ӨЗБЕКИСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ ЖОҚАРЫ ҲӘМ ОРТА АРНАЎЛЫ ТӘЛИМ МИНСТРЛИГИ

ӨЗБЕКСИТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БАЙЛАНЫС, ИНФОРМАЦИЯЛЫҚ ҲӘМ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЯ ТЕХНОЛОГИЯЛАРЫ МӘМЛЕКЕТЛИК КОМИТЕТИ

ТАШКЕНТ ИНФОРМАЦИЯЛЫҚ ТЕХНОЛОГИЯЛАР УНИВЕРСИТЕТИ
НӨКИС ФИЛИАЛЫ

Қол жазба ҳуқықында

УДК 517.5:519.6

“Информациялық технологиялар” кафедрасының 2-курс магистранты
Шельмуханов Ғабит Сабитовичтиң

«Фохта теңлемесиниң ҳәр-қыйлы шегаралақ шәртлердеги шешимлерин компьютерде моделлестириў»

Магистратураның 5А330201- «Компьютер системалары ҳәм олардың программалық тәмийнаты» қанийгелиги бойынша

Магистр дәрежесин алыў ушын жазылган диссертациясы.

Илимий басшы: **ф-м.и.к. доц. Д.У.Утебаев**

НӨКИС-2014

АННОТАЦИЯ

Теманың актуаллығы: Математикалық моделлери оғада қурамалы болған көп өлшемли сызықсыз дифференциаллы теңлемелерди ямаса теңлемелер системасын шешиўдиң жаңа усылларын ойлап табыў ҳәм оларды электрон есаплаў машиналарында реализациялаўдың әпиўайы алгоритмлерин ислеп шығыўдан ибарат.

Жумыстың мақсет ҳәм ўазыйпалары: Математикалық моделлердиң түрлери менен ҳәм оларды шешиўдиң ҳәр қыйлы аналитикалық ҳәм санлы усыллары менен танысыў, салыстырыў арқалы физикалық процесслердиң параметрлери ҳаққында түрли жуўмақлар шығарыў

Изертлеў объекти ҳәм предмети: Ўақыт бойынша өзгериўшини аппроксимациялаўдың жоқары тәртипли дәлликтеги усылларын ислеп шығыў ҳәзирги күнде кем изертленген ҳәм орнықлылығын, жийнақлылығын ҳәм дәллигин дәлиллеў бүгинги күнги санлы математика илиминдеги ең әҳмийетли ҳәм заманагөй мәселелердиң бири болып табылады.

Изертлеў усыллары: Санлы усыллар теориясының дифференциаллы теңлемелерди шешиўдиң шекли айырмалар усылы, шекли элементлер усылы ҳәм санлы усылларды изертлеўдиң есаплаў эксперименти усыллары қолланылды.

Жумыстың илимий жаңалығы: Фохта теңлемеси менен телеграф теңлемелерине төртинши тәртипли дәлликтеги схемалар дүзилди. Схемалардың орнықлылығы, жыйнақлылығы ҳәм дәллик баҳалары алынды. Схеманың басқа схемаларға қарағанда артықмашылықлары есаплаў эксперименти тийкарында дәлилленди

Изертлеў нәтийжесиниң илимий жақтан әҳмийети ҳәм қолланылыўы: Математикалық физиканың көплеген стационар емес мәселелерин шешиўде қолланылыўы мүмкин. (газ динамикасы, электр ийилиўшеңлик теориясы, диффузия ҳәм коррекция, ишки толқынлар теорясы ҳ.т.б)

Орынлаған жумыстың тийкарғы нәтийжелери: Екинши тәртипли әпиўайы дифференциал теңлемелер системасына шекли айырмалар усылы тийкарында жоқары тәртипли дәлликтеги айырмалар схемасын дүзиў усыллары көрсетилген.

Жуўмақ ҳәм усыныслардың қысқаша улыўмаластырылған көриниси: Математикалық моделлери екинши тәртипли әпиўайы дифференциаллы теңлемелер системасын шешиўге алып келетуғын мәселелер ҳәм олардың шешимлерин табыў усылларын изертлеў, олар үстинде санлы экспериментлер жүргизиў арқалы керекли жуўмақлар алыў.

THE SUMMARY

The high point of the topic: It consists of creating new methods of solving equation system and multidimensional differential equations, mathematical models of which are very complex, moreover, work out simple algorithms, which can be realized on electronic calculator machines.

The purpose of the Master's dissertation and the researched issues: Through examining, comparing different types of mathematical models and different analytical and digital ways of solving them, we will make various conclusions about parameters of physical processes.

The object and theme of the research: Nowadays, creating methods on a high order of exactness, which approximate the time alternate, is researches less, moreover, proving its importance, flexibility and exactness are considered to be one of the most important and modern issue in the science of mathematics.

Methodology and methods of the research: The followings are used for solving differential equations of the theories of digital methods: the method of limited diminishments, the method of limited elements and calculative experiment of researching digital methods.

Scientific news of the work: Have been constructed the schemes, which are on the 4^{th} order of exactness for the equation of Fokhta with telegraph equations. Have been taken the schemes' importance, flexibility and exactness. The excess of this scheme rather than other schemes is proven by calculating experiments.

Practical importance of the Master's dissertation: It can be used for solving non- stationery methods of mathematical physics (gas dynamics, electric flexible theory, diffusion and correction, internal wavy theory, etc...)

Main results of the Master's dissertation: With the help of the method of limited diminishment, which is on the 2^{nd} order of the simple differential equation systems, the methods of constructing diminishments on a high order of exactness are shown.

Shortly general view of the result and suggestions: To research in order to find those issues and their solutions which lead to solve simple differential equation systems, mathematical models of which are on the 2^{nd} order, also to make necessary conclusions by doing some digital experiments on them.

Мазмуны

Кирисиў……………………………………………………………..8

I Бап. Моделлестириў тийкарлары………………………………...…18

1-§. Математикалық моделлестириў……………………………………18

2-§. Компьютерда моделлестириў………………………………………24

3-§. Базыбир белгилеўлер ҳаққында……………………………………..26

4-§. Әпиўайы ҳәм дара туўындылы диференциаллы теңлемелер ҳәм оларды шешиўдиң усыллари ҳаққында…………………..…………..…31

Жуўмақ…………………………………………………………………35

II Бап. Фохта теңлемеси ҳәм оны шешиў усыллары ҳаққында…36

1-§. Фохта теңлемеси. Баслағыш ҳәм шегаралық шәртлер…………..36

2-§. Фохта теңлемесине мысаллар ҳәм оларды шешиў усыллары..…43

3-§. Шешимниң орнықлылығы, жыйнақлылығы ҳәм дәллиги ҳаққында…………………………………………………………………50

Жуўмақ…………………………………………………………………54

III Бап. Жоқары тәртипли дәлликтеги схемалар дүзиў жоллары…………………………………………………………………55

1-§. Шекли элементлер усылы ҳаққында…………………………….…55

2-§. Жоқары тәртипли дәлликтеги схемалар…………………………...58

3-§. Телеграф теңлемесиниң жуўық шешими………………………….60

Жуўмақ…………………………………………………………………….63

IV Бап. Санлы экспериментлер………………………………….……64

1-§. Мәселениң қойылыўы……………………………………………...64

2-§ Шекли элементлер усылының схемасы. ……………………………64

3-§. Схеманың алгоритми……………………………………………68

4-§. Санлы шешимлер ҳәм оларды дәл шешим менен салыстырыў….70

Жуўмақ…………………………….……………………………………..74

Әдебиятлар……………………………………………………………….75

Қосымшалар…………………………………………………………..78

Кирисиў

Бизди қоршаған орталықтың көплеген физикалық, техникалық, химиялық ҳ.т.б. процеслериниң математикалық моделин (тийкарынан әпиўайы ҳәм дара туўындылы дифференциаллы теңлемелер) изертлеў ушын көбинесе санлы усыллар қолланылады. Көплеген әпиўайы ҳәм дара туўындылы теңлемелер дәл шешимге ийе. Деген менен, бул теңлемелердиң коэффициентлери ямаса қосымша берилген шәртлери қурамалы функциялардан туратуғын болоғанлықтан олардың дәл шешимин алыў мумкиншилиги болмайды. Солай етип, санлы усыллар ҳәзирги заман есаплаў машиналарында санлы экспериментлар жургизиў ушын ең қолайлы ҳәм ең арзаны (есаплаўлар жургизиў ушын) болып табылады. Математикалық физиканың ҳәр қыйлы мәселелерин санлы шешиўдиң усылларин дүзиў ҳәм олардың сапалылығын дәлиллеў мәселелери менен шекли айырмалар теориясы пәни шуғылланады [12-19].

Өткен әсирдиң 40-жылларынан баслап ҳәзирги күнге дейинги есаплаў математикасиниң теориялық изерлеўлери шекли айырмалар теориясында жаңа бағдар ислеп шығыўға мумкиншилик жаратты. Бул бағдар тийкарынан шекли айырмалар схемаларын дүзиў принциплерин, олардын орнықлылығын ҳәм жыйнақлылығын дәлиллеўдиң қатаң математикалық теориясын жаратыў, оларды электрон есаплаў машиналарында реализациялаў алгоритмлерин дүзиў, санлы экспериментлер жүргизиў мумкиншилигин берди. Усы жумыслар тийкарында математикалық физиканың ҳәр қыйлы маселелерин шешиў, сониң ишинде жыллылық физикасы, газ динамикасы, магнитли газ динамикасы, плазма физикасы, экология ҳ.т.б. мәселелерди шешиўдиң көп санлы алгоритмлери ислеп шығылды ҳәм олар бугинги күнде өндиристе кеңнен қолланылмақта.

Бүгинги күнде математикалық, физикалық мәселелерди шешиўдиң айырмалы схемалар теориясы тийкарынан төмендеги бағдарлар бойынша раўажланбақта:

1. Дифференциаллы мәселениң тийкарғы қәсийетлерин сақлап қалатуғын айырмалы схемалар дүзиў;

2. Айырмалы схемалардың орнықлылығын изертлеў;

3. Дүзилген схемаларды ҳәзирги заман есаплаў машиналарында экономлы, эффектив реализациялаў.

Шекли айырмалар схемасын дүзиўдиң тийкарғы принциплериниң бири, бул айырмалы схеманиң консервативлиги принципи болып табылады.

Бул принципте, жақарыдағы айтқанымыздай, дискрет модел (айырмалы схема) узликсиз моделдиң (дифференциаллы теңлеме) тийкарғы нызамлықларын сақлайды. Бундай схемаларды биртекли айырмалы схемалар деп атайды. Бундай схемалардың абзаллықлары, үзликсиз областтан дискрет областқа өте алыўымызда. Дискрет областтың барлық точкаларында айырмалы теңлемениң түри өзгермейди, яғный дискрет областтың барлық точкаларинда айырмалы теңлеме бирдей түрге ийе болады. Бул есаплаўлар жүргизиўде арифметикалық әмеллерди унемлеўге алып келеди. Бундай схемаларды унемли айырмалы схемалар деп те атайды.

Соңғы жыллари үзликли коэффициентли ҳәм кеңейтирилген шешимге ийе мәселелердиң биртекли схемалары дүзилди.

Математикалық физиканың стационар емес мәселелерин шешиўдиң айырмалы схемаларының орнықлылығын изертлеўдиң жаңа усылы ислеп шығылған. Бул операторлы – айырмалы схемалардың орнықлылық теориясы болып табылады [16,17]. Бунда шекли өлшемли Гильберт кеңислигинде еки қатламлы ҳәм уш қатламлы операторлы айырмалар схемасының улыўма көриниси ушын олардың орнықлылығын изертлеўдиң операторлар қатнасы түриндеги шәртлериниң (зәрүрли ҳәм жеткиликли) алыныўы болып табылады. Бул операторлар қатнасындағы шәртлер аңсат тексериў мумкиншилигин бериўши теңсизликлерден турады.

Орнықлылықты дәлиллеўдиң операторлы –айырмалы схемалар теориясы схемалардың жыйнақлылығын ҳәм дәллигин изертлеўде де оғада әҳмийетли орын тутты. Бул әсиресе коррект қойылмаған стационар емес мәселелерди шешиўде, сондай-ақ шекли элементлер схемаларын изертлеўде кеңнен қолланылмақта.

Сондай-ақ, бул теория ўықыт бойынша интеграллы нормаларда жаңа априор баҳалар алыў мумкиншилигин берди [7,15,23-30]. Бул априор баҳалар тийкарында кеңейтирилген шешимге ийе мәселелердиң жыйнақлылығын изертлеў жоллары табылды [23].

Шекли айырмалар теориясының жоқарыда айтылған жетискенликлери оғада ири илмий –техникалық мәселелерди шешиў мүмкиншилигин берди. Мысалы, ядролық ҳәм термоядролық материалларды есаплаў мәселелери, басқарылыўшы термоядролық синтез мәселеси, жыллылықты ҳәм массаны тасыў процесслерин изертлеў мәселелери ҳ.т.б.

Бундай оғада қурамалы, үлкен мәселелерди шешиўде компьютерде моделлестириў оғада әҳмийетли орын тутады. Сонлықтан санлы мәселени компьютерде моделлестириў шекли айырмалар усылына көплеген талаплар қояды. Булар тийкарынан жоқарыдағы айтылған схеманиң орнықлылығы ҳәм жыйнақлылығы болса, буған қосымша схеманиң дәллиги де оғада әҳмийетли орын тутады. Себеби дүзилген схема менен компьютерде жүргизилген моделлестириў, биз қойған талапты қанаатландырмаўы мүмкин, жиберилген қәтелер қосындысы дифференциаллы теңлемелердиң тийкарғы қәсийетлерин жоғалтып жибериўи мүмкин. Бундай жағдайларда дифференциаллы теңлемелер ушын дүзилген схемалардың дәллигин арттырыў керек болады ямаса жоқары тартипли дәлликтеги схемалар дүзиў керек болады.

