi shunga o‘xshash, $V_n\,(W_n)$ da konfiguratsiyalar aniqlanadi va $V_n\,(W_n)$ da aniqlangan barcha konfiguratsiyalar to‘plami $\Omega_{V_n}\,(\Omega_{W_n})$ kabi belgilanadi.

Φ to‘plamni biror G grafning uchlari to‘plami sifatida qaraymiz. G graf yordamida biz G-joiz konfiguratsiyani quyidagi tarzda aniqlaymiz: Agar V (V_n) dagi ixtiyoriy x, y yaqin qo‘shnilar uchun $\{\sigma(x), \sigma(y)\} - G$ grafning qirrasi bo‘lsa ,u holda σ konfiguratsiya keli daraxtida (V_n yoki W_n) G-joiz konfiguratsiya deyiladi. G-joiz konfiguratsiyalar to‘plamini Ω^G $(\Omega^G_{V_n})$ orqali belgilaymiz.

Eslatma 3.1.1. Qarlayotgan model uchun konfiguratsiyada joizlik shartini quyidagicha tushinish mumkin: Agar x va y ni xizmat ko‘rsatish ob’ektlarideb olsak, bunda uchdagi spin qiymat 0 bo‘lsa , xizmat ko‘rsatish yo‘qligini; x va y uchlardagi 1 yoki 2 spin qiymatlar esa berilgan ob’ektlardagi xizmar ko‘rsatish sifatini ifodalaydi.

G graf uchun aktivlik to‘plami $\lambda : G \to R_+$ funksiyadir. λ funksiyaning $i \in \{0,1,2\}$ uchlardagi λ_i qiymatlari uchning “aktivligi” deyiladi.([32]ga qarang).

Berilgan G va λ lar uchun G - HC modelning gamil’taniani ushbu

$$H_G^{\lambda}(\sigma) = \begin{cases} \sum_{x \in V} \ln \lambda_{\sigma(x)}, & \text{если } \sigma \in \Omega^G, \\ +\infty, & \text{если } \sigma \notin \Omega^G. \end{cases}$$

orqali aniqlanadi.

Ta’rif 3.1.1.[32]. Agar shunday λ aktivlik mavjud bo‘lsaki , mos gamil’tanian kamida 2 ta TIGO‘ ga ega bo‘lsa u holda G unimdor graf deyiladi.

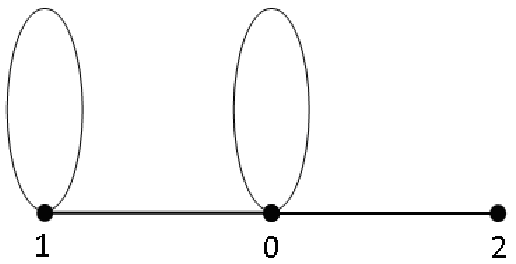
[32] ishdan ma’lumki uchlari 0,1,2 ($\sigma(x)$ ning qiymatlari to‘plamida) bo‘lgan faqatgina 4 ta unimdor graf mavjud bo‘lib , ular quyidagi ko‘rinishga ega.(3.1 rasm)

Sirtmoq: $\{0,0\}\{0,1\}\{0,2\}\{1,1\}\{2,2\}$;

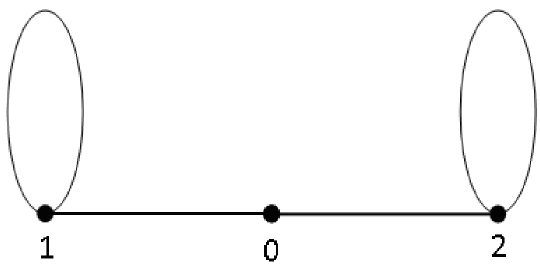
Jezl: $\{0,1\}\{0,2\}\{1,1\}\{2,2\}$;

Kalit: $\{0,0\}\{0,1\}\{0,2\}\{1,1\}$;

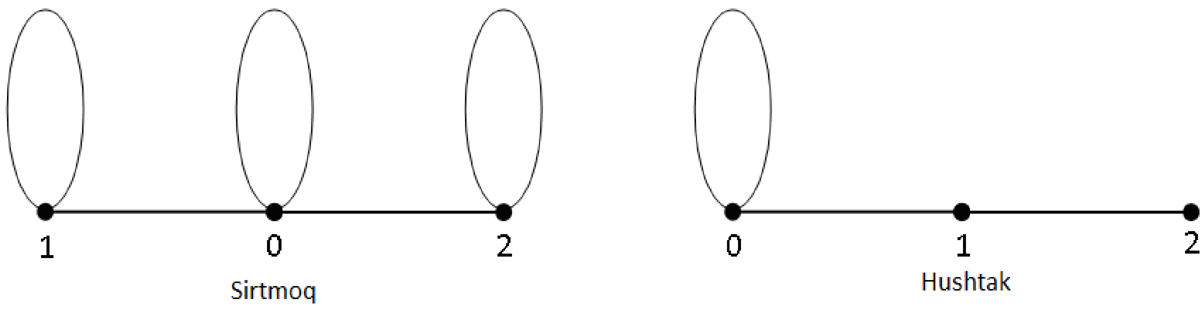
Hushtak: $\{0,0\}\{0,1\}\{1,2\}$.



Kalit



Jezl



3.1 rasm. Unimdor graflar.

Agar yo‘l x^0 dan y ga x orqali o‘tsa u xolda $x < y$ kabi yoziladi.Agar $y > x$ bo‘lsa y uch x ning to‘g‘ri avlodi deyiladi hamda x va y qo‘shnilar bo‘lishadi. $S(x)$ orqali x ning to‘g‘ri avlodlari to‘plamini belgilaymiz.Qayd etish kerakki, τ^k da ixtiyoriy $x \neq x^0$ uch k ta to‘g‘ri avlodga ega bo‘ladi, x^0 uch esa $k+1$ ta avlodga ega bo‘ladi.

$\sigma_n \in \Omega_{V_n}^G$ uchun

$$\#\sigma_n = \sum_{x \in V_n} \mathbf{1}(\sigma_n(x) \geq 1)$$

σ_n dagi band uchlar soni deb olamiz.

$z : x \mapsto z_x = (z_{0,x}, z_{1,x}, z_{2,x}) \in R_+^3$ V dagi vektor qiymatli funksiya bo‘lsin. $n = 1, 2, \ldots$ va $\lambda > 0$ uchun $\Omega_{V_n}^G$ dagi $\mu^{(n)}$ ehtimollik o‘lchovini qaraylik, bu yerda $\mu^{(n)}$ quyidagicha aniqlanadi.

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = \frac{1}{Z_n} \lambda^{\#\sigma_n} \prod_{x \in W_n} z_{\sigma(x),x}. \qquad (3.1)$$

Bu yerda Z_n $-$normallovchi bo‘luvchi:

$$Z_n = \sum_{\sigma n \in \Omega_{V_n}^G} \lambda^{\#\sigma n} \prod_{x \in W_n} z_{\sigma(x),x}.$$

Agar ixtiyoriy $n \geq 1$ va $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}^G$ uchun

$$\sum_{\omega_n \in \Omega_{W_n}} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n) \mathbf{1}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n \in \Omega_{V_n}^G) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}). \qquad (3.2)$$

o‘rinli bo‘lsa $\mu^{(n)}$ ehtimolliklar o‘lchovlari ketma-ketlikigi Muvofiq deyiladi.

Bu holda $(\Omega^G, \mathbf{B})$ da yagona μ o‘lchov mavjud bo‘lib , barcha n va $\sigma_n \in \Omega^G_{V_n}$ lar uchun

$$\mu(\{\sigma \in \Omega^G : \sigma|_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu^{(n)}(\sigma_n)$$

bo‘ladi. Bu yerda $\mathbf{B} - \Omega^G$ ning slindrik qism to‘plamlaridan hosil qilingan $\sigma -$algebra.

Ta’rif: 3.1.2. (3.1) formula va (3.2) shart yordamida aniqlangan μ o‘lchov $\lambda > 0$ da $z: x \in V \setminus \{x^0\} \mapsto z_x$ funksiyaga mos HC-Gibbs o‘lchov deyiladi.

G grafning qirralar to‘plami $L(G)$ bo‘lsin. G grafning yaqinlik matrissasini $A \equiv A^G = (a_{ij})_{i,j=0,1,2}$ bilan belgilaymiz, ya’ni

$$a_{ij} \equiv a_{ij}^G = \begin{cases} 1, \text{ если } \{i, j\} \in L(G), \\ 0, \text{ если } \{i, j\} \notin L(G). \end{cases}$$

bo‘lsin.

Quyidagi teoremada $\mu^{(n)}$ o‘lchovlar muvofiqligini kafolotlovchi z_x funksiyaga qo‘yiladigan shartlar shakllantirilgan:

Teorema:3.1.1.[11]. (3.1) formula bilan berilgan Ehtimolliklar o‘lchovlari $\mu^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, muvofiq bo‘lishi uchun ixtiyoriy $x \in V$ da

$$z'_{1,x} = \lambda \prod_{y \in S(x)} \frac{a_{10} + a_{11} z'_{1,y} + a_{12} z'_{2,y}}{a_{00} + a_{01} z'_{1,y} + a_{02} z'_{2,y}},$$

$$z'_{2,x} = \lambda \prod_{y \in S(x)} \frac{a_{20} + a_{21} z'_{1,y} + a_{22} z'_{2,y}}{a_{00} + a_{01} z'_{1,y} + a_{02} z'_{2,y}},$$

tengliklar o‘rinli bo‘lishi zarur va yetarli,bu yerda $z'_{i,x} = \frac{\lambda z_{i,x}}{z_{0,x}}, \ i=1,2$.

$k=2$ bo‘lgan quyidagi teorema ma’lum.

Teorema 3.1.2.[11]. $k=2$ va $\lambda_{cr} = \frac{9}{4}$ bo‘lsin. U holda $G = sirtmoq$ bo‘lgan holda HC- modeli uchun $\lambda \le \lambda_{cr}$ bo‘lganda yagona μ_0 TIGO‘ mavjud bo‘ladi, $\lambda > \lambda_{cr}$ bo‘lganda esa rosa 3 ta $\mu_i, i=0,1,2$ TIGO‘ mavjud bo‘ladi.

Eslatma 3.1.2. [11] ishda $G = jerl$ bo‘lgan hol uchun Teorema 3.1.2 ga aynan o‘xshash teorema isbotlangan , bunda $\lambda_{cr} = 1$.

