O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O’RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI
NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI

5130100-Matematika
Ta’lim yo’nalishi bitiruvchisi

Aslamxanova Mahbuba Ahadxon qizining

«Ko’pburchak stollari ustida Fagnano bilyard traektoriyalari»
mavzusidagi

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

“Himoyaga tavsiya etildi”	BMI rahbari:
Matematika kafedrasi mudiri	______ f.-m.f.d. U.Rozikov
________ DSc.M.M. Raxmatullayev	
“___” ______________ 2019 y.	

Bitiruv malakaviy ishi kafedradan dastlabki himoyadan o’tdi
Kafedraning ___ sonli bayonnomasi “___” ____________2019 yil

Namangan-2019

Mundarija:

KIRISH

Kadrlar tayyorlash sohasidagi davlat siyosati insonni intellektual va ma'naviy-ahloqiy jihatdan tarbiyalash bilan uzviy bog'liq bo'lgan uzluksiz ta'lim tizimi orqali har tomonlama barkamol shaxsni shakllantirishni nazarda tutadi. Pedagog xodimlarning asosiy vazifalari sifatida o'quvchilarning fanlar asoslari bo'yicha muntazam bilim olishlarini, ularda bilim o'zlashtirish ehtiyojini, asosiy o'quv-ilmiy va umummadaniy bilimlarni, milliy va umumbashariy qadriyatlarga asoslangan ma'naviy-ahloqiy fazilatlarni, mehnat ko'nikmalarini, ijodiy fikrlash va atrof-muhitga ongli munosabatda bo'lishni shakllantirish kabi yo'nalishlarni belgilab berdi[2].

Binobarin , inson kapitaliga e'tiborni kuchaytirishimiz , buning uchun barcha imkoniyatlarni safarbar etishimiz shart .Shu yo'ldagi muhim amaliy qadam sifatida bolalarni maktabgacha ta'lim bilan qamrab olish darajasini 34 foizdan 44 foizga yetkazamiz . Umumiy o'rta ta'lim tizimini bugungi kun talablari asosida tashkil etish , farzandlarimiz har tomonlama kamol topishi uchun barcha sharoitlarni yaratish lozim . Xususiy maktablar tashkil etish , davlat-xususiy sheriklik imkoniyatlaridan keng foydalanish kerak .

Matematika fani insoniyat hayotida eng asosiy ahamiyat kasb etuvchi fan ekanini butun dunyo tan olgandir. Uning har bir kishi uchun har soniyada zarur ekani ravshan, undan hamma u yoki bu darajada foydalanadi, lekin ushbu jarayonni o'zi anglab yetmaydi. Bunga misol qilib, vaqt o'lchovini, kundalik xarajatlarni, o'qiladigan fanlar va darslar soni, mavzular, transport, yo'nalishlar nomeri va hokazolarni keltirish mumkin.

Matematikaning turli sohalarga: xalq xo'jaligiga, transportga, sanoatga, meditsinaga, biologiya, kimyo, fizika, genetika va boshqa o'nlab fanlarga tatbiqlari turmush darajasi va turli fanlarning shahdam qadamlar bilan olg'a ketishiga omil ekani ravshan.

Matematika, bir qarashda, matematikadan yiroq bo'lgan sohalarga, masalan adabiyotga, tilshunoslikka, sport sohasiga, psixologiyaga, tarixga, biologiyaga , meditsinaga va boshqa sohalarga kirib bormoqda. Matematikaning insoniyat tarixida va rivojlanish jarayonida nechog'lik ahamiyatga ega ekanini juda ko'p allomalar munosib baholaganlar. Masalan, ulug' shoh va shoir, astronom, matematik alloma - Mirzo Ulug'bek matematika haqida shunday yozgan: - "Matematika g'oyat bir yuksak fanki, unda bir olam mo'jiza yotadi".

Haqiqatan ham, matematika ilmi - insoniyat uchun bebaho ekanligini tan olmaydigan aqlli odamni topish amri mahol, chunki har bir fanning rivojlanish darajasi - bu fan matematik bilimlardan qanchalik foydalana olishi bilan baholanadi.

Hozirgi zamon matematikasining barcha yutuqlari haqida batafsil so`zlash imkoni kichik bir ish ichida beimkon muammodir, chunki matematika fani shunchalik rivojlanib ketganki, uning yuzlab tarmoqlarida minglab ilmiy ishlar qilinmoqda, chop etilgan ishlarning bir necha foizigina o'rganilib, kundalik hayot ehtiyojlariga tatbiq etiladi, xolos.

Yurtimiz matematik olimlaridan Utkir Rozikov haqida gapiradigan bo'lsak, u O'zbekiston Fanlar Akademiyasi a'zosi, Matematika va Axborot Texnologiyalar Institutipro fessoridir. U Samarqand Davlat Universitetida tahsil olgan (1993). Utkir Rozikov 1995-yil PhD, 2001-yilda matematika va fizika Fanlari Doktori unvonlarini qo'lga kiritgan.

2018-yil Butunjahon Fanlar Akademiyasi o'zining tarkibiga yangi 35 nafar a'zolarni saylab oldi. Bu Akademiya binosi Italiyada joylashgan bo'lib, unga tan olingan, o'z ilmiy ishlari bilan yuqori natijalarga erishgan Fan Doktorlari, professorlar taklif etiladi. Shu olimlar qatorida o'zbek olimi Utkir Rozikov ham bu akademiyaga taklif etildi. Bu olimning qilgan mehnatlari samarasi, bizning faxrimizdir.

Matematikadagi matematik billiard nazariyasiga katta hissa qo'shib, 2018-yilda "An Introduction to Mathematical Billiards" kitobini chop ettirdi. Bu matematik billiard nazariyasini o'rganuvchilar uchun muhim uslubiy qo'llanma bo'lib xizmat qiladi.

Bitiruv Malakaviy Ishi mavzusining dolzarbligi

Matematik bilyard nazariyasi bizga fizika, mexanika va matematikaning turli xil masalalarini hal qilishda yordam beradi: suyuqliklarni ajratish masalalarida, yorug'likni qanday tushirish to'g'risidagi masalalarda, tibbiyotda buyrakdagi toshlarni parchalashda, gaz zarrachalarining to'qnashuvida va boshqa masalalarda.

Bilyard trayektoriyalarini tahlil qilish geometriya metodlarini, dinamik sistemalarni, ergodik nazariyalarni, shuningdek, nazariy fizika va mexanikaning masalalarini o'z ichiga oladi. Bilyard asosan dinamik sistemalar nazariyasida o'rganilgan. Xususan, matematik bilyardni elementar matematikada qo'llanishini suv ajratish masalalarida ko'rishimiz mumkin.

Bitiruv Malakaviy Ishi mavzusining maqsad va vazifalari

Bitiruv malakaviy ishining maqsadi va vazifasimatematik bilyard haqida tushunchalarga ega bo'lish, bilyard stollari ularning turlari va ular ustida davriy trayektoriyalarni o'rganishdan iborat.

Bitiruv Malakaviy Ishi mavzusining ishlab chiqilganlik darajasi

Bu sohada dunyoning ko'plab yirik olimlari ijod qilishgan, jumladan Boltsman, Kriolis, Puankare, Y.G.Sinai, G.A.Galperin, A.N.Zemlyakov, S.Tabachnikov va yurtdoshlarimizdan F.M.Muhamedov, U.A.Roziqov kabi olimlar bu sohada ko'plab izlanishlar olib bordilar.

Bitiruv Malakaviy Ishi mavzusining tadqiqot obyekti va predmeti

Tadqiqot obyekti matematik bilyardni o'rganishga bag'ishlangan yurtimizdagi va xorijdagi ilmiy tadqiqot ishlari, internet ma'lumotlaridan hamda turli gazeta va jurnallardagi mavzuga oid maqolalardan foydalanish.

Bitiruv Malakaviy Ishi mavzusining amaliy ahamiyati.

Ushbu bitiruv malakaviy ishi ham amaliy, ham nazariy va metodologik ahamiyatga ega bo'lib, mustaqil tadqiqotlarda, bitiruv malakaviy ishlari tayyorlashda, maxsus kurslar o'qitishda, to'garaklarda, matematik kechalarda foydalanilanish mumkin.

Bitiruv malakaviy ishining tarkibiy tuzilishi.

Bitiruv malakaviy ishi kirish, asosiy qism, xulosa, foydalanilgan adabiyotlar ro`yxati va internet ma'lumotlaridan iborat.

ASOSIY QISM:

I.BOB Bilyard haqida umumiy tushunchalar

1.1-§ Bilyard haqida umumiy tushunchalar

Biz dastavval bilyard haqida tushunchalarga ega bo'lishimizkerak. Bilyard o'yin turi hisoblanadi.Bu o'yin bizni eraga qadar yilllar davomida Xitoy va Hindiston davlatlaridan o'tib kelgan. U Yevrpa davlatlarida VI asrda vujudga kelgan. Uni keng ma'noda tarqalishi XVI asrga to'g'ri keladi.

Bu o'yin oliy tabaqa vakillari orasida o'ynalgan. Fransiya qiroli Karl IX bilyard o'yinini "Varfo" kechasida o'ynagan.Bilyard o'yini ibodatxona qo'ng'irog'i chalingan vaqtda o'ynalgan. Unga Sen-Jermen va Akselarualar hamrohlik qilishgan.

Bilyard o'yin haqida V. Shekspernig asarlarida ham uchratish mumkin.

Masalan, "Anton va Kleopatra " asarida Kleopatra yegptlarni bilyard o'yinini o'ynashga majbur qillganligi haqida yozadi.

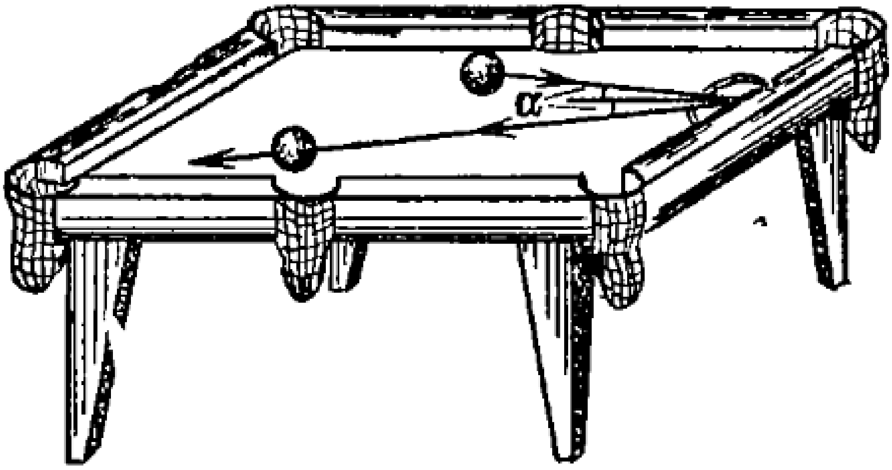
1760- yil Angliya qiroli Georg II chiqargan qarorga ko'ra, jamoat joylarida bilyard o'yinini o'ynash taqiqlanib 10 funt jarima joriy etildi.

Rossiyada bilyard o'yini Pyotr I davrida rivojlandi. Bu davga kelib bilyard o'yini qoidalari to'g'ri burchakli stolda 4 ta burchakda va 2 ta uzun yon tomonlarning o'rtalarida cho'ntaklar (xaltacha, to'r setka) bilan tashkil etildi.1-chizma

Bundan farqli o'laroq sharchalar soni ham 3 tadan bo'lishi ko'rsatib o'tildi.

Angliyada esa sharlar sonini Genrix VIII 15 ta yoki 20 tadan o'ynalishi aytib o'tilgan

Kubchalar (soqqachalar) o'yinlari matematikadagi eng qiziqarli sohalardan biri bo'lgan ehtimollar nazariyasining kelib chiqishiga asos bo'lgan bo'lsa, bilyard o'yini ham matematik bilyard nazariyasiga asos soldi. .



1-chizma

Hozirgi paytda matematik, mehanik, shu jumlada, suyuqliklar dinamikasi, oynali uylarni yoritish, ossillografiya va boshqa ko'plab masalalarni yechishda matematik bilyard nazariyasi qo'llaniladi.

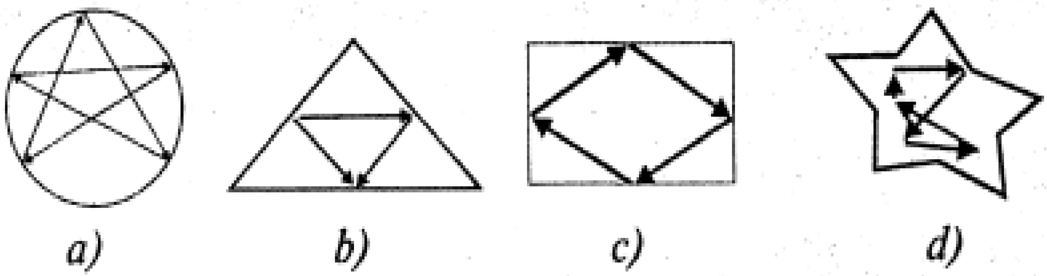
Bu nazariyaning asoschilari Kriolis, Boltsman, Puankare va boshqalar hisoblanadi.Hozirgi paytda esa matematik bilyard nazariyasini rivojlantirishda Ya.G.Sinai va uning shogirdlari katta hissa qo'shmoqdalar. Bu orqali biz respublikamiz matematiklariga, ayniqsa, yosh matematiklarga qiziqarli soha - matematik bilyard nazariyasini o'rganishga imkon yaratishni maqsad qilib oldik.

Bilyard o'yinining ajoyib turi, bu fransuzcha o'yindir.Bu o'yinda bilyard stolining teshiklari bo'lmaydi.Maqsad oldindan tanlangan sharchani nishonga olish bo'ladi.Matematik bilyard ko'proq shu fransuzcha o'yinga o'xshaydi.

1.2-§ Bilyard stollari turlari

Matematik bilyard o'yinining stoli to'g'ri to'rtburchak, uchburchak, doira va umuman, turli ko'rinishga ega bo'lishi mumkin.

Faraz qilaylik, gorizontal,ixtiyoriy ko'rinishdagi teshiklarsiz bilyard stoli ustida bitta sharcha harakat qilayotgan bo'lsin. Bu sharcha doim bir xil tezlikda harakat qilsin va stol chegarasiga urilganda “ tushish va qaytish“ burchaklari teng bo’lsin deb shartlashib olamiz.



Bu rasmda har xil stollarda sharchaning harakat yo’llari ko’rsatilgan. Sharcha harakati davomida chizgan izi, uning trayektoriyasi deyiladi.

Matematik bilyardning asosiy vazifasi har qanday shakldagi stol uchun sharchaning mumkin bo’lgan trayektoriyalarini aniqlashdan iborat. Trayektoriyalar asosan ikki turga bo’linadi. Birinchisi, davriy (bu holda sharchaning trayektoriyasi yopiq siniq chiziqdan iborat bo’ladi).Ikkinchisi, davriy bo’lmagan trayektoriya.Rasmdagi c) va d) rasmlarda davriy trayektoriyalar ko’rsatilgan.

Matematik bilyard bu – bilyard to’pining tekis chiziqdagi harakatlari va chegaradan aniq ko’zlangan harakatlari bilan almashinadigan dinamik tizimdir. U bilyard to’pidan tashkil topgan, ammo bilyard cho’ntaklari (plyonkalari) bo’lmagan stolda tashkil etilgan bo’ladi. Bu stolda to’p tartibsiz (uyg’unlashuvsiz) harakat qiladi va stol chegaralariga uriladi. Matematik bilyard dinamik sistema ekanligini hisobga olib, unda sharlar trayektoriyasi davomida chegaraga urilib, tezligini o’zgartirmaydi. Bilyardlar asosan dinamik tizimlar nazariyasida o’rganiladi. Bilyardning matematik masalalari bilyard to’pi (shari)ning trayektoriyasini hatti-harakatlarini tezligini o’rganishdir. Biz bunda sharning hatti-harakatlarini natijalarini stollar ustida o’rganib chiqamiz. Masalan, doira, ellips, uchburchak, ko’pburchak va boshqa stollar ustida o’rganamiz. Bu nazariya bizga fizika, mexanika va matematikaning turli xil masalalarini hal qilishda yordam beradi: suyuqliklarni ajratish masalalarida, yorug’likni qanday tushirish to’g’risidagi masalalarda, tibbiyotda buyrakdagi toshlarni parchalashda, gaz zarrachalarining to'qnashuvida va boshqa masalalarda.

Bilyard trayektoriyalarini tahlil qilish geometriya metodlarini, dinamik sistemalarni, ergodik nazariyalarni, shuningdek, nazariy fizika va mexanikaning masalalarini o'z ichiga oladi. Bilyard asosan dinamik sistemalar nazariyasida o'rganilgan.Matematik bilyard nazariyasiga qiziquvchi yosh olimlar soni ortib bormoqda. Chunki,nazariyaning biologiya, fizika, matematika, meditsinaga oid tadbiqlari juda ko'p.

1.3-§ Bilyard o'yinida ko'rilgan ayrim masalalar (suv ajratish masalasi)

Quyidagi masalani parallelogramm stolida ko'rilgan bilyarddan foydalanib osongina yechamiz.

Masala 1.

7 va 11 litr hajmli ikkita idishlar bor va ko'proq kattasi suv bilan to'ldiriladi. Shu idishlardan foydalanib, qanday qilib suvning aniq bir litr hajmini o'lchash mumkin?

Yechish:

Ushbu masalada bilyard stoli parallelogramm bo'lib hisoblanadi.Stolning tomonlari 7 va 11 bo'lishi kerak. Quyida 1-chizmadagi ko'rsatilgan trayektoriyadan quyidagilarni xulosa qilishimiz mumkin:

1. Shar o'zining trayektoriyasini (0,0) nuqtada (chap tomon pastki cho'qqida) boshlaydi.Sharning bu holati shuni anglatadiki, 7 va 11 litrli idishlarning har ikkisi bo'm-bo'sh.

2. Keyingi holatda u (0,11) nuqtaga yo'naltiriladi.Ya'ni bu holat katta idish to'la, kichik idish esa bo'shligini bildiradi.