Солай етип, шекли айырмалар схемасы теориясиниң ең актуал мәселелери, бул орнықлы, жыйнақлы ҳәм жоқары тәртипли дәлликке ийе схемалар дүзиў болып табылса, ал алынған жуўмақлардың дурыслығын дәлиллеўши әсбап, бул компьютерде моделлестириў болып табылады.

Жоқарыда айтылғанлардан жуўмақ шығарып төмендегилерге тоқтап өтемиз.

Диссертация темасының актуаллығы. Бүгинги жаңа технологиялар дәўиринде есаплаў математикасының алдында оғада әҳмийетли жумыслар тур. Илимниң ҳәм техниканың оғада тез пәт пенен раўажланыўы, ҳәзирги заман есаплаў техникасының жетискенликлери илимпазлар алдына жаңадан-жаңа актуал мәселелер қоймақта. Булар тийкарынан математикалық моделлери оғада қурамалы болған көп өлшемли сызықсыз дифференциаллы теңлемелерди ямаса теңлемелер системасын шешидиң жаңа усылларын ойлап табыў ҳәм оларды электрон есаплаў машиналарында реализациялаўдың әпиўайы алгоритмлерин ислеп шығыўдан ибарат. Әсиресе нонатехнология дәўиринде жоқары тәртипли дәлликтеги санлы усылларды ислеп шығыў ҳәм олардың орнықлылығын, жыйнақлылығын ҳәм дәлик баҳаларын алыў бүгинги санлы усыллар теориясының ең актуал мәселелериниң бири болып табылады. Бул диссертацияда қаралатуғын Фохта теңлемеси менен телеграф теңлемелериде жоқарыда айтылған мәселелердиң әпиўайы ўәкиллери болып табылады. Әсиресе бул теңлемелердиң коэффициентлери ямаса алдынан берилген шамалары (теңлемениң оң жағы, басланғыш ҳәм шегаралық шәртлер) оғада қурамалы (интегралланбайтуғын) функциялар болса, онда олардың дәл шешимин табыў мүмкиншилиги дерлик жоқ есабы. Сонлықтан бундай мәселелерге жоқары тәртипли дәлликтеги схемаларды дүзиў мәселесиде күн тәртибиндеги актуал мәселелердиң бири болып табылады.

Изертлеўдиң объекти ҳәм предмети. Бул жумыста тийкарынан стационар емес мәселелер класына жататуғын Фохта теңлемеси менен телеграф теңлемелери ушын шегаралық мәселелер қаралады. Бул мәселелер екинши тәртипли гиперболалық типтеги дифференциаллы теңлемелердиң ең әпиўайы мысаллары болып, ол өз ишине сол теңлемелердиң дерлик барлық тийкарғы қәсийетлерин қамтыйды. Сонлықтан әпиўайы дифференциаллы теңлемелердиң шешимлериниң қәсийетлерин изертлеў, анализлеў ҳәм жуўмақлар шығарыў арқалы қурамалы дифференциаллы, ямаса сызықсыз дифференциаллы теңлемелердиң шешимлерин изертлеўге мүмкиншилик пайда болады.

Изертлеўдиң мақсети ҳәм ўазыйпалары. Физикалық мәселелердиң математикалық модел дүзиў мәселелерин үйрениў. Математикалық моделлердиң түрлери менен ҳәм оларды шешиўдиң ҳәр қыйлы аналитикалық ҳәм санлы усыллары менен танысыў. Аналитикалық ҳәм санлы усылларды салыстырыў арқалы физикалық процесслердиң параметрлери ҳаққында түрли жуўмақлар шығарыў. Гиперболалық типтеги дифференциаллы теңлемелерге, соның ишинде Фохта теңлемеси менен телеграф теңлемелерин жуўық шешиўдиң ҳәр қыйлы санлы усыллары менен танысыў ҳәм усылар тийкарында жоқары тәртипли дәлликтеги схемаларды ислеп шығыў. Схемалардың орнықлылығын, жықлылығын ҳәм дәллигин көрсетиўши жуўмақлар алыў. Алынған схемаларды басланғыш ҳәм шегаралық шәртлери менен берилген дара туўындылы дифференциаллы теңлемелерди санлы моделлестириўде қолланыў.

Изертлеўдиң әҳмийети ҳәм заманагөйлиги. Ўақыт бойынша өзгериўшини аппроксимациялаўдың жоқары тәртипли дәлликтеги усылларын ислеп шығыў ҳәзирги күнде кем изертленген. Сонлықтан, бундай изертлеўлер соңынан сызықлы емес дифференциаллы теңлемелерди шешиўде қол келеди. Бундай схемаларды математикалық физиканың кери мәселелерин шешиўде де кең қолланыў мүмкин. Буған қосымша жоқары тәртипли дәлликтеги схемаларды дүзиў, олардың орнықлылығын, жийнақлылығын ҳәм дәллигин дәлиллеў бүгинги күнги санлы математика илиминдеги ең әҳмийетли ҳәм заманагөй мәселелердиң бири болып табылады. Әсиресе, алынған жуўмақларды санлы моделлестириў арқалы дүзилген санлы усылдың артықмашылығын көрсетип бериў оғада әҳмийетли, себеби инженердиң қолына таяр ҳалыдағы илимий жуўмақ бериледи.

Изертлеўдиң ҳәзирги жағдайы. Стационар емес процесслерди санлы моделлестириў оғада қурамалы мәселелердиң бири болып табылады. Сонлықтан көп жағдайларда дәслеп әпиўайы мәселелердиң математикалық моделлери үйрениледи, буннан соң усылар тийкарында қурамалы математикалық моделлер изертленеди. Стационар емес процесслерди санлы моделлестириў ушын тийкарынан шекли айырмалар усылы, шекли элементлер усылы, туўрылар усылы, шегаралық элементлер усылы ҳ.т.б. усыллар қолланылады. Усындай санлы усыллардың ишинде ең әпиўайысы ҳәм ең көп тарқалғаны шекли айырмалар усылы болып табылады. Бул усылдың тийкарғы артықмашылықлары бул оның универсаллығы, яғный оғада кең класстағы әпиўайы, дара туўындылы, үзиликли коэффициентли дифференциаллы, интеграллы ҳәм интеграллы-дифференциаллы теңлемелерди шешиўде кең қолланылыўы болып табылады. Шекли айырмалар усылы тийкарынан А.Н. Тихонов, А.А. Самарский, Г.И. Марчук, Н.Н. Яненко [6,7,12-18] ҳәм олардың көплеген шәкиртлери тәрепинен ислеп шығылған ҳәм бул усыл бүгинги күндеде раўажландырылмақта. Схемалардың орнықлылық теориясы А.А. Самарский ҳәм А.В. Гулинлер [16,17] тәрепинен ислеп шығылды. Олар схемалардың орнықлылығын изертлеўдиң оғада әпиўайы усылларын, операторлы теңсизликлер түринде көрсетилетуғын орнықлылық шәртлерин ислеп шықты. Санлы усыллар теориясының орайлық мәселелериниң бири бул санлы усыллардың жыйнақлылық ҳәм дәллик баҳаларын алыў болып табылады. Усындай баҳаларды алыўдың ең әпиўайы усыллары А.А. Самарский, А.В. Гулин, П.Н. Вабищевичлер тәрепинен ислеп шығылған [15]. А.А. Самарский, А.П. Михайлов ҳәм олардың шәкиртлери тәрепинен соңғы жылларда есаплаў усылларының артықмашылықларын көрсетип бериўши, олардың қандай типтеги мәселелерди шешиўге уқыплылығын анықлап бериўши ҳәм алынған жуўмақлар бойынша аңсат анализ жасаў мүмкиншилигин беретуғын компьютерде моделлестириў ҳәм есаплаў эксперименти усыллары ислеп шығылды [19]. Стационар емес мәселелерге ўақыт бойынша жоқары тәртипли дәлликтеги схемалар дүзиў кейинги ўақытлары М.Н. Москальков ҳәм Д. Утебаевлардың мийнетлеринде раўажландырылмақта [23-30].

Изертлеўде қолланылған усыллар. Диссертация жумысында тийкарынан санлы усыллар теориясының дифференциаллы теңлемелерин шешиўдиң шекли айырмалар усылы, шекли элементлер усылы ҳәм санлы усылларды изертлеўдиң есаплаў эксперименти усыллары қолланылды.

Жумыстың теориялық ҳәм практикалық әҳмийети. Диссертацияда алынған жуўмақлар математикалық физиканың көплеген стационар емес мәселелерин шешиўде пайдаланылыўы мүмкин. Мысалы, газ динамикасы мәселелери, ийилиўшеңлик теориясы мәселелери, диффузия ҳәм коррекция мәселелери, ишки толқынлар теорясы мәселелери ҳ.т.б.

Жумыста үйренилген ҳәм алынған санлы усыллар техникалық жоқарғы оқыў орынларының қәнийгеликлеринде арнаўлы курсларды оқыўда ҳәм информатика, хабар технологиялары, амелий математика ҳ.т.б. пәнлерди үйрениўде пайдаланылыўы мүмкин.

Жумыстың илимий жаңалығы. Диссертациялық жумыста тийкарынан Фохта теңлемеси менен телеграф теңлемелерине төртинши тәртипли дәлликтеги схемалар дүзилди. Схемалардың орнықлылығы, жыйнақлылығы ҳәм дәллик баҳалары алынды. Схеманың басқа схемаларға қарағанда артықмашылықлары есаплаў эксперименти тийкарында дәлилленди.

Диссертацияның қысқаша мазмуны. Диссертация жумысы кирисиўден, төрт баптан, пайдаланылған әдебиятлар дизиминен ҳәм қосымшалардан турады. Ҳәр-бир бап қысқаша жуўмақлаў менен тамамланады. Жумыстың кирисиў бөлиминде үйренип шығылған әдебиятлардан жуўмақ жасап диссертацияда қойылған мәселениң илимдеги орны, актуаллығы, ҳәзирги күндеги үйренилиў дәрежеси ҳ.т.б. баян етилди. Диссертацияның биринши бабында ҳәзирги ўақыттағы актуал мәселелердиң бири моделлестириў тийкарлары баян етилди. Буған қосымша кейинги изертлеўлер ушын керекли болған мағлыўматларда берилди. Бул баптың биринши параграфында математикалық моделлестириў түсинигине кең тоқтап өтилди. Оның анықламасы, мақсети, түрлери, моделдиң тийкарғы схемалары ҳәм қандай жағдайларда қолланылыўы ҳаққында баян етилди. Биринши баптың екинши параграфы компьютерде моделлестириўге арналды. Ҳәзирги заман қурамалы мәселелерин шешиў, оларды бир технология тийкарында шөлкемлестириў компьютерде моделлестириўдиң тийкары екенлигине тоқтап өтилди ҳәм техникалық мәселени шешиўде компьютерде көп санлы экпериментлер өткериў арқалы қойылған мәселеге дурыс анализ бериў мүмкиншилиги айтылды. Бул баптың үшинши параграфы санлы усыллар теориясында қолланылатуғын тийкарғы белгилеўлерге, кеңислик ҳәм ўақыт бойынша тор ҳәм торлық функцияларға, сондай-ақ шекли айырмаларға қысқаша тоқтап өтилди. Баптың төртинши параграфы дифференциаллы теңлемелер ҳәм оларды шешиў усылларына бағышланды. Бунда әпиўайы ҳәм дара туўындылы дифференциаллы теңлемелерге анықламалар берилди. Олардың математика илиминде тутқан орнына кең тоқтап өтилди. Сондай-ақ олларды шешиўдиң усылларына тоқтап өтилди.

Екинши бап Фохта теңлемесиниң математикалық моделлерин келтирип шығарыўға ҳәм олардың шешимлерин табыўдың аналитикалық ҳәм санлы усылына бағышланды. Екинши баптың биринши параграфында Фохта теңлемесиниң математикалық модели алынды. Дүзилген математикалық моделлерге, яғный дифференциаллы теңлемелерге басланғыш ҳәм шегаралық шәртлер қойылды. Кейинги екинши параграфта Фохта теңлемесиниң мысалы ретинде телеграф теңлемесиниң математикалық модели алынды ҳәм оның шешимине қысқаша тоқтап өтилди. Телеграф теңлемесин шекли айырмалар усылы менен шешиў жоллары көрсетилди. Екинши баптың үшинши параграфында дара туўындылы стационар емес дифференциаллы теңлемелер шекли айырмалар менен қалай аппроксимацияланатуғынлығы баян етилди. Схемалардың орнықлылығы, жыйнақлылығы ҳәм дәллиги мәселелерине тоқтап өтилди. Аппроксимация қәтелигин қалай есаплаўдың жоллары көрсетилди.

Үшинши баптың биринши параграфында дифференциаллы теңлемелерди шешиўдиң шекли элементлер усылына тоқтап өтилди. Дара туўындылы дифференциаллы теңлемелерди кеңислик бойынша шекли элементлер усылы менен аппроксимациялаў жоллары көрсетилди. Үшинши баптың екинши параграфында Фохта теңлемесине шекли элементлер усылы тийкарында дүзилген көп параметрли жоқары тәртипли дәлликке ийе схемалар берилди. Схемалардың артықмашылықларына тоқтап өтилди. Үшинши параграфта телеграф теңлемесине схемалар дүзиў усыллары үйренилди.

Диссертацияның төртинши бабында өткерилген санлы экспериментлердиң жуўмақлары берилди.