$k \ge 2$ **tartibli Keli daraxtida Translyatsion- invariant Gibbs o‘lchovlari .**

Ushbu paragrfda $G = sirtmoq$ va $G = jerl$ bo‘lgan hollarda $\lambda \le \lambda_{cr}$ bo‘lganda uchinchi tartibli Keli daraxtiga 3 ta $k \ge 2$ tartibli Keli daraxtida esa kamida 3 ta TIGO‘ mavjud bo‘ladigan λ_{cr} ning aniq qiymatlari topilgan.

$z_{0,x} \equiv 1$ va $z_{i,x} = z'_{i,x} > 0, \ i=1,2$ deb ataylik. U holda teorema 3.1.1 ga ko‘ra har bir $x \in V \mapsto z_x = (z_{1,x}, z_{2,x})$ ixtiyoriy funksiyalar uchun Gibbsning HC-o‘lchoviga quyidagi funksional tenglamalar sistemasining bitta yechimi mos keladi .

$$z_{i,x} = \lambda \prod_{y \in S(x)} \frac{a_{i0} + a_{i1} z_{1,y} + a_{i2} z_{2,y}}{a_{00} + a_{01} z_{1,y} + a_{02} z_{2,y}}, \ i=1,2 \tag{3.3}$$

$z_x = z \in R^2_+ \ x \ne x_0$ bo‘lgan translyatsion invariant yechimlarni qaraymiz .

$G = sirtmoq$ bo‘lgan holda $z_x = z$, deb olib (3.3) da quyidagi sistemaga ega bo‘lamiz.

$$\begin{cases} z_1 = \lambda \left(\frac{1+z_1}{1+z_1+z_2} \right)^k, \\ z_2 = \lambda \left(\frac{1+z_2}{1+z_1+z_2} \right)^k. \end{cases} \tag{3.4}$$

(3. 4) sistemaning 1- tenglamasidan 2- tenglamasini ayrib tashlab $z_1 = z_2$ yoki $z_1 \neq z_2$. hol uchun $(1+z_1+z_2)^k = \lambda[(1+z_1)^{k-1} + ... + (1+z_2)^{k-1}],$ yechimlarga ega bo‘lamiz .

(3.4) sistemada $z_1 = z_2 = z$ bo‘lganda (3.5) ga ega bo‘lamiz :

$$\lambda^{-1} z = f(z) = \left(\frac{1+z}{1+2z} \right)^k .$$

$f(z)$ funksiya $z > 0$ da kamayuvchi . Demak (3.5) tenglama ixtiyoriy $\lambda > 0.$ uchun yagona $z^* = z^*(k, \lambda)$ yechimga ega .

Quyidagi teorema o‘rinli.

Teorema 3.1.3 $k = 3$ va $\lambda_{cr} = \frac{32}{27}$ bo‘lsin . U holda HC – modeli uchun $G = sirtmoq$ bo‘lgan holda , $\lambda > \lambda_{cr}$ da rosa uchta $\lambda \leq \lambda_{cr}$ bo‘lganda esa yagona TIGO‘ mavjud .

Isbot: $k = 3$ bo‘lgan holda agar $\sqrt[3]{z_1} = x > 0,$ $\sqrt[3]{z_2} = y > 0$ deb olinsa , u holda (3.4) tenglamalar sistemasi quyidagi ko‘rinishga keladi.

$$\begin{cases} x = \sqrt[3]{\lambda}\, \dfrac{1+x^3}{1+x^3+y^3}, \\ y = \sqrt[3]{\lambda}\, \dfrac{1+y^3}{1+x^3+y^3}. \end{cases} \tag{3.6}$$

Ushbu tenglamalar sistemasida birinchi tenglamani ikkinchi tenglamaga bo‘lib yuborib $x = y$ yoki $x \neq y$ hol uchun

$$x + y = \frac{1}{xy} \tag{3.7}$$

natijalarga ega bo‘lamiz. (3.7) tenglamadan $x \neq y$ bo‘lgan hol uchun y ni topamiz.

$$y = \frac{\sqrt{x^4 + 4x} - x^2}{2x}. \tag{3.8}$$

So‘ngra (3.7) ga ko‘ra $y^2 = 1/x - xy$ almashtirish bilan (3.6) sistemaning birinchi tenglamasini quyidagi ko‘rinishda yozib olamiz.

$$x=\sqrt[3]{\lambda}\,\frac{1+x^3}{1+x^3+y^3}=\sqrt[3]{\lambda}\,\frac{1+x^3}{1+x^3+y\cdot y^2}=\sqrt[3]{\lambda}\,\frac{1+x^3}{1+x^3+y\cdot\left(\frac{1}{x}-xy\right)}=$$

$$=\sqrt[3]{\lambda}\,\frac{1+x^3}{1+x^3+\frac{y}{x}-xy^2}=\sqrt[3]{\lambda}\,\frac{1+x^3}{1+x^3+\frac{y}{x}-x(\frac{1}{x}-xy)}=\sqrt[3]{\lambda}\,\frac{(1+x^3)x}{x^4+y(1+x^3)}$$

Ya’ni :

$$x=\sqrt[3]{\lambda}\,\frac{(1+x^3)x}{x^4+y(1+x^3)}.$$

(3.8) tenglikdan foydalanib , quyidagi tenglamaga ega bo‘lamiz.

$$x^4+y(1+x^3)=\sqrt[3]{\lambda}(1+x^3)\Rightarrow y=\sqrt[3]{\lambda}\,\frac{(1+x^3)-x^4}{1+x^3}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x^4+4x}-x^2}{2x}=\sqrt[3]{\lambda}\,\frac{(1+x^3)-x^4}{1+x^3}.$$

Ushbu tenglama esa

$$4x(\sqrt[3]{\lambda}x^8-\sqrt[3]{\lambda}x^7+2x^6-2\sqrt[3]{\lambda}x^4+2x^3-\sqrt[3]{\lambda}x^2-\sqrt[3]{\lambda}x+1)=0$$

tenglamaga ekvivalent.

Mazkur tenglama $x=x(\lambda)$ yechimga ega. Ammo biz bu tenglamani λ o‘zgaruvchiga bog‘liq o‘rganmoqdamiz va $\lambda=\lambda(x)$ yechimga ega bo‘lamiz . Buning uchun $\sqrt[3]{\lambda}=t$ belgilash kiritib

$$x(x^3+1)^2t^2-x^2(x^6-1)t-(2x^6+2x^3+1)=0 \tag{3.9}$$

tenglamani qaraymiz . Bu yerdan

$$t_{1,2}=\frac{x^2(x^3-1)\pm(x^3+1)\sqrt{x^4+4x}}{2x(x^3+1)}.$$

Natijada $t_2<0,$ bo‘lganda quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$t-t_1=0\Leftrightarrow t=\frac{x^2(x^3-1)+(x^3+1)\sqrt{x^4+4x}}{2x(x^3+1)}=\varphi(x).$$

$\varphi(x)$ funksiyani taxlil qilib , shuni takidlash mumkinki $\varphi(x) > 0$ va $\varphi'(x) = 0$ da yagona yechimga ega .

Bundan tashqari $x \to 0$ va $x \to +\infty$ da $\varphi(x) \to +\infty$ shuning uchun t ning har bir qiymatiga $t > \varphi(x^*)$ bo‘lganda x ning kamida 2ta qiymati, $t = \varphi(x^*)$ da bitta qiymati mos keladi va $t = \varphi(x)$ tenglama $t < \varphi(x^*)$ da yechimga ega bo‘lmaydi . Bu yerda x^* $\varphi'(x) = 0$ tenglamaning yechimi . MathCAD (yoki Maple) dasturlari yordamida yagona hamda $x^* = \sqrt[3]{4}/2$ ga teng bo‘lgan $\varphi'(x) = 0$ tenglamaning musbat yechimini topamiz.

O‘rniga qo‘yamiz :

$$\lambda_{cr} = t^3 = \varphi^3(x^*) = \frac{32}{27}.$$

Qayt etish kerakki, agar $\varphi''(x) > 0$ bo‘lsa, u holda λ ning har bir qiymatiga $\lambda > \lambda_{cr}$ da x ning faqatgina 2 ta qiymati mos keladi. Shuning uchun $\varphi(x) > 0$ ekanligini isbotlaymiz. Haqiqatdan ham,

$$\varphi''(x) = \frac{12x^4(2-x^3)(x+4)\sqrt{x^2+4x} + (x^4+4x+12)(x^3+1)^3}{2x^2(x+4)(x^3+1)^3\sqrt{x^2+4x}}.$$

Quyidagi funksiyani qaraylik:

$$\psi(x) = 12x^4(2-x^3)(x+4)\sqrt{x^2+4x} + (x^4+4x+12)(x^3+1)^3.$$

Ma’lumki, agar $x^3 < 2$ bo‘lsa u holda $\varphi''(x) > 0$ bo‘ladi.U holda $\varphi(x) > 0$ ekanligidan quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\begin{aligned}\alpha(x) = {} & x^{26} + 14x^{23} + 24x^{22} + 79x^{20} + 240x^{19} - 1492x^{17} - 5976x^{16} - 7776x^{15} + 7327x^{14} + \\ & + 29568x^{13} + 38448x^{12} - 6466x^{11} - 25368x^{10} - 33984x^9 + 289x^8 + 1584x^7 + 2160x^6 + \\ & + 104x^5 + 600x^4 + 864x^3 + 16x^2 + 96x + 144 > 0\end{aligned}$$

Bunda $\alpha(1) = 496 > 0.$ Maple dasturi yordamida ko‘rish mumkinki, $\alpha(x) = 0$ tenglama 2 ta $x_1 < 1$ va $x_2 < 1$ musbat yechimlarga ega. Bu yerda $x > 0$ da $\varphi''(x) > 0$ ga ega bo‘lamiz.

Endi (3.7) da $x=y$ bo‘lsin. U holda $x=y=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ bo‘ladi. (3.6) sistemaning birinchi yoki ikkinchi tenglamasidan foydalanib $\lambda=\frac{32}{27}$ qiymatni aniqlaymiz. Bundan shuni ta’kidlash mumkinki, $k=3$ da λ ning qiymati va $z=z_1=z_2=\frac{1}{2}$ qiymatlar (3.5) tenglamani qanoatlantiradi, ya’ni $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ (3.4) sistemaning yagona yechimi bo‘ladi.Teorema isbotlandi.