3. So'ngra u (7,4) nuqtaga yo'naltiradi. Ya'niki,katta idishdan kichik idishga suv quyilgan bo'ladi.

4. Keyingi (0,4) holat kichik idishdagi suv to'kib tashlanganini ko'rsatadi.

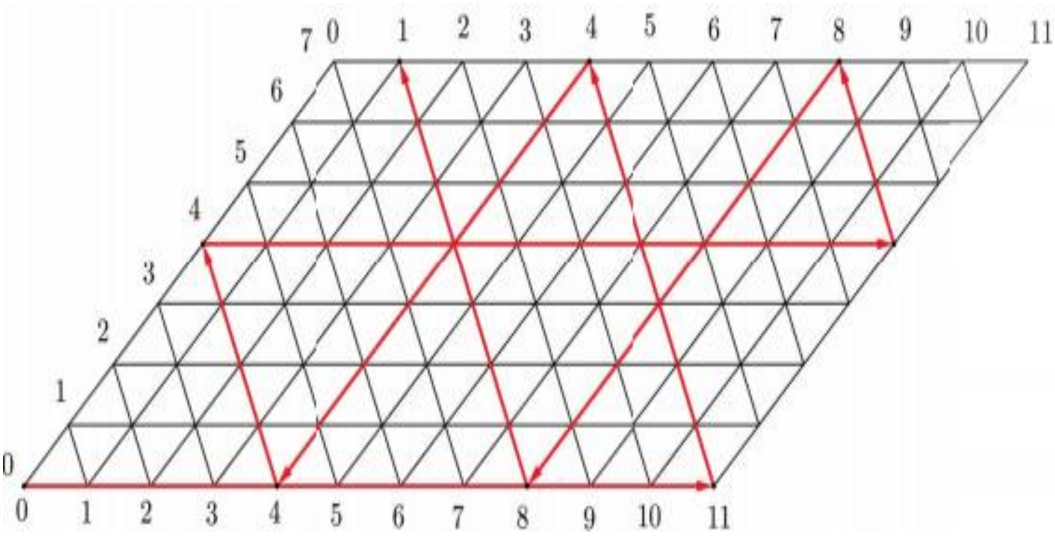
5. Navbatdagi (4,0) holat katta idishdagi suv kichik idishga quyib bo’shatilganini bildiradi.

6. So’ngra (4,11) holatga shar yo’naltiriladi. Bunda katta idish yana suv bilan to’ldirilgan holatni ifodalaydi.

7. Keyin (7,8) nuqtaga shar trayektoriyasi davom etadi.Bu holat katta idishdan kichik idishga suv quyib, kichik idish to’ldirilganini va katta idishda 8 litr suv hosil bo’lganini bildiradi.

8. (0,8) holatga keladigan bo’lsak, bunda kichik idishdagi suv yana to’kib yuboriladi.

9 (7,1) holatda esa katta idishdan kichik idishga suv quyib to’ldiriladi va katta idishda 1 litr suv hosil bo’ladi.Bu chizmada quyidagicha ifodalanadi:



1-Chizma.1litr suv ajratish trayektoriyasi.

Biz idishda 1 litr suv qolguncha trayektoriya bo’ylab harakat qilishimiz kerak.1-chizma shuni ko’rsatadiki, 9-qadamda katta idishda 1 litr suv qolgan. So’ngra ifodalangan algoritm masalaning yechimini beradi.

Izoh.

Agar dastlab shar (7,0) nuqta (chap tomon yuqori cho’qqi)ga yo’naltirsa, 1 litr suvni hosil qilish uchun 25 qadamni bajarish kerak bo’ladi. Buni yuqoridagi 1-chizma orqali ko’rish mumkin, unda tekshirish juda oson .1-chizmada tasvirlangan matematik bilyard orqali istalgan i=1,2,…,11 da suvning i litrini o’lchay olishni tekshirish qiyin emas. Bunda sharni faqat i ga teng koordinata nuqtasigacha trayektoriya bo'ylab harakatlantirishni davom ettirish kerak bo'ladi. Biz sharni dastlab (7,0) nuqtaga yo'naltiramiz. Bu holat kichik idish to'la, katta idish bo'sh ekanligini bildiradi. Shu tarzda sharni 1 ga teng koordinata nuqtasigacha trayektoriya bo'ylab harakatlantirishni davom ettiramiz. Bu holatda 25-qadamda kichik idishda 1 litr suv hosil bo'ladi. Yuqorida ko'rib chiqilgan har ikki hol hambizni masala yechimiga ya'ni 1 litr suvni hosil qilishga olib boradi. Biz ushbutrayektoriyalarga ahamiyat bilan qarasak, 1 litr suv hosil bo'lgunga qadar 2, 3, 5, 6, 9, 10 litr hajmli suvlarni hosil qildik.

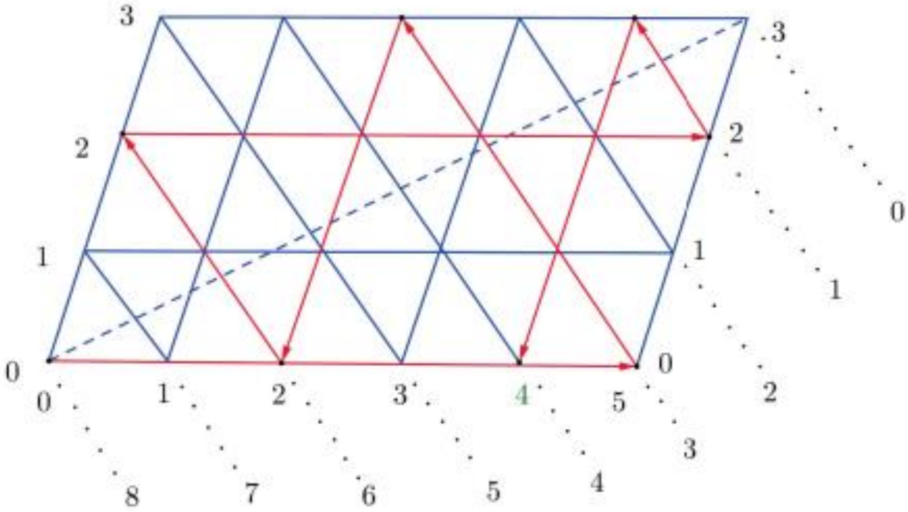
Demak, matematik bilyard metodidan foydalanish ushbu masalalarni yechishda samarali, oson va ancha qiziqarli ekan.

Masala 2.

8 litr hajmli idish bor, u suv bilan to'la. Yana 3 va 5 litr hajmli bo'sh idishlar bor. Qanday qilib suvni ikki idishga teng qilib quyish mumkin? (ikkala idishda aniq 4 litrdan suv bo'lishi kerak)

Yechish:

Bu masala uchun bilyard stoli 3x5 o'lchamli parallelogramm bo'ladi. (2-chizmaga qarang). Parallelogrammning katta diagonalini o'tkazamiz, u 8 litr hajmli idishni ifodalaydi va u mos ravishda to'g'ri chiziqlar bilan 8 qismga bo'lingan. Parallelogrammning tomonlari esa 3 va 5 litr hajmli idishlarni ifodalaydi. Quyidagi 2-chizmada tasvirlangan trayektoriya harakati davomida idishlarda turli hajmli suv hosil bo'ladi. Biz esa harakatni ikki idishda aniq 4 litrdan suv hosil bo'lguncha davom ettiramiz. Quyida tasvirlangan chizmadan ko'rinib turibdiki, sakkizinchi qadamda ikki idishda teng miqdorda suv hosil bo'ladi, ya'ni bizga berilgan hajmdagi suv teng ikki qismga bo'linadi.



2-chizma.

8 litr hajmli suvni ikkita 4 litr hajmliga bo'lish trayektoriyasi.

Harakat trayektoriyasi quyidagicha:

(0, 0, 8)→(0, 5, 3)→(3, 2, 3)→(0, 2, 6)→(2, 0, 6)→(2, 5, 1)→(3,4, 1)→(0, 4, 4).

Bunda tasvirlangan 1-koordinat 3 litr hajmli idishni, 2- koordinat 5 litr hajmli idishni, 3-koordinat esa 8 litr hajmli idishni bildiradi.Tasvirlangan trayektoriya bizga yechimning algoritmini beradi. Shunga ko'ra ushbu algoritmni hosil qilamiz:

1. (0, 0, 8) nuqta -dastlabki holatni ya'ni,3 va 5 litrli idishlar bo'sh, berilgan 8 litrli suv bilan to'la idishni bildiradi.

2. (0, 5, 3) nuqta-8 litrli idishdan 5 litrli idishga suv quyilganini ifodalaydi.

3. (3, 2, 3) nuqta - 5 litrli idishdagi suvdan 3 litrli idishga suv quyilganini ko'rsatadi.

4. (0, 2, 6) nuqta esa 3 litrli idishdagi suv 8 litrli idishga bo'shatilganini bildiradi.

5. (2, 0, 6) nuqta - 5 litrli idishdagi suvning 2 litrini 3 litrli idishga quyib qo'yilganini ifoda etadi.

6. (2, 5, 1) nuqta 8 litrli idishdagi 6 litr suvdan 5 litrli idishga suv quyib to'ldirilganini ifodalaydi.

7. (3, 4, 1) nuqta 5 litrli idishdagi suvdan 3 litrli idishdagi 2 litr suvga 1 litr suv quyilib idish to'ldirilganini ko'rsatadi.

8. (0, 4, 4) nuqta 3 litrli idishdagi suvni 8 litrli idishga quyilganini ifodalaydi.

So’nggi qadamda 5 litrli va 8 litrli idishlarda 4 litrdan suv hosil bo’ldi, ya’ni 8 litr suv teng ikkiga bo’lindi.

Izoh.

Agar ikki kichikroq idishlar hajmlari nisbatan ustunlikka ega bo’lsa, (ya’ni hajm o’lchovlarining umumiy bo’luvchisi $\neq$ 1) va eng katta idish hajmi kichikroq idishlar og’irliklarining yig’indisidan katta yoki teng bo’lsa, biz bu idishlarlardan foydalanib, 1 litrdan o’rta hajmli idish hajmigacha suvni o’lchay olamiz. Masalan, bizga 3 hajmdagi idishlar mos ravishda 12, 13, 26 litrli idishlar berilgan bo’lsa, istalgan $l \in \{1, 2, \ldots 13\}$ uchun l litr suvni o’lchay olamiz.

II.BOB Uchburchak stolda Fagnano bilyard trayektoriyalari

2.1 -§   Ixtiyoriy uchburchakda bilyard trayektoriyalari

Biz yuqorida matematik bilyard stollarini to'g'ri to'rtburchak, uchburchk, doira va umuman, turli ko'rinishda bo'lishini mumkinligini bilib bilib oldik. Biz esa quyida uchburchak ko'rinishidagi stollar usida matematik bilyardni ko'rib chiqamiz.
Uchburchak stollar ustida harakatlanayotgan sharcha harakatini o'rganish uchun, avval Fagnano masalasini ko'rib chiqamiz.

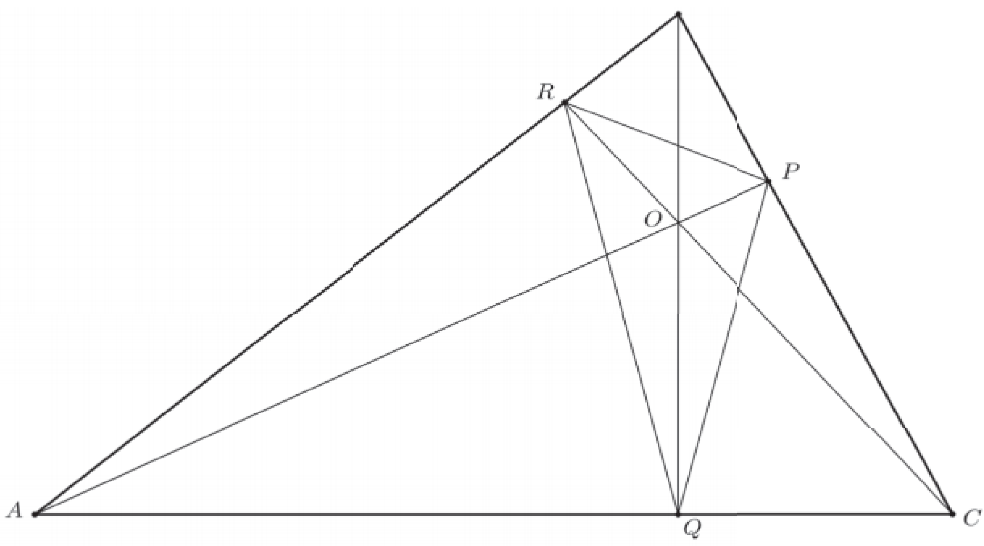
Fagnano masalasi. Bu masala birinchi bo'lib, 1775-yilda Govani Fagnano tomonidan yaratilgan optimallashtirish masalasidir.

Masala.*Berilgano'tkir burchakli uchburchak minimal peremetrga ega bo'lishi uchun uchinchi burchagi qanday bo'lishi kerak.*
Buning uchunFagnano bilyard trayektoriyalaridan foydalanamiz.
Berilgan uchburchakda balandliklar ajratgan uchburchaklar eng minimal perimetrga ega bo'ladilar. Shuning uchun buFagnano masalasi hisoblanadi. Shunday ekan bunda Fagnanobilyard trayektoriyasidan foydalanamiz. `

Ta'rif 2.1*Uchburchakli bilyard stoli ustiga uchburchak joylasak, uning balandligi 3- davriy trayektoriya balandligi bilan bitta nuqtada kesishadi*.

2-chizma

B



Chizma.Fagnano bilyard trayektoriyasi

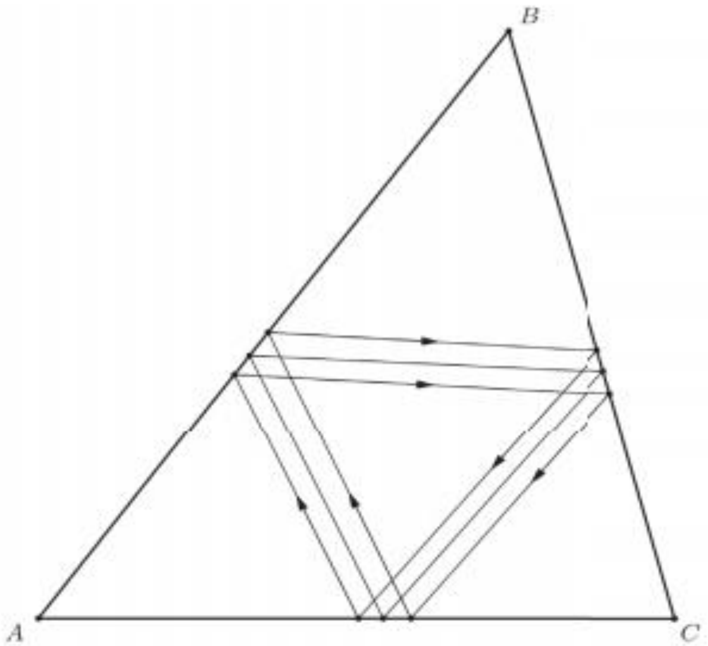
Isbot. BPOR to’rtburchakda 2 ta to’g’ri burchak mavjud. Ya’ni BRO=π/2 BPO=π/2 Endiaylanishiniko’ribchiqamiz. APRvaABQburchaklarbirxilyoylarnitortibturadi.Shuning uchun ular teng.

Demak, APQ va ACR burchaklar tengdir. Haqiqatan ham ABQ va ACR lar teng. Haqiqatan ham bu ikkala burchak BAC burchakni π/2 ga to’ldiradi.

Bizga ma’lumki parallel to’g’ri chiziqlar orasidagi masofa ular cheksizga qarab ketsa ham o’zgarmaydi. Shuning uchun ko’pburchakdagi trayektoriyalar hech qachon izolyatsiya qilinmaydi: bir bilyard shari davr va uzunligi mavjud bo’lgan 1-parametrli chiziqlar oilasiga tegishli bo’lib, bu shar trayektoriyasi vaqt va uzunligi ikki barobar katta bo’lgan trayektoriyalardan iborat boladi. 3-chizma.

Fagnano trayektoriyasi to’g’ri burchakli uchburchaklar uchun o’rinli emas bo’lib qoladi.

Ko’pburchakli bilyard stollari tavsiflarining soddaligiga qaramay anchayin qiyin obyekt hisoblanadi.

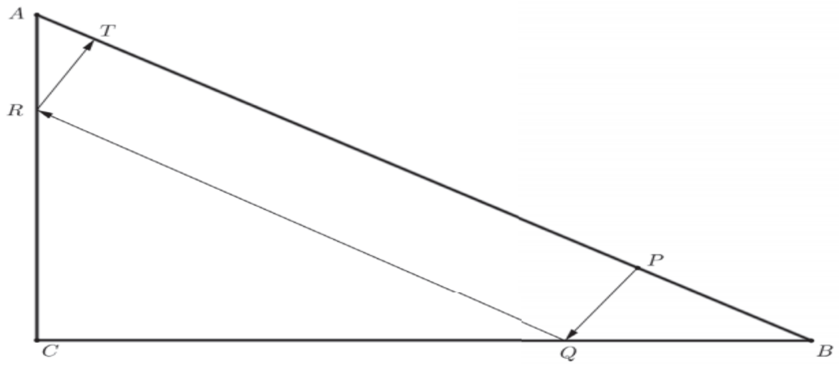


3- chizma. Parallel bilyard trayektoriyalari

Biz shu o'rinda uchburchak stollar haqidagi ayrim tushunchalarni qaraymiz.

Ta'rif2.2. *Uchburchak stoldagi to'g'ri burchakli trayektoriya deyiladi, agarda uchburchakning bir tomoniga perpendikulyar bo'lsa.*

Teorema 2.1.*To'g'ri burchakli uchburchakda gipotenuzaga perpendikulyar trayektoriya hosil qilgan sharcha yana gipotenuzaga perpendikulyar qaytadi.* 4-chizma.



4-chizma. To'g'ri burchakli uchburchakda bilyard trayektoriyasi

Isbot.ABC to'g'ri burchakli uchburchakni ko'raylik. Bilyard trayektoriyasidan 4- chizmaga ko'ra, ABC, QBP, QRC, ART uchburchaklarni ko'rishimiz mumkin. Bu uchburchaklar o'xshashdir. Chunki ularda o'zaro mos burchaklar mavjud. Teorema isbotlandi.