Солай етип, бул жумыста төмендеги тийкарғы мағлыўматлар алынды:

- Дифференциаллы теңлемелерди жуўық шешиўдиң шекли айырмалар ҳәм шекли элементлер усыллары үйренилди;

- Екинши тәртипли әпиўайы дифференциаллы теңлемелер ушын шекли айырмалар схемасы берилди ҳәм олардың орнықлылығы, жыйнақлылығы ҳәм дәллигине тоқтап өтилди;

- Екинши тәртипли дифференциаллы теңлемелер системасы ушын шекли элементлер усылы тийкарында үш параметрли төртинши тәртипли дәлликке ийе айырмалар схемасы үйренилди;

- Схемалардың орнықлылық ҳәм жыйнақлылық баҳалары алынды;

- Фохта ҳәм телеграф теңлемелери ушын жоқары тәртипли дәлликтеги схемалар дүзилип олардың орнықлылығы, жыйнақлылығы ҳәм дәллиги дәлилленди;

- Алынған схемалар көплигинен санлы экспериментлер жүргизиў арқалы ең экономлысы, яғный дәл шешимге жоқары тәртипли дәлликте (4-дәрежели) умтылатуғын схемалар көрсетилди.

Диссертацияның ақырында оны жазыўда пайдаланылған тийкарғы әдебиятлардың дизими берилди. Қосымшаларға блок-схемалар ҳәм программалар жайластырылды.

I Бап. Моделлестириў тийкарлары

1-§. Математикалық моделлестириў.

Электрон есаплаў машиналари бизиң өмиримиздиң тийкарғы элементлериниң бирине айланбақта, себеби бүгинги күнде адам өмиринде электрон есаплаў машиналариниң қолланылмайтуғын тараўы қалмады.

Ҳәзирги күнде электрон есаплаў машиналари жаңа машиналарды дөретиўде ҳәм оларды изертлеўде жаңа технологиялық процесслерди басқарыўда ҳәм олардың оптимал вариантларин ислеп шығыўда, экономикалық мәселелерди шешиўде, ҳәр қыйлы дәрежедеги өндиристи планластырыўда ҳәм басқарыўда кеңнен қолланылмақта. Сондай-ақ ракета техникасындағы, авиация қурылысындағы, кеме қурыў тараўындағы, оғада ири объектлерди қурыў ҳәм оларды басқарыў электрон есаплаў машиналарысыз бүгинги күнде мүмкин емес.

Әмелий мәселелерди шешиўде электрон есаплаў машиналарын қолланыў ушын ең дәслеп әмелий мәселе формасы түринде математикалық тилге өткерилиўи керек, яғный ҳақыйқый объект, процесстиң ямаса системаниң математикалық модели дүзилиўи керек.

«Модель» сөзи латынша «модус» (копия, көринис, келбет) сөзинен келип шыққан. Ал, моделлестириў дегенимиз, бул базыбир А объектиң жәнебир Б объекти менен алмастырыў болып табылады. Моделлестириўдиң тийкарғы мақсети, бул объекттиң ишки қубылысларининң ҳәм сыртқы орталық пенен өз-ара ҳәрекети ҳаққындағы информацияларды алыў, қайта ислеў ҳәм оларды турмыста қолланыў болып табылады.

Моделлестириў адам өмириниң ҳәр қыйлы тараўларинда кеңнен қолланылады, әсиресе проектлестириў ҳәм басқарыў тараўларында, себеби бул тараўларда алынған информацияларға тийкарланып эффектив шешимлер қабыл етиў оғада әхмийетли мәселе болып табылады.

Модел барлық ўақыт белгили бир мақсетке тийкарланып дүзиледи. Бунда қайсы ҳәрекетлерди көбирек қамтыў керек, ал қайсыларын кемирек қамтыў керек. Моделди объектив ҳақыйқатлықтың проекциясы депте қарасақ та болады.

Барлық мәселелерди еки үлкен классқа бөлиўге болады.

1. Ҳақыйқый,

2. Идеал.

Өз гезегинде ҳақыйқый моделди төмендегише бөлиўге болады:

1. Затлық,

2. Физикалық,

3. Математикалық.

Ал идеал моделди төмендегише бөлиўге болады:

1. Айқын (анық),

2. Белгили,

3. Математикалық.

Ҳақыйқый затлық моделлер – бул илимий, техникалық ҳәм өндирислик экспериментлер өткерилетуғын ҳақыйқый объектлер, процесслер ҳәм системалар болып табылады.

Ҳақыйқый физикалық модель – бул кинематикалық, динамикалық, гидравликалық х.т. басқалардың жаңадан өндирилип шығарылыўшы физикалық қәсийетлериниң макети болып табылады.

Ҳақыйқый математикалық модел - бул аналоглы, структуралы, геометриялық, графикалық, санлық ҳәм кибернетикалық моделлер болып табылады.

Идеал айқын моделлер – бул схемалар, карталар, сызылмалар, графиклер, графлар, структуралық ҳәм геометриялық моделлер.

Идеал белгили моделлер - бул белгилер, алфавитлер, программаластырыў тиллери, тәртипленген жазыўлар, топологиялық жызыўлар ҳ.т.б.

Идеал математикалық моделлер – бул аналитикалық, функционаллық, имитациялық (жасалма) үйлестирилген моделлер болып табылады.

Жоқарыдағы бул келтирилген классификациялардағы айрым моделлер еки түрли мәнистиде бериўи мүмкин. Мысалы, аналоглы. Тек затлық моделден басқа барлық моделлерди бир классқа жыйнаў мүмкин – ойлап табыўшы модел деп.

Енди биз eң универсал моделлестириў қатарына киретуғын математикалық моделлестириўди қараймыз. Бул модел моделлестирилип атырған физикалық процесске базыбир математикалық қатнасықлар системасын сәйкес қояды. Ал бул математикалық қатнасықлар системасиниң шешими өз гезегинде физикалық моделди қурмастан-ақ сол объект ҳаққында мағлыўматлар береди. Физикалық моделди қурыў оғада қымбатқа түсетуғын болғанлықтан ҳәм эффектив болмағанлықтан, математикалық моделлестириў оғада әҳмийетли процесслердиң бири болып табылады.

Математикалық модел – бул реал объектти, процессти ямаса системаны электрон есаплаў машиналарында экспериментал изертлеўлер жүргизиўге қолайлы математикалық моделлер менен алмастырыў болып табылады.

Әмелий мәселелерди шешиўде электрон есаплаў машиналарын пайдаланыў ушын бул мәселе ең дәслеп формал математикалық тилге өзгертилиўи (алмастырылыўы) керек, яғный реал объектке, процесске ямаса системаға оның математикалық модели дүзилиўи керек.

Математикалық модель санлық формасында базы-бир логикалық-математикалық конструкция жәрдеминде объекттиң, процесстиң ямаса системаниң тийкарғы қәсийетлерин, оның параметрлерин, ишки ҳәм сыртқы байланысларын анықлайды.

Математикалық моделлерди қурыў ушын төмендегилерди орынлаў зәрүр:

1. Реал объект ямаса процесс терең анализлениўи шәрт;

2. Оның ең тийкарғы шешими ҳәм қәсийетлери айырып алыныўы керек;

3. Тийкарғы өзгериўшилерди, яғный параметрлерди анықлаў, буны билиў ең тийкарғы шешим ҳәм қәсийетлерге тәсирин тийгизеди;

4. Объектлердиң, процесслердиң   ямаса системалардың тийкарғы қәсийетлериниң өзгериўшилердиң мәнисине байланысын логикалық-математикалық қатнасықлар жәрдеминде жазыў (бул теңлеме, теңлик, тенсизлик, логикалық-математикалық конструкциялар);

5. Объектлердиң, процесслердиң   ямаса системалардың ишки байланысларын базы-бир шегараланыў, теңлеме, теңлик, теңсизлик, логикалық-математикалық конструкциялар арқалы айырып алыў;

6. Сыртқы байланысларды анықлаў ҳәм оларды базы-бир шегараланыў, теңлеме, теңлик, теңсизлик, логикалық-математикалық конструкциялар жәрдеминде көрсетиў;

Математикалық моделлестириў, усы объектлерди, процесслерди ямаса системаларды изертлеўлерден ҳәм оның математикалық моделлерин дүзиўден басқа және төмендегилерди өз ишине алады:

1. Объектдиң, процесстиң ямаса системаның қәсийети моделлестириўши алгоритмлерди дүзиў;

2. Есаплаў ҳәм натурал эксперимент тийкарында моделдиң ҳәм объекттиң, процесстиң ямаса системаның адекватлығын (туўры келетуғынлығын) тексериў;

3. Моделди дүзетиў;

4. Моделди қолланыў.

Изертленип атырған процесстиң ямаса объекттиң математикалық жазылыўы төмендегилерден ғәрезли болады:

1. Хақыйқый процесстиң ямаса системаның тәбиятынан ҳәм олар физиканың, химияның, механиканың, термодинамиканың, гидродинамиканың, электротехниканың, ийилиўшеңлик теориясиның ҳ.т.б. нызамлари тийкарында дүзиледи.

2. Хақыйқый процесслерди ҳәм системаларды изертлеўдиң ҳақыйқый ҳәм дәллик талапларынан.

Математикалық моделди сайлап алыўда төмендегилер орнатылады:

объекттиң, процесстиң ямаса системаның сызықлы ямаса сызықлы емеслиги, динамикалық ямаса статикалық болыўы, стационар ямаса стационар емеслиги ҳ.т.б. математикалық моделлестириўде объекттиң, процесстиң ямаса системаның ҳақыйқый физикалық тәбиятынан белгили дәрежеде ямаса ойға сыярлық дәрежеде шетлетиледи ҳәм тийкарынан усы процесслерди анықлайтуғын шамалардың өз-ара санлы қатнасықларына көбирек итибар бериледи.

Математикалық модель ҳеш ўақытта қаралып атырған объектке, процесске ямаса системаға толық тең болмайды. Көплеген әпиўайыластырыўлар, идеалластырыўлар нәтийжесинде, ол берилген объектти жуўық анықлайды. Сонлықтан, математикалық моделди анализлеў арқалы алынған жуўмақлар жуўық характерде болады.

Әдетте математикалық моделди дүзиў, қурылып атырған объекттиң, процесстиң ямаса системаның ең әпиўайы турпайы математикалық моделин дүзиўден ҳәм анализлеўден басланады.

Буннан кейин, егерде керек болса, модел қайта көрип шығылады ҳәм ол толықтырылады. Бул этап усылайынша бир-неше мәртебе қайталаныўы мүмкин.

Әмелий мәселелердиң математикалық моделин дүзиў, бул ең керекли ҳәм жуўапкерли жумыслардың бири болып табылады. Тәжирийбе соны көрсетеди, көп жағдайларда моделлерди дурыс таңлаў, бул мәселениң ярымынан көби шешилди деген сөзди аңлатады. Бул этаптың қыйыншылығы соннан ибарат, бунда математикалық ҳәм арнаўлы билимлерди бириктириўге туўра келеди. Себеби, тек математикалық билимлер жеткиликсиз болады, сонлықтан илимпаз физиканы, механиканы, ямаса техниканы, қулласы изертленип атырған объект, процесс ямаса система қайсы тараўдан болса, ол усы тараўдан жеткиликли билимге ийе болыўы шәрт. Буған қосымша ол электрон есаплаў машиналаринда жумыс ислеп билиўи ҳәм программаластырыў сыяқлы билимлерди де терең өзлестирген болыўы керек.

2-§. Компьютерде моделлестириў.

Илимий изертлеўлердиң жаңа усылларының бири, бул компьютерде моделлестириў болып табылады. Компьютерде моделлестириў тийкарынан төмендегилерге тийкарланады:

1. Изертленип атырған процесстиң математикалық моделин дүзиў;

2. Оғада жақары тезликке ийе (секундына миллионлаған әмел орынлай алатуғын) ҳәм адам менен диалогқа кире алатуғын жаңа типтеги электрон есаплаў машиналаринан пайдаланыў;

Компьютерде моделлестириўдиң тийкарғы мәниси дегенимиз, бул математикалық модел тийкарында электрон есаплаў машинасы жәрдеминде ҳәр-қыйлы экспериментлер сериясын жүргизиў арқалы объекттиң ямаса процесстиң қәсийетлерин изертлеў, ониң жумыс ислеў режимин ҳәм оптимал параметрлерин табыў, моделди реалластырыў болып табылады.

Мысалы, базы-бир процесстиң әмелге асыўының математикалық моделин биле отырып (базы-бир теңлемени), ониң коэффициентлерин, басланғыш ҳәм шегаралық шәртлерин өзгерте отырып сол объекттиң ямаса процесстиң өзин қалай алып баратуғынлығын изертлеўге болады. Буған қосымша алдын-ала ҳәр-қыйлы жағдайларда усы объекттиң қәсийетлери ҳаққында пикир жүргизиўге болады.

Санлы эксперименттиң және бир ықшамлылығы, ол оғада қымбатқа түсетуғын натурал экспериментти электрон есаплаў машинасында есаплаўлар жүргизиў менен алмастырады. Ол аз ўықыт ишинде кем қаржы менен оғада көп сандағы экспериментлерди жүргизиўге мүмкиншилик туўдырады. Буниң өзи қурамалы системаларды қайта ислеп тез арада өндириске шығарыў мүмкиншилигин береди.

Компьютерде моделлестириў ҳәм санлы эксперимент жаңа илимий изертлеў усылы ретинде математикалық моделлерди дүзиўде математикалық аппараты жаңалаўға ийтермелейди. Санлы экспериментлерди жүргизиў ушын ең актуал, перспектив тараўлар, бул оғада ири илимий техникалық ҳәм социал-экономикалық мәселелер болып табылады. Мысалы, атом электростанциясы ушын реакторларды проектлестириў, плотина ҳәм гидроэлектростанцияларды проектлестириў, мәмлекетлик, регионаллық ҳәм тараўлардың перспектив раўажланыў планларин дүзиў ҳ.т.б.

Айрым жағдайларда натурал эксперимент өткериў мүмкиншилиги болмайды, мысалы, термоядролық синтез, космослық кеңисликти изертлеў, айрым химиялық өндиристи изертлеў ҳәм проектлестириў ҳ.т.б. Бул экспериментлерди өткериў адам ден-саўлығына ҳәм өмирине қәўипли. Бул жағдайда бизге жәрдем бериўши жалғыз қурал, бул есаплаў эксперименти болып табылады.