$G=jezl$ bo‘lgan holda , $z_x=z$ deb olib , (3.3) dan quyidagi tenglamalar sistemasiga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases} z_1=\lambda\left(\dfrac{1+z_1}{z_1+z_2}\right)^k, \\ z_2=\lambda\left(\dfrac{1+z_2}{z_1+z_2}\right)^k \end{cases} \tag{3.10}$$

yoki $\sqrt[k]{z_1}=x>0, \sqrt[k]{z_2}=y>0$ bo‘lganda

$$\begin{cases} x=\sqrt[k]{\lambda}\,\dfrac{1+x^k}{x^k+y^k}, \\ y=\sqrt[k]{\lambda}\,\dfrac{1+y^k}{x^k+y^k}. \end{cases} \tag{3.11}$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi. $k=3$ bo‘lsin. U holda ohirgi sistemada 1- tenglamani 2- tenglamaga bo‘lib yuborib, $x=y$ yoki $x\neq y$ bo‘lganda

$$x+y=\frac{1}{xy}$$

ga ega bo‘lamiz.

Shunga o‘xshash $G=sirtmoq$ bo‘lgan holda (3.7) va (3.8) formulalardan ega bo‘lishimiz mumkin. So‘ngra (3.7) da $y^2=1/x-xy$ almashtirish bajarib , (3.11) sistemaning birinchi tenglamasini quyidagi ko‘rinishda yozib olamiz:

$$x=\sqrt[3]{\lambda}\,\frac{1+x^3}{x^3+y\cdot\left(\frac{1}{x}-xy\right)}=\frac{1+x^3}{x^3+\frac{y}{x}-x\cdot\left(\frac{1}{x}-xy\right)}=\sqrt[3]{\lambda}\,\frac{x\cdot(1+x^3)}{x^4+y-x+x^3y}.$$

Bu yerdan (3.8) ni qo‘llab quyidagi tenglamaga ega bo‘lamiz:

$$y=\frac{\sqrt[3]{\lambda}(1+x^3)+x-x^4}{1+x^3}=\frac{\sqrt{x^4+4x}-x^2}{2x}.$$

Ushbu tenglama

$$4x(x^3+1)^2s^2+4x^2(3-x^3)(x^3+1)s-12x^6-4=0$$

kvadrat tenglamaga ekvivalent bo‘lib, bu yerda $s=\sqrt[3]{\lambda}$. mazkur tenglama bitta musbat yechimga ega.

$$s=\frac{x^2(x^3-3)+\sqrt{x^4(x^3+3)^2+4x}}{2x(x^3+1)}=\varphi_1(x)$$

$\varphi_1(x)$ funksiyani $G=sirtmoq$ bo‘lgan holdagiga o‘hshash holda tahlil qilib , $\varphi_1'(x)=0$ tenglamaning musbat yechimini topamiz. Bu yechim yagona va $x^{**}=\sqrt[3]{4}/2$ ga teng, shuningdek,

$$\lambda_{cr}=s^3=\varphi^3(x^{**})=\frac{4}{27}.$$

Quyidagi teorema o‘rinli.

Teorema 3.1.4. $k=3$ va $\lambda_{cr}=\frac{4}{27}$ bo‘lsin. U holda HC-modeli uchun $G=jezl$ bo‘lgan holda $\lambda>\lambda_{cr}$ da 3 ta TIG‘O‘, $\lambda\le\lambda_{cr}$ da esa bitta TIG‘O‘ mavjud bo‘ladi.

Eslatma 3.1.3.

1) Bu holda $\lambda=\lambda_{cr}$ da yagona TIG‘O‘ $z=z_1=z_2=\frac{1}{2}$ ga mos keladi.
2) $G=xushtak$ va $G=kalit$ bo‘lgan hollarda $k\ge 1$ va ixtiyoriy $\lambda>0$ uchun TIG‘O‘ yagona ekanligi isbotlangan([11],[33]ga qarang).

$k\ge 2$ **bo‘lgan hol.** Bu holda (3.4) tenglamalar sistemasini qaraymiz.

Quyidagi lemma kelgusi izlanishlarimizni olib borishimiz uchun foydali:

Lemma 3.1.1. (Kesten).[34]. $f:[0,1]\to[0,1]-$funksiya $\xi\in(0,1)$ qo‘zg‘almas nuqtali uzluksiz funksiya bo‘lsin. f funksiya ξ nuqtada differensiallanuvchi va $f'(\xi)<-1$ deb olaylik. U hlda shunday $x_0, x_1, 0\le x_0<\xi<x_1\le 1$ nuqtalar mavjudki, $f(x_0)=x_1$ va $f(x_1)=x_0$ tengliklar bajariladi.

(3.4) tenglamalar sistemasi $\sqrt[k]{z_1}=x>0,\ \sqrt[k]{z_2}=y>0$ da quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi.

$$\begin{cases} x=\sqrt[k]{\lambda}\,\dfrac{1+x^k}{1+x^k+y^k}, \\ y=\sqrt[k]{\lambda}\,\dfrac{1+y^k}{1+x^k+y^k}. \end{cases} \qquad (3.12)$$

(3.12) tenglamalar sistemasining birinchi tenglamasidan $1+y^k$, ikkinchi tenglamasidan esa $1+x^k$ ni topib olamiz.

$$1+y^k=\frac{\sqrt[k]{\lambda}(1+x^k)-x^{k+1}}{x},$$
$$1+x^k=\frac{\sqrt[k]{\lambda}(1+y^k)-y^{k+1}}{y}$$

hamda shu sistemaning mos ravishda birinchi hamda ikkinchi tenglamalarining o‘ng tomoniga qo‘yamiz. Natijada ,

$$\begin{cases} x=\gamma(y), \\ y=\gamma(x), \end{cases}$$

ga ega bo‘lamiz, bu yerda

$$\gamma(x)=a-\frac{x^{k+1}}{1+x^k},\ \ a=\sqrt[k]{\lambda}\,.$$

Ma’lumki, $\gamma(x)>0$ va $\gamma(a)=\dfrac{a}{1+a^k}<a,$ ya’ni , $\gamma:[0,a]\to[0,a]$. Bundan tashqari $\gamma(x)$ $[0,a]$ kesmada uzluksiz, differensiallanuvchi funksiya va shuningdek,

$$\gamma'(x) = -\frac{x^k(x^k + k + 1)}{(x^k + 1)^2} < 0,$$

bundan $\gamma(x)$ funksiya kamayuvchi. Bu yerda $\gamma(x) = x$ tenglama yagona $x = \xi$ yechimga ega.

So‘ngra , $f'(\xi) < -1$ tengsizlikning o‘rinliligini tekshiramiz.Haqiqatdan ham, ko‘rishimiz mumkinki,

$$\gamma'(\xi) = -\frac{\xi^k(\xi^k + k + 1)}{(1 + \xi^k)^2} < -1. \qquad (3.13)$$

$t = \xi^k$ belgilash kiritamiz. U holda (3.13) tengsizlik $\xi > \frac{1}{\sqrt[k]{k-1}}$ da o‘rinli bo‘lishini topamiz. Keyin esa, shartga ko‘ra $\xi -$nuqta γ akslantirishning qo‘zg‘almas nuqtasi, demak

$$a = \xi + \frac{\xi^{k+1}}{1 + \xi^k} = \varphi(\xi)$$

ga ega bo‘lamiz. Bu yerda qayt etish kerakki,

$$\varphi'(\xi) = 1 + \frac{\xi^k(\xi^k + k + 1)}{(1 + \xi^k)^2} > 0,$$

ya’ni $\varphi(\xi)$ funksiya o‘suvchi . Natijada

$$a_{min} = \varphi\left(\frac{1}{\sqrt[k]{k-1}}\right) = \frac{1}{\sqrt[k]{k-1}} \cdot \frac{k+1}{k},$$

bu yerdan

$$\lambda_{\min} = \lambda_{cr} = \frac{1}{k-1} \cdot \left(\frac{k+1}{k}\right)^k$$

ekani kelib chiqadi. Bu yerdan lemma 3.1.1.ga ko‘ra $\lambda > \lambda_{cr}$ da (3.12) sistemaning 3 ta (ξ, ξ), (x_0, y_0) va (y_0, x_0) yechimlari mavjudligi kelib chiqadi. Keyin esa $\lambda \le \lambda_{cr}$ da (3.12 tenglamalar sistemasining (ξ, ξ) yagona yechimi mavjud. Haqiqatdan ham , $\lambda \le \lambda_{cr}$ da

$$0 > \gamma'(\xi) > -1$$

ga ega bo‘lamiz, ya’ni $|\gamma^{'}(\xi)|<1$ va ξ nuqta tortuvchi bo‘ladi.Natijada ixtiyoriy $\xi_0 \in [0,a]$ uchun

$$\lim_{n\to\infty}\gamma^{(n)}(\xi_0) = \xi,$$

bu yerda $\gamma^{(n)}$- γ akslantirishning $n-$iteratsiyasi. Bu yerdan $\gamma^2(\xi_0) = \xi_0$ yehimga ega bo‘lmaydi, demak (3.12) tenglamalar sistemasi $\lambda \le \lambda_{cr}$ da yagona yechimga ega bo‘ladi. Shunday qilib quyidagi teorema o‘rinli.

Teorema 3.1.5. $k \ge 2$ va $\lambda_{cr} = \frac{1}{k-1}\cdot\left(\frac{k+1}{k}\right)^k$ bo‘lsin. U holda HC-modeli uchun $G = sirtmoq$ bo‘lgan holda $\lambda > \lambda_{cr}$ da kamida 3 ta, $\lambda \le \lambda_{cr}$ da esa bitta TIG‘O‘ mavjud.

Eslatma 3.1.4. $k = 2$ va $k = 3$ da 3 ta TIG‘O‘ mavjudligi isbotlangan (3.1.2 va 3.1.3 teoremaga qarang). Ammo umumiy holda kamida 3 ta TIG‘O‘ ning mavjudligi isbotlandi.