To'g'ri burchakli uchburchakni 6-davriy trayektoriyasi 3-chizmada ko'rsatildi. Shunga e'tibor beringki, bunday ko'pburchakli bilyardda xuddi shunday trayektoriya tomoniga ortogonal bo'lsa, xuddi shu tomonga perpendikulyar qaytadi.

Umuman olganda har bir ko'pburchakning davriy bilyard trayektoriyalari mavjudligi ma'lum emas. Bu yoyiq burchakli uchburchaklar uchun ham noma'lum. Yaqinda R. Schwartz tomonidan muhim natijalarga erishildi. U har bir yoyiq uchburchakning burchagi 100°C dan oshmasligi bilan davriy bilyard trayektoriyasiga ega ekanligini isbotlandi.

2.2-§ Yoyiq (o'tmas) burchakli uchburchaklarda davriy trayektoriyalar.

O'tmas burchakli uchburchaklarda quyidagi natijalarga erishamiz.

Ta'rif 2.1*Har bir n har qanday davriy trayektoriya n to'qnashishidan ko'p bo'lgan o'tmas burchakli uchburchak $\Delta(n)$ mavjud.*

Isboti. Biz yetarlicha kichik α va β burchaklarni tanlab olamiz. Δ(n) = ΔABC da yetarlicha kichik min$(-[-\frac{\pi}{\alpha}], -[-\frac{\pi}{\beta}]) > n$. α burchak bilyard to'pining maksimal $N(\alpha) = -[-\frac{\pi}{\alpha}]$ qiymatlarini qabul qiladi.

Faraz qilaylik,α, β va π larni mantiqan ixtiyoriy tanlab olaylik.

$k\,\alpha + m\,\beta + l\pi = o,\ k,m,l \in Z \rightarrow,\ k=m=l=0.$

Keling Γ Δ(n) ni davriy trayektoriyasi bo'lsin. AB va BC tomonlarni tutashtiruvchi eng qisqa masofani XY bilan belgilaylik. $(\angle B > \frac{\pi}{2})$. (5-chizma.)Haqiqatan ham har bir bilyard trayektoriyasini AC asos bilan yon tomonini tutashtiramiz. AC asosga yopishtirilgan ikkita burchak

$\varphi' - \varphi'' = k\,\alpha + m\,\beta, \quad k,m, \in Z,$

AC asosdagi burchak moduli 2α yoki 2β bo'ladi.

Shunday qilib sharchalarning boshlanish nuqlaridagi AC bilan tashkil qilgan burchagi φ_0 bo'ladi. Keyingi urilishdan so'ng AC asos bilan tashkil qilgan burchagi

$\varphi = \varphi_0 + k\,\alpha + m\,\beta$

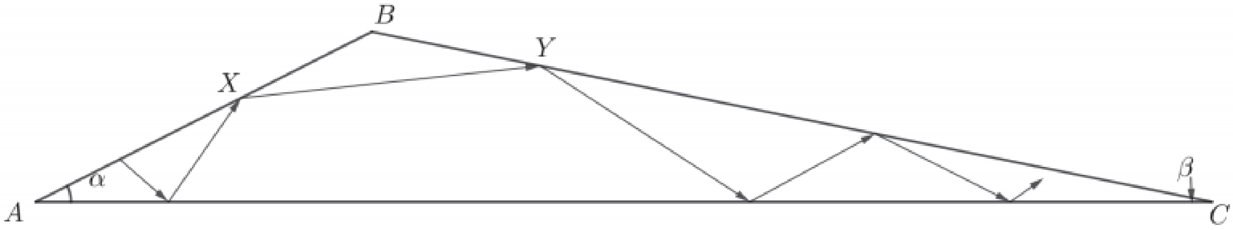
bo'ladi.

Γ davriy trayektoriyadan φ va $\varphi_0$burchaklar quyidagicha ifodalanadi.

$\varphi = \varphi_0 + 2\pi s \Rightarrow k\,\alpha + m\,\beta = 2\pi s \Rightarrow k=m=s=0, \quad k,m, \in Z$

bunda, α, β va π lar mustaqildir (ixtiyoriy).

Shunday qilib, bizda Γ XY (X∈ AB, Y∈ BC) kesmani o'zichiga oladi.



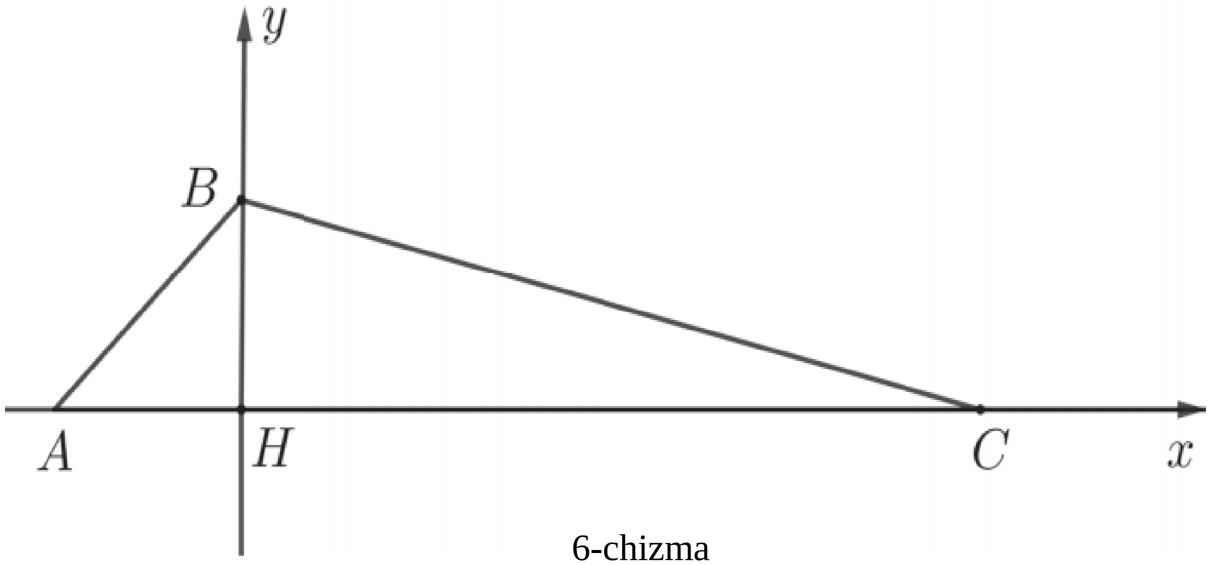
5-chizma.

Bu kesma AC va BC tomonlar bilan kichik burchaklar tashkil qiladi. AB va BC tomonlardagi X va Y lar mos ravishda N(α) va N(β) bo'ladi.Shunday qilib,$n\Gamma$ ning qismidir.

Savol bilan natijaga o'tadigan bo'lsak, uchburchaklarning barchasida davriy tryektoriya mavjudmi ? Ammo muammo ochiqligicha qoladi.

Biz endi keyingi o'rinlarda to'g'ri burchakli uchburchaklarda davriy trayektoriyalarni ko'ramiz.

Δ ABC ixtiyoriy uchburchakdaung katta burchak B uchda joylashgan (yotgan) bo'lsin. Keling uchburchakning balandligini o'tkazamiz.Va uni BH bilan belgilaymiz. Biz OXY koordinatalar sistemasida H=(0,0) nuqtani belgilaymiz. OX o'qqa AC ni, OY o'qqa BH ni olamiz.6-chizma.



6-chizma

Shu yo'sinda davom etib a<0, b<0 va h>o larga ega bo'lamiz. Shunday qilib, A=(a,0), B=(0,h), C=(b,0) bo'ladi.

Ixtiyoriy uchburchak chegara chizig'i ustida P_0=(x_0,y_0) nuqtani o'rnatamiz. Va$\alpha_0 \in$ [0, π/2] bo'ladi. Bilyard trayektoriyasini (P_0, α_0) nuqtasini ko'rib chiqamiz. Shu tariqa davom etib m-trayektoriyani (P_m, α_m) bilan belgilaymiz. Va hokazo.

P_m=(x_m,y_m), $\alpha_0 \in$ [0, π/2]. Grafikdagi (x_m,y_m) bilan chegara nuqtalarni belgilaymiz.

1. V operatorni belgilab olamiz (a, b, h: parametrlarga bog'liq, bundan tashqari u boshlang'ich nuqtaga ham bog'liq) (P_0, α_0) uchun (P_1, α_1)

$$(P_1, \alpha_1) = \mathrm{V}(P_0, \alpha_0)$$

bo'ladi.

2.(P_m, α_m) koordinatalarni m=1,2,3 bo'lganda topamiz, y_0=0 (ya'ni AC ning boshlang'ich nuqtasi) $\alpha_0$ixtiyoriydir.

3. (P_m, α_m) koordinatalarni m=1,2,3 uchun, (x_0,y_0)$\in AB$va $\alpha_0$ixtiyoriy bo'lganda topamiz.

4.(P_m, α_m koordinatalarni m=1,2,3 uchun(x_0,y_0)$\in BC$va $\alpha_0$ixtiyoriy bo'lganda topamiz.

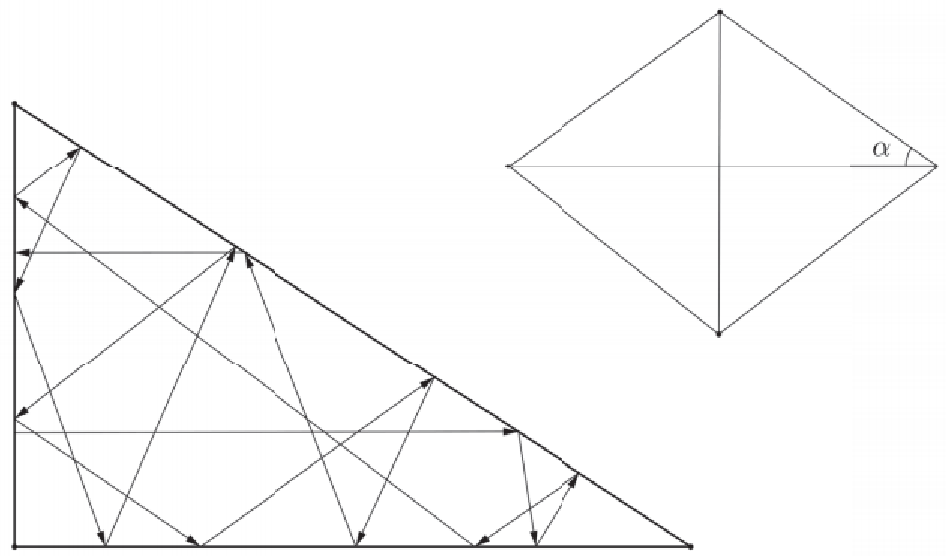
5. 3-davriy trayektoriyani olish uchun (P_0, α_0) ni shart ostida topishimiz mumkin.(shartlar a,b,$h$ga bog'liq holda beriladi)

Bunda operatorni toppish uchun analitik geometriyadan foydalaniladi. To'g'ri chiziqlar tenglamalarini yoziladi, chiziqlarning kesishish nuqtalari topiladi, to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak topiladi.

2.3-§.Yon tomoniga perpendikulyar bo'lgan tryektoriyalar

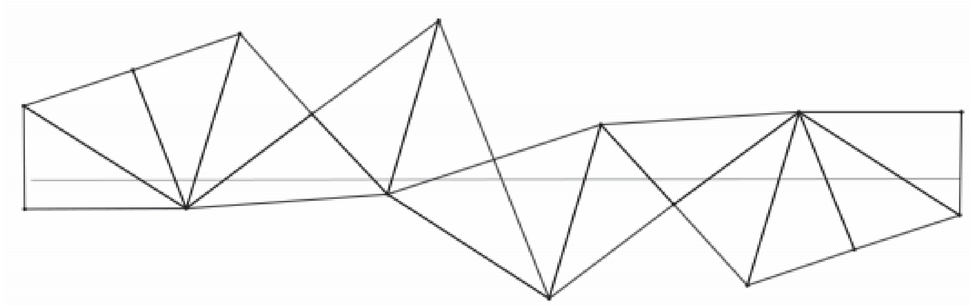
Teorema.*Ixtiyoriy to'g'ri burchakli uchburchakda bir tomonga perpendikulyar boshlangan bilyard trayektoriyalar davriydir.*

Isbot uchun tayyogarlik. Ochish (tanlash) orqali biz uchburchakning tekis chiziq bo'ylab aylanishi natijasidagi trayektoriyasini namoyish etamiz. 8-rasm.7- rasmda ochiladigan (tanlangan) trayektoriyani ifodalaymiz.



7-rasm.Qisqa tomonga (oyoqqa) perpendikulyar boshlangan, to’g’ri burchakli uchburchakda 15- segmentli davriy tryektoriya. Bu holatda qisqa va uzun tomonning (oyoqning) nisbati 1:1.42 (chap)dir Ushbu uchburchakka mos keladigan rombda tan1/1.42 ga teng.

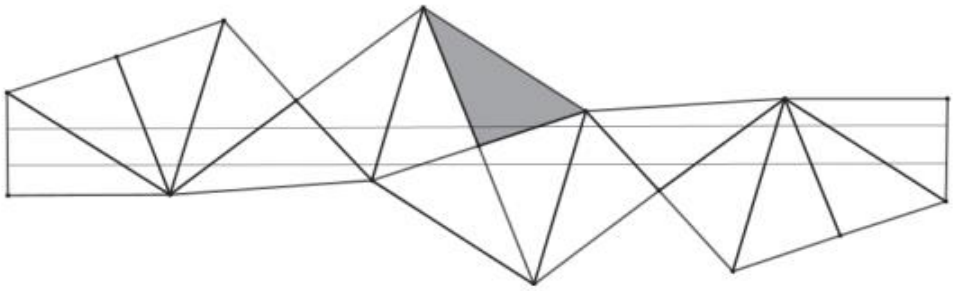
Tanlangan trayektoriyalarning barchasiga bitta ketma-ketlikni kiritish mumkin. Guruhning yuqori va pastki chegaralari aniqlangan uchburchakning uchlari qayerda joylashganligidan aniqlanadi: yuqori chegara tanlangan trayektoriyaning eng pastki uchi va pastki chegara pastki yuqori burchagida belgilanadi. Ushbu burchaklardan biri (yuqoridagi bo’lsa) to’g’ri burchak. Agar biz ushbu yo’nalishdan yuqoriroq trayektoriyaga qaraydigan bo’lsak, unda asl (asosiy) trayektoriya uning ostidadir, shunga qaramay, yengil zarbalar ketma-ketligi asosan bir xil (9-rasm). Aslida, bu ikkisi uchburchak ichidagi bilyard trayektoriyalari kabi bir xil. To’g’ri burchak uchi simmetriya nuqtasidir. 9- rasm. Bu to’g’ri burchak uchiga “olinadigan yagonalik” degan ma’noni anlatadi. Biz uchburchakni emas, balki uchburchakning to’rt nusxa (proyeksiyasi) sini tashkil etuvchi to’rtburchak shakni 7-rasmda ko’rsatilgan asosiy shakldan foydalanib ajratib olishimiz mumkin.



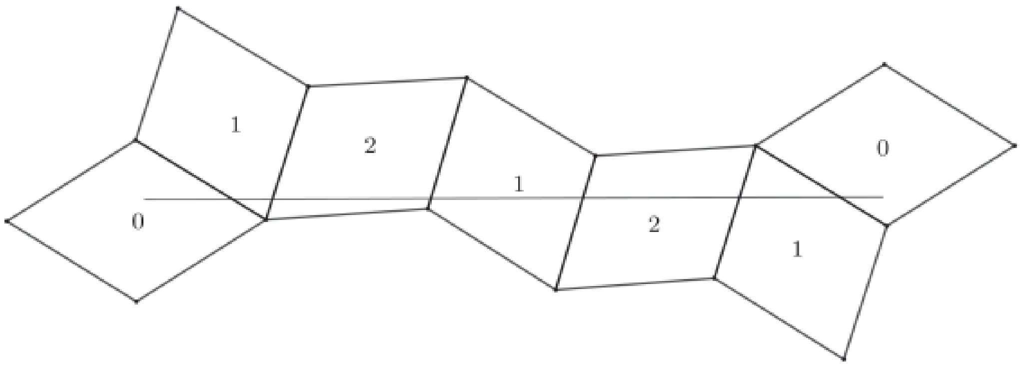
8-rasm

Shunday qilib biz, romb bilan ishlashimiz mumkin.Va rombning diognallaridan biriga perpendikulyar boshlangan trayektoriyalarni ko'rib chiqamiz. To'g'ri chiziqli trayektoriya bo'ylab rombning aylanishini kuzatib borganimizda, har safar aylanganda rombning ikki burchagining ichki burchaklaridan biriga teng miqdorda qaytariladi. Burilishlarni faqat bitta burchakka nisbatan tushuntirishimiz qulay. (Ichi burchak bilan soat yo'nalishi bo'yicha aylanish bir –brining soat bo'yicha teskari aylanishiga tengdir.)

α to'g'ri burchakli uchburchakning burchaklaridan biri bo'lsin. So'ngra rombbir trayektoriya bilan aylanadiki, uning yo'nalishi har bir aylanishi bilan 2α ga ortadi yoki kamayadi. Shuning uchun biz rombni butun sonlar bilan belgilaymiz, ularning barchasi (umumiy soni bo'yicha), soat yo'nalishi bo'yicha aylanadiki, ayanishi 2α bo'ladi. Har biri uchun 10-rasmda ko'rsatilgan.