Жуўмақлап айтқанда, компьютерде моделлестириў ҳәм санлы эксперимент математикалық емес изертлеўлерди математикалық мәселелерди (математикалық моделди) шешиўге алып келеди. Бул арқалы жақсы ойлап табылған математикалық аппарат ҳәм күшли есаплаў техникасы менен биргеликте процессти изертлеўдиң жаңа усылларин пайда етеди.

Солай етип, биз қарап атырған объекттиң, процесстиң ямаса системаның математикалық моделин (математикалық мәселени) дүздик, яғный әмелий мәселени математикалық мәселеге айландырдық. Буннан соң бул әмелий мәселени шешиўдиң кейинги екинши этапы пайда болады. Бул дегенимиз, әпиўайы болған математикалық мәселени шешиўдиң усылларын излеў ямаса ойлап табыў болып табылады. Бул излеп атырған усылларымыз электрон есаплаў машинасында реализациялаў ушын қолайлы болыўы шәрт.

Ҳәзирги ўақытта математикалық мәселелерди шешиўдиң усылларын тийкарғы еки группаға бөлиўге болады:

1. Мәселени шешиўдиң дәл усыллары;

2. Мәселени шешиўдиң санлы усыллары.

Буларға кейинги параграфларда тоқтап өтемиз.

3-§. Базы бир белгилеўлер ҳаққында.

Жумыс даўамында пайдаланылатуғын бази бир белгилеўлерди киритемиз.

1. Тор ҳәм торлық функциялар. Әпиўайы ҳәм дара туўындылы дифференциаллы теңлемелерди санлы шешиў ушын көбинесе шекли айырмалар усылы қолланылади. Бул параграфта шекли айырмалар усылының тийкарғы идеяларын әпиўайы мысалларда түсиндиремиз. [а,б] кесиндесиндеги тор деп усы кесиндидеги точкалардың қәлеген көплигине айтамыз. Тордың точкаларында аниқланған функция, торлық функция деп аталады. Бунан былай ω_N арқали белгиленеди.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots.. < x_{N-1} < x_N = b \qquad (1.1)$$

шәртлерин қанаатландыратуғын торды белгилеймиз. f_i арқали $f(x)$ функциясиниң $x_i \in \omega_N$ точкасындағи мәнисине айтамиз, яғный $f_i = f(x_i)$. $x_i \in \omega_N$ жоқарыдағы ω_N торыниң туйинлери деп аталады. [а,в] дағы тең өлшемли тор деп

$$\omega_h = \{x_i = a + ih, \quad i = 0,1,\ldots, N\} \qquad (1.2)$$

точкаларининң көплигине айтамыз. Бул жерде $h = {(a-b)}/{N}$ тордиң адымы.

Енди [а,в] аралығында аниқланған ҳәм узликсиз $u(x)$ функциясының туўындыларын жуўық есаплаў мәселесин қараймыз. Мейли $u(x)$ функциясы бизге керекли дәрежедеги тегис функция болсын. (1.2)-ге тийкарланып ω_h торын анықлаймыз ҳәм төмендегише белгилеўлер киритемиз:

$$u_i = u(x_i), \qquad u_{\bar{x},i} = {(u_i - u_{i-1})}/{(h)}$$

$$u_{x,i} = {(u_{i+1} - u_i)}/{(h)}, \qquad u_{\overset{\circ}{x},i} = {(u_{i+1} - u_{i-1})}/{(2h)}$$

Бул жазылған шекли айырмалар $u(x)$ функциясиниң $x = x_i$ точкасындағы сәйкес шеп, оң ҳәм орайлық айырмалы туўындлары деп аталади. Егерде x_i точкасы қабыл етилген болып, $i \to \infty$ те h адымы нөлге умтылса, онда жоқарыда көрсетилген ҳәр бир айырмалы қатнаслар x_i точкасында анықланған $u(x)$ функциясының туўындысының мәнисине умтылады. Сонлықтан, $u'(x)$ тың жуўық мәниси ретинде жоқарыдағы шекли қатнаслардың қәлеген биреўин қабыл етиўге болади. Енди диференциал аңлатпаны шекли айырма менен алмастырғанда кететуғин қәтеликти есаплаў қыйын емес. Мысали, $x = x_i$ точкасындағы шеп айырмалы туўындыны қарайық. Они төмендегише жазамыз:

$$u_{\bar{x},i} = \frac{u(x) - u(x-h)}{h}.$$

Фунцияны жайыўдың Тейлор формуласы бойынша төмендегиге ийе боламыз:

$$u(x-h)=u(x)-hu'(x)+\frac{h^2}{2}u''(\xi)\ , \quad \xi\in(x-h,x).$$

Сонлықтан

$$u_{\bar{x},i}=u'(x_i)-\frac{h}{2}u''(\xi_i). \tag{1.3}$$

$u'(x)$ диференциал аңлатпасын $u_{\bar{x},i}$ шекли айырмасы менен алмастырыўдан пайда болған қәтелик $u(x)-u'(x_i)$ аппроксимация қәтелиги деп аталады. (1.3)- жайылмадан аппроксимация қәтелигиниң $h\to 0$ да $o(h)$ қа тең екенлиги көринип тур. Бул жағдайда, h тың дәрежеси бирге тең болғанлықтан қәтелик биринши дәрежели деп аталади. 1.3-деги қалған шекли айирмалар жайылмасын келтиремиз:

$$u_{x,i}=u'(x_i)=\frac{h}{2}u''(\xi_i^{(1)})\,, \qquad (\xi_i^{(1)})\in(x_i,x_{i+1}) \tag{1.4}$$

$$u_{\overset{\circ}{x},i}=u'(x_i)+\frac{h^2}{26}u''(\xi_i^{(2)})\,, \qquad \xi_i^{(2)}\in(x_{i-1},x_{i+1}) \tag{1.5}$$

Бул (1.5)-аңлатпада орайлық айырмалы туўынды $u''(x)$ аңлатпасын екинши тәртипли дәликте аппроксимациялайды екен. Сонлықтан бул алдыңғы оң ҳәм шеп айырмалы туўындыларға қарағанда дәлирек болып табылады. Сонлықтан, (1.3)-(1.5) аңлатпаларын төмендеги көринисте жазыўды қабыл етемиз:

$$u_{\bar{x},i}=u'_i+O(h), \qquad u_{x,i}=u'_i+O(h), \qquad u_{\overset{\circ}{x},i}=u'_i+o(h^2).$$

Екинши тәртипли туўындыға ийе $u''(x)$ функциясын $x_i\in\omega_h$ точкасында екинши айырмалы туўынды деп аталатуғын

$$u_{\bar{x}x,i} = \frac{1}{h}(u_{x,i} - u_{\bar{x},i}) = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

аңлатпасы менен алмастырыўға болады. Тейлор формуласы арқали төмендеги аңлатпаға ийе боламиз:

$$u_{xx,i} - u''(x_i) = \frac{h^2}{12}u^{IV}(\xi_i)\,.$$

Ўақыт бойынша торларда жоқарыдағыдай анықланади. Мысалы, [0,T] кесиндисинде тең өлшемли

$$\omega_i = \{t_j = j\tau, \qquad j = 0,1...,M, \qquad M\tau = T\}$$

торын киритемиз. Бунда t-ўақыт бойынша адым. Жоқарыдағылардан келип шығып, (x_i, t_j) , $i = 0,1,...,N,$ $\quad j = 0,1,...,M$ точкалары кеңислик ҳәм ўақит бойынша дүзиген $\omega_{h\tau} = \omega_h x \omega_\tau$ (1-сызылма) тордың түйинлерин береди. Бунда (x_i, t_j) түйинлериниң

$$I_0 = \{0 \le x \le 1, \quad t = 0\}, \quad I_1 = \{x = 0, \quad 0 \le t \le T\}.$$

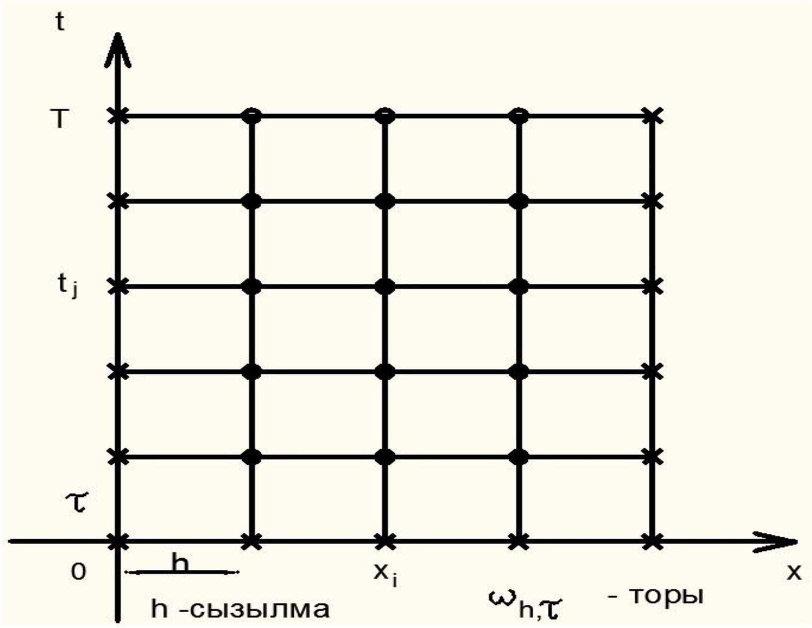
$I_2 = \{x = 1, \quad 0 \le t \le T\}$ кесиндилерине тийислилери $\omega_{h,\tau}$ торының шегаралық түйинлери, ал қалғанлары ишки түйинлери деп аталады.

Берилген

$$(x_0, t_n), (x_1, t_n), ..., (x_N, t_n) \tag{1.6}$$

түйинлериниң көплиги n-қатлам деп аталади. Демек қатлам деп $\omega_{h,\tau}$ торыниң бирдей ўақыт кординатасына ийе точкалар көплигине айтады екенбиз. Мысали, басланғыш қатлам

$$(x_0, t_0), (x_1, t_0), ..., (x_N, t_0),$$



1-сызылма. $\omega_{h,\tau}$ торы.

биринши қатлам

$$(x_0, t_1), (x_1, t_1), ..., (x_N, t_1) \text{ ҳ.т.б.}$$

Ўақыт бойынша айырмалы туўындылар төмендегише белгиленеди: ($u_i^j = u(x_i, t_j)$, (x_i, t_j) точкасына сайкес функция) :

$$u_{t,i}^j = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau}, \quad u_{\bar{t}t,i}^j = \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\tau^2}, \quad u_{\overset{\circ}{t},i}^j = \frac{u_i^{j+1} - u_i^{j-1}}{2\tau}.$$

Солай етип биз диференциаллы аңлатпаларды шекли айырмалар менен алмастырыўдың ең әпиўайы мысалларын көрип өттик. Улыўма жағдайда диферанциаллы аңлатпаны шекли айырмалар менен алмастырыўдан пайда болатуғын қәтелик тордың түйинлеринин жайласыўына ҳәм функцияниң тегислигине (узликсизлигине) байланыслы болады.

4-§. Әпиўайы ҳәм дара туўындылы дифференциаллы теңлемелер ҳәм оларды шешиўдиң усыллари ҳаққында.

1. Дифференциаллы теңлеме түсиниги. Дифференциал есабы тийкарында базыбир берилген функцияның қәсийетлерин изертлей аламыз. Мысалы, ол функцияниң өсиў ҳәм кемиў аралықларын, өсиў тезлигин, максимум ҳәм минимум точкаларын, оның графигиниң бағдарын ҳәм тағы басқа. Енди буған кери болған мәселени қарайық, яғный функцияның қәсийетлери берилген. Усы берилген қәсийетлери бойынша белгисиз функцияның өзин табыў мәселеси. Ең әпиўайы жағдайларда бул мәселе интеграл есабында шешимин табады, яғный бул мәселени анық емес интеграл жәрдеминде шешиўимиз мүмкин. Ал басқа жағдайларда қурамалы математикалық аппараттың кереклиги мәлим. Алгебра курсында белгисиз шамаларды табыў ушын теңлемелерден пайдаланылады. Маселениң қойылыўына қарап белгисиз шама менен берилген шамалардың байланыстырыўшы қатнас дүзиледи, яғный теңлеме дүзиледи, кейин бул теңлемени шешиў арқалы изленип атырған белгисиз шама табылады. Усыған уқсас, математикалық анализде де белгисиз функцияны табыў ушын ониң белгили қәсийетлерин көрсетиўши шамалар бойынша теңлеме дүзиледи. Бул кейинги айтылған математикалық мәселениң белгили қәсийетлерин көрсетиўши шамалар, туўындылар (ямаса дифференциаллар) арқалы бериледи. Басқаша сөз бенен айтқанда белгисиз функция менен оның туўындыларын ямаса дифференциалларын байланыстыратуғын аңлатпаға ийе боламыз. Бул аңлатпа дифференциаллы теңлеме деп аталады. Бул теңлемени шешиў арқалы белгисиз функцияны табамыз.

Солай етип, дифференциаллы теңлеме ең әхмийетли ҳәм тийкарғы математикалық түсиниклердиң бири болып табылады. Базыбир реал қубылыслар ямаса процессти изертлеў нәтийжесинде алынған дифференциаллы теңлеме усы қубылыстың ямаса процесстиң дифференциаллы модели (ямаса математикалық модели) деп аталады. Демек, дифференциаллы моделлер, бул бизди қоршап турған орталықтағы қубылыслардың математикалық моделлериниң бири болып табылады. Соны да айтып өтиўимиз керек, бул дифференциаллы моделлердиң де оғада көплеген түрлери бар.