$G = jezl$ **bo‘lgan hol.** (3.11) tenglamalar sistemasini qaraymiz. (3.11) sistemaning birinchi tenglamasidan $1+y^k$ ni topamiz va shu sistemaning ikkinchi tenglamasining o‘ng tomoniga qo‘yamiz. Bu sistemaning ikkinchi tenglamasidan $1+x^k$ ni topamiz va birinchi tenglamaning o‘ng qismiga qo‘yamiz. Natijada quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases} x = \gamma(y) \\ y = \gamma(x), \end{cases}$$

bu yerda $\gamma(x) = a - \frac{x^{k+1}-x}{1+x^k}$, $a = \sqrt[k]{\lambda}$. $\gamma(x)$ funksiyaning hosilasini hisoblaymiz:

$$\gamma^{'}(x) = -\frac{x^{2k}+2kx^k-1}{(x^k+1)^2} = -\frac{(x^k+1)^2+2[x^k(k-1)-1]}{(x^k+1)^2},$$

bu hisoblangan ifoda $x > \dfrac{1}{\sqrt[k]{k-1}}$ da manfiy bo‘ladi. Bundan shu shart bo‘yicha $\gamma(x) = x$ tenglama yagona $x = \xi$ yechimga ega bo‘ladi. Bundan tashqari $\xi > 1/\sqrt[k]{k-1}$ da

$$\gamma^{'}(\xi) = -\frac{(\xi^k+1)^2 + 2[\xi^k(k-1)-1]}{(\xi^k+1)^2} < -1.$$

So‘ngra , ξ- shartga ko‘ra γ akslantirishning qo‘zg‘almas nuqtasi, demak $\xi > 1/\sqrt[k]{k-1}$ da quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$a = \xi + \frac{\xi^{k+1} - \xi}{1+\xi^k} = \frac{2\xi^{k+1}}{\xi^k+1} = \varphi(\xi).$$

Qaytd etish lozimki,

$$\varphi^{'}(\xi) = 2 \cdot \frac{\xi^{2k} + \xi^k(k+1)}{(1+\xi^k)^2} > 0,$$

ya’ni $\varphi(\xi)$ funksiya o‘suvchi. Demak,

$$a_{min} = \varphi\left(\frac{1}{\sqrt[k]{k-1}}\right) = \frac{2}{k\sqrt[k]{k-1}}$$

$$\lambda_{min} = \lambda_{cr} = \frac{1}{k-1} \cdot \left(\frac{2}{k}\right)^k.$$

Bu yerdan Lemma 3.1.1. ga ko‘ra $\lambda > \lambda_{cr}$ da (3.11) sistemaning 3 ta (ξ,ξ), (x_0, y_0) va (y_0, x_0) yechimlari mavjudligi kelib chiqadi.

Shunday qilib, $\lambda \le \lambda_{cr}$ da (3.11) sistemasining yagona (ξ,ξ) yechimi mavjud. Haqiqatdan ham, $\lambda \le \lambda_{cr}$ da $0 > \gamma'(\xi) > -1$ ga ega bo‘lamiz, ya’ni $|\gamma^{'}(\xi)| < 1.$ Natijada ξ nuqta ixtiyoriy ξ_0 nuqta uchun tortuvchi nuqta bo‘ladi

$$\lim_{n\to\infty} \gamma^{(n)}(\xi_0) = \xi,$$

bu yerda $\gamma^{(n)} - \gamma$ akslantirishning $n-$ iteratsiyasi. Bu yerdan $\gamma^2(\xi_0) = \xi_0$ yechimga ega emas, demak, (3.11) tenglamalar sistemasi $\lambda \le \lambda_{cr}$ da yagona yechimga ega.

Shunday qilib quyidagi teorema o‘rinli:

Teorema 3.1.6. $k \geq 2$ va $\lambda_{cr} = \frac{1}{k-1} \cdot \left(\frac{2}{k}\right)^k$ bo‘lsin. U holda $G = jezl$ bo‘lgan holda HC modeli uchun $\lambda > \lambda_{cr}$ bo‘lganda 3 tadan kam bo‘lmagan TIGO‘ mavjud; $\lambda \leq \lambda_{cr}$ bo‘lganda aynan bitta TIGO‘ mavjud bo‘ladi.

Eslatma 3.1.5. $k = 2$, $\lambda > \lambda_{cr} = 1$ va $k = 3$, $\lambda > \lambda_{cr} = 4/27$ bo‘lganda mos ravishda rosa 3 ta TIGO‘ mavjudligi isbotlangan. (Teorema 3.1.4. ning Eslatma 3.1.3 siga qarang).

3.2 $G=$"*Sirtmoq*" bo‘lgan hol uchun translyatsion-invariant Gibbs o‘lchovlarining chekka o‘lchov bo‘lish shartlari.

Ushbu paragrafda $G=sirtmoq$ bo‘lgan hol uchun $k=2$ da mavjud bo‘lgan TIGO‘ larining chekka bo‘lish (bo‘lmaslik) sohalarini aniqlaymiz.

$G=sirtmoq$ **bo‘lgan holda o‘lchovlarning chekka bo‘lmaslik sharti.** O‘lchovlarning chekka ekanligini tekshirishda [35], [36] hamda [37] ishlardagi metodlardan foydalanamiz. Buning uchun berilgan μ TIGO‘ning $\{0,1,2\}$ holatli Markov zanjirlari va P_{ij} ehtimolliklarining P_{μ} o‘tish matritsasini qaraymiz.

Avvalgi bobdan ma’lumki, P_{μ} matritsaga mos μ gibbs o‘lchovining chekka bo‘lmasligining yetarli sharti $k\lambda_2^2>1$ dir, bu yerda λ_2 P_{μ} ning absalyut qiymat bo‘yicha 2- xos soni. ([36]ishga qarang).

Ushbu shartni tekshirish uchun (3.3) sistema yechimining aniq ko‘rinishini bilish lozim.Aniq qiymatlarni biz faqatgina $k=2$ bo‘lganda bilamiz ([25] ga qarang).

(3.4) tenglamalar sistemasi $\lambda\leq\frac{9}{4}$ da yagona (z,z) yechimga ega. Bu yerda z quyidagi tenglamaning yagona yechimi:

$$z=\lambda\left(\frac{1+z}{1+2z}\right)^2 \tag{3.14}$$

Shuningdek $\lambda>\frac{9}{4}$ da 3ta $(z,z),\ (z_1,z_2),\ (z_2,z_1)$ yechimlarga ega. Bu yerda

$$z_1=\left(\frac{1+\sqrt{1-4a^2}}{2a}\right)^2,\ z_2=\left(\frac{1-\sqrt{1-4a^2}}{2a}\right)^2, \tag{3.15}$$

hamda $a=2/(\sqrt{\lambda}+\sqrt{\lambda+4})$. Ushbu yechimlarga mos o‘lchovlarning chekka bo‘lmaslik shartini aniqlaymiz. (3.1) dan (z_1,z_2) yechim uchun biz $\sigma(x)$ holatdan $\sigma(y)$ holatga ko‘chish ehtimolligi $P_{\sigma(x)\sigma(y)}$ ni aniqlashimiz mumkin:

$$P_{\sigma(x)\sigma(y)}=\frac{\lambda^{\#\{\sigma(x),\sigma(y)\}}z_{\sigma(y)}}{\sum\limits_{\sigma(y)\in\Omega^G}\lambda^{\#\{\sigma(x),\sigma(y)\}}z_{\sigma(y)}}\quad\Rightarrow\quad P_{ij}=\frac{\lambda^{\#\{i,j\}}z_j}{\sum\limits_{l=0,1,2}\lambda^{\#\{i,l\}}z_l}.$$

Natijada $z'_{i,x} = \lambda z_{i,x}/z_{0,x}$, $i = 1,2$ ni qo‘llab, $G = sirtmoq$ bo‘lgan hol uchun quyidagiga ega bo‘lamiz.

$$P_{00} = \frac{z_0}{z_0 + \lambda z_1 + \lambda z_2} = \frac{1}{1 + z_1^{'} + z_2^{'}},\ P_{01} = \frac{\lambda z_1}{z_0 + \lambda z_1 + \lambda z_2} = \frac{z_1^{'}}{1 + z_1^{'} + z_2^{'}},$$

$$P_{02} = \frac{\lambda z_2}{z_0 + \lambda z_1 + \lambda z_2} = \frac{z_2^{'}}{1 + z_1^{'} + z_2^{'}},\ P_{10} = \frac{1}{1 + z_1^{'}},\ P_{11} = \frac{z_1^{'}}{1 + z_1^{'}},\ P_{12} = 0,$$

$$P_{20} = \frac{1}{1 + z_2^{'}},\quad P_{21} = 0,\quad P_{22} = \frac{z_2^{'}}{1 + z_2^{'}}.$$

Bundan (shartli ravishda $z_i^{'} = z_i$)

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1 + z_1 + z_2} & \frac{z_1}{1 + z_1 + z_2} & \frac{z_2}{1 + z_1 + z_2} \\ \frac{1}{1 + z_1} & \frac{z_1}{1 + z_1} & 0 \\ \frac{1}{1 + z_2} & 0 & \frac{z_2}{1 + z_2} \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

Ma’lumki, ushbu matritsaning xos qiymatlaridan biri $s_3 = 1$. Qolgan 2 ta s_1 va s_2 larning qiymatlarini topamiz:

$$\det(P - sE) = 0 \Rightarrow (1 + z_1 + z_2)(1 + z_1)(1 + z_2)s^3 -$$

$$-[z_2(1 + z_1 + z_2)(1 + z_1) + (1 + z_1)(1 + z_2) + z_1(1 + z_1 + z_2)(1 + z_2)]s^2 +$$

$$+ z_1 z_2 (1 + z_1 + z_2)s + z_1 z_2 = 0. \tag{3.17}$$

Dastlab (z_1, z_2) yechimga mos o‘lchovlarning chekka bo‘lmaslik shartini tekshiramiz. Buning uchun oxirgi tenglamaning chap qismini $s - 1$ ga bo‘lib va $z_1 z_2 = 1$ belgilash kiritib, quyidagi kvadrat tenglamaga ega bo‘lamiz:

$$A(A+1)s^2-(A+1)s-1=0, \text{ bu yerda } A=1+z_1+z_2=\frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2+4\lambda}}{2}.$$

Bu kvadrat tenglamani yechib quyidagilarni topamiz:

$$s_1=\frac{A+1-\sqrt{(A+1)(5A+1)}}{2A(A+1)},\ s_2=\frac{A+1+\sqrt{(A+1)(5A+1)}}{2A(A+1)}.$$

Eslatma 3.2.1. Yuqoridagi formulalardan ko'rinib turibdiki, ushbu xos qiymatlar z_1+z_2 ga bog'liq. Natijada (z_1,z_2) yechimga mos μ_1 TIGO' faqat va faqat chekka o'lchov bo'ladi(bo'lmaydi) qachonki , (z_1,z_2) yechimga mos μ_2 o'lchov chekka bo'lsa(bo'lmasa).

$$s_1+s_2=\frac{1}{A}>0,\ s_1s_2=-\frac{1}{A(A+1)}<0$$

ekanligidan $|s_1|<s_2<s_3=1$ ekani kelib chiqadi.