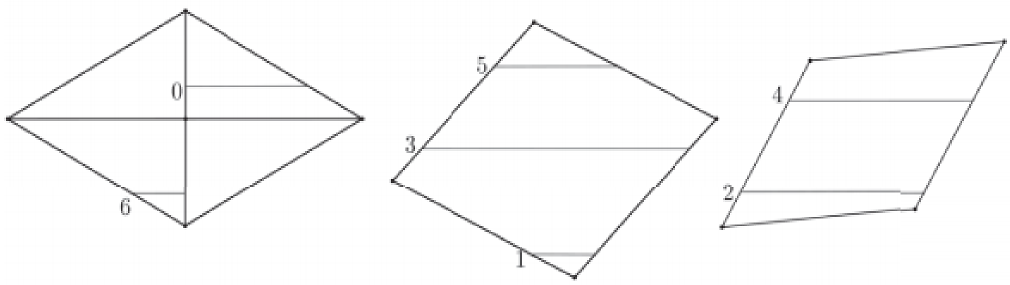


9-rasm



10-rasm

Bu trayektoriyaning belgilangan rombining bir qatorida chiziqli segmentlar ketma- ketligi sifatida yangi tavsifini ko'rsatadi. Misol 11-rasmda ko'rsatilgan.

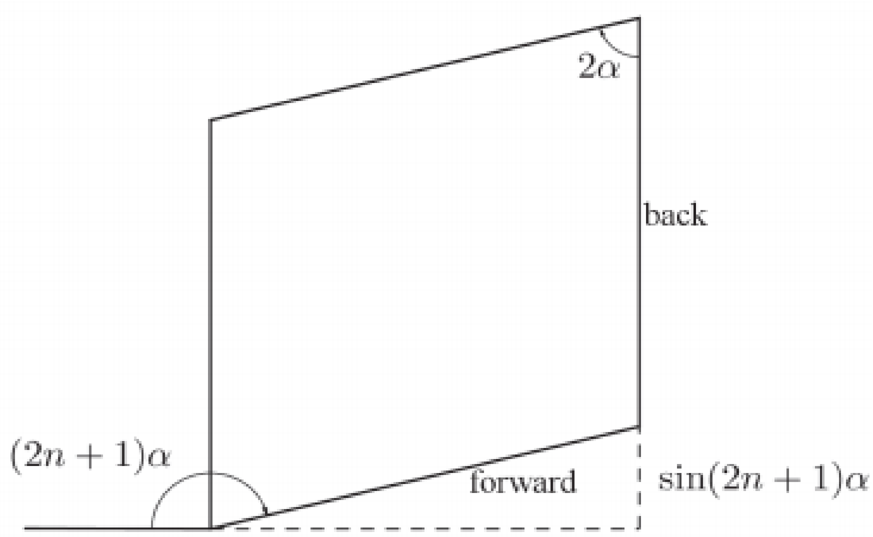


11-rasm. Romb 0, chap romb 1 o'rta va 2 romb. 10-rasmda ko'rsatigan uchta romb belgilangan trayektoriyaning ketma ket chiziqli segmentlari.

Trayektoriya segmentlari chap tomondan har bir rombga kirganlarida raqamlanadi. Agar o'ng tomonda burun burchagidan chiqsa, u keyingi rombga o'tadi yoki oldingi holattiga qaytadi, u chap tomonga parallel ravishda chegarada joylashgan nuqtaga qaytadi.

Umumiy holatda n-th romb 12-rasmda ko'rsatilgan.

Gorizantal, to'g'ri harakatlanadigan trayektoriyadan chiqishning ikkita tomoni "oldinga" va "orqaga" begilanadi. Bu trayektoriyalar keyingi rombga yoki orqaga, oldinga o'tishga bog'liqmi? Oldinga burchak har doim 2α burchak uchun oldinga (soat sterelkasi yo'nalishi bo'yicha) chiroq va orqaga chegara (soat sterelkasi yo'nalishidan farqli) nurdir.



12-rasm

Agar π ratsional multip bo’lsa, u holda belgilangan romb uchun faqat bir nechta aniq yo’nalish mavjud, biroq irratsional bo’lgan αburchak uchun cheksiz ko’p yo’nalishlar mavjud.

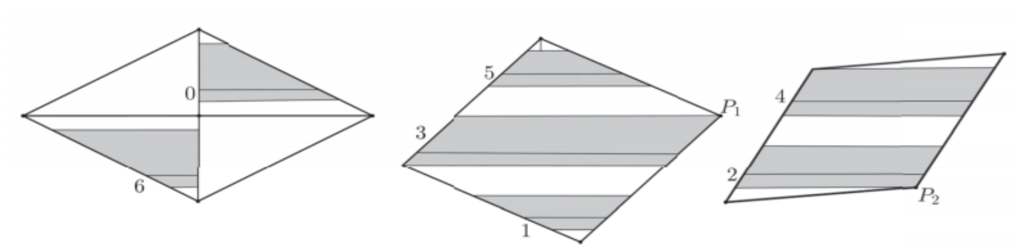
12-rasmdagi oldingi tomon deyarli gorizontal ekanligi aniq.

Rombning 0 oldingi tomoni x-o’qi bilan αburchakka o’rnatilgandan so’ng, va har bir keyingi old tomondan 2α burchakka soat sterelkasi yo’nalishi bo’yicha aylanishi, birlik uzunligi tomonlariga ega bo’lishini hisobga olsak, oldingi tomonning $n$ning vertikal chegarasi

$$\|\sin[(2n+1)\alpha]\|$$

Shuni ta’kidlash kerakki, $\alpha\pi$ning irratsional ko’pligi, bundan tashqari $\|\sin[(2n+1)\alpha]\| \neq 0$, lekin 0 va n oralig’ida musbat butun sonlarda ixtiyoriy ijobiy qiymatlarni oladi. Deyarli barcha trayektoriyalar davriyligini isbotlash uchun biz *n-th* rombning old tomoning vertikal kengligi n ning ma’lum qiymatlari ixtiyoriy kichikligidan foydalanamiz.

Keling, har bir davriy trayektoriya aslida bir xil turdagi modellar(naqsh)ga mos keladigan trayektoriyalar guruhiga tegishli ekanini esga olamiz. Bu 13-rasmda keltirilgan yangi vakillika (ko’rinishga) o’tadi.

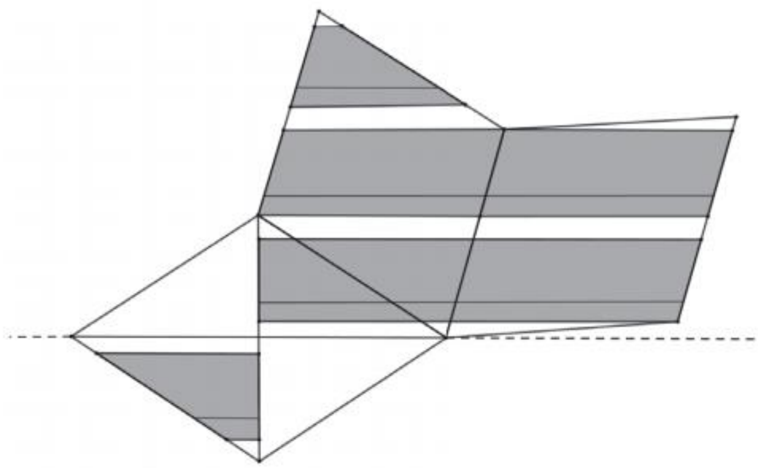


13-rasm

Tarmoqning kengligi romb1 ning old va orqa qirralarini ajratib turuvchi uchlarini P_1 va P_2 bilan belgilaymiz. Shunga e'tibor beringki, har qanday davriy trayektoriya shu holatda kengaytirilishi mumkin.

13-rasm, 14- rasmda ko'rsatilganideko'zgartirilishi mumkin.
Rombning bu " tirnoq" (pinwheel) konfiguratsiyasi guruhning harakatini ko'rishni osonlashtiradi.

Biroq tahlillar har bir rombni alohida ko'rib chiqishga asoslangan.



14-rasm

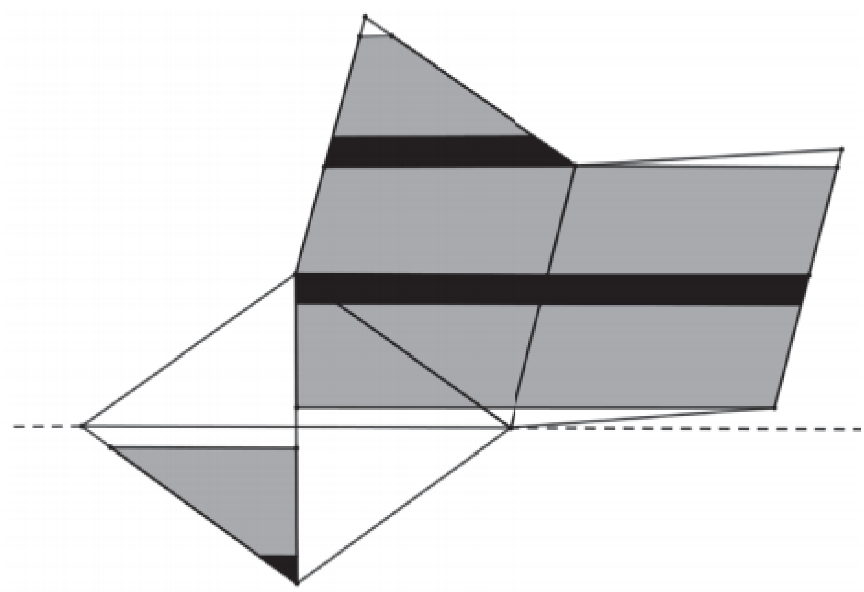
Trayektoriyalarni bir rombdan boshqasiga bog'laydigan qoidalar shunchaki, affin akslantirishdir, tarmoqning kengligi doimiy bo'lib qoladi. Bundan tashqari, guruhning segmentlari, birinchisigachasi romb 1 da 3 va 5 gacha segmentlar, bir –biriga qarama –qarshi emas.

Haqiqtanham, agar$h$va$k$segmentlarbirrombda, $h<k$bilanbir-birigabog'labqo'yilganbo'lsa, unda$h$-1 va$k$-1 gacha bo'lgan segmentlar avvalgi

rombga ulanadi. h=0, agar “1” segmenti bo’lmaganligi sababli, bu argument muvaffaqiyatsiz bo’ladi, lekin 0 guruh nosimmetrik tarzda yo’naltirilganligi bilan boshlangaligi sababli, u bilan bir-biriga mos keladigan segment yo’q bo’lishi mumkin: “0” pastki yarmi va diognalda o’ng burchakda to’xtaydi 0 boshlangan segmentdan.

Bu o’xshash bo’lmagan segmentlar ham xuddi shu sababga ko’ra bandlar o’rtasida ham mavjud. Boshqacha aytganda, B_1 va B_2 ikkitasi ikkita burchak bo’lsin, har biri har bitta burchakning vertikal diognaliga 0 burchakdan boshlanadi.B_1bandning hech bir segmenti B_2 bandning har qanday segmenti bilan bir-biriga o’xshamaydi. Bandlar va ularning kengligi barqaror emasligi ham deyarli barcha trayektoriyalarning davriyligini isbotlash uchun ishlatiladi. Endi biz teoremani isbotlashga tayyormiz.

*Teoremaning isboti.*Rombning yuqori qismida vertikal 0 diognalga perpendikulyar bo’lgan barcha trayektoriyalardan iborat bo’lgan “nur”ni o’rganib chiqamiz. 15-rasmda ko’rsatilgandek, u butunlay 1 rombga uzatiladi.



15-rasm. Faqat dastlabki uchta romb yo’nalishini o’z ichiga olgan trayektoriyalarning ikkita tasmasi qisqa burchakka perpendikulyar boshangan barcha trayektoriyalarning taxminan 87 foizini tashkil qiladi.

Ushbu misolda, nurni yana bir marta 2 rombga uzatiladi, ammo bu romb shamni bo'laklaydi, uning pastki qismini romb 3 ga, eng yuqori qismini esa 1 gacha qaytaradi. Ikkinchidan, pastki qismining " 1,2 va 0 ramkalarda" saqlanganligini ko'rishimiz mumkin: 8 ga kirish joyi 2 ning oldingi chetidan o'tadi, lekin u chegara to'liq to'ldirilgan va chiziqlar bilan qoplana olmaydi. Bo'lingan pastki qismi yana bir marta bo'linadi, bu safar romb 1 uchda, lekin ikkala bu pastki qism nihoyat romb 0 ga tushadi va ular tugaydi. Shunday qilib, dastlabki nurning yuqori qismini dastlabki rombga o'tganda, pastki qismi esa yanada kengayadi. Bu esa α ga bog'liq bo'lib, m uchun

$$0 < \sin[(2m + l)\alpha] < \sin\alpha$$

bo'lsa, $0 < k < m$lar uchun

$$\alpha < \sin[(2k + 1)\alpha]$$

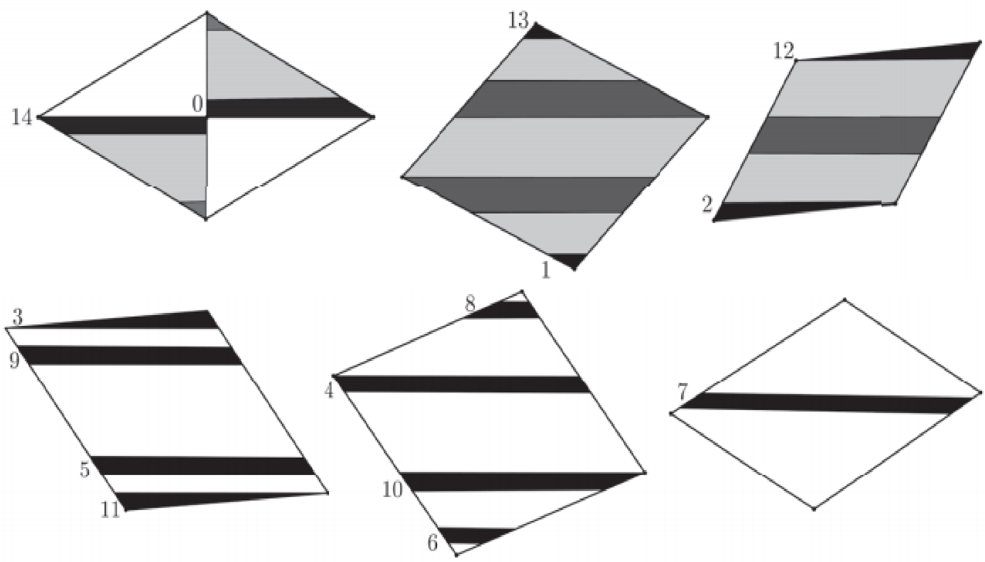
bo'ladi.Dastlabki nurumuman rombga moyil bo'ladi, chunki u bo'linadi, bu shart

$$0 \leq \pi - (2m + 1)\alpha < \alpha$$

qo'shtengsizlikni qanoatlantiradi, ammo $\frac{\pi}{\alpha}$ toq integer bo'ladigan integer$m$ mavjud. Pastki "uzatilgan" nur oldingi burchakni romb m+1 ga yetkazib beradi, yuqori nur esa romb 0-m ga tushadi.Bo'lingan pastki qism yana rombni 1, 2,…m-1 uchlari orqali bo'linishi mumkin, ammo barcha pastki bo'linishlar (yoriqlar) oxirida romb 0 ga qadar cho'zilib boradi va tugaydi. Doimiy kenglikning chuqurligi cheksiz bir maydonda ketma – ket bo'lmasdan davom etmasligi mumkin. Boshqacha qilib aytganda, bir-biriga o'xshash bo'lmagan bo'laklarga ko'ra, rombning oldingi va orqa qirralarni ajratib turadigan har bir uch ko'pincha "nur tarqatuvchi" vazifasini bajarishi mumkin.

Demak, ta'riflangan "tuzoqqa tushirilgan" nurlari eng ko'p m pastki qismlarga bo'linadi.

16-rasmda uzatilgan nurlarning rombi 3,4 va 5 da davomi ko'rsatilgan.



15-rasm. Romb:0,1,2,3,4,5 (chapdan). Faqatgina dastlabki oltita romb yo’nalishini o’z ichiga olgan trayektoriyalarning uchta chiziqli tasmalari (qismlar) qisqa burchagiga perpendikulyar boshlangan barcha trayektoriyalarning taxminan 97.7 foizini tashkil qiladi.

III BOB.Ko'pburchak stollar ustida Fagnano bilyard trayektoriyalari

3.1-§ Qavariq ko'pburchak stollar ustida Fagnano bilyard trayektoriyalari

Biz quyida eng qisqa bilyard trayektoriyasiga ega bo'lganko'pburchak stollarni ko'ramiz. Ya'ni n-gon tomonlarga muvaffaqiyatli uriladi.

Bu yerdagi trayektoriya Fagnano bilyard trayektoriyasini tashkil etadi. Bu muntazam bilyard trayektoriyasi bo'lib, stolning har bir tomoniga, avvalgi nuqtasiga qaytmasidan oldin, navbat bilan bir marta boradi (uriladi).Qulaylik uchun biz n- gonni $\boldsymbol{A}=A_1A_2\dots A_n$bilan belgilaymiz. Vertikallarni soat sterelkasidan farqli o'laroq, o'ng tomonga joylaymiz. I($\boldsymbol{A}$) esa ko'pburchak $\boldsymbol{A}$ ning ichki qismini bildiradi.

Ya'ni $\boldsymbol{A}$ chegaralangan soha. n-gon uchlari indekslari integral moduli n deb ataladi.

Ta'rif 3.1.*A* *ning n marta aylanishi* $P_1\dots P_n$ *yopiq bo'lib, ko'pburchak chegarasi hisoblanadi.Bu yerda* P_i *barcha ochiq tarmoqlar.* $\boldsymbol{A}$ ning n- aylanishi yopiq ko'pburchak chizig'i $P_1\dots P_n$ lar bo'lib, u yerda P_i barcha i lar uchun ochiq (A_i,A_{i+1}) segmentda mavjud.

λ$(P_1P_2\dots P_n)=\sum|P_i,P_{i+1}|$

formula bilan aniqlanadi.

Lemma 3.1.*Har qanday n-aylanishda P qavariq ko'pburchak bo'lsa,**A** da ham qavariq ko'pburchak bo'ladi.*

Isbot. Hammamizga ma'lumki, $i\in\{1,2,\dots,n\}$ uchun $l_{P_i,P_{i+1}}$ yopiq chiziq $\overline{I(A)}$chegarani $[P_i,P_{i+1}]$ segmentda kesadi.

$H_i l_{P_i,P_{i+1}}$bilan chegaralangan A_{i+1}ni o'z ichiga oladigan hyperplana bo'lsin.