Әпиўайы дифференциаллы моделлерди дүзгенимизде, ең тийкарғы, оғада әҳмийетли орынды тутатуғын нәрсе, бул үйренилип атырған мәселениң тәбияты менен байланыслы нызамларды билиў болып табылады. Мысалы, механикада бул Ньютон нызамы болыўы мүмкин, электр шынжырлари теориясында – Кирхгоф нызамы, химиялық реакциялар теориясында –салмақтың ҳәрекетлениў нызамы ҳ.т.б. Практикада сондай жағдайларда болыўы мүмкин, мысалы, дифференциаллы теңлемениң өзин дүзетуғын нызамниң өзи белгисиз. Сонлықтан, бундай жағдайларда болып атырған процесстиң параметрлериниң, яғный өзгериўши шамалардың азғана өзгериўине сәйкес базыбир шекли өтиўлер арқалы ерисемиз.

2. Дара туўындылы дифференциаллы теңлеме. Дара туўындылы дифференциаллы теңлемелер дегенимиз, бул дара туўындыларды өз ишине алатуғын теңлемелерге айтамыз. Мысалы, әпиўайы дифференциалы теңлемелерде белгисиз функция тек бир ғана өзгериўшиге байланыслы болады, ал дара туўындылы теңлемелерде белгисиз функция бир неше өзгериўшилерге байланыслы болады (мысалы, температура $u(x,t)$ ўақыт t ҳәм x координаталарина байланыслы болады).

Ең әҳмийетли дара туўындылы теңлемелерге мысал келтирейик. Қысқаша,

$$u_t \equiv \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad u_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

деп белгилесек, онда төмендеги теңлемелерди қараўға болады.

$u_t = u_{xx}$ (бир өлшемли жыллылық өткизгишлик теңлемеси),

$u_t = u_{xx} + u_{yy}$ (еки өлшемли жыллылық өткизгишлик теңлемеси) ҳ.т.б.

Бунда белгисиз функция y бирден көп болған өзгериўши шамаларға байланыслы. Өзгериўши y ғәрезли өзгериўши деп аталады. Ал дифференциал қайсы өзгериўшиден алынған болса, бул өзгериўши ғәрезсиз өзгериўши деп аталады. Мысалы,

$$u_t = u_{xx}$$

теңлемесинде $u(x,t)$ функциясы ғәрезсиз еки x ҳәм y өзгериўшилериниң функциясы болып табылады.

Теңлемелерде туўындының пайда болыўының тийкарғы себеби, бул туўындылар оғада әҳмийетли физикалық шамаларда, мысалы, тезлик, тезлениў, күш, қозғалыс, ағым, тоқ ҳ.т.б. усыған уқсаған шамаларды аңлатады. Солай етип, белгисиз функцияларды өз ишине алатуғын дара туўындылы теңлемелер пайда болады. Бул теңлемелердеги белгисиз функцияларды табыў, теңлемелерди шешиў деп аталады. Усы теңлемелердиң белгили бир шешимин табыў ушын оларға басланғыш ҳәм шегаралық шәртлер қойылады. Бул теңлемелерди шешиўдиң ҳәзирги ўақытта оғада көплеген усыллары ойлап табылған. Олардың ишиндеги ең әҳмийетлилилери төмендеги усыллар болып табылады.

1. Өзгериўшилерди айырыў усылы;

2. Санлы усыллар;

3. Интеграллық теңлемелер усылы;

4. Вариациялық усыллар;

5. Меншикли функциялар бойынша жайыў усылы ҳ.т.б.

Биз үшинши бапта бул усыллардың ишинде ең әҳмийетли усылдың бири, санлы усылға тоқтаймыз. Бул жағдайда берилген дара туўындылы теңлеме шекли айырмалы теңлемелер системасына келтириледи. Буннан соң бул шекли айырмалы теңлемелер системасы электрон есаплаў машиналаринда итерациялық усыллардың бири жәрдеминде шешиледи.

Жуўмақ

Жумыстың кирисиў бөлиминде үйренип шығылған әдебиятлардан жуўмақ жасап диссертацияда қойылған мәселениң математикадағы орны, актуаллығы, ҳәзирги күндеги үйрениилиў дәрежеси ҳ.т.б. баян етилди. Диссертацияның биринши бабында кейинги изертлеўлер ушын керекли болған мағлыўматлар берилген. Бул баптың биринши параграфында математикалық моделлестириў түсинигине кең тоқтап өтилди. Оның анықламасы, мақсети, түрлери, моделдиң тийкарғы схемалары ҳәм қандай жағдайларда қолланылыўы ҳаққында баян етилди. Биринши баптың екинши параграфы компьютерде моделлестириўге бағышланды. Олардың анықламасы, мақсети, түрлери, тийкарғы схемалары ҳәм қандай жағдайларда қолланылыўы ҳаққында тоқтап өтилди. Усы баптың үшинши параграфында санлы усыллар теориясында қолланылатуғын базыбир тийкарғы белгилеўлер берилди. Баптың төртинши параграфы дифференциалы теңлемелер ҳәм оларды шешиў усылларына бағышланды. Бунда әпиўайы ҳәм дара туўындылы дифференциалы теңлемелерге анықламалар берилди. Санлы усыллар теориясында қолланылатуғын тийкарғы белгилеўлерге, кеңислик ҳәм ўақыт бойынша тор ҳәм торлық функцияларға, сондай-ақ шекли айырмаларға қысқаша тоқтап өтилди. Сондай-ақ оларды шешиўдиң усылларына тоқтап өтилди.

I I Бап. Фохта теңлемеси ҳәм оны шешиў усыллары ҳаққында

1-§ . Фохта теңлемеси. Басланғыш ҳәм шегаралық шәртлер.

Фохта (айырым жерлерде Фокста деп те аталады) теңлемесы жабысқақ ийилиўшең орталықтың деформациясы механикасындағы толқынлы процесслердиң математикалық модели болып табылады. Мысалы, суўға қанған теңиз шөгиндилериндеги сестиң тарқалыў теорясы сызықлы толқын теңлемеси тийкарында раўажланады, бирақ бул жағдайда математикалық моделге қосымша жаңа диссипатив ағза қосылады. Бул қосымша ағза гранулалардың (ылайлардың) бири-бири менен контактинен пайда болады. Бундай мәселелер және пъезоэлектрик орталықта толқынлардың тарқалыў теориясында да ушырасады. Сондай-ақ пъезоэлектрикалық резонаторлардың тербелисиде усындай мәселеге алып келеди.

Мейли биз төмендеги бир математикалық моделди қарайық.

Қәлеген денелер сыяқлы пезоэлектрлик брусокта (бөлекше) әпиўайы ямаса өз-ара байланысқан тербелислерди басынан кеширеди. Бул жағдайда брусоктың тербелисы электр майданы арқалы әмелге асырылыўы мумкин. Мысалы, брусоктың сәйкес бетлерине қойылған электродларға жиберилген кернеў арқалы тербелис әмелге асады.

Пезоэлектрик орталықтағы ийилиўшең толқынлардың тарқалыў теорясы ҳәм пезоэлектрлиқ резонатрлардың тербелис теориясы бир тәрептен механиканың тийкарғы нызамларына сүйенеди, ал екинши тәрептен электромагнитли толқынлардың матеметикалық модели болған Максвелл теңлемелерине сүйенеди. Бул төмендеги нызамлар:

а) Массаның сақланыў нызамы:

$$\frac{d}{dt}(\int_{\mathrm{V}} sd\mathrm{V}) = 0\,; \tag{2.1}$$

б) Импулстың сақланыў нызамы:

$$\int_s t(n)ds + \int_{\mathrm{V}} fd\mathrm{V} = \frac{d}{dt}(\int_{\mathrm{V}} \rho v d\mathrm{V})\,; \tag{2.2}$$

в) Импулс моментниң сақланыў нызамы:

$$\int_s rxt(n)ds + \int_{\mathrm{V}} rxfd\mathrm{V} = \frac{d}{dt}(\int_{\mathrm{V}} rx\rho v d\mathrm{V}) \tag{2.3}$$

ҳәм Максвелл теңлемелеринен:

$$\oint_c Edt = -\frac{d}{dt}(\int_s Bds)\,, \tag{2.4}$$

$$\oint_s Dds = \int_{\mathrm{V}} \rho_e d\mathrm{V}\,. \tag{2.5}$$

Бул жоқарыдағы келтирилген теңлемелерде V-деформацияланған дениниң элементар көлеми, ρ - тығызлық ρ_e - еркин зарядтың көлемли тығызлығы, s - дениниң бетиниң майданы, f - дениниң бирлик көлемине тәсир етиўши ишки күш, $t(n)$- дениниң бетиниң бирлик майданына тәсир етиўши куш, V-дениниң точкасының ҳәрекетиниң тезлиги, r - қарап атырған дениниң электр көлеминиң радиус-векторы, E - электр майданының кернеўи, D-электрлик ҳәрекет (индукция), B-магнитлик эндукция.

Ендигиден былай, поляризацияланатуғын пезоэлектрик материалларды қараймыз. Магнитлениўши ҳәм ярым электр зарядларынан туратуғын материаллар ҳаққында сӨз етпеймыз.

Жоқарыда (2.4)- ҳәм (2.5)- теңлемелерди компонентлери бойынша төмендегише жазамыз:

$$E_i = \varphi_{,i} - \frac{dA_i}{dt}, \qquad (2.6)$$

$$D_{i,i} = 0, \qquad (2.7)$$

бунда A_i-вектрлық потенциалды аңлатыўшы. Бул магнит майданының кернеўин аңлатыўшы менен

$$H_i = e_{ijk} A_{j,k} \qquad (2.8)$$

теңлемеси арқалы байланысқан. Бунда e_{ijk} -Леви-Чивита коэффициенти.

Улыўма жағдайда

$$\left|\frac{dA_i}{dt}\right| << \left|\varphi_{,i}\right|$$

болғанлықтан, (2.6)-ның оң жағындағы екиншы ағзаны есапқа алмасақта болады. Онда (2.6)-теңлеме

$$E_i = -\varphi_{,i} \qquad (2.9)$$

турине келеди.

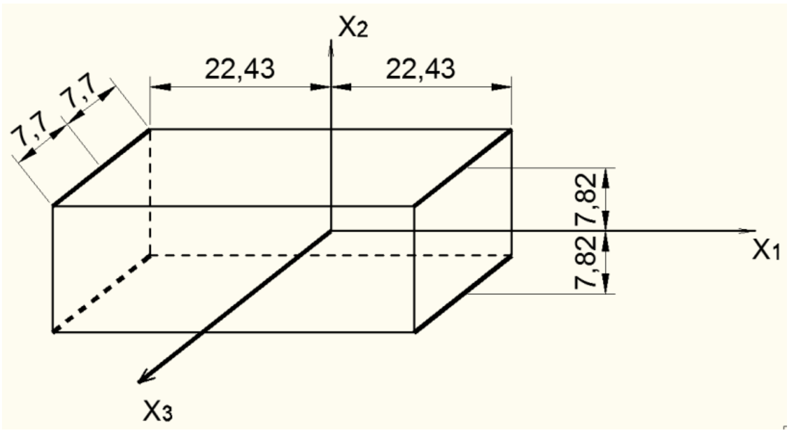
Егерде (2.2)-теңлемедеги бирлик майданға тәсир етиўши $t(n)$ күшин ийилиўшең кернеў тензоры T_{ij} арқалы аңлатсақ ҳәм (2.2)-ниң биринши ағзасына Гаусс теоремасын қоллансақ, онда төмендеги үш теңлемелер системасына ийе боламыз:

$$T_{ij,i} + f_j = \rho \frac{dv}{dt} \ . \qquad (2.10)$$

Бул ҳәрекеттиң кинематикалық теңлемесы болып табылады. Ендигиден былай пезоэлектрик резонатор тербелисин қарағанымызда усы (2.10) - ҳәм (2.7) - теңлемелерден пайдаланамыз.

Жоқарыдағы (2.10) теңлеме арқалы аңлатылған ҳәрекеттиң теңлемеси электромагнитлик ийилиўшеңлик тербелистиң толық системасынан тек ғана ийилиўшен толқынларды айырып алыўға мумкиншилик береди.

Мейли узынлығы $2l$, ени $2b$ ҳәм қалыңлығы $2a$ болған стерженди қараймыз. Туўры муйешли кординаталар системасы x_1, x_2, x_3 2-сызылмадағыдай етип берилген болсын.



2-сызылма. Туўры муйешли кординаталар системасындағы стержен

Мейли стерженниң ени ҳәм қалыңлығы оның узынлығына қарағанда анағурлым киши болсын, яғный стержен көп узын деп есаплаймыз. Бундай стержен тик, айланбалы ямаса таўланбалы тербелис жасайды. Егерде стерженниң ениниң размерин азғана улкейтип оны жуқа жиңишке пластинаға айландырсақ, онда тик ҳәм айланбалы тербелис бир-бири менен байланыста болады ҳәм олда жылысыў тербелисин сезеди.