Endi esa $ks_2^2>1$ o'lchovlar uchun chekka bo'lmaslik shartini tekshiramiz.Ushbu tengsizlikdan quyidagi natija kelib chiqadi:

$$s_2=\frac{A+1+\sqrt{(A+1)(5A+1)}}{2A(A+1)}>\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

λ musbat ekanligidan ohirgi tengsizlik quyidagi ko'rinishga ega bo'lishini ko'ramiz:

$$0<\lambda<\frac{(\sqrt{2}-1+\sqrt{11+\sqrt{8}})^2}{2+2\sqrt{2}+2\sqrt{11+\sqrt{8}}}\approx 1.4.$$

Ammo, (z_1,z_2) yechim $\lambda>9/4$ da mavjud. Demak, bu yechimga mos o'lchov o'z-o'zidan chekka bo'ladi. Buni biz kelgusi izlanishlarimizda tadqiq etamiz.

So‘ngra, $k=2$ da (3.14) tenglamaning yagona yechimiga mos μ_0 o‘lchovning chekka bo‘lmaslik shartini tekshiramiz. Bu holda (3.17) tenglama $s-1$ ga bo‘lib yuborilganda kvadrat tenglamaga keladi.

$$(z+1)^2(2z+1)s^2-2z^2(z+1)s-z^2=0.$$

Bu tenglamaning yechimi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$s_1=-\frac{1}{(z+1)(2z+1)},\ s_2=\frac{z}{z+1}.$$

Bu yerdan

$$\max\{|s_1|,|s_2|\}=\begin{cases}|s_1|, & \text{если } z<1/2,\\ |s_2|, & \text{если } z>1/2,\end{cases}$$

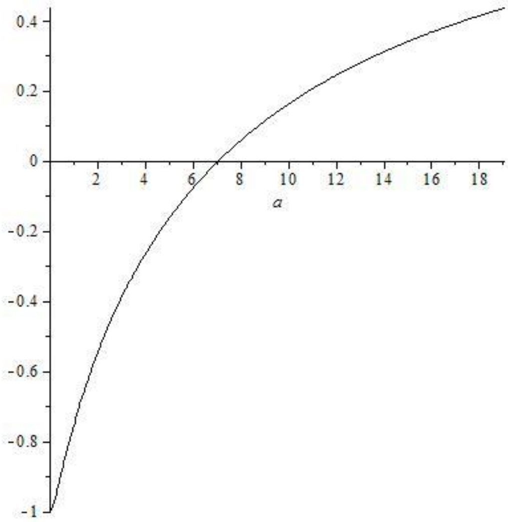
bu yerda z (3.14) tenglama ildizi. (3.14) tenglamani Kardano formulasi yordamida yechamiz. U yagona haqiqiy yechimga ega:

$$z=\frac{1}{12}\sqrt[3]{\lambda^3+24\lambda^2+102\lambda+8+6\sqrt{12\lambda^3+213\lambda^2+24\lambda}}+$$
$$+\frac{1}{12}\frac{\lambda^2+16\lambda+4}{\sqrt[3]{\lambda^3+24\lambda^2+102\lambda+8+6\sqrt{12\lambda^3+213\lambda^2+24\lambda}}}-\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\lambda. \qquad (3.18)$$

Maple dasturi yordamida ko‘rish mumkinki, $\lambda>b\approx 0.9$ da $z-\frac{1}{2}>0$ va $\lambda<b$ da $z-\frac{1}{2}<0$, $\lambda\le 9/4$ da (3.4) tenglamaning yechimi yagona, demak, bu yechimga mos μ_0 o‘lchov $\lambda\le 9/4$ da chekka bo‘ladi. Natijada , bu o‘lchovning chekka bo‘lmaydigan intervalini aniqlash uchun quyidagi

$$2s_2^2-1=2\left(\frac{z}{z+1}\right)^2-1>0,$$

shartni tekshiramiz, bu yerda z (3.18) koʻrinishga ega. Huddi shu Maple dasturi yordamida oxirgi tengsizlik $\lambda > \lambda_0 \approx 7.0355$ da oʻrinli boʻlishini koʻrish mumkin, ya'ni biz oʻrganayotgan oʻlchov ushbu shartda chekka boʻlmaydi (3.2 rasmga qarang).



3.2. rasm. $2s_2^2 - 1$ funksiya grafigi.

Shunday qilib quyidagi teorema oʻrinli:

Teorema 3.2.1. $k = 2$ da $\lambda_0 \approx 7.0355$ son mavjudki, agar $\lambda > \lambda_0$ boʻlsa $G = sirtmoq$ boʻlgan holda HC –modeli uchun μ_0 oʻlchov chekka boʻlmaydi.

μ_0, μ_1, μ_2 oʻlchovlarning chekkalik sohasini topamiz. μ Gibbs oʻlchovlarining chekkaligini yetarli sharti $k\kappa(\mu)\gamma(\mu) < 1$ edi (I-bobga qarang). Ta'kidlash lozimki κ maxsus sodda funksiya koʻrinishda boʻladi.

$$\kappa = \frac{1}{2}\max\sum_{l=0}^{2} |P_{il} - P_{jl}|.$$

Bu yerdan ma'lumki, $i = j$ da $|P_{il} - P_{jl}| = 0$. (3.16) dan $i \neq j$ da foydalanib, quyidagini hisoblaymiz.

$$\sum_{l=0}^{2} |P_{il} - P_{jl}| = \begin{cases} \dfrac{2z_2}{1 + z_1 + z_2}, & \text{если } i = 0,\ j = 1 \text{ или } i = 1,\ j = 0 \\ \dfrac{2z_1}{1 + z_1 + z_2}, & \text{если } i = 0,\ j = 2 \text{ или } i = 2,\ j = 0 \\ \dfrac{|z_2 - z_1| + z_1 + z_2 + 2z_1 z_2}{(1 + z_1)(1 + z_2)}, & \text{если } i = 1,\ j = 2 \text{ или } i = 2,\ j = 1. \end{cases}$$

Natijada

$$\kappa = \begin{cases} \dfrac{z_1}{1+z_1}, \text{ если } z_1 > z_2, \\ \dfrac{z_2}{1+z_2}, \text{ если } z_1 < z_2. \end{cases}$$

Demak (3.15) yechimlar uchun $\kappa = \dfrac{z_1}{1+z_1}$ va (z,z) uchun $\kappa = \dfrac{z}{1+z}$.

Tasdiq 3.2.1. P - (3.16) matritsa bo‘lsin va $\mu = \mu(z) - \eta$ ning chegaraviy konfiguratsiyalar uchun ixtiyoriy (s_1, s_2) spin qiymatlar juftligi hamda ixtiyoriy $y \in \partial A$ va y uchning $x \in A$ yaqin qo‘shnilari uchun quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\mathrm{P}\mu_A^{\eta^{y,s_1}} - \mu_A^{\eta^{y,s_2}}\mathrm{P}_x = \mathrm{K}(p(s_1), p(s_2)),$$

bu yerda $p(s) = \mu_A^{\eta^{y,free}}(\sigma(x) = s)$ va K funksiya quyidagicha aniqlanadi:

$$\mathrm{K}(p(s_1), p(s_2)) = \max\{p^{s_1}(s_1) - p^{s_2}(s_1)\},$$

$$\text{c } p^t(s) = \mu_A^{\eta^{y,t}}(\sigma(x) = s).$$

Isbot: P matritsa ta’rifidan quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$p^t(s) = \frac{\lambda^{\#\{t,s\}} z_s p(s)}{\sum_{l=0}^{2} \lambda^{\#\{t,l\}} z_l p(l)}$$

va

$$\begin{pmatrix} \dfrac{p_0}{p_0 + z_1 p_1 + z_2 p_2} & \dfrac{z_1 p_1}{p_0 + z_1 p_1 + z_2 p_2} & \dfrac{z_2 p_2}{p_0 + z_1 p_1 + z_2 p_2} \\ \dfrac{p_0}{p_0 + z_1 p_1} & \dfrac{z_1 p_1}{p_0 + z_1 p_1} & 0 \\ \dfrac{p_0}{p_0 + z_2 p_2} & 0 & \dfrac{z_2 p_2}{p_0 + z_2 p_2} \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

bu yerda $p_i = p(i), i = 0,1,2.$ Tasdiq quyidagi Lemmadan kelib chiqadi.

Lemma 3.2.1. Quyidagi tasdiqlar o‘rinli:

1. $p^0(0) \le p^s(0), s = 0,1,2;$

2. $p^1(0) \le p^2(0)$ faqat va faqat, qachonki $z_2 p_2 \le z_1 p_1;$

3. $p^2(1) \le p^0(1) \le p^1(1);$

4. $p^0(2) \le p^2(2).$

Isbot (3.19) dan quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$p^0(0) - p^1(0) = -\frac{z_2 p_0 p_2}{(p_0 + z_1 p_1 + z_2 p_2)(p_0 + z_1 p_1)} \le 0;$$

$$p^0(0) - p^2(0) = -\frac{z_1 p_0 p_1}{(p_0 + z_1 p_1 + z_2 p_2)(p_0 + z_2 p_2)} \le 0;$$

$$p^1(0) - p^2(0) = \frac{z_2 p_2 - z_1 p_1}{(p_0 + z_2 p_2)(p_0 + z_1 p_1)} \le 0 \Leftrightarrow z_2 p_2 \le z_1 p_1.$$

3 va 4 hollar huddi shunday isbotlanadi.