Ko'rinib turibdiki $A_j$vaA_{j+1}uchlar $H_i$da joylashgan.

$H_i$ning uchida A_j ni mavjud deb faraz qilaylik. $j\notin\{i,i+1,i+2\}$

Chunki A qavariq $A_i\Delta A_{i+1}P_iP_{i+1}$ uchburchakda yotadi. Shunday qilibA_i $\Delta A_iA_{i+1}A_{i+2}$ uchburchakda yotishi ko'rinadi. Bu esa imkonsiz.Biz ziddiyatga keldik. Shuning uchun barcha Aj nuqtalar j≠i larda H`va barcha Pj lar uchun ham shunday. hipperplanda yotadi. .*j∉{i,i+1,i+2}*.Demak *P* qavariq ko'pburchakdir.

Ta'rif 3.2. *Agar* ***A*** *nuqta mavjud bo'lsa, n-aylanishi davri pedali (tepki) deb ataladi,agarda, yon tomonidagi P nuqtasida giproproyeksiyalar* ***A*** *ning har bir* $P_1 \dots P_n$ *nuqtalarida aniqlansa.*

Ta'rif 3.3.*O'tkir burchakli uchburchakning o'rta markaziga mos keladigan 3- aylanishi orthic uchburchak deb ataladi.*

Keling,*m (∠ABC) ∠ABC* ni o'lchovini anglatsin.

Ta'rif 3.4. *Fagnano trayektoriyasi bu, har bir* P_i *da optik reflektual qonunga bo'ysunuvchi n-aylanishli* $P_1P_2 \dots P_n$ *dir.*

Ya'ni

m($\angle A_iP_iP_{i-1}$)=m($\angle A_{i+1}P_iP_{i+1}$)

bo'ladi.

Barcha ko'paytmalar***A*** atrofidagi sohada joylashgan bo'lsa, ko'pburchakdan ***A***atrofli (doira) deb ataladi.

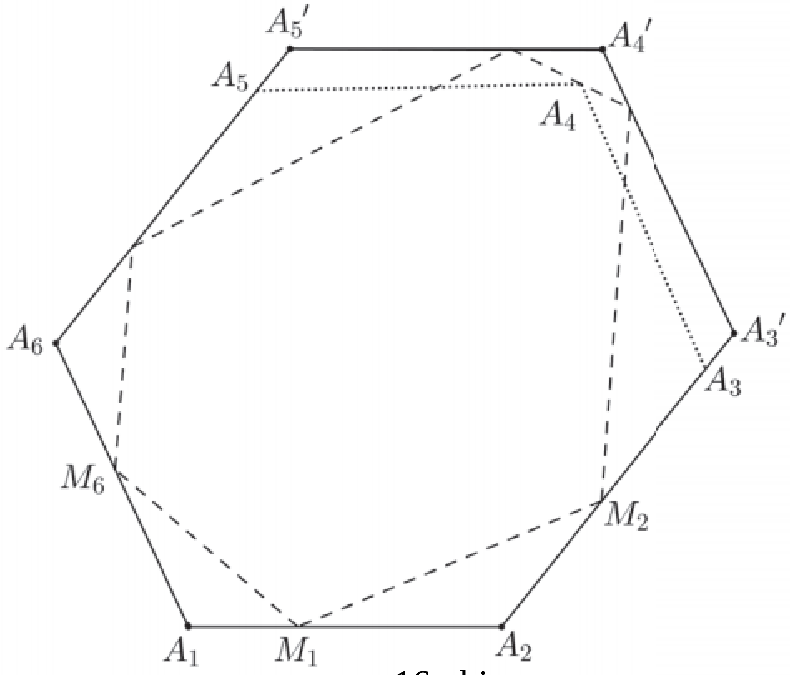
Bu doiraning markazi***A*** bo'ladi. ***A***ning ichida (doirada) n-gonli Fagnano trayektoriyasi mavjudligini eslatib o'tamiz.

n-gon***A***(n≥5) da Fagnano trayektoriyasining mavjudligi ***A***ning aylanishi kerakligini bildirmaydi.

Misol keltiraylik.

Misol. 2k-gon ***A*** =$A_1A_2 \dots A_{2k}$ ni ko'rib chiqaylik (k≥ 3) va uning Fagnano trayektoriyasini F=$M_1M_2 \dots M_{2k}$ deb olsak, bu yerda M_i (A_iA_{i+1}) yon tomonnning o'rta nuqtasdir.

Tasavvur qiling,$\boldsymbol{A'}$ =$A'_1A'_2 \dots A'_{2k}$ da ko'rsatilgan 2k-gonni ham ko'rib chiqaylik. A'_1=A_1, *i∉{k,k+1ki+2}* lar vaA_{k+1} uchi (burchagi) A'_{k+1} ga o'tkazilgan, A_1A_{k+1} vektor yo'nalishi bo'yicha ε>o masofagachako'chadi va shunday qilib, barcha j lar uchun $A'_iA'_{i+1}$ va $A'_jA'_{j+1}$ paralleldir. (16-chizma)



16-chizma

2k-gon $\boldsymbol{A'}$ aylanish jarayoni emas, lekin kamida ε ning eng kichik qiymatllari uchun M_i (i≠k.k+1) nuqta orqali Fagnano trayektoriyalari o'tadi.

Teorema 3.1.*A* *ning har qanday minimal uzunlikdagi n-aylanishi Fagnano trayektoriyasi hisoblanadi.*

Isbot. Ikkita $\angle P_{i-1}P_iA_i$ i va $\angle P_{i+1}P_iA_{i+1}$(*i*∈*{1,2,3,…,n})* burchaklar uchun

m($\angle P_{i-1}P_iA_i$)=m($\angle P_{i+1}P_iA_{i+1}$)

bo'ladi.

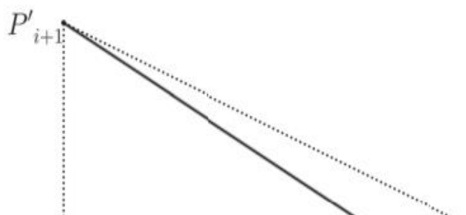
Keling $l_{A_iA_{i+1}}$ nuqtaga nisbatan P'_{i+1} va P_{i+1}ni qaraylik, (17-chizma).

So'ngra $P_{i-1}P_iP'_{i+1}$ da$P_i$niA_i yo'nalish bo'yichaP_i siljiydi.

Shunday qilib biz yangi n-aylanishni quyidagicha olishimia mumkin.

$P_1P_2 \dots P_{i-1}\overline{P_i}P_{i+1}\dots P_n$

Bu juda ham qisqa.



17-chizma

Quyidagi trayektoriya Fagnano trayektoriyasi bo'lish kriteriysini beradi.

Teorema 3.2. *A sun'iy markazi n-gon aylanishi bo'lsin va* $P_1P_2\ldots P_n$*ning* ***A*** *da n- aylanishini tashkil qilamiz.* θ_i*tomonidan yo'nalishdagi chiziqlarning barcha i lar uchun* l_{OA_i} *va* $l_{P_{i-1}P_i}$ *tomonidan chiqarilgan (yo'natirilgan) burchakka qaraymiz. (18-chizma). Keyin n-aylanishli* $P_1P_2\ldots P_n$*Fagnano trayektoriyasi bo'ladi agarda,* ***A*** *da yotsa va barcha i lar uchun* $\theta_i+\theta_{i+1}=\pi$ *bo'lsa.*

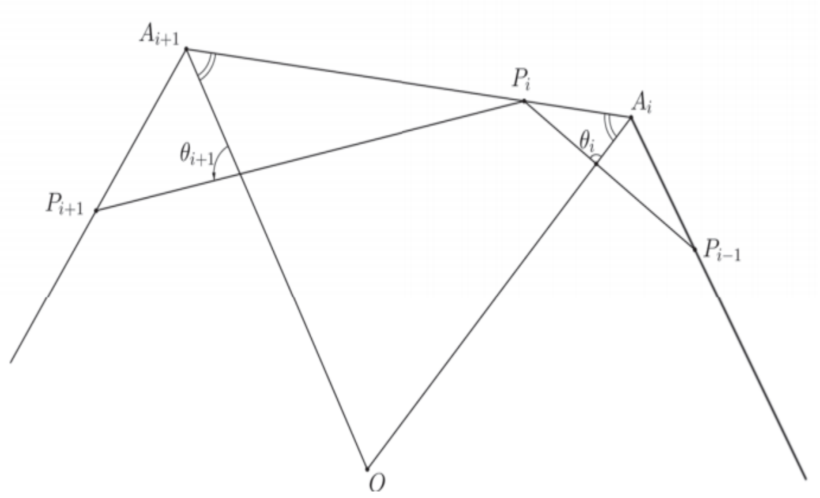
Isbot. Isbotni quyidagi tegliklarni tuzib olish bilan keltiramiz

$$\theta_i = \mathrm{m}(\angle OA_{i+1}P_i)+\mathrm{m}(\angle P_{i+1}P_iA_{i+1})$$

$$\pi-\theta_i = \mathrm{m}(\angle OA_iP_i)+\mathrm{m}(\angle P_{i-1}P_iA_i)$$

Ta'rif 3.5.*Agar n-gonda aylanadigan Fagnano trayektori,* P_iP_{i-1} *ning barcha yo'nalishdagi* OA_i *(barcha i lar uchun) vektoriga vertikal bo'lsa, kuchli deb ataladi.*

Izoh3.1. Yuqoridagi teoremaga ko'ra agar,$\theta_{i_0}=\pi/2$ bo'lsa, Fagnano trayektoriyasidagi ba'zi bir i_0 uchun uslubiy n-gonda qabul qilsak,u holda $\theta_i=\pi/2$ (ba'zi *i* uchun).Shunday qilib Fagnano trayektoryasi kuchlidir. Agar *n* nomuntazam bo'lsa n-gondagi barcha Fagnano trayektoriyasi kuchlidir.

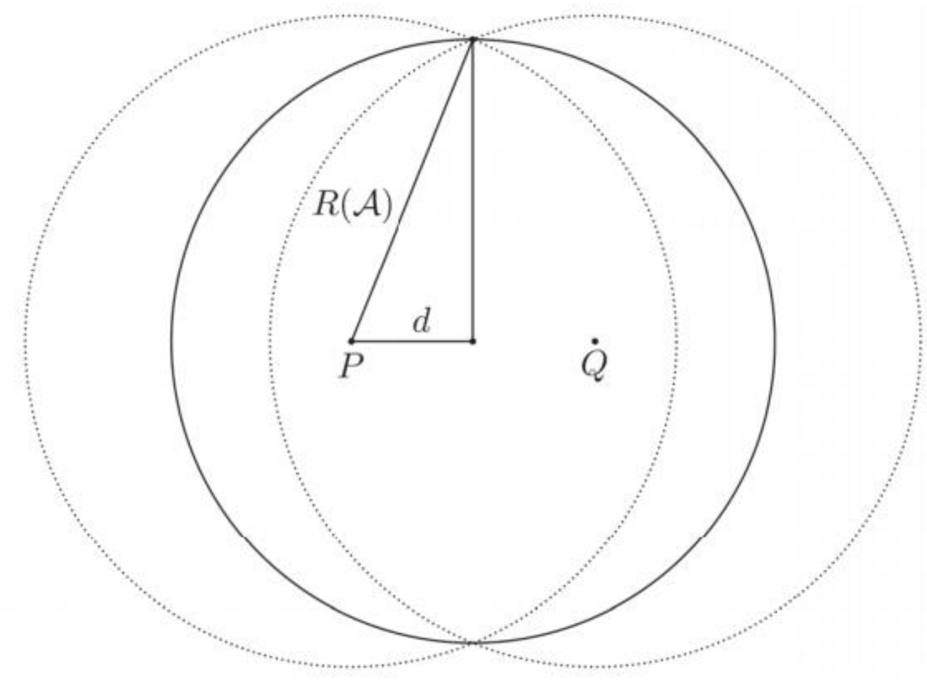


18-chizma

Ta'rif 3.6. *Keling* $\boldsymbol{A}$=$A_1A_2\ldots A_n$*ko'pburchak berilgan bo'lsin.Endi esa* $\boldsymbol{A}$ *ni o'z ichiga olgan minimal radiusli yagona (noyob) yopiq disklari mavjud. Bundan tashqari, agar,* $\boldsymbol{A}$ *qavariq bo'lsa, u holda minimal diskning markazi O I(**A**) dagi nuqtadir.*

Isbot.

R($\boldsymbol{A}$)=inf{r>0:bo'lsin, P shunday qilib, $A \in \bar{B}$(P,r)}.



19-chizma.

R(**A**)$\geq\frac{1}{2}$diam($\boldsymbol{A}$)>0

Diam – diamatr.

$r_n$ning R($\boldsymbol{A}$) yaqinlashtiriladigan ketma-ketliklarini $P_n$markazlarining tegishli disklari bilan tasavvur qilamiz. O'zimizdagi P_{n_m}usuli bilan chegaralanib,$\boldsymbol{A}$ ni o'z ichiga olgan $\bar{B}$(O,R($\boldsymbol{A}$)) diskni olamiz, bu yerda O=$\lim_{m\to\infty} P_{n_m}$ minimal disk mavjudligini isbotlaymiz. Masalan, |PQ| =2d>0 masofadagina $\boldsymbol{A}\subset\bar{B}$(P,R($\boldsymbol{A}$)) va A$\subset\bar{B}$(Q,R($\boldsymbol{A}$)) Shundan keyin,$\sqrt{\mathrm{R}(\boldsymbol{A})^2 - d^2}A$ radiusning to'plamida absurd (o'rinsiz) bo'ladi.19-chizma.

Quyidagi teorema aylanishning ekstremal perimetri haqida.

Teorema 3.3.*Har qanday n- aylanishning uzunligi* $P_1P_2 \dots P_n$ *ning* ***A*** *da quyidagi tengsizlikni qanoatlantiradi:*

λ($P_1P_2 \dots P_n$)$\geq\frac{2Area(A)}{R(A)}$

Bundan tashqari, agar ***A*** *n-aylanishidagi* $P_1P_2 \dots P_n$*uchun*

λ($P_1P_2 \dots P_n$)=$\frac{2Area(A)}{R(A)}$

ni bajarsa ***A*** *aylanib chiqishning sun`iy markazi O∈I(**A**) va* ***A*** *n-aylanish kuchli Fagnano trayektoriyasi hisoblanadi.*

Isbot.*A* ning murakkabligidan kelib chiqqan holda O∈$\overline{I(\boldsymbol{A})}$bo'ladi. O'ylab ko'raylik, $\overline{I(A)}$ ni o'ng burchaklari bo'yicha barcha *i*=1,2,...,n lar uchun $OP_iA_{i+1}P_{i+1}$ qavariq ko'pburchak qismini ko'rib chiqaylik. OA_{i+1}va P_iP_{i+1} diognallari$\varphi\in(0,\frac{\pi}{2}]$ burchak ostida uchrashadi.

Natijada,

$$\mathrm{Area(A)=Area}(\overline{I(A)})=\sum_{i=1}^{n} Area(\ OP_iA_{i+1}P_{i+1}\ )=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_1^n|OA_{i+1}||P_iP_{i+1}\ |\leq\frac{1}{2}\sum_1^n|OA_{i+1}||P_iP_{i+1}\ |\leq$$

$$\leq\frac{1}{2}\mathrm{R}(\boldsymbol{A})\lambda(P_1P_2 \dots P_n).$$

Bunday holatda, ko'rinadiki ***A*** dagi $P_1P_2 \dots P_n$ n- aylanishning eng minimal uzunligi Fagnano trayektoriyalaridir. Chunki, barcha*i*lar uchun $|OA_{i+1}|$=R($\boldsymbol{A}$) ***OA*** dagi aylanish markazi. Bundan tashqari, barcha *i* lar uchun $\sin\varphi_{i+1} = 1, P_1P_2 \dots P_n$ kuchli Fagnano trayektoriyasi deb olamiz.

Agar O$\notin I(A)$ bo'lsa, O,ba'zi i lar uchun (A_iA_{i+1}) ochiq segmantda yotadi. Perpendikulyarlik argumentini qo'llash orqali biz, $P_{i-1}P_i$ va,P_iP_{i+1} yo'nalishlarini bir qatorda l da joylashishini bilib olamiz. Shunung uchun qavariq ko'pburchakni kamida uchta P_{i-1}, P_i, P_{i+1}nuqtalarda kesishimiz mumkin. Shuning uchun uning l ba'zi chegara chizig'idir. Chunki, lA_iA_{i+1} bo'yicha $P_i$va$P_i \in A_iA_{i+1}$ perpendikulyar bo'lgani uchun absurd hisoblanadi. Uning sun`iy markaziO$\in I(A)$ dir.

Agar ***A*** aylanishi n- gon bo'lsa, uning tomonlari A uchida joylashgan,***A*** atrofida aylanadigan qavaria n-gon ***B*** katma - ketlikda ko'pburchak *A* ning ikki tomoni deb ataladi. (***A*** atrofidagi aylana polarizatsiya bo'yicha).

Quyidagi teorema eng kata soxani o'z ichiga olgan Fagnano trayektoriyalari haqida. Keyingi teoremani tasdiqlashda biz *Lhuiliers* tengsizligini qo'llaymiz. Keling bu tengsizlikni keltiramiz. (3. 65-66 betlar)***A*** tekislikda ixtiyoriy qavariq n-gon bo'lishi mumkin. S^1birlik aylanmasini hisobga olgan holda, (aylanish radiusi 1) S^1 (haqida batafsil ma'lumot beradigan) uchun aniq bir n-gon A mavjud bo'lib, A tomoni ***A*** tomoniga parallel. S va P ***A*** ning maydoni va perimetri. Bu yerda ***A***stomonidan (bilan) belgilanadi.