Оғада жиңишке ҳәм оғада жуқа стерженниң тербелиси нәтийжесинде қалыңлығы ҳәм ениниң бағыты бойынша пайда болған деференцияны оғада аз деп есаплаўға болады, ал тик тербелислерди бир өлшемли мәселе ретинде қараўға болады [8] . Дәслеп стерженниң пъезоэлектрлик қәсийетлериде оғада аз деп есаплаймыз. Стерженниң узынлығының бағыты бойынша деференцияны S_{ii} деп белгилейик. Мейли, стерженге тек ғана ийилиўшең кернеў T_{ii} тәсир ететуғын болсын. Онда,

$$T_{ij} = C_{ijkl} S_{kl}, \quad (i, j, k, l = 1,2,3) \ . \tag{2.11}$$

аңлатпа бойынша T_{ii} кернеўин дефомация S_{ii} арқалы аңлатамыз. Бул S_{ii} ди

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{2.12}$$

теңлемесинен аламыз. Жоқарыдағы (2.11)-деги C_{ijkl} -қаттылық коэффициенти, ал (2.12)-деги S_{ij}-деформация тензоры болып табылады. Ол екинши дәрежели тензор болып тоғыз ағзадан турады. Солардың алтаўы бир-бирине ғәрезсиз болады: $S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{22}, S_{23}, S_{33}$

Солай етип, T_{ii} ды (2.10)-ға апарып қойсақ онда стерженниң тик тербелисиниң теңлемеси төмендеги түрге ийе болады:

$$u_{i,ii} - \frac{1}{c_i^2}\ddot{u} = \mu(x_i, t), \tag{2.13}$$

бунда $\mu(x_i, t)$-мәжбүрий тербелис пайда етиўши күш, C_i-стерженниң узынлығы бойлап тарқалыўшы ийилиўшең толқын тезлиги. Бул (2.13)-теңлемеде төмендеги белгилеўлер киритилген:

$$U_{i,ii} = \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_i^2}, \quad \ddot{U}_i = \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2}.$$

Жоқарыдағы (2.13)-дифференциаллы теңлеме

$$Q_T = \{d_1 < x_i < d_2, \quad t > 0\}$$

областында анықланған (кеңислик ҳәм ўақыт бойынша).

Егерде стерженге сыртқы күшлер тәсир етпесе, онда $\mu(x_i, t) = 0$ болады ҳәм (2.13)-теңлеме әпиўайы

$$u_{i,ii} - \frac{1}{c_i^2}\ddot{u} = 0 \qquad (2.14)$$

түрине келеди.

Бул (2.13)- ҳәм (2.14)-теңлемелер белгили толқын теңлемелери болып табылады.

Тик тербелисте турған пъезоэлектрик стерженниң резонанслы жийилиги ушын аңлатпа кириткенимизде биз тербелис сөнбейди ҳәм базы бир жоғалтыўлар болмайды деп қабыл еттик (мысалы, ишки суйкелиўден). Ал массаниң ҳәм электродлардың ийилиўшеңлик қәсийетин есапқа алмадық. Енды усы факторларды есапқа аламыз.

Мейли сүйкелиў нәтийжесинде сүйкениўши тербелисти қарайық. Бунда сүйкелиўди стержен тербелисине қарсы бағдарланған күш ҳәрекети менен алмастырайық. Бул күш ҳәрекетиниң шамасы деформацияның ўақыт бойынша биринши туўындысына пропарционал болады. Усы айтылғанларды есапқа алсақ толқын ҳәрекети теңлемесинде қосымша ағза пайда болады ҳәм ол теңлеме төмендеги түрге ийе болады:

$$\frac{1}{S_{i,ii}} u_{i,ii} + F_t \dot{u}_{i,ii} - p\ddot{u}_i = 0 \qquad (2.15)$$

Бунда F_t -суйкелиўди ҳарактерлеўши турақлы, $\frac{1}{S_{ii}}$ Юнг модули.

Бул (2.15) теңлемени ең дәслеп Фохта (русша әдебиятларда) ямаса Фоихта, Фогт (инглиз тилиндеги әдебиятларда) киритеди [2,3,8]. Сол ушын айырым әдебиятларда (2.15)- диференцияллы теңлеме Фохта теңлемеси деп аталады. Бизде усы жумыста Фохта теңлемеси деп қабыл етиўмиздиң себеби сол.

Енди (2.15)-теңлемесиниң басланғыш ҳәм шегаралық шәртлерине тоқтап өтейик. Ол ушын (2.15)-Фохта теңлемесин көп өлшемли кеңислик жағдайында төмендеги улыўма көринисте жазамыз:

$$\frac{\partial^2 u}{dt^2} - \delta \frac{\partial}{\partial t}(L_i u) = L_2 u + f(x,t)\,, \tag{2.16}$$

$$(x,t) \in Q_T = \{x \in \Omega, \quad t \in (0,T]\}$$

Бунда L эллиптикалықоператорлар:

$$L_\alpha u = \sum_{m=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_m}(k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_m}), \quad \alpha = 1,2$$

$$0 < k_0 \le k(x) \le k_1, \quad x \in \Omega C R^p\,, \quad p = 1,2,...,$$

$\delta > 0$-дисперсияны ҳарактерлеўшы санлы параметр.

Бул жоқарыдағы (2.16)- ямаса (2.15) теңлеме ўақыт t бойынша екинши тәртипли туўындыны өз ишине алатуғын болғанлықтан, $t > 0$ болғанда теңлеме жалғыз шешимге ийе болыўы ушын еки басланғыш шәртлерди бериўимиз керек:

$$u(x,0) = u_0(x) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \tag{2.17}$$

Әдетте (2.15)-теңлеме ушын (бир өлшемли) тийкарынан төмендеги уш шәрттиң биреўи қойылады (классыкалық шәртлер):

1. **Бириншы шегаралық шәрт.** Шегаралық точкаларда процесс жағдайы бериледи:

$$u(0,t) = g_1(t), \quad u(L,t) = g_2(t)\,.$$

Бунда 0 ҳәм L кесинди $o \le l \le L$ дың басланғыш ҳәм ақырғыточкалары.

2. **Екиншы шегаралық шәрт.** Шегаралық точкалардағы берилген күшлер:

$$u_x(0,t) = g_1(t), \qquad u_x(L,t) = g_2(t).$$

3. **Ушинши шегаралық шәрт.** Шегаралық точкалардағы ийилиўшеңли бекитиў:

$$u_x(0,t) - \gamma_1 u(0,t) = g_1(t), \quad u_x(L,t) - \gamma_2 u(L,t) = g_2(t).$$

Бунда γ_1, γ_2 - базы бир турақлы санлар. Бул шегаралық шәртлер араласыпта келиўи мүмкин. Мысалы, басланғыш точкада биринши шегаралық шәрт қойылса, ол ақырғы точкада екинши ямаса ушинши шегаралық шәртлер қойылыўы мүмкын. Бул шегаралық шәртлерден басқада классикалық емес шегаралық шәртлер қойылыўы мүмкин.

2-§. Фохта теңлемесине мысаллар ҳәм оларды шешиў усыллари.

1. Телеграф теңлемесы. Проводтан (сымнан) электр тоғы өткенде оның дөгерегинде тоқтың күшин ҳәм кернеў шамасын өзгертиўши электромагнит майданы пайда болады. Усы өзгерислер сымда белгили бир тербелис процессин пайда етеди.

Сымниң көшеры бойлап OX көшерин жўргизейик, ал кордыната басын оның ақырғы теңлемелериниң бирине қойайық. Мейли сымның узынлығы l болсын. Ток күши i ҳәм кернеўи v болсын. Олар обсцисса

x ҳәм ўақыт t ның функциялари болады. Бул i ҳәм v өз-ара биринши тәртипли дара туўындылы дифференциаллы теңлемелер арқалы байланысқан. Бул теңлемелерди келтирип шығарыўда, яғный математикалық моделин ислеп шығыўда, биз төмендегилерди есапқа аламыз. Мейли сым бойлап көлем, актив қарсылық, самоиндукция ҳәм шығып кетиў теңдей ҳәм узиликсиз етип бөлистирилген болсын, яғный оларды ҳарактерлейтуғын шамалар C, R, L ҳәм G турақлы ҳәм сымниң бир бирлик узынлығына есапланған болсын.

Енди $x = x_1$ ҳәм $x = x_2$ кесиндилери арасында жайласқан провод бөлегин қарайық. Сымниң усы бөлегине Ом нызамын қоллай отырып төмендегини аламыз:

$$v(x_1,t) - v(x_2,t) = R\int_{x_1}^{x_2} i(x,t)dx = L\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f\,(x,t)}{\partial t}dx\,. \tag{2.18}$$

Екинши тәрептен

$$v(x_1,t) - v(x_2,t) = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial v(x,t)}{\partial x}dx$$

болғанлықтан бул еки теңликтен төмендеги теңликти аламыз:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + h\frac{\partial i}{\partial t} + Ri\right)dx = 0\,.$$

Буннан, x_1 ҳәм x_2 ерикли болғаны ушын

$$\frac{\partial v}{\partial x} + L\frac{\partial i}{\partial t} + Ri = 0\,. \tag{2.19}$$

дара туўындылы дифференциаллы теңлемеси келип шығады.

Енди бир ўақыт бирлигинде (x_1, x_2) бөлегинен өтыўши электр муғдары

$$i(x_1,t) - i(x_2,t) = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial i}{\partial x}dx$$

аңлатпасына тең ҳәм ол усы сым бөлегин зарядлаў ушын керекли болған электр муғдары менен изоляциялаўдың жақсы емеслигинен кеткен электр муғдарыниң қосындысына тең болады, яғный

$$c\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial v}{\partial t}dx + G\int_{x_1}^{x_2} v dx.$$

Солай етип,

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial i}{\partial x} + c\frac{\partial v}{\partial t} + Gv\right)dx = 0.$$

Буннан

$$\frac{\partial i}{\partial x} + c\frac{\partial v}{\partial t} + Gv = 0 \tag{2.20}$$

Бул (2.19) ҳәм (2.20)-теңлемелер системасы ерикли электр тербелисиниң дифференцияллы теңлемелери болып табылады.

Егерде биз (2.19)-теңлемени x бойынша дифференциалласақ, ол (2.20)-теңлемени t бойынша дифференциалласақ ҳәм алынған аңлатпалардан $\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}$ шығарып тасласақ, онда v ға қарата төмендеги екиншы тәртипли дифференциаллы теңлемеге ийе боламыз:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = Lc\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (Rc + Gh)\frac{\partial i}{\partial t} + GRi. \tag{2.21}$$

Тап усыған уқсас i ток күши ушында төмендеги теңлемени аламыз:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = Lc\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (Rc + Gh)\frac{\partial i}{\partial t} + GRi. \tag{2.22}$$

Солай етип, кернеў v ҳәм ток куши i төмендеги бирдей дифференциаллы теңлемени қанаатландырады екен:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = a_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2b_0 \frac{\partial w}{\partial t} + c_0 w. \qquad (2.23)$$

Бунда

$$a_0 = Lc, \quad 2b_0 = Rc + GL, \quad c_0 = GR \ . \qquad (2.24)$$

Бул (2.23)-теңлеме **телеграф теңлемесы** деп аталады.

Бул телеграф теңлемесине жаңа $u(x,t)$ функциясын

$$w = e^{\frac{b_0}{a_0}} u$$

формуласы арқалы киритсек, онда ол төмендеги

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b^2 u \qquad (2.25)$$

толқын теңлемесине түрленеди. Бунда

$$a = \frac{1}{\sqrt{a_0}}, \quad b = \frac{\sqrt{b_0^2 - a_0 c_0}}{a_0} \ . \qquad (2.26)$$

Жоқарыда алынған (2.23) - телеграф теңлемеси (2.16) – Фохта теңлемесиниң дара жағдайы болып табылады. Бунда

$$\delta = -2b_0, \quad L_1 = \frac{1}{a_0} E, \quad L_2 = \frac{1}{a_0} (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_0 E).$$

Бул (2.23) - телеграф теңлемесине басланғыш дара шегаралық шәртлер биринши параграфтағы сыяқлы қойылады.

2. Теңлемени шешиў усыллари. Дара туўындылы дифференциаллы теңлемелерди шешиў усыллари ҳаққында I-бапта қысқаша тоқтап өттик. Биз жоқарыда (2.23) - телеграф теңлемесин

$$w = e^{-\frac{b_0}{a_0}t} u \tag{2.27}$$

турлендириўи арқалы (2.25) - толқын теңлемесин алған едик. Енди биз сондай бир жағдайды қарайық, жуўмағында $b = 0$ болатуғын, яғный

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C}$$

шәрти орынланыўы керек. Онда $\mu = -\frac{b_0}{a_0}$ деп белгилеп алсақ, биз

$$\mu = \frac{R}{L}$$

аңлатпасына ийе боламыз.

Солай етип, биз (2.25) - теңлемени төмендеги бир өлшемли әпиўайы толқын теңлемесине алып келдик:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ . \tag{2.28}$$

Бул (2.28)- теңлемениң улыўма шешими [21]

$$u(x,t) = \theta_1(x - at) + \theta_2(x + at) \ . \tag{2.29}$$

түринде болады. Бул шешим Даламбер шешими деп аталады. Бунда турақлы сан a кабел бойынша тарқалыўшы толқынның тезлиги болып табылады.

Бул (2.29) - шешимнен (2.27) - турлендириўи арқалы (2.23)- теңлемениң шешимине өтемиз:

$$w(x,t) = e^{-\mu t}[\theta_1(x-at) + \theta_2(x+at)] \ . \qquad (2.30)$$

Бунда θ_1, θ_2 базы бир ерикли функциялар. Олар басланғыш ҳәм шегаралық шәртлер арқалы анықланады.

Солай етип, биз телеграф теңлемесиниң аналитикалық шешимин алдық. Биз буннан былай аналитикалық (дәл) шешимлерге тоқтап отырмаймыз. Себеби, теңлемениң дәл шешимин барлық ўақыт табыў мумкиншилиги бола бермейди. Басланғыш, шегаралық шәртлердеги ҳәм теңлемениң оң жағы ямаса коэффициентлериниң айрымлари қурамалы функциялар болған жағдайды ол теңлемени дәл шешип болмайды. Сонлықтан, бундай теңлемелерди шешиўдиң тийкарғы жолы, жоқарыда айтқанымыздай, жуўық шешиў усылларынан пайдаланып шешиў болып табылады. Бундай усыллар бизге теңлемениң шешими ҳаққында жоқарыдағыдай базы бир формулаларды емес, ал базы бир санларды ямаса санлы таблицаны береди.