Endi γ uchun bahoni quyidagi tartibda izlaymiz.

$$\gamma = max\left\{ \mathrm{P}\, \mu_A^{\eta^{y,1}} - \mu_A^{\eta^{y,0}}\, \mathrm{P}_x, \mathrm{P}\, \mu_A^{\eta^{y,1}} - \mu_A^{\eta^{y,2}}\, \mathrm{P}_x, \mathrm{P}\, \mu_A^{\eta^{y,0}} - \mu_A^{\eta^{y,2}}\, \mathrm{P}_x \right\},$$

bu yerda

$$\mathrm{P}\, \mu_A^{\eta^{y,1}} - \mu_A^{\eta^{y,0}}\, \mathrm{P}_x = \frac{1}{2} \sum_{s \in \{0,1,2\}} | \mu_A^{\eta^{y,1}}(\sigma(x) = s) - \mu_A^{\eta^{y,0}}(\sigma(x) = s) | =$$

$$= \frac{1}{2}\left(| P_{10} - P_{00} | + | P_{11} - P_{01} | + | P_{12} - P_{02} | \right) = \frac{1}{2}\left(| P_{10} - P_{00} | + | P_{11} - P_{01} | + | P_{02} | \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(| P_{10} - P_{00} | + | P_{11} - P_{01} | + |1 - P_{00} - P_{01} | \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(| P_{10} - P_{00} | + | P_{11} - P_{01} | + | P_{10} + P_{11} - P_{00} - P_{01} | \right) \le$$

$$\le | P_{10} - P_{00} | + | P_{11} - P_{01} | = \frac{z_2}{1 + z_1 + z_2}.$$

Bu yerda P_{ij} – (3.16) matritsaning elementlari. Xuddi shunday

$$\mathrm{P}\mu_A^{\eta^{y,0}} - \mu_A^{\eta^{y,2}}\mathrm{P}_x = \frac{z_1}{1+z_1+z_2};$$

$$\mathrm{P}\mu_A^{\eta^{y,1}} - \mu_A^{\eta^{y,2}}\mathrm{P}_x = \begin{cases} \dfrac{z_1}{1+z_1}, \text{ если } z_1 > z_2, \\ \dfrac{z_2}{1+z_2}, \text{ если } z_1 < z_2. \end{cases}$$

Natijada

$$\gamma = \begin{cases} \dfrac{z_1}{1+z_1}, \text{ если } z_1 > z_2, \\ \dfrac{z_2}{1+z_2}, \text{ если } z_1 < z_2. \end{cases}$$

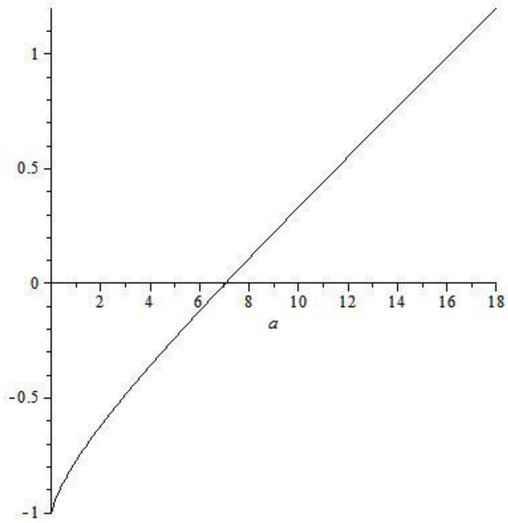
Endi μ_0 uchun $2\kappa\gamma < 1$ shartni tekshiramiz. $z_1 = z_2 = z$ uchun $z - \sqrt{2} - 1 < 0$ ga ega bo‘lamiz, bu yerda z ning ifodasi (3.18) dan olingan. Maple dasturi yordamida $\lambda < \lambda_0 \approx 7.0355$ da oxirgi tengsizlik o‘rinli bo‘lishini ko‘ramiz.(3.3. rasmga qarang).Bu $\lambda < \lambda_0$ da μ_0 o‘lchov chekka bo‘lishini anglatadi.

Keyin esa μ_1 va μ_2 uchun $2\kappa\gamma < 1$ shartni tekshiramiz. $k = 2, \lambda = 2.25$ da (3.4) tenglamalar sistemasi $(z_1, z_2), (z_2, z_1)$ 2 ta yechimga ega bo‘ladi, bu yerda z_1 va z_2 (3.15) kabi aniqlangan. Ma’lumki $z_1 > z_2$. Shuning uchun shartni tekshiramiz.

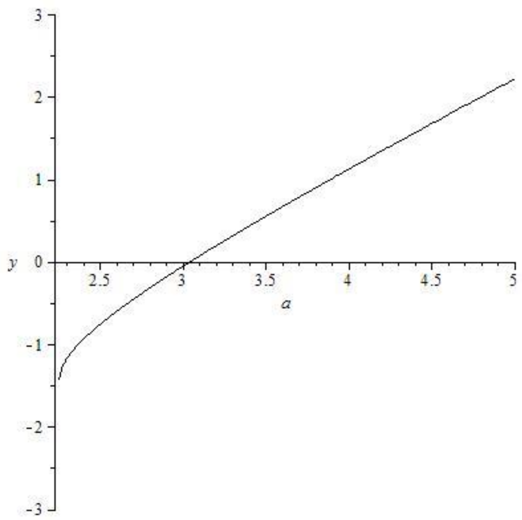
$$2\kappa\gamma - 1 = 2\left(\frac{z_1}{1+z_1}\right)^2 - 1 < 0.$$

Bu tengsizlik $\lambda < \frac{1}{2}(5\sqrt{2} - 1)$ da o‘rinli (3.4 rasmga qarang).

Demak, μ_1 va μ_2 o‘lchovlar $2.25 < \lambda < \frac{1}{2}(5\sqrt{2} - 1)$ da chekka bo‘lishadi.



3.3 rasm. $z_1 - \sqrt{2} - 1 < 0$ funksiyaning grafigi.



3.4 rasm. $2\kappa\gamma - 1 = 2\left(\frac{z_1}{1+z_1}\right)^2 - 1.$ funksiya grafigi.

Shunday qilib quyidagi teorema o‘rinli:

Teorema 3.2.2. $k = 2$ bo‘lsin. U holda $G = "Sirtmoq"$ bo‘lgan holda HC-model uchun μ_0 o‘lchov $0 < \lambda < \lambda_0$ va μ_1, μ_2 o‘lchovlar $2.25 < \lambda < 0.5 \cdot (5\sqrt{2} - 1)$ da chekka bo‘lishadi.

Quyidagi teorema o‘rinli:

Teorema 3.2.3. Agar $k = 2$ bo‘lsa, u holda $G = "Sirtmoq"$ bo‘lgan holda HC-model uchun $0.5 \cdot (5\sqrt{2} - 1) < \lambda < \lambda_0$ uchun kamida 2 ta chekka Gibbs o‘lchovlari mavjud.

Isbot: $k=2$ bo‘lsin. Teorema 3.1.2. dan ma’lumki, $0<\lambda\le\lambda_{cr}=\frac{9}{4}$ bo‘lganda yagona μ_0 TIGO‘ mavjud bo‘ladi. Teorema 3.2.2 ga ko‘ra $0<\lambda<\lambda_0$ da μ_0 o‘lchov chekka bo‘ladi, $\lambda>\lambda_{cr}=2,25$ da esa μ_0 hamda kamida 2 ta yangi o‘lchovga ega bo‘lamiz.

Agar ushbu yangi o‘lchovlar $(0.5\cdot(5\sqrt{2}-1),\lambda_0)$ intervalda chekka emas deb olsak, u holda faqatgina bitta μ_0 chekka o‘lchov qoladi. Ammo bu holda chekka bo‘lmagan o‘lchovni yagona μ_0 o‘lchov yordamida ifodalab bo‘lmaydi. Natijada $0.5\cdot(5\sqrt{2}-1)<\lambda<\lambda_0$ oraliqda kamida bitta yangi o‘lchov chekka bo‘lishi lozim. Teorema isbotlandi.

3.3 $G = "Jezl"$ bo‘lgan hol uchun translyatsion-invariant Gibbs o‘lchovlarining chekka o‘lchov bo‘lish shartlari

Bu paragrafda $G = "Jezl"$ bo‘lgan hol uchun $k = 2$ da mavjud bo‘lgan TIGO‘ larning chekka bo‘lish (bo‘lmaslik) sohalarini topamiz.

Avvalgi bobda ma’lum bo‘lgani kabi P_μ matritsaga mos μ Gibbs o‘lchovlarining chekka bo‘lmasligining yetarli shartli $k\lambda_2^2 > 1$. Bu yerda λ_2 P_μ ning absolyut qiymat bo‘yicha 2- xos qiymati ([36]ga qarang).

[11] dan ma’lumki, $k = 2$ da (3.11) tenglamalar sistemasi $\lambda \le 1$ da yagona (z^*, z^*) yechimga ega . Bu yerda z^* –

$$z = \lambda \left(\frac{1+z}{2z} \right)^2 \tag{3.20}$$

tenglamaning yagona yechimi va $\lambda > 1$ da 3 ta $(z^*, z^*), (z_1, z_2), (z_2, z_1)$ yechimlarga ega bo‘ladi, bu yerda

$$z_1 = \left(\frac{1+\sqrt{1-4a^2}}{2a} \right)^2, \quad z_2 = \left(\frac{1-\sqrt{1-4a^2}}{2a} \right)^2, \tag{3.21}$$

va

$$a = \frac{2}{\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda+8}}.$$

Ushbu yechimlarga mos μ^*, μ_1, μ_2 o‘lchovlarning chekka bo‘lmaslik shartlarini topamiz. Buning uchun huddi $G = sirtmoq$ bo‘lgan holga o‘xshash, $z_{i,x} = \lambda \dfrac{\tilde{z}_{i,x}}{\tilde{z}_{0,x}}$, $i = 1, 2$ ifodadan foydalanib, quyidagilarni topamiz:

$$P_{00} = 0, \; P_{01} = \frac{\lambda \tilde{z}_1}{\lambda \tilde{z}_1 + \lambda \tilde{z}_2} = \frac{z_1}{z_1 + z_2}, \; P_{02} = \frac{\lambda \tilde{z}_2}{\lambda \tilde{z}_1 + \lambda \tilde{z}_2} = \frac{z_2}{z_1 + z_2},$$

$$P_{10} = \frac{\lambda \tilde{z}_0}{\lambda \tilde{z}_0 + \lambda^2 \tilde{z}_1} = \frac{1}{1+\lambda z_1},\ P_{11} = \frac{\lambda^2 \tilde{z}_1}{\lambda \tilde{z}_0 + \lambda^2 \tilde{z}_1} = \frac{\lambda z_1}{1+\lambda z_1},\ P_{12} = 0,$$

$$P_{20} = \frac{\lambda \tilde{z}_0}{\lambda \tilde{z}_0 + \lambda^2 \tilde{z}_2} = \frac{1}{1+\lambda z_2},\quad P_{21} = 0,\ P_{22} = \frac{\lambda^2 \tilde{z}_2}{\lambda \tilde{z}_0 + \lambda^2 \tilde{z}_2} = \frac{\lambda z_2}{1+\lambda z_2}.$$