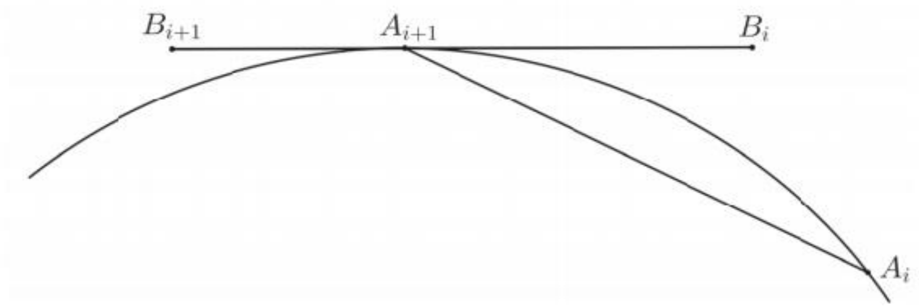
Lhuiliers tengsizligi.Har qanday ***A***qavariq ko'pburchak uchun $P^2 \geq 4Ss$, bunda tenglik ***A*** doirada chegaralangan bo'lsa amal qiladi.

Teorema 3.4.$\mathcal{B}$ *-davriy n-gon* ***A*** *uchun ko'pburchak dual (ikkilik) bo'lsa, unda har qanday kuchli Fagnano trayektoriyasi uchun biz*

$$Area\ (F_1F_2 \dots F_n) \leq \frac{Area^2(A)}{Area(B)}$$

maydonni topamiz. Bu yerda tenglik faqatgina pedalda $F_1F_2 \dots F_n$ *bo'lsa bajariladi.*

Isbot. $\boldsymbol{A}$ uchun ikkilik ko'pburchak $\mathcal{B}$ da $B_i B_{i+1}$ tomon, A_{i+1} esa uchi. 20-chizmaga qaraymiz.



20-chizma

Chunki $F_1 F_2 \dots F_n$ kuchli Fagnano trayektoriyasi bo'lgani uchun, $F_i F_{i+1}$ va $B_i B_{i+1}$ barcha i lar uchun parallel.
Bizda Lhuilierning tengsizligi bor

$$4 \text{ Area } (F_1 F_2 \dots F_n) \text{Area}(\mathcal{B}) \leq \lambda^2 (F_1 F_2 \dots F_n) R(A)^2 = 4Area^2(A),$$

bunda tenglik faqat $F_1 F_2 \dots F_n$ inscribed doirada o'rinli bo'ladi. Shuning uchun, Fagnano trayektoriyasi doirada chegaralangan bo'lsa va faqatgina Fagnano trayektoriyasida pedaldan olingan xususiyatdan kelib chiqadi.

Izoh. Biz shuni ta'kidlaymizki, O'tkir buchakli uchburchakning to'g'ri burchakli uchburchagi kuchli Fagnano trayektoriyasining pedalidir. Bundan tashqari, $A_1 A_2 A_3 A_4$ kvadratning diognallari kesishish nuqtasida joylashgan to'rtta F_1, F_2, F_3 va F_4 proyeksiyalari o'zaro bog'liq (qo'shni) tomonlada yotsa, to'rtburchak $F_1 F_2 F_3 F_4$ Fagnano trayektoriyasi, qurilish jihatidan pedal. Bundan tashqari, agar kvadrat kuchli Fagnano trayektoriyasi bo'lsa va faqatgina $A_1 A_2 A_3 A_4$ to'rtburchak hisobga olingan bo'lsa, bu to'rtburchakda Brahmagupta trapeziya va perpendikulyar diognallardan tashkil topgan.

Ta'rif 3.7. *Agar berilgan ko'pburchakka ham ichki, ham tashqi aylana chizish mumkin bo'lsa, bunday ko'pburchak (bisentirik yoki ikkilamchi) ko'pburchak deyiladi.*

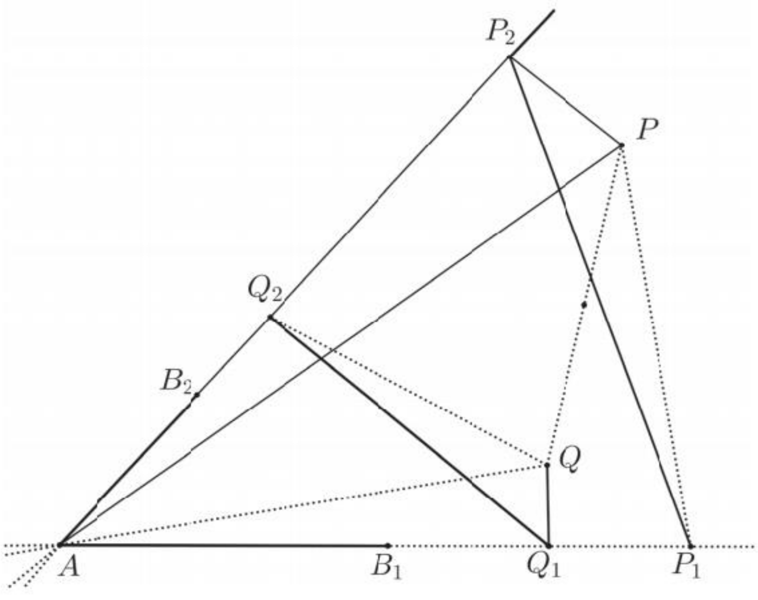
Misol uchun, har qanday uchburchak Ponceletdir. $\text{Ponc}_0(\text{n})$ ni maydondagi barcha qavariq Poncelet (bisentirik) n-gonning oilasi deb qaraymiz.

Ta'rif3.8.$\mathcal{B}$=$B_1B_2 \ldots B_3 \in$ *$Ponc_0$(n)* *uchun* *i=1,2,..,n larda* A_i*tomonidan* $B_{i-1}B_i$ *tomonidagi* $\mathcal{B}$ *ni kontakt nuqtasini bildiradi.,***A**=$A_1A_2A_3 \ldots A_n$ *ko'pburchak* $\mathcal{B}$ *ning kontakt ko'pburchagi deb ataladi.*

n-gonning A va B ning B incirle bilan bog'liq holda polarity (ikki qutbli) bilan ikkilik ekanligini eslatib o'tamiz.

ContPonc(n) tomonidan maydondagi Poncelet n-gonning barcha kontakt ko'pburchaklari oilasi bo'lsin. Ushbu kontakt ConPonc(3) o'tkir burchakli uchburchaklar oilasi bo'lishi bizga ma'lum. Quyidagi lemma izogonal chiziqlar burchaklari bilan bog'liq.

Lemma.3.2 $\angle B_1AB_2$to'g'ri burchak bo'lsin. P_1vaP_2 (Q_1 va Q_2) tomonidan ikkita P va Q nuqtalarni belgilaylik. Ularning $\angle B_1AB_2$ burchakdan chiqqan proyeksiyalaril_{AB_1} va l_{AB_2} bo'lsin. Endi l_{AP}va l_{AQ}chiziqlar izogonal chiziqlar bo'ladi, agar $P_1Q_1P_2Q_2$ to'rtburchakda aylansa. Bundan tashqari $P_1Q_1P_2Q_2$ ning sun'iy markazi chiziq segmenti $[PQ]$ ning o'rta nuqtasidir. (21-chizma)



21-chizma

Isbot. Tasavvur qiling,

$$\alpha_1 = m(\angle PAP_1), \alpha_2 = m(\angle QAQ_2)$$

PP_1AP_2vaQQ_1AQ_2 to'rtburchaklar aylanish jarayonida bo'lganligi uchun, bizda quyidagi ifoda mavjud:

$$m(\angle P_1P_2Q_2) = \frac{\pi}{2} - m(\angle PP_2Q_1) = \frac{\pi}{2} - \alpha_1,$$

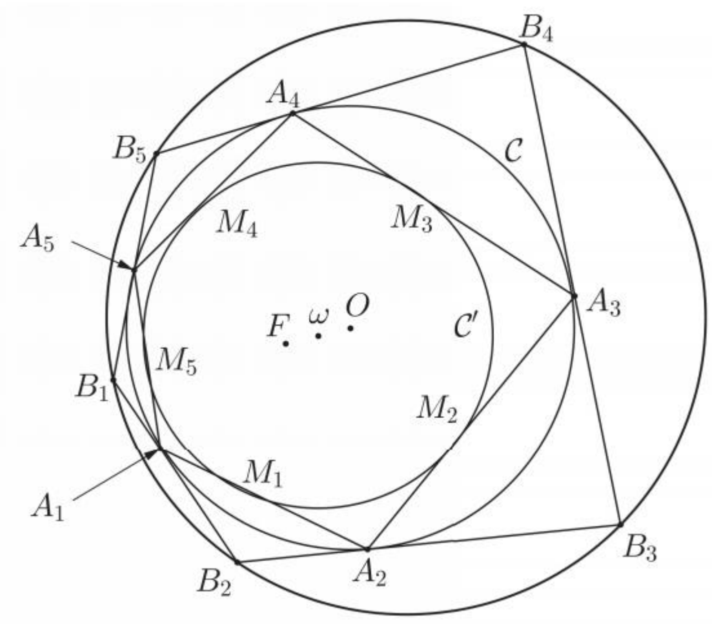
$$m(\angle Q_2Q_2A) = \frac{\pi}{2} - m(\angle QQ_1Q_2) = \frac{\pi}{2} - \alpha_2.$$

Shunday qilib, α_1=$\alpha_2$va agar faqat to'rtburchak $P_1P_2Q_1Q_2$ aylanish jarayonida bo'lsa. $[P_1Q_1]$ va$[P_1Q_1]$ midperpendikulyarlari kesishish nuqtasi bo'lgan [PQ] segmentning o'rta nuqtasi, aniqrog'i, to'rtburchakning sun`iy markazi (circumcenteri)dir.

Teorema 3.5.*A* *aylanishli qavariq ko'pburchak, agar* ***A*** *faqatgina ContPonc(n)ning elementi bo'lsa, pedal kuchli Fagnano trayektoriyasini tanlaydi (hosil qiladi). Bundan tashqari* ***A*** *ning bunday trayektoriyasi yagona va Poncelet ko'pburchak* $\mathcal{B}$ *uchun ikkilangan (dual).*

Isbot.*A* Poncelet ko'pburchakning $\mathcal{B}$ bilan bog'lovchisi bo'lsin.*O* markaz *C* ***A*** ning sun`iy markazi va$M_iA_iA_{i+1}$ tomonning o'rta nuqtasi.

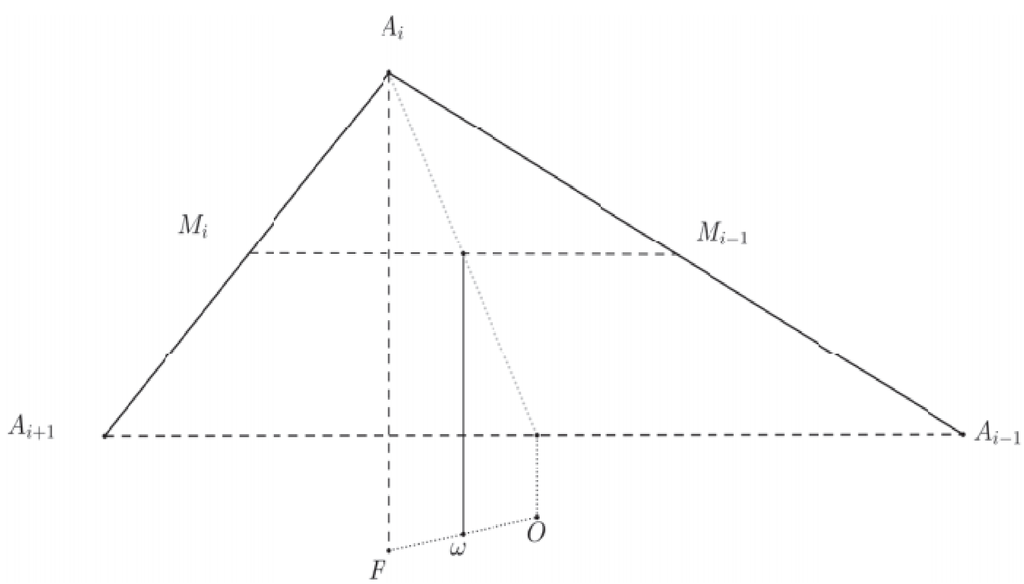
22-Chizma



22-chizma.

Chunki, B_i nuqta A_iA_{i+1} chiziqning qutbida joylashgan nuqta bo’lsa, $B_i$va M_i nuqtalar Cga nisbatan teskari (ikki tomonda) gi nuqtalardir. Natijada inversiya yordamida n-gon $M_1M_2\dots M_n$ nuqtalarda markazi ω bo’lgan $C^`$ aylanaga urinadi.Bundan tashqari, $\mathcal{B}$ ning ichida joylashgan $C$ aylana o’z ichiga oladi. (ichki chiziladi). Konversiyalash orqali,$C$` aylana C ning ichki qismida joylashgan. Shuning uchun ham, barcha i lar uchun, C` aylana va $l_{A_iA_{i+1}}$ chiziqlar aniq yo’nalish chizig’i (A_iA_{i+1}) ochiq sohada mavjud Keling ω nuqta [OF] segmentning o’rta nuqtasi bo’lsin va $F_iA_iA_{i+1}$ tomondagi proyeksiyasi bo’lsin. Biz $F_1F_2\dots F_n$ pedal kuchli Fagnano trayektoriyasi ekanligini ko’rsatamiz.

Avvalambor, barcha i lar uchun$l_{A_iA_{i+1}}$ chiziq va C` aylana aniq M_i va F_i nuqtalarda kesishadi va shuning uchun F_i nuqta ochiq chiziqli (A_iA_{i+1}) segmentda yotadi. Shunday qilib, n-gon $F_1F_2\dots F_n\boldsymbol{A}$da n-aylanish bo’lib, pedalda quriladi.$\Delta A_{i-1}A_iA_{i+1}$da quyidagi uchta chiziqni qaraymiz:$l_{A,F}$ chiziq $M_{i-1}M_i$ ga perpendikulyar va ω orqali $A_{i-1}A_{i+1}$ dan O gacha perpendikulyar. (23-chizma)



23-chizma

Ushbu uchta chiziq va $\Delta A_{i-1}A_iA_{i+1}$uchburchak uchi $A_i$va orta segment [OF] ikkita teng bo'lakka bo'linadi, shuning uchun Thales teoremasiga ko'ra uchta chiziq parallel ravishda madianani kesib o'tadi. A_iF balandlik uchburchakning A_i uchidan chiqadi. Natijada, l_{A_iF}val_{A_iO} izogonal chiziqlar $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$ burchakdan chiqadi. (15-chizma).3.2 lemmaga ko'ra.$M_{i-1}F_{i-1}M_iF_i$aylanada, shuning uchun m($\angle A_iA_{i+1A_{i-1}}$) =m($\angle A_iM_iM_{i-1}$) =m($\angle A_iF_{i-1}F_i$).

Bundan ko'rinadiki,$A_iO \perp F_iF_{i-1}$ bo;ladi. Natijada, $F_1F_2 \dots F_n$ kuchliFagnano trayktoriyasidir. Ayniqsa u ham pedaldir, chunkiF nuqta uning insenteri bo'ladi. Poncelet ko'pburchak B va n-gon $F_1F_2 \dots F_n$ ikkalasi ham bir incircle ni tan oladi (yotadi) ikkalasi ham vertical ravishda soat sterelkasiga teskari yo'nalishda ko'tarilib boradi va o'zaro mos keladigan tomonlarga parellariga ega bo'ladilar, shuning uchun ham ular homotez (bir xil tiklalanish) dir.

Keling, 3.5 teoremaning zarurligidan ko'rib chiqamiz. $\boldsymbol{F}$=$F_1F_2 \dots F_n$pedal $\boldsymbol{A}$ ko'pburchakda kuchli Fagnano trayektoriyasini bosib o'tishi mumkin Lemma 3.5 dan $\boldsymbol{F}$ qavariq ko'pburchak $\angle F_{i-1}F_iA_i$ va $\angle F_{i+1}F_iA_{i+1}$ burchaklar o'tkirdir. Natijada, OA_i nur $F_{i-1}F_i$ chiziqqa barcha i larda perpendikulyar bo'lgani sababli, n-gon $\boldsymbol{A}$ o'z ichki qismida sun`iy markazni o'z ichiga oladi. Keling, **F** ning proyeksiya nuqtalari F_i tomonda bo'lsin. Shunday qilib, $\boldsymbol{F}F_i$ning insenteridir. Shuning uchun, F$\epsilon I(\boldsymbol{F}) \subset I(\boldsymbol{A})$.

Keling α_i =m(OA_iA_{i+1}) da

$\frac{\alpha_i}{2}$ =m($\angle A_iA_{i-1}A_{i+1}$) =m($\angle A_iM_{i-1}M_i$)

Bu yerda M_i barcha i lar uchun A_iA_{i+1} ning o'rtasi. Chunki,barcha$i$ larda OA_i perpendikulyar bo'ladi $F_{i-1}F_i$ ga. Va uning $M_{i-1}F_{i-1}M_iF_i$da sun`iy markazi [OF] chiziqli segmentning o'rtasi bo'ladi,ω orqali o'tadi. Shunday qilib, barcha $i$lar uchun $M_iF_iM_{i-1}F_{i-1}$ to'rtburchaklar atrofi aynan bir xil, va u C' bo'ladi. Bu shuni anglatadiki, qavariq n-gon $F_1F_2\dots F_n$ markazi ω bo'lgan C' aylanada joylashgan. Shunday qilib, n-gon $\boldsymbol{F}$=$F_1F_2\dots F_n$ qavariq Ponselet ko'pburchagi. $\boldsymbol{F}$ ko'pburchak va n-gon B dual $\boldsymbol{A}$ ning sun`iy markazi bilan bog'liq bo'lgan tomonlari bir-biriga tegib boradi. Ularning har biri o'z navbatida soat sterelkasidan farqli o'laroq belgilangan tartibda raqamlangan, chunki $O \in I(\boldsymbol{A})$, va ularning mos keladigan tomonlari paralleldir. Shunday qilib, F va B hometrik ko'pburchaklardir. Natijada $\mathcal{B}$ qavaiq Ponsel maydoni, $\boldsymbol{A}$ esa ConPonc(n) ning elementidir. Bundan tashqari, $M_1M_2\dots M_n$ suniy markazlari va $\boldsymbol{A}$ ning sun`iy markazlari O ning sun`iy markazidz yagona $\boldsymbol{F}$ nuqtasini aniqlaganligi sababli, pedalning o'ziga xosligi kuchli Fagnano trayektoriyasi.