3. Шекли айырмалар усылы. Мейлы бизге Фохта теңлемесин төмендеги басланғыш ҳәм шегаралық шәртлерде шекли айырмалар усылы менен шешиў керек болсын:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \delta \frac{\partial}{\partial t}(L_1 u) = L_2 u + f(x,t),$$

$$(x,t) \in Q_T = [x \in \Omega, \quad t \in (0,T]), \qquad (2.31)$$

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = k_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\Big|_{t=0} = u_1(x), \qquad (2.32)$$

$$\mu(0,t) = \mu(t), \quad x \in \Gamma = \partial\Omega, \quad t \in [0,T]. \qquad (2.33)$$

Мейли , әпиўайылық ушын $L_1 = L_2 = L, \quad k(x) \equiv 1$ ҳәм $\mu(t) = 0$ болсын.

Енди (2.31) теңлемедеги кеңислик бойынша дара туўындыларды бириншы баптың үшинши параграфындағы көрсетпелерден пайдаланып аппроксимацияласақ төмендеги системаға ийе боламыз:

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}(t) - \delta \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u_n^{i+1} - 2u_n^i + u_n^{i-1}}{h^2}\right)(t) = \frac{u_n^{i+1} - 2u_n^i + u_n^{i-1}}{h^2} + f_n(t)\,,$$

ямаса операторлардан пайдаланып жазсақ

$$D\ddot{u} + B\ddot{u} + Au = F\,. \tag{2.34}$$

Бунда $D = E,\quad \ddot{u} = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2},\quad \dot{u} = \dfrac{\partial}{\partial t}$ A ҳәм B операторлары айырмалы операторлар болып табылады.

Бул (2.34)-теңлеме екинши тәртипли әпиўайы дифференциаллы теңлемелер системасы болып табылады. Оны дәл усыллар менен ямаса жуўық шешиў усыллары менен шешиў мумкин.

Көп жағдайларда A ҳәм B операторлары симметриялы операторлар болып табылады.

Жоқарыдағы (3.34)-теңлеме ушын басланғыш шәртлер (2.32)-болады.

Енди (2.34), (2.32)- мәселени шекли айырмалар усылы менен I-баптағы белгилеўлерден пайдаланып төмендегише аппроксимациялаўға болады:

$$Dy_{\bar{t}t} + By_{\overset{\circ}{t}} + Ay = \varphi \tag{2.35}$$

$$y(0) = y_0\,,\ \ y_t(0) = y_1\,. \tag{2.36}$$

Бул схема [12] жумысында толық изертленген. Оған биз тоқтап отырмаймыз.

3-§. Шешимниң орнықлылығы, жыйнақлылығы ҳәм дәллиги ҳаққында.

Биз жоқарыдығы қарап өткенимиздей айырмалар схемасының шешимлери берилген дифференциаллы мәселениң шешимлерин жуўық түрде алмастырады, яғный бул алмасыўда дәл шешим менен жуўық шешим арасындағы белгили муғдарда қәтелик кетеди. Усы қәтелик қанша аз болса, соншели жуўық шешим дәл шешимге умтылады. Дифференциаллы теңлемелерди жуўық шешиўдиң оғада көп санлы усыллары бар. Мына усы көп усыллардың ишинен ең жақсысын, яғный қойылған шәртлердиң барлығын қанаатландыратуғынын сайлап алыў ушын схеманың (ямаса санлы усылдың) аппросимакция қәтелиги, орнықлылығы, жыйнақлылығы ҳәм дәллиги түсиниклери киритиледи.

Әдетте шекли айырмалар теориясында дифференциаллы теңлемелерди, басланғыш ҳәм шегаралық шәртлерди компактлы түрде жазыў ушын операторлар деп аталатуғын базыбир белгилерден пайдаланылады. Мысалы, төмендеги теңлемелердиң қәлегенин

$$\mathrm{Y}' = f(x), \quad \mathrm{Y}'' = f(x), \quad \mathrm{Y}'' + \mathrm{K}^2\mathrm{Y} = f(x),$$

$$L\mathrm{Y} = F(x)$$

көринисинде жазыўға болады. Бунда L дифференциаллы оператор болып табылады. Ол дифференциалланыўшы әмеллерди өз ишине алады. Оның мәниси ҳәр-қыйлы дифференциаллы теңлемелер ушын ҳәр-қыйлы болады. Аргумент x тың өзгериў областын G деп белгилесек, онда $x \in G$ болады.

Шегарада берилген қосымша шәртлерде операторлар көринисинде берилиўи мүмкин. Мысалы,

$$\mathrm{Y}(0) = \mathrm{A}, \quad \mathrm{Y}(a) = D, \quad \mathrm{Y}(b) = L, \quad \mathrm{Y}(0) = \mathrm{A} \quad \mathrm{Y}'(0) = \mathrm{B}$$

шәртлериниң қалегенин

$$l\mathrm{Y} = \phi(x), \qquad x \in \Gamma$$

операторлы теңлеме көринисинде жазыў мүмкин. Бунда $l-$басланғыш ҳәм шегаралық шәртлерди операторды, $\phi(x)-$усы шәртлерди оң тәрепиндеги аңлатпа, $\Gamma-$ қаралып атырған областтың шегарасы (яғный, $x=0, \quad x=a, \quad x=b$ ҳ.т.б.).

Солай етип, басланғыш ҳәм шегаралық шәртлери менен берилген дифференциаллы теңлемени (дифференциаллы мәселени) улыўма жағдайда төмендегише жазыў мүмкин:

$$L\mathrm{Y} = F(x), \qquad x \in G,$$

$$l\mathrm{Y} = \phi(x), \qquad x \in \Gamma.$$

Мейли айырмалар усылында берилген дифференциаллы теңлеме айырмалар теңлемеси менен алмастырылады. Ол ушын G областында адымы h болған тор жасалады. Бул тордың түйинлери болған $x_0, x_1,...$ көплигин g_h деп белгилейик.

Жоқарыдағы көрип өткенимиздей соңғы теңлеме

$$L_h y_h = f_n, \qquad x \in g_h, \tag{2.37}$$

айырмалар теңлемеси менен алмастырылады (аппроксимайияланады). Бунда L_h-айырмалар операторы, ол L дифференциаллы операторын аппроксимациялайды. Бул еки оператор арасындағы, қәтелик $O(h^k)$ арқалы белгиленеди. Бунда h адым. Солай етип, бул жағдайда аппроксимация қәтелиги k ға тең деп айтылады. Аппроксимация қәтелиги бир точкада емес, ал барлық торды баҳаланады. Сонлықтан, аппроксимация қәтелигин

$$\varepsilon_h = \max_i(\varepsilon(x_i)), \qquad \text{ямаса} \qquad \xi_h = \left[\sum_i \varepsilon^2(x_i)\right]^{1/2}$$

шамаларының бири менен белгилеймиз. Онда L_h операторының аппроксимация қәтелиги k болады, егерде

$$\varepsilon_h = O(h^k)$$

болса.

Жоқарыдағы аппроксимацияға қосымша шегарадағы шәртлердиде аппроксимациялаймыз. Ол төмендегише жазылады:

$$l_h y_h = \varphi_h, \qquad x \in \gamma_h \,. \tag{2.38}$$

Бунда $\gamma -$тордың шегаралық точкалары, яғный $\gamma_h \in \Gamma$.

Солай етип, (2.37),(2.38) – теңлемелердиң жыйындысы **айырмалы схема** деп аталады.

Айырмалы схеманың орнықлылығы деп оның шешиминиң берилген шамаларға (теңлемениң коэффициентлери, оң тәрепи, басланғыш ҳәм шегаралық шәртлер) үзиликсиз ғәрезлилигине айтылады. Басқаша сөз бенен айтқанда берилген шамалардың (теңлемениң коэффициентлери, оң жағы, басланғыш ҳәм шегаралық шәртлер) азғантай өзгериўи менен шешимниңде азғантай өзгериўине айтылады. Кери жағдайда айырмалар схемасы, орнықсыз деп аталады ҳәм бундай схемалар есаплаўлар жүргизиўге жарамсыз болады. Бундай схемалар менен электрон есаплаў машиналарында да, есаплаўлар жүргизиў мүмкин емес, себеби қәтелер жыйнағы оғада көбейип кетеди ҳәм машина тоқтаўы мүмкин, ямаса жуўмақ бермейди.

Шекли айырмалар теориясында, егерде айырмалар схемасы орнықлы болса ҳәм ол дифференциаллы теңлемени аппроксимацияласа, онда бул схемалар **жыйнақлы** болады. Солай етип, схеманың орнықлылығынан ҳәм аппроксимациясынан оның жыйнақлылығы келип шығады. Бул өз гезегинде ең қыйын мәселе болған схеманың жыйнықлылығын ҳәм дәллик дәрежесин изертлеўдиң орнына бул схеманың аппроксимация қәтелигин ҳәм орнықлылығын изертлеў арқалы жуўмақ шығарыўға болады.

Жуўмақ

Екинши бап Фохта теңлемесиниң математикалық моделин келтирип шығарыўға ҳәм олардың шешимлерин табыўдың аналитикалық ҳәм санлы усылларына бағышланды. Екинши баптың биринши параграфында Фохта теңлемесиниң математикалық модели алынды. Дүзилген математикалық моделлерге, яғный дара туўындылы дифференциалы теңлемелерге басланғыш ҳәм шегаралық шәртлер қойылды. Кейинги екинши параграфта Фохта теңлемесиниң мысалы ретинде Телеграф теңлемесиниң математикалық модели алынды ҳәм оны шешиўдиң аналитикалық (дәл шешиў) усылларының бири Даламбер усылы қаралды. Бул параграфта аналитикалық усылларды қолланыў мүмкин болмайтуғын жағдайларғада тоқтап өтилди. Параграфтың соңында шекли айырмалар усылының схемасы келтирилди. Үшинши параграф Фохта теңлемесин шешиўдиң шекли айырмалар усылына арналып олардың орнықлылық, жыйнақлылық ҳәм дәллик мәселелерине тоқтап өтилди. Бунда дара туўындылы стационар емес дифференциаллы теңлемелер шекли айырмалар менен қалай аппроксимацияланатуғынлығы баян етилди. Аппроксимация қәтелигин қалай есаплаўдың жоллары көрсетилди.

III Бап. Жоқары тәртипли дәлликтеги схемалар дүзиў жоллары

1-§. Шекли элементлер усылы ҳаққында.

Шекли элементлер усылы белгили илимпаз Галеркин аты менен тығыз байланыслы. Оның 1915-жылғы шығарған [9,20] мийнетинде ол стерженниң ҳәм жуқа пластинаның теңсалмақлы ийилиўшеңлигин изертлеў ҳаққында жаңа пикир жүритеди. Бул усыл өткен әсирдиң 50-60 жыллларында қайта қолға алынады. Буның бирден-бир себеби сол ўақытларда дәслепки электрон есаплаў машиналарының пайда болыўы менен тығыз байланыслы.

Ең дәслеп шекли элементлер усылs арнаўлы инженерлик усыл деп қабыл етилиўи. Соңғылығында бул усылға вариациялық интерпратация бериў мумкиншилиги пайда болды. Бул усыл бүгинги күнге келип ҳәр қыйлы практикалық мәселелерди шешиўде оғада көп қолланылатуғын усыллардың бирине айланды.

Биз бул усылды қолланыўдың әпиўайы бир мысалын қарап өтейик. Мейли бизге

$$\frac{du}{dt} - u = 0 \qquad (3.1)$$

әпиўайы дифференциаллы теңлемеси берилген болсын. Бул теңлемеге

$$u|_{t=0} = 1 \qquad (3.2)$$

басланғыш шәрти қойылған болсын. Жуўық шешимди $0 \le t \le 1$ областында қараймыз. Дәл шешимге

$$u = e^t$$

турине ийе болады.

Ал енди жуўық шешим

$$u_a = 1 + \sum_{j=1}^{N} a_j t^j \tag{3.3}$$

туринде көрсетиледи. Бунда бас ағза шегаралық шәртти қанаатландырыў ушын киритилген. Буннан соң t^j биртекли шегаралық шәртлерди қанаатландырыў мумкиншилигин береди. Жоқарыдағы (3.3)- формуланы

$$u_a = \sum_{j=0}^{N} a_j t^j$$

туринде жазыўға болады. Бунда $a_0 = 1$ (3.2)-басланғыш шәртин қанаатландырса болғаны.

Енди (3.3)-формуланы (3.1)-теңлемеге қойыў арқалы дәл шешим менен жуўық шешим арасындағы қәтелик

$$R = -1 + \sum_{j=1}^{N} a_j (jt^{j-1} - t^j)\,. \tag{3.4}$$

аңлатпасына ийе боламыз. Егерде скаляр көбеймени

$$(f, g) = \iint_D fgdxdy$$

түрине келтирсек, онда

$$(R, t^{k-1}) = 0 \tag{3.5}$$

аңлатпасына ийе боламыз. Енди оның барлық $k = 1,2,..., N$ ушын алсақ онда

$$MA = D \tag{3.6}$$

түринде жазылған теңлемелер системасына ийе боламыз.

Бунда A-белгисиз коэффициентлер a_j лерден дүзилген вектор, ал D матрицасының элементлери

$$d_k = (1, t^{k-1}) = \frac{1}{k}$$

аңлатпасынан турады. Енди M матрицасына төмендеги формула сәйкес келеди:

$$m_{k,j} = (jt^{j-1} - t^j, t^{k-1}) = \frac{j}{j+k-1} - \frac{1}{j+k}.$$

Егерде биз $N = 3$ деп қабылласақ, онда (3.6)-аңлатпа

$$A^T = \{1.0141, 0.4225, 0.2817\}$$

формасына келеди. Буннан сәйкес (3.3)-формула төмендегини береди:

$$u_a = 1 + 1.0141t + 0.4225t^2 + 0.2817t^3.$$

Егерде дифференциаллы теңлемеге мәселе

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

$$u|_{t=0} = u_0,$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \qquad u(1,t) = \mu_2(t)$$

түринде берилген болса, онда сайкес тек кеңислик өзгериўшиси бойынша шекли элементлер усылын қолланыў

$$M\dot{A} + BA + C = 0,$$

$$A|_{t=0} = A_0 \qquad (3.7)$$

мәселесине алып келеди, Бунда $\dot{A} = \dfrac{\partial u_j}{\partial t}$, M матрицасының элементлери

$$m_{k,j} = (\varphi_j, \varphi_k),$$

ал сәйкес B ҳәм C матрицаларының элементлери

$$b_{kj} = -\left(\frac{d^2\varphi_j}{\partial x^2}, \varphi_k\right),$$

$$C_k = -\left(\frac{d^2 u}{\partial x^2}, \varphi_k\right).$$

Бул соңғы (3.7)- мәселе биринши тәртипли әпиўайы дифференциаллы мәселе болғанлықтан оны дәл шешиўде мүмкин. Көп жағдаўларда (3.7)-мәселе шекли айырмалар усылы менен шешеди. Барақ бул жағдайларда усылдың дәллиги пәс береди.