Natijada

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{z_1}{z_1+z_2} & \frac{z_2}{z_1+z_2} \\ \frac{1}{1+\lambda z_1} & \frac{\lambda z_1}{1+\lambda z_1} & 0 \\ \frac{1}{1+\lambda z_2} & 0 & \frac{\lambda z_2}{1+\lambda z_2} \end{pmatrix}$$

Ma’lumki, bu matritsaning xos qiymatlarining xos qiymatlaridan biri $s_3 = 1$. Qolgan 2 ta s_1 va s_2 xos qiymatlarni topamiz. Buning uchun $det(P - sE) = 0$ tenglamaning har ikki tomonini $s-1$ ga bo‘lib yuborib va hosil bo‘lgan tenglamaning har ikki tomonini -1 ga ko‘paytirib quyidagi kvadrat tenglamaga ega bo‘lamiz:

$$(z_1 + z_2)[\lambda^2 z_1 z_2 + \lambda(z_1 + z_2) + 1]s^2 - (z_1 + z_2)(\lambda^2 z_1 z_2 - 1)s - 2\lambda z_1 z_2 = 0. \quad (3.22)$$

Dastlab (z_1, z_2) va (z_2, z_1) yechimlarga mos o‘lchovlarning chekka bo‘lmaslik intervallarini qidiramiz. $z_1 z_2 = 1$ ekanligidan (3.22) tenglamani qaytadan yozamiz:

$$A(\lambda^2 + \lambda A + 1)s^2 - A(\lambda^2 - 1)s - 2\lambda = 0,$$

bu yerda $A = z_1 + z_2 = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 8\lambda}}{2}$. Ushbu kvadrat tenglamaning yechimi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$s_1 = \frac{A(\lambda^2 - 1) - \sqrt{D}}{2A(\lambda^2 + \lambda A + 1)},$$

$$s_2 = \frac{A(\lambda^2 - 1) + \sqrt{D}}{2A(\lambda^2 + \lambda A + 1)} \ ,$$

bu yerda $D = A^2(\lambda^2 - 1)^2 + 8A\lambda(\lambda^2 + \lambda A + 1).$

$s_1 + s_2 > 0,\ s_1 s_2 < 0$ ekanligidan $|s_1| < s_2 < s_3 = 1$ ligi kelib chiqadi. Endi $ks_2^2 > 1$ o‘lchovlarning chekka bo‘lmaslik shartini tekshiramiz, ya’ni

$$s_2 = \frac{A(\lambda^2 - 1) + \sqrt{D}}{2A(\lambda^2 + \lambda A + 1)} > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Bu tengsizlik quyidagi tengsizlikga ekvivalent

$$\sqrt{\lambda^2 + 8\lambda} \cdot [(4 - 2\sqrt{2})\lambda^2 + 2 + 2\sqrt{2}] + (4 - 2\sqrt{2})\lambda^3 + 8\lambda^2 + (2\sqrt{2} - 14)\lambda < 0.$$

Kompyuter tahlillari shuni ko‘rsatmoqdaki, ushbu tengsizlikni chap qismi ixtiyoriy $\lambda > 0$ qiymatlarda musbat bo‘ladi, bu esa (z_1, z_2) va (z_2, z_1) yechimlarga mos o‘lchovlar chekka bo‘lishini anglatadi.Buni esa kelgusi tatqiqotlarimizda tekshiramiz.

So‘ngra $z_1 = z_2 = z*$ (sharli ravishda $z* = z$) bo‘lganda (3.22) tenglamani qaraymiz.Bu holda biz quyidagi kvadrat tenglamaga ega bo‘lamiz:

$$z(\lambda z + 1)^2 s^2 - z(\lambda^2 z^2 - 1)s - \lambda z^2 = 0.$$

Ushbu tenglama yechimlari

$$s_1 = \frac{\lambda z}{1 + \lambda z},\ \ s_2 = -\frac{1}{1 + \lambda z}.$$

Bu yerdan

$$\max\{|s_1|, |s_2|\} = \begin{cases} |s_1|, & \text{если } z > \frac{1}{\lambda}, \\ |s_2|, & \text{если } z < \frac{1}{\lambda}, \end{cases}$$

bu yerda z (3.20) ning yechimi. Kardano formulasi yordamida (3.20) tenglamani yechamiz. U bitta haqiqiy ildizga ega.

$$z=\frac{1}{6}\sqrt[3]{27\lambda+3\sqrt{-3\lambda^3+81\lambda^2}}+\frac{1}{2}\frac{\lambda}{\sqrt[3]{27\lambda+3\sqrt{-3\lambda^3+81\lambda^2}}}. \qquad (3.23)$$

Maple dasturi yordamida ko‘rish mumkinki $\lambda>\lambda_1\approx 1.217$ da $z-\frac{1}{\lambda}>0$ va $\lambda<\lambda_1$ da $z-\frac{1}{\lambda}<0$ bo‘ladi. (3.11) tenglamalar sistemasi $\lambda\le 1$ da yagona yechimga ega, u holda bu yechimga mos o‘lchov $\lambda\le 1$ da chekka bo‘ladi.

$I_1=(1,\lambda_1)$ va $I_2=(\lambda_1,+\infty)$ oraliqlarda mos ravishda quyidagi shartlarni tekshiramiz:

$$2s_2^2-1=2\left(\frac{1}{1+\lambda z}\right)^2-1>0,$$

$$2s_1^2-1=2\left(\frac{\lambda z}{1+\lambda z}\right)^2-1>0.$$

Bu yerda z (3.23) ko‘rinishga ega. Maple dasturi yordamida ko‘rish mumkinki, $\lambda>\lambda^*\approx 2.287572$ da ikkinchi tengsizlik o‘rinli, birinchi tengsizlik esa $0<\lambda<\lambda_2\approx 0.645$ da o‘rinli bo‘ladi. Natijada $\lambda>\lambda^*\approx 2.287572$ dagi biz o‘rganayotgan o‘lchov chekka bo‘lmaydi.

Teorema 3.3.1. $k=2$ hamda $\lambda>\lambda^*$ bo‘lsin. U holda $G=Jezl$ bo‘lgan holda HC modeli uchun μ^* o‘lchov chekka bo‘lmaydi.

Endi esa $G=Jezl$ bo‘lgan holda , $G=sirtmoq$ bo‘lgan hol kabi μ^*, μ_1, μ_2 o‘lchovlarning chekka ehanligini ko‘rib chiqamiz. Buning uchun dastlab κ va γ ni hisoblaymiz:

$$\kappa = \frac{1}{2}\max\sum_{l=0}^{2}|P_{il} - P_{jl}| = \max\begin{cases} \dfrac{1}{1+\lambda z_1}, & \text{если } z_2 < \dfrac{1}{\lambda}, \\ \dfrac{z_2}{z_1 + z_2}, & \text{если } z_2 > \dfrac{1}{\lambda}, \\ \dfrac{1}{1+\lambda z_2}, & \text{если } z_1 < \dfrac{1}{\lambda}, \\ \dfrac{z_1}{z_1 + z_2}, & \text{если } z_1 > \dfrac{1}{\lambda} \\ \dfrac{\lambda z_1}{1+\lambda z_1}, & \text{если } z_1 > z_2, \\ \dfrac{\lambda z_2}{1+\lambda z_2}, & \text{если } z_1 < z_2. \end{cases}$$

bu yerda $z_1 = z_2 = z$ bo‘lganda quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\kappa = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\lambda z}, & \text{если } z < \dfrac{1}{\lambda}, \\ \dfrac{\lambda z}{1+\lambda z}, & \text{если } z > \dfrac{1}{\lambda} \end{cases}$$

va $z_1 \neq z_2$ da

$$\kappa = \begin{cases} \dfrac{\lambda z_1}{1+\lambda z_1}, & \text{если } z_1 > z_2, \\ \dfrac{\lambda z_2}{1+\lambda z_2}, & \text{если } z_1 < z_2. \end{cases}$$

$G = sirtmoq$ hol kabi, agar γ ni hisoblasak, u holda $z = \gamma$ ga ega bo‘lamiz. Kompyuter tahlili shuni ko‘rsatmoqdaki, $0 < \lambda < \lambda^* \approx 2.287572$ da μ^* o‘lchov va $1 < \lambda < \lambda_3 \approx 1.303094$ da μ_1, μ_2 o‘lchovlar chekka bo‘lishadi.

Teorema 3.3.2. $k = 2$ bo‘lsin. U holda $G = Jezl$ bo‘lgan holda HC modeli uchun $0 < \lambda < \lambda^*$ da μ^* o‘lchov va $1 < \lambda < \lambda_3$ da μ_1, μ_2 o‘lchovlar chekka bo‘lishadi.

Teorema 3.3.3. Agar $k=2$ bo‘lsa, u holda $G = Jezl$ bo‘lgan holda HC modeli uchun $\lambda_3 < \lambda < \lambda^*$ da kamida 2 ta chekka Gibbs o‘lchovlari mavjud bo‘ladi.

Isbot: $k=2$ bo‘lsin. Ma’lumki $0 < \lambda \le \lambda_{cr} = 1$ da translyatsion-invariant Gibbs o‘lchov μ^* mavjud. Teorema 3.3.2. ga ko‘ra, agar $0 < \lambda < \lambda^*$da μ^* chekka o‘lchov bo‘lmasa, u holda $\lambda > \lambda_{cr} = 1$ da μ^* va yana 2 ta o‘lchov mavjud . ([11]ga qarang). Agar ikkala o‘lchov chekka o‘lchov hisoblanmasa, u holda μ^* o‘lchov bilan chekka o‘lchov bo‘lmaydi.Demak, agar $\lambda_3 < \lambda < \lambda^*$ bo‘lsa chekka o‘lchov faqat chekka o‘lchov emas ekan. Teorema isbotlandi.

XULOSA

Dissertatsiya ishida qattiq diskli ikki holatli model uchun translyatsion-invariant Gibbs o‘lchovining chekka o‘lchov bo‘lish oraliqlari, shu model uchun davri to‘rtga teng kuchsiz davriy Gibbs o‘lchovlarining mavjudlik va yagonamaslik (yagonalik) shartlari va Gibbs o‘lchovlarining chekka o‘lchov bo‘lish shartlari o‘rganilgan bo‘lib, olingan asosiy natijalar sifatida quyidagilarni keltirish mumkin:

- Qattiq diskli (HC) ikki holatli modellar, Translyasion-invariant Gibbs o‘lchovining yagonaligining yangi isboti keltirilgan.