Ta`rif 3.8. ***A*** *∈PontConc(n) ko'pburchak nuqtasi Fagnano nuqtasi* ***F*** *ning yagona nuqtasi bo'lib, uning pedallik chizig'i 3.5 teoremadan* ***F****Fagnano trayektoriyasidir.*

Bu 3.5teoremasining isbotidan kelib chiqadi:

Izoh 1.Fagnano nuqtasi ***F*** va sun`iy markazi *Oω* ga nisbatan nosimmetrikdir.

Ushbu kichik bo'limning asosiy natijalari quyidagilar.

Izoh 2. Agar n-gon qavariq ko'pburchakli bilyard stolida kuchli Fagnano bilyard trayektoriyasini bosib o'tsa, va faqat qavariq Poncelet n-gon bo'lsa (bo'ladi).

Izoh 3. Barcha $n \geq 3$ uchun pedalning kuchli Fagnano tryektoriyalariga bo'ysunadigan n-gonal (n burchakli) bilyard stollari mavjud.

Izoh 4. Agar qavariq ko'pburchk A pedal n-aylanishi $F_1F_2\dots F_n$ bo'lsa, shunday

$$\lambda(F_1F_2\dots F_n) = \frac{2Area(A)}{R(A)},$$

keyin $\boldsymbol{A}$ ContPonc(n) va $F_1F_2\dots F_n\boldsymbol{A}$ ichida yagona pedal kuchli Fagnano trayektoiyasi. Bundan tashqari,

$$[Area(A)]^2 = \text{Area}(\mathcal{B})\text{Area}(\boldsymbol{F}),$$

Bu yerda B uning atrofiga (circumcircle) nisbatan polarizatsiyasi bo'yicha A dual (ikkilik)dir.

Teorema 3.6. *CotPonc(n) ning ichidan* $\boldsymbol{A} = A_1A_2\ldots A_n$ *qavariq ko'pburchakni olaylik.*

a)Agar n toq bo'lsa, u holda ***A*** *yagona kuchli Fagnano trayektoriyasiga ega bo'ladi.*

b) Agar n juft bo'lsa, u holda ***A*** *parallel kuchli Fagnano trayektoriyalarini butun bir oilasiga ega bo'ladi. Maksimal maydonning yagona trayektoriyasi* $F_1F_2\ldots F_n$ *pedalning trayektoriyasi hisoblanadi.*

Isbot.

a) Bizga A da yagona $F_1F_2\ldots F_n$ kuchi Fagnano trayektoriyasi berilgan bo'lsin. Bu yerda yana boshqa kuchli $F'_1F'_2\ldots F'_n$Fagnano trayektoriyasi kiritilgan. Endi parallel F_iF_{i+1}va$F'_iF'_{i+1}$ chiziqlar orasidagi masofani aniqlaylik. $(-1)^i d$, (d o'zgarmas). Bunda n toq son bo'lsa, $F'_1F'_2\ldots F'_n$ n marta aylanadi. (takrorlanadi). Ya'n d ahamiyatga ega bo'lmaydi.

b) Bu oila $(-1)^i d$ masofa uchun yetarlicha kichik OA_{i+1} radius bo'ylab, barcha i lar uchun,F_iF_{i+1} halqa bo'la oladi. Ko'pburchakli chiziq n-aylananing oxiri bo'ladi.

3.2-§ Ko'pburchakda davriy bilyard trayektoriyasi.

Keling oldimizga savol qo'yib natijani qidiramiz. Har bir ko'pburchakda davriy bilyard trayektoriyasi bo'ladimi ?

Bu qiyin masala.

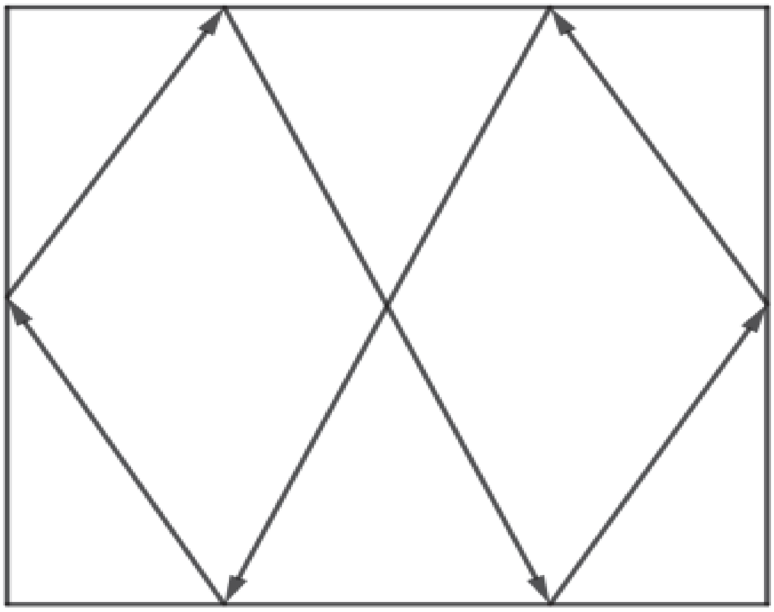
Uchburchaklarda davriy trayektoriyalar haqidagi masala ochiq muammoligicha qolmoqda.Har bir uchburchak uchun eng ko'p erishilgan davriy trayektoriyalar natijasi 100 ta darajadan oshmaydi.

Ta'rif 4.1. *n-gonning nomi (harakteristikasi) n-gonning chekkalari (chegaralari) to'plamining {1,2,….,n} to'plmlari orasidagi chegarani tashkil qiladi, bu yerda qo'shni qirralar (ya'ni uchi almashadigan qirralar) qo'shni raqamlarga o'tkaziladi {1,2,3…n}. Yorliqli ko'pburchakka etiketkali ko'pburchak deb nom berilgan.*

Ta'rif 4.2. *n-gon $P\subset R$ va va har qanday bilyard trayektoriyasi $\{s_i\}$ uchun,ω_i har bir i∈Z uchun s_i ni o'z ichiga olgan chekka yorlig'i bo'lishi kerak. Endi $\{\omega_i\}$ yorliqlar ketma–ketligidir. Bunga bilyard trayektoriyasi orbitasi deyiladi.*

Misol.Misol uchun,24-chizmada yo'lning orbitasi turi 1231431.

Shunday qilib, periodic bilyard trayektoriyasining orbitasi davriydir.



24-chizma

Ko'pburchaklar uchun ochiladigan vositani eslaylik.: Agar poligonda bilyard to'pi chegaraga urilsa, to'pning harakatini aks ettirsa, poligonni o'ng tomonga burib o'tadi va bilyard to'pi to'g'ridan – to'g'ri o'tib ketishiga imkon beradi.

Shunday qilib, ko'pburchakdagi bilyard yo'llari ko'pburchaklarni ketma – ket tutashtirilgan to'g'ri chiziqdan iborat bo'ladi. Quyidagilar O'rnagilgan ko'pburchaklar ketma - ketligi oshkordir. Quyidagilar oshkor ko'pburchaklarning ta'riflari hisoblanadi.

Ta'rif 4.3. Bizga P⊂R^2 ko'pburchak berilgan bo'lsin va $\{\omega_i\}i$∈Z har bir yuzada aniqlangan P poligonda P_0 aniqlangan, (har bir *i* uchun) $P_{i+1}\omega_i$ yuza orqali Aniqlangan. Bundan bir $\{P_i\}$ ko'pburchakning yuzasini boshlang'ichini qura olamiz. Bu yuzani tartibi ham deyiladi.

Ularni R^2 da birlashmasini olamiz, D=∪i∈ZP_i yoyilgan soha bo'ladi.

Agar $\{\omega_i\}$ orbita turi uchun P ning $\{s_i\}$ bilyard trayektoriyasi bo'lsa, bu bilyard trayektoriyasiga mos soha deya olamiz.

Ta'rif 4.4. *P bilyardtrayektoriyasida* $\{s_i\}$ $\{P_i\}$ *ning trayektoriyasi bo'lsin.*

Har birP_j *bilyardda* $\{s_{ij}\}$ *ga ega. Bundan,* $\{s_i\}$ *ning yoyilgan bo'lagi,* L=∪$_i$∈*Z*s_i,*I ning birlashmasi yoyilgan D sohaning to'g'ri chizig'i bo'ladi.*

Gipoteza 4.1.*Agar P ko'pburchakda 2 ta* $\{s_i\}$ *va* $\{t_i\}$ *bir xil orbita turiga ega bilyard trayektoriyasi bo'lsa, barcha i* ∈ *Z lar uchun,* $s_i t_i$ *ga parallel bo'ladi.*

Isbot.Bizga {Pi} trayektoriya va unga mos keladigan, D yoyilgan soha berilgan bo'lsin. Endi {si} ning oshkor ko'rinishi X o'qi bilan ustma ust tushishi uchun aylantirib aks ettirish (ustiga mos tushirish) mumkin.

L⊂D deb olsak, $\{t_i\}$ ning yoyilgan tasviri mavjud. Bundan barcha i∈Z lar uchun, P_i bir xil ko'pburchaklar bo'ladi. Shunung uchun barcha i lar uchun P_i da diametr d>o bo'ladi.

L ni gorizantal emas demasak, ba'zi a, b ϵ R parametrlar uchun x quyidagicha bo'ladi.

$$x=ay+b$$

L da (x_0,y_0) nuqtalarni olamiz, y_0>d va

$$x=ay_0+b$$

keyin, ba'zi $i \in Z$ uchun,

$$L \in D, (x_0, y_0) \in P_i$$

Lekin $P_i d$ diametrga ega va u musbat X o'q bilan kesishsa, P_i ning hamma nuqtalari y koordinatadan kichik yoki d ga teng, yoki aksi.

Bundan L X o'qqa parallel.

Bu ta'rifni to'ldiradi.

Gipoteza 4.2. Agar Pko'pburchakda bitta orbita turi davriy bo'lsa, bilyard trayektoriyasi ham davriy bo'ladi.

Isbot. Bu zaruriylik aniq, buni yetarlicha isbotlaymiz. $\{s_i\}$ $\{\omega_i\}$ orbita turning minimal davridagi ixtiyoriy bilyard tryektoriyasi bo'lsin.

Quyidagilardan k ni aniqlaymiz:

$$k=\begin{cases} p, & agar, \quad p\ juft\ bo'lsa \\ 2p, & agar, \quad p\ toq\ \ bo'lsa \end{cases}$$

Bundan, k har doim juft. k minimal juft davr. $\{P_i\}$ $\{\omega_i\}$ yoyilgan yuzasi bo'lsin, D yoyilgan soha, L $\{s_i\}$ ning yoyilgan yuzasi.

Endi har bir P_i uchun c_i unung markazi. k juft sonligidan, P_0 va P_k bir xil joylashuvga ega. Endi bizP_k dan P_0 ni musbat yo'nalishiga ko'chiramiz. τ: $R^2 \to R^2$ akslantirish va r: $R^2 \to R^2 c_k$ aylanishning markazi. f=r∘τ akslantirishP_0 ni P_k ga ko'chiradi.

Endi biz $\dots c_{-2k}, c_{-k}, c_0, c_k, c_{2k}, c_{3k}$ nuqtalarni segment chiziqlariga bog'laymiz. Γ aylanishga 2π to'g'ri kelmasligidan, $\angle c_0 c_k c_{2k}$ burchak ham 2π ga mos kelmaydi. $c_0 c_k c_{2k}$ nuqtalar S aylanani aniqlaydi.

Bundan tashqari, bir paytda $\angle c_0 c_k c_{2k}$ burchak 2π uchun juft, $c_0 va\ c_k$ o'xshashdir.

Shuning uchun,$c_0 c_k$ S aylananing diametri bo'ladi va

$$f^n\ (c_0 c_k) = c_{nk} c_{(n+1)k}$$

va

$$f^n\ (\angle c_0 c_k c_{2k}) = \angle c_{nk} c_{(n+1)k} c_{(n+2)k}$$

barcha n∈Z lar uchun S da yotadi.

C S ning markazi bo'lsin va

$$d = \sup\{|p - C| : p \in \bigcup_{i=0}^{k} P_i\}$$

da mavjud va bundan $\bigcup_{i=0}^{k} P_i$ kompaktdir.

Bu davriylikdan

$d = \sup\{|p - C| : p \in \bigcup_{i \in Z} P_i = D\}$.

S` yuzada C markazli d radiusli to'p, D⊂S` bilan chegaralangan. Lekin, L to'g'ri chiziq D da chagaralanmagan va aksi. Bundan Γ 2π ga mos aylanishi bo'ladi.

Bundan P_0vaP_k faqatgina ko'chirishda farqli. Segment ω0 yuza $\omega_k = \omega_k$ bir xil yo'nalishning S_k oxiri.

Endi biz har bir qavatni P ningω_0 yuzasini (0,0) dan (1,0) segmentga chiziqli aylantiramiz.

S_0ning (a,0) oxiri va S_k ning (b,0) oxiri a≠b bo'lsin. Bu umumiylikdan b>a ekanligini bilib olamiz. $S_k$ning oxiri (b+(b-a),0) da va S_n ning oxiri (a+n(b-a),0) bo'ladi.

Yetarlicha katta n lar uchun, biz (a+n(b-a),1) ga ega bo'lamiz. Bundan,$S_{nk} P_{nk}$ ko'pburchakning chegarasi bo'ladi va aksincha.

Natijada biz, bittagina a=b ga ega bo'lamiz. Shuning uchun S_0vaS_k P da oxiri bir xil nuqtada, bir xil yo'nalishdagi chiziq bo'ladi. Bilyard yuzasida shunday takrorlanadi. Isbotlandi.

Natija. Agar bilyard trayektoriyasi davriy va $\{P_i\}$ kengaytirigan soha bo'lsin. p minimal juft davr. $P_p$niP_0 ga ko'chirishga erishamiz va bu ko'chirish bilyard trayektoriyasining yo'nalishi bo'ladi.

Misol.1,2,3,4 bilan nomerlangan to'rtburchak berilgan bo'lsin. Bu to'rtburchakning bilyard trayektoriyasini ko'rib chiqsak, trayektoriyaning qaytish nuqtalarini $n_i, n_2 \ldots, n_i \epsilon \{1,2,3,4\}$ bilan belgilaymiz. Agar faqatgina $\{n_i\}$ ketma-ketlik davriy bo’lsa, bu trayektoriyning davriyligini tekshiramiz.

Berilgan ko’pburchak yuzasida ko’pgina belgilar mavjud. Bir xil bilyard trayektoriyasining turli xil orbita turlarini turli xil yo’llar bilan belgilaymiz. Bunda bilyard trayektoriyasini orbita turi orqali o’rganamiz.

Ta’rif 4.5. *n-gon bilan berilgan bilyard fazosida*

$$P_n = \{\ n\text{-gon}\ R^2\ \text{da berilgan}\}.$$

Quyidagi ta’rifda fazoning strukturasi berilgan:

Ta’rif 4.6. $P_n R^{2n}$*ning ochiq to’plamidir.*

Ta’rif 4.7. $f : R^2 \to R^2$ *akslantirish tarkibi va o’lchovi o’zgarmas bo’lsa, kongurent akslantirish deyiladi.*

Ta’rif 4.8. *2 ta* $P, P` \epsilon P_n$ *ko’pburchak berilgan, mos ravishda l,l` (chegara chizigi) bilan belgilaymiz. Agar f: P→P va f*l=l` o’rinli bo’lsa hamma yerda mos deyiladi.*

Gipoteza 4.3. Kongurentlikteng munosabatlardir.

Isbot.

Refleksivligi: Barcha PϵP_n larni qarasak o’zini o’ziga akslantiradi.

Simmetrikligi: O’zgarmasdan (qat’iy)ko’chirishlardan qarama-qarshisiga o’rnini o’zgartiramiz. Bir xil o’lchov uchun to’g’ri keladi.(148-bet.)

Tranzitivligi. Ravshanki agr, P P` ga f akslantirish orqali kongurent bo’lsa, P` ha g akslantirish orqali P`` ga congruent bo’ladi.

Bundan g∘f o’rinli.

Gipoteza 4.4. *Agar* $P, P` \epsilon P_n$ *2 ta o’xshash ko’pburchaklar berilgan bo’lsin.Bundan P* $\omega = \{\omega_i\}$ *orbita turidagi bilyard trayektoriyasiga ega bo’lsa, P` bilyard trayektoriya ham ω orbita turiga ega bo’ladi.*

Isbot. Agar ω orbita turiga P bilyard tryektoriya uchun $\{s_i\}$ ni ko'rsak, $\{f(s_i)\}$ P` uchun bilyard trayektoriya bo'ladi. Bundan tashqari P da ω_i belgilangan $f(s_i)$ yuzada qayta tasvirlangan. Bu yuza ω_i bilan belgilaymiz.

Shunday qilib, $\{f(s_i)\}$ ω orbita turiga ega.

Ta'rif 4.9. *n- gon bilan belgilangan fazoda o'xshashlik moduli* $\tilde{P}_n = P_n/\sim$ *bu yerda ~ n-gon lar orasidagi yaqin o'xshashlik va* P_n *bilan bo'linma topologiya bilan tasdiqlangan.*

Gipoteza.$\sim P_n$ *(da)* R^{2n-4} *ning kichik to'plamlari joylashgan.*

Isbot.Har bir o'xshash to'plam(guruppa) uchun, har qanday $(v_1,...,v_n)$ burchakni tanlaymiz. Keyin v=(0,0) ni ko'chiramiz vav_2=(1,0) o'lchamga o'tqazamiz va oxiriv_3 ni yarim tekislikning yuqorisiga akslantiramiz. Bu akslantirishdan P_n ni R^{2n-4}ning kichik ochiq to'plami ekanligini bilib olamiz.

XULOSA

Mening Bitiruv malakaviy ishim mavzusi “Ko’pburchak stollar ustida Fagnano bilyard trayektoriyalari” deb nomlanadi. Bitiruv malakaviy ishi kirish, asosiy qism, foydalanilgan adabiyotlarro’yhati, ilovadan iboratdir.

Ushbu Bitiruv malakaviy ishi zamonaviy matematika hozirgi vaqtda rivojlanayotgan tamoqlaridan biri bo’lgan matematik billiard va uning xossalarini o’rganishga bag’ishlangan.

Bitiruv malakaviy ishining kirish qismida matematika fani haqida, Utkir Rozikovning ilmiy ishlari, shuningdek, bitiruv malakaviy ishining dolzarbligi, maqsadi, vazifalari, manbalari va uning amaliy ahamiyati yoritib berilgan.

Bitiruv malakaviy ishining asosiy qismida:

1) Matematik bilyard haqida umumiy tushunchalar,bilyard trayektoriyalari turlari, bilyard stollari turlari bayon etilgan

2) Uchburchak stollar ustidabilyard, uning trayektoriyasi, turlari , xossalari va ularga doir teoremalar va ularning isbotlari keltirilgan bo’lib, mavzuga oid masalalar turli chizmalar orqali o’z yechimini topgan.

3) Bu bo’limko’pburchak stollar ustida bilyard trayekoriyalarini o’z ichiga oladi.

Ushbu Bitiruv malakaviy ishi maktab, kollej, akademik litsey o’quvchilari, oliy o’quv yurti talabalari va yosh matematik o’qituvchilarning matematik billiard sohasidagi o’z bilimlarini yanada oshirishda muhim ahamiyatga ega bo’ladi deb hisoblayman.

Bitiruv malakaviy ishining so’ngida foydalanilgan adabiyotlar ro’yxati va ilova kiritildi.

Matematik billiard bu – billiard to’pining tekis chiziqdagi harakatlari va chegaradan aniq ko’zlangan harakatlari bilan almashinadigan dinamik tizimdir. Shu sababli u dinamik tizimlarga xos xususiyatlarga ega. Matematik billiard nazariyasi juda ko’p amaliy tatbiqlarga va natijalarga boy hisoblanadi. Ushbu nazariyaning nafaqat matematika va balki, biologiya, fizika, mexanikaning turli masalalariga oid tatbiqlari juda ko'p bo'lib, tibbiyotda buyrakdagi toshlarni parchalashda, gaz zarrachalarining to'qnashuvida, yorug'likni tushirish masalalari va shu kabi masalalarni hal qilishda yordam beradi.

Bilyard trayektoriyalarini tahlil qilish geometriya metodlarini, dinamik sistemalarni, ergodik nazariyalarni, shuningdek, nazariy fizika va mexanikaning masalalarini o'z ichiga oladi. Bilyard asosan dinamik sistemalar nazariyasida o'rganilgan.Matematik bilyard nazariyasiga qiziquvchi yosh olimlar soni ortib bormoqda. Chunki,nazariyaning biologiya, fizika, matematika, meditsinaga oid tadbiqlari juda ko'p. Xususan, matematik bilyardni elementar matematikada qo'llanishini suv ajratish masalalarida ko'rishimiz mumkin.Yuqorida aytib o'tdikki, matematik bilyardni turli stollarda ko'rib chiqishimiz mumkin.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YHATI

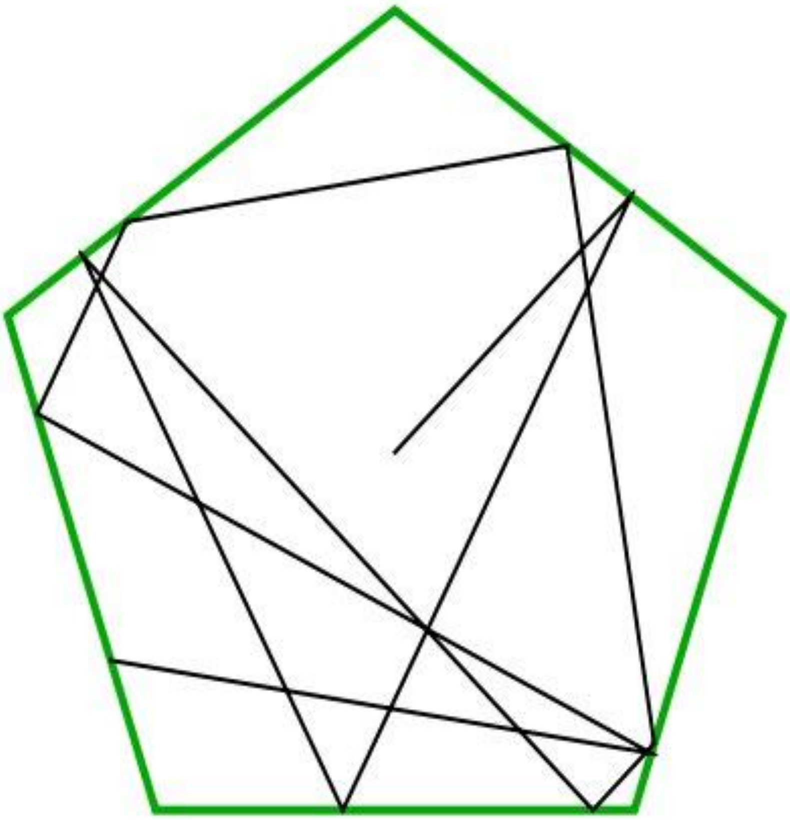
1. O'zbekiston Respublikasi Prezidenti matbuot xizmati davlat rahbarining 2019-yil uchun mo'llajlangan eng muhim ustuvor vazifalar haqidagi Oliy Majlisga murojaatnomasi.–Toshkent,2018.
2. S. Tabachnikov, Geometry and billiards. Student Mathematical Library, 30. American Mathematical Society, Providence, RI; Mathematics Advanced Study Semesters, University Park, PA, 2005.
3. S.Tabachnikov, Fagnano orbits of polygonal dual billiards, Geom.Dedicata,77(1999),279-286.
4. U.A. Rozikov, Matematical billiards. Asia pacific Math.Newsl.2012, 19-23.
5. U.A. Rozikov , What is mathematical billiards? .Math track.2007, 56-65.
6. H.S. Shultz, R.C.Shiflett, Matematical billiards.The mathematical gazette, 1988.
7. Г.А.Галперин,А.Н.Земляков. Математические бильярды. Москва.1990.
8. U.A. Rozikov , An introduction to mathematical billiards.2018.
9. H.S. Shultz, R.C.Shiflett, Matematical billiards.The mathematical gazette, 1988.
10. Г.А.Галперин, А.Н.Земляков.Математические бильярды. Москва.1990.
11. N.J. Lennes, On the motion of a ball on a billiard table. Amer. Math.Monthly,(1905),152-155.
12. U.A. Rozikov , An introduction to mathematical billiards.2018.
13. E.Gutkin, Problems on billiards, Preprint no 103. 2001. Max Planck Institute.
14. E. Gutkin, Billiards in polygons: Survey of recent results, J.Stat. Phys.(1996).
15. E.Gutkin, Billiard dynamics: an updated survey with the emphasis on open problems. Regul. Chaotic Dyn.(2003).
16. M.Freiberger. Chaos on the billiard table.

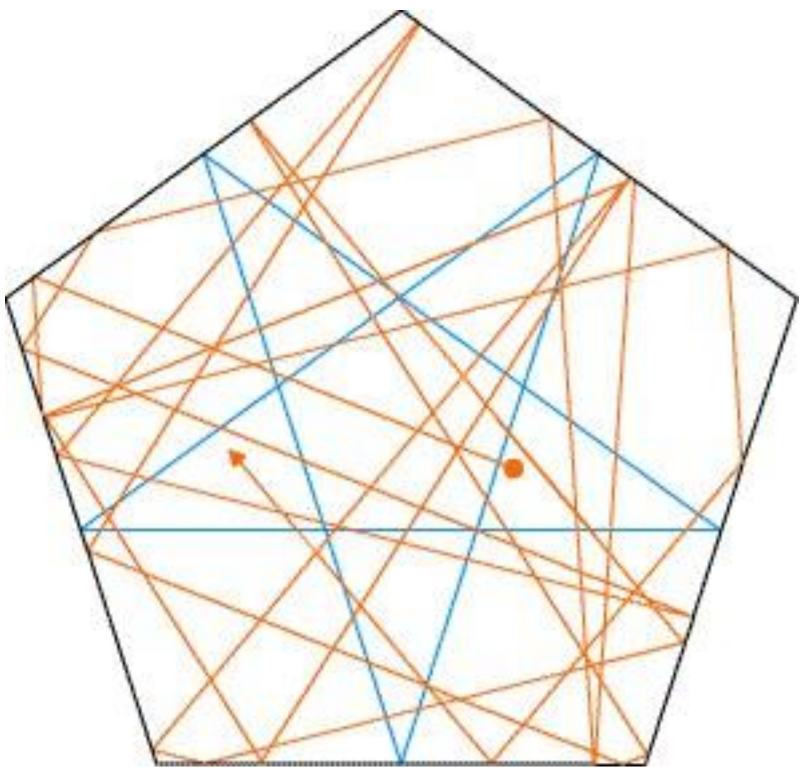
Foydalanilgan internet saytlari

1. https://uz.wikipedia.org/w/index.phptitle;
2. http://www.el.tfi.uz/pf/enmoq22.uzl.pdf;
3. http://www.nsu.ru/icem/grants/etfm/;
4. http://www.lib.homelinex.org/math/;
5. http://www.eknigu.com/lib/mathematics/;

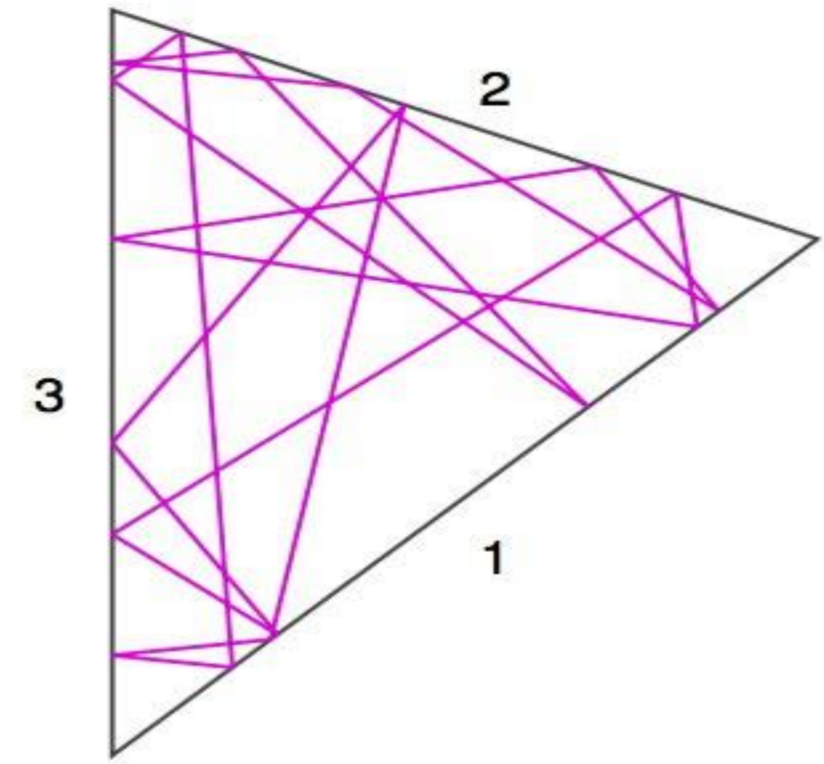
Internet materiallari:

Quyida beshburchak stollar ustida ayrim matematik bilyard trayektoriyalarini keltirib o'tamiz.

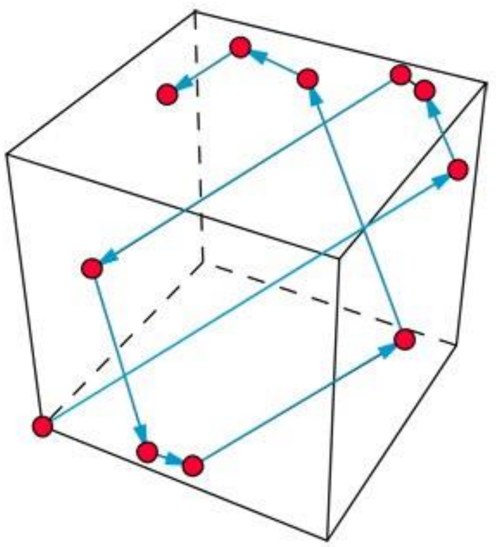




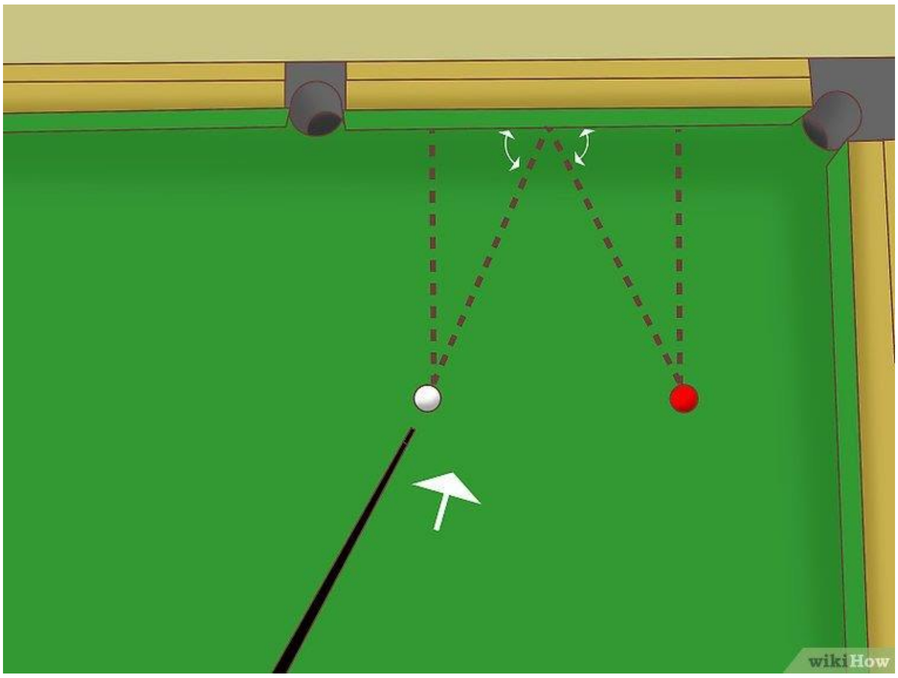
Quyida uchburchak stollar ustida ayrim matematik bilyard trayektoriyalarinikeltiribo’tamiz.

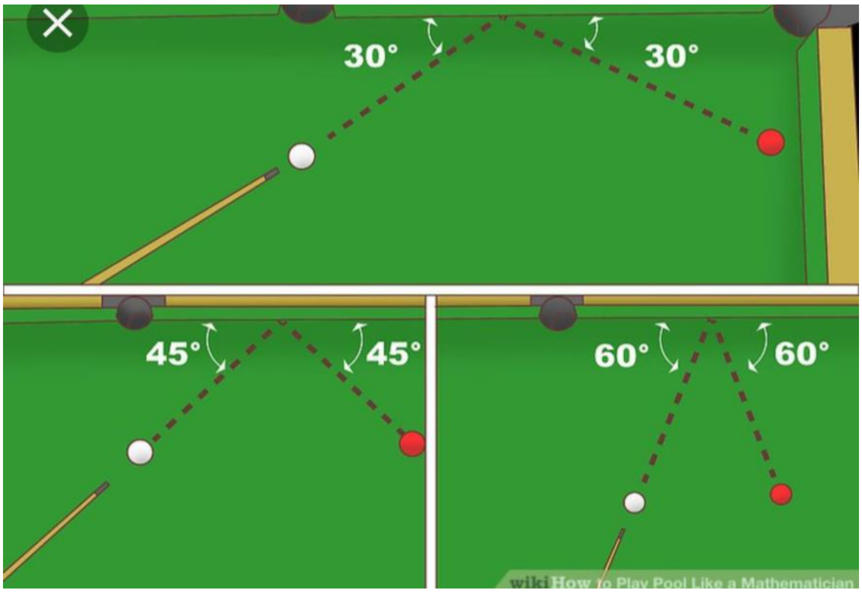


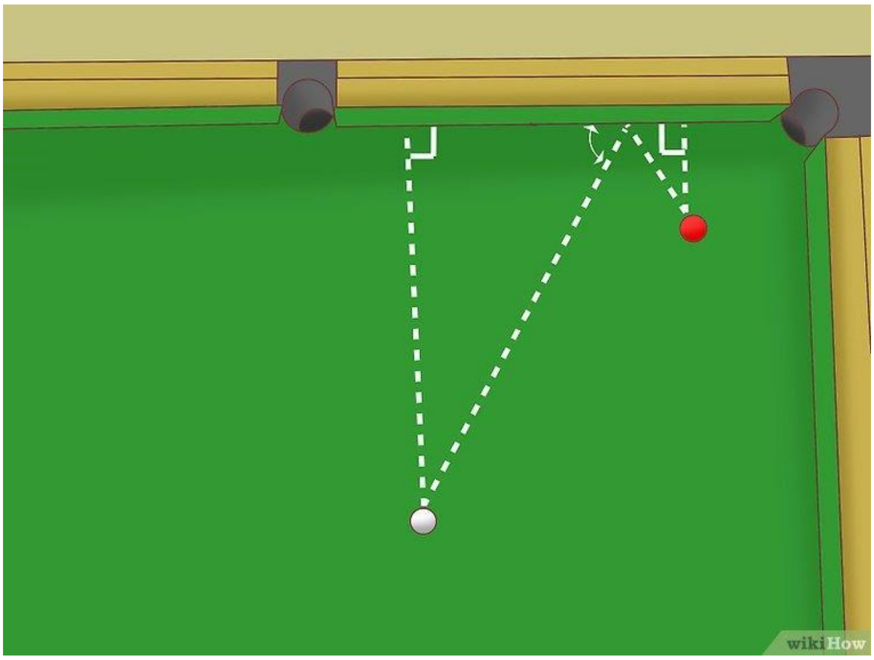
Fazoda matematik bilyard trayektoriyasi



Bilyard stolida trayektoriya urilish va qaytish burchaklari teng.




30°
30°
45°
45°
60°
60°
wikiHow to Play Pool Like a Mathematician


wikiHow

БИБЛИОТЕЧКА «КВАНТ»
выпуск 77

Г. А. ГАЛЬПЕРИН
А. Н. ЗЕМЛЯКОВ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ БИЛЬЯРДЫ

ОГЛАВЛЕНИЕ