- Qattiq diskli ikki holatli model uchun davri to‘rtga teng kuchsiz davriy Gibbs o‘lchovlarining mavjudlik va yagonamaslik shartlari ko‘rsatilgan.

- qattiq diskli ikki holatli model uchun davri to‘rtga teng kuchsiz davriy Gibbs o‘lchovlarining mavjudlik va yagonamaslik shartlari ko‘rsatilgan.

- $G = sirtmoq$ va $G = jerl$ bo‘lgan hollarda $\lambda \leq \lambda_{cr}$ bo‘lganda uchinchi tartibli Keli daraxtiga 3 ta $k \geq 2$ tartibli Keli daraxtida esa kamida 3 ta TIGO‘ mavjud bo‘ladigan λ_{cr} ning aniq qiymatlari topilgan.

- $G = sirtmoq$ bo‘lgan hol uchun $k = 2$ da mavjud bo‘lgan TIGO‘ larining chekka bo‘lish (bo‘lmaslik) sohalari aniqlangan.

- $G = "Jezl"$ bo‘lgan hol uchun $k = 2$ da mavjud bo‘lgan TIGO‘ larning chekka bo‘lish (bo‘lmaslik) sohalari topilgan.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. O‘zbekiston Respublikasi prezidenti Mirziyoyev SH.M. “Milliy taraqqiyot yo‘limizni qa’tiyat bilan davom ettirib , yangi bosqichga ko‘taramiz”. Toshkent – “O‘zbekiston”-2017-yil.
2. SH.M. Mirziyoyev. PQ-2909 sonli “Oliy ta’lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari tog‘risida”gi qarori. 2017-yil 20-aprel.
3. SH.M.Mirziyoyev. F-4724-sonli “Oliy ta’lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari tog‘risida”gi farmoyish. 2016-yil 8-oktyabr .
4. Бэкстер Р. Точно решаемые модели в статистической физике. - М.:Мир, 1985. - 486 с.
5. Боголюбов Н.Н., Хацет Б.И. О некоторых математических вопросах статистического равновесия. // ДАН СССР. – 1949. – Т. 66, № 3 – С. 321-324.
6. Ганиходжаев Н.Н. О чистых фазах ферромагнитной модели Поттса с тремя состояниями на решетке Бете второго порядка. // Теор. и матем. физика. – Москва, 1990. – Т. 85, № 2. – С. 163-175.
7. Ганиходжаев Н.Н., Розиков У.А. Классы нормальных делителей конечного индекса группового представления дерева Кэли. // УзМЖ. – Ташкент, 1997. – № 4. – С. 31-39.
8. Ганиходжаев Н.Н. Групповое представление и автоморфизмы дерева Кэли. // Доклады АН РУз. - Ташкент, 1994. - № 4. - С. 3-5.
9. Ганиходжаев Н.Н., Розиков У.А. Описание периодических крайних гиббсовских мер некоторых моделей на дереве Кэли. // Теор. и матем. физика. – Москва, 1997. – Т. 111. – № 1. – С. 109-117.
10. Rozikov U.A. Gibbs measures on Cayley trees. World Sci. Publ. Singapore. 2013, 404 p.
11. Cassandro M., Da Fano M., Olivereri G. Existence of phase transition for a lattice model with a repulsive hard core and an attractive short range interaction. // Comm. Math. Phys. - 1975. - V.44, № 1. - P. 45-51.

12. Георги Х.-О. Гиббсовские меры и фазовые переходы. –Москва. "Мир" 1992, –624 с.
13. Курош А.Г. Теория групп. – М.: Наука, 1967. – 648 с.
14. Престон К. Гиббсовские состояния на счетных множествах. – М.: Мир, 1977. – 126 с.
15. Розиков У.А., Рахматуллаев М.М. Описание слабо периодических мер Гиббса модели Изинга на дереве Кэли // Теор. и матем. физика, 156: 2 (2008), –С. 292-302.
16. Розиков У.А., Шоюсупов Ш.А. Плодородные HC-модели с тремя состояниями на дереве Кэли // Теор. и матем. физика, 156:3 (2008), –С. 412-424.
17. Синай Я.Г. Теория фазовых переходов. – М.: Наука, 1980. – 208 с.
18. Ширяев А.Н. Вероятность. – М.: Наука, 1980. –574 с.
19. Brightwell G. R., Winkler P., Hard constraints and the Bethe lattice: adventures at the interface of combinatorics and statistical physics. // Proc. ICM 2002, Higher Education Press, Beijing, IIIi: – P. 605-624, 2002.
20. Martinelli F., Sinclair A., Weitz D. Fast mixing for independent sets, coloring and other models on trees. // Random Structures and Algoritms, 31 (2007), – P. 134-172.
21. Prasolov V.V., Polynomials. –2004, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
22. Rozikov U.A. Gibbs measures on Cayley trees. World Sci. Publ. Singapore. 2013, 404 p.
23. Suhov Yu.M., Rozikov U.A. A hard-core model on a Cayley tree: an example of a loss network. // Queueing Syst. 46 (1/2) (2004), – P. 197-212.
24. Хакимов Р.М. Слабо периодические меры гиббса для HC-модели для нормального делителя индекса четыре. // Украинский матем. журнал, – 2015, Том 67, - № 10. –С. 1409-1422.
25. Хакимов Р.М. Меры Гиббса для плодородных моделей жесткой сердцевины на дереве Кэли. // Теор. и матем. физика, – 2016. – Том 186, № 2. –С. 340-352.

26. Хакимов Р.М. Слабо периодические меры Гиббса для НС-моделей на дереве Кэли. // Сибирский матем. журнал,– 2018. – Том 59, № 1. –С. 185-196.
27. Хакимов Р.М. Трансляционно-инвариантные меры Гиббса для плодородных моделей НС с тремя состояниями на дереве Кэли. // Теор. и матем. физика,– 2015. – Том 183, № 3. –С. 441-449.
28. Rozikov U.A, Khakimov R.M. Gibbs measures for fertile three-state hard core models on a Cayley tree. // Queueing Systems, – 2015, Vol.81, - № 1. –P. 49-69.
29. Хакимов Р.М. НС модель на дереве Кэли: трансляционно-инвариантные меры Гиббса. // Вестник НУУз, – 2017. - 2/2. –С. 245-251.
30. Khakimov R.M., Madgoziyev G.T. Weakly periodic Gibbs measures for two and three state HC models on a Cayley tree. // UzMJ, 2018, -№ 3, p. 116-131.
31. Розиков У.А., Хакимов Р.М. Крайность трансляционно-инвариантной меры Гиббса для НС-модели на дереве Кэли. // arXiv: 1610.04755v1, [math-ph].
32. Jean Zinn-Justin. Phase Transitions and Renormalization Group. -OXFORD University press. 2007. 452 p.
33. Хакимов Р.М. Периодические меры Гиббса для модели Поттса с нулевым внешним полем. // «Статистика и ее применения». Тез. докл. Рес. науч. конф. - Ташкент, 2012. - С. 142-147.
34. Розиков У.А., Хакимов Р.М. Периодические меры Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли. // Теор. и мат. физика,- 2013. - Том 175, № 2. С. 300-312.
35. Minlos R.A. Introduction to mathematical statistical physics. - University lecture series. - 2000. - v. 19.
36. Хакимов Р.М. О существовании периодических мер Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли. // Узб. мат. журнал, - 2014. - № 3. С. 134-142.

37. Хакимов Р.М. О существовании периодических гиббсовских мер для одной модели. // «Всероссийская конференция по математике и механике». Россия, -Томск, 2013. - С. 242.
38. Lanford O.E., Ruelle D. Observables at infinity and states with short range correlations in statistical mechanics. // Comm. Math. Phys. - 1969. - V. 13. - P. 194-215.
39. Dobrushin R.L. The description of a random field by means of conditional probabilities and conditions of its regularity. // Theory Probab. Appl. 13 (1968), p. 197-224.
40. Рюэль Д. Статистическая механика. Строгие результаты. - М.: Мир, 1971. - 367 с.
41. Рюэль Д. О многообразиях сосуществования фаз. // Теор. и матем. физика. - Москва, 1977. -Т. 30. - № 1. - С. 40-52.
42. Minlos R.A. Introduction to mathematical statistical physics. - University lecture series. - 2000. - v. 19.
43. Норматов Э.П., Розиков У.А. Описание гармонических функций с применением свойств группового представления дерева Кэли. // Матем. заметки, - 2006. - Том 79, № 3. С. 434-443.
44. Хакимов Р.М. Изучение слабопериодических мер Гиббса для НС-модели. // «Актуальные проблемы математического анализа». Тез. докл. Рес. науч. конф. - Ургенч, 2012, Часть 2, - С. 94-96.
45. Хакимов Р.М. Периодические гиббсовские меры для одной модели. // «Информатика, математика, автоматика». -Сумы, Украина, 2016, - С. 233.
46. Хакимов Р.М. О слабо периодических гиббсовских мерах НС-модели на дереве Кэли. // Узб. Матем. журнал, - 2012. - № 2. С. 140-146.
47. Хакимов Р.М. Слабо периодические гиббсовские меры для НС-модели. // «Операторные алгебры и смежные проблемы». Тез. докл. Рес. науч. конф. - Ташкент, 2012. - С. 233-235

48. Хакимов Р.М., Тожибоев Б.З. О крайних мерах Гиббса для НС моделей с тремя состояниями на дереве Кэли. // Бюллетень Института математики, – 2018, № 1, –С. 28 – 31.
49. Хакимов Р.М., Тожибоев Б.З. О крайних мерах Гиббса для НС моделей с тремя состояниями на дереве Кэли. // Республиканская научная конференция «Новые результаты математики и их приложения» СамГУ, 14-15 мая, 2018 г., –С. 48-50.
50. Хакимов Р.М., Тожибоев Б.З., Абдулбориева М. Условие единственности слабо периодической меры Гиббса для НС модели. // Ёш математикларнинг янги теоремалари-2018, Республика илмий анжуман материаллари, Наманган, 2018 й., 18-19 октябрь, 101-103 бетлар.
51. B.Tojiboyev ,M.Maxammadaliyev, I.O‘ktamaliyev . “HC modeli uchun davri to‘rtga teng kuchsiz davriy Gibbs o‘lchovlarining mavjudligi” Namangan Davlat Universiteti Ilmiy axborotnomasi. 2018 y 5-son.