Солай етип, шекли элементлер усылының тийкарғы мазмуны шешимди (3.3)-туринде көрсетип оны бас мәселеге қойыў арқалы әпиўайы дифференцаллы теңлемеге ийе болыў ҳәм оны шешиў болып табылады.

Енди (3.7)-теңлемеге ўақыт бойыншада шекли элементлер усылын қоллаўға болады. Бул жағдайда схеманың дәллигиде артыўы мүмкин. Буны кейинги параграфта қараймыз.

2-§. Жоқары тәртипли дәлликтеги схемалар.

Жоқарыдағы екинши параграфта (2.31), (2.33)-Фохта теңлемесин кеңислик өзгериўшилери бойынша аппроксимациялаў арқалы

$$D\ddot{u} + B\dot{u} + Au = F\,, \qquad (3.8)$$

$$u(0) = u_0, \frac{du}{dt} = u_1 \qquad (3.9)$$

екинши тәртипли әпиўайы дифференциаллы теңлемелер системасына ийе болған едик. Бул системаны шекли айырмалар усылы арқалы аппроксиматциялап (2.35), (2.36)-схеманы алған едик. Оның аппроксиматция қәтелиги $0(\tau^2)$ болады $[12]$. Көп жағдайларда бул қәтелик бизди қанаатландырмайды. Сонлықтан жоқары дәрежели дәлликтеги схемалар дүзиў шекли айырмалар теорясында әҳмийетли орын тутады. Бул (3.8), (3.9)- мәселе ушын Утебаев Д. шекли элементлер усылы тийкарында төмендеги уш параметрли айырмалар схемасын дүзген $[28]$:

$$D_\gamma \dot{y}_t + By_t + A\frac{\hat{y} + y}{2} = \varphi_1\,, \qquad (3.10)$$

$$D_a y_t - \tau^2 \gamma B\dot{y}_t - D_\beta \frac{\hat{\dot{y}} + \dot{y}}{2} = \varphi_2,$$

$$y^0 = u_0 \quad , \quad y^0 = u_1\,.$$

Бунда

$$y = y^n = y(t_n), \hat{y} = y^{n+1}, \check{y} = y^{n-1}, \dot{y} = \dot{y}^n = \frac{dy}{dt}(t_n)\,,$$

$$D_\gamma = D - \gamma\tau^2 A, D_\alpha = D - \alpha\tau^2 A, D_\beta = D - \beta\tau^2 A\,,$$

$$\varphi_1 = \int_0^1 f(t_n + \tau\xi)v_1(\xi)d\xi, \qquad \varphi_2 = \int_0^1 f(t_n + \tau\xi)v_2(\xi)d\xi,$$

$$v_1(\xi) = p_1 v_1^{(1)}(\xi) + p_2 v_2^{(2)}(\xi), \qquad v_2(\xi) = s_1 v_2^1(\xi) + s_2 v_2^{(2)}(\xi)\,, \qquad \xi = (t - t_n)/\tau$$

,

$$v_1^{(1)}(\xi)=1, v_1^{(2)}(\xi)=\xi^2-\xi, \quad v_2^{(1)}(\xi)=\tau(\xi-1/2), \quad v_2^{(2)}(\xi)=\tau(\xi^3-3\xi^2/2+\xi/2).$$

$$p_1=6-60\gamma, \quad p_2=30-360\gamma, \quad s_1=180\beta-40\alpha, \quad s_2=1680\beta-280\alpha$$

.

Бунда y функциясы u функциясын аппроксимациялайды.

(3.10)-схема төртинши тәртипли дәлликке ийе болады, егерде оның параметрлери α,β,γ төмендеги

$$\alpha+\lambda=\beta+\frac{1}{6} \tag{3.11}$$

шәртин қанаатландырса. Бул үш α,β,γ параметрли схемалар болып табылады. Схемалар әдеттеги схемаларға қарағанда көплеген артықмашылықларға ийе:

- Схема анық схема болғанлықтан оны реализатциялаў оғада аңсат;
- Схемадан тек ғана y функциясын таўып қоймастан оның туўындысы $\dot{y}$ функциясыда бир уақытта табылады. Бул бир ўақытта тезликте табылады деген сөз;
- Уақыт бойынша адымды үлкейтип алыў мумкиншилигин береди;
- Ҳәм ең соңында ол жоқары тәртипли дәлликке ийе: $0(\tau^4)$.

Солай етип, бул схемалар көплиги дәл шешимге оғада жақын шешим береди екен.

3-§. Телеграф теңлемесиниң жуўық шешими.

Бул параграфта телеграф теңлемеси ушын ҳәр қыйлы дәлликке ийе шекли айырмалар ҳәм шекли элементлер усылларын қарап өтейик.

Мейли бизге

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial k^2} - b\frac{\partial u}{\partial t} - cu + f(x,t),$$

$$(x,t) \in Q_T = \{x \in \Omega, \quad t \in (0,T]\}, \tag{3.12}$$

$$u = 0 \quad , \quad x \in \Gamma = \partial\Omega, \quad t \in [0,T],$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x)$$

көринисинде берилген мәселени санлы шешиў керек болсын. Бул мәселе биринши баптың екинши параграфынде қарап өтилди.

Дәслеп (3.12)-мәселени кеңислик өзгериўшиси x бойынша аппроксиматциялаймыз. Буның еки усылын қарап өтейик. Биринши усыл, бул кеңислик өзгериўшиси x ти шекли айырмалар усылы менен аппроксимациялаў (III-баптың 2-параграфинде қарадық). Екинши усыл, бул x ти шекли элементар усылы тийкарында аппроксиматциялаў (бул жоқарыдағы 2-параграфта қаралды). Бул еки жағдайдада екиншм тәртипли әпиўайы дифференциаллы теңлемелер сийстемасына йие боламыз:

$$D\frac{d^2 u_n}{dt^2} + B\frac{du_k(t)}{dt} + Au_n(t) = f_n(t) \tag{3.13}$$

$$u_n(0) = u_{0,h}, \quad \frac{du_n}{dt}(0) = u_{1,t} \tag{3.14}$$

Бунда барлық t лар ушын $u_h(t) \in H_h, D, B, A$ апаратуралары (матрицалары) u_h тың H_h қа ҳәрекетленеди.

Енди өз гезегинде (3.13),(3.14) мәселесинде шекли айырмалар ((2.35), (2.36)-схема) ҳәм шекли элементлер усылы менен шешиўмиз мумкин ((3.10)-схема).

Солай етип, (3.12)-телеграф теңлемесин, улыўма айтқанда, Фохта теңлемесин шешиўди ҳәр қыйлы схемалар көплигине тоқтап өттик.

Енди ўсы схемалардың ишинен ең эффектлисин сайлап алыўмыз керек. Әлбетте бул шекли элементлер усылы шекли алынған жоқары дәлликке ийе болған (3.10)-схема болып табылады.

Жуўмақ

Үшинши бапта Фохта теңлемесине жоқары тәртипли дәлликтеги схемалар дүзиў усыллары үйренилди. Баптың биринши парарафында дифференциаллы теңлемелерди шешиўдиң шекли элементлер усылына тоқтап өтилди. Баптың екинши параграфы Фохта теңлемесин шешиўдиң жоқары тәртипли дәлликтеги схемаларын дүзиўге арналды. Атап айтқанда, еки қатламлы үш параметрли шекли элементлер усылы келтирилди. Үшинши параграфта телеграф теңлемесин жуўық шешеиўдиң усылларына тоқтап өтилди. Шекли элементлер усылы менен алынған схемаларды Галеркин –Петров усылы тийкарында дүзилген схемалар деп айтыўға болады.

Басқаша көз қарас пенен қарағанда бул схемаларды интегро-интерполяциялық усыл схемалары деп қараўғада болады. Себеби олар дифференциаллы теңлемениң орнына интеграллық бирдейликтен алынды.

IV-бап. Санлы экспериментлер

1-§. Мәселениң қойылыўы.

Мейли бизге төмендеги мәселениң жуўық шешимин табыў керек болсын:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \delta \dfrac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \\
u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \\
u(x,0) = u_0(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \quad x \in (0,t),
\end{cases} \tag{4.1}
$$

бунда $\delta > 0$ – орталықтың жабысқақлығын характерлеўши параметр. Биринши типтеги шегаралық шәрт тек мысал ретинде қаралып атыр. Оның орнына қәлеген типтеги шегаралық шәрт қойыў мүмкин. Шекли элементлер усылында шегаралық шәртлердиң ишинде ең қыйын аппроксимацияланатуғыны да усы биринши типтеги шегаралық шәрт болып табылады.

2-§. Шекли элементлер усылының схемасы.

Жоқарыдағы (4.1)-теңлемеге шекли элементлер усылыниң шәрти бойынша төмендеги мәселени сәйкес қоямыз:

$$
\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \vartheta \right) + a(u,\vartheta) + \delta a\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \vartheta \right) = (f,\vartheta), \quad \forall \vartheta \in H, \tag{4.2}
$$

бунда

$$
H = W_2^2(0,l) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l).
$$

x өзгериўшиси бойынша торды $\overline{\omega}_h = \left\{ x_i = ih,\ i = \overline{0,N},\ h = l/N \right\}$ түринде анықлаймыз ҳәм төмендеги

$$u_h(x)=\sum_{j=1}^{N-1}\left[a_j(t)\varphi_j(x)+b_j(t)\psi_j(x)\right]+b_0(t)\psi_0(x)+b_N(t)\psi_N(x)\in H_h^{(1)},$$

$$H_h^{(1)}=\{u_h(x):u_h(0)=u_h(l)=0\}.$$

куб функциясының $H_h^{(1)}$ кеңислигин киритемиз.

$H_h^{(1)}$ кеңислигинде базиске ийе $\{\varphi_j(x),\psi_j(x)\}$ функциясын анықлайық:

$$\varphi_j(x)=\varphi(\frac{x-x_j}{h}),\ \psi_j(x)=\psi(\frac{x-x_j}{h}),$$

$$\varphi(\xi)=\begin{cases}1-3\xi^2+2|\xi|\xi^2, & |\xi|\le 1,\\ 0, & |\xi|>1;\end{cases}\quad \psi(\xi)=\begin{cases}(1-|\xi|)^2\xi, & |\xi|\le 1,\\ 0, & |\xi|>1;\end{cases}\quad \xi=\frac{x-x_j}{h}. \tag{4.3}$$

Бул $\varphi_j(x),\psi_j(x)\in C^1[0,l]$ функциялари Эрмит сплайнлари деп аталады [4]. Жоқарыдағы (4.2)-мәселе тийкарында төмендеги дискрет мәселени қараймыз:

$$\left(\frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2},\vartheta\right)+a(u_h,\vartheta)+\delta a\left(\frac{\partial u_h}{\partial t},\vartheta\right)=(f,\vartheta),\quad \forall\vartheta\in H_h. \tag{4.4}$$

Бул (4.4) аңлатпасында $\vartheta=\varphi_j(x)$ ҳәм $\vartheta=\psi_j(x),$ деп сайлап алып алып коэффициентлери $a_j(t),b_j(t)$ болған әпиўайы дифференциалы теңлемелер системасына ийе боламыз:

$$\sum_{j=1}^{N-1}\Big[\ddot a_j(t)(\varphi_j(x),\vartheta(x))+\ddot b_j(t)(\psi_j(x),\vartheta(x))+$$
$$+\delta\,\dot a_j(t)(\varphi_j'(x),\vartheta'(x))+\delta\,\dot b_j(t)(\psi_j'(x),\vartheta'(x))+$$
$$+a_j(t)(\varphi_j'(x),\vartheta'(x))+b_j(t)(\psi_j'(x),\vartheta'(x))\Big]=(f,\vartheta(x)),\quad \forall\vartheta(x)\in H_{h,}, \tag{4.5}$$

бунда $\ddot a_j(t)=\dfrac{d^2a_j(t)}{dt^2},\quad \ddot b_j(t)=\dfrac{d^2b_j(t)}{dt^2},\quad \dot a_j(t)=\dfrac{da_j(t)}{dt},\quad \dot b_j(t)=\dfrac{db_j(t)}{dt}.$

Буннан дәслеп $\vartheta(\tilde{o}) = \varphi_j(x),\ j = \overline{1, N-1},$ деп сайлап алып, кейин $\vartheta(x) = \psi_j(x),\ j = \overline{0, N}$ деп сайлап алып (4.5)-дан төмендеги екинши тәртипли әпиўайы дифференциалы теңлемелер системасына ийе боламыз:

$$D\frac{d^2u_h(t)}{dt^2} + B\frac{du_h(t)}{dt} + Au_h(t) = f_h(t), \tag{4.6}$$

бунда

$$u(t) = \vec{u}(t) = \left(b_0(t), a_1(t), b_1(t), \ldots a_{N-1}(t), b_{N-1}(t), b_N(t)\right)^T,$$

$f(t) = \vec{f}(t) = ((f, \psi_0), \{(f, \varphi_j), (f, \psi_j)\}_{j=1}^{N-1}, (f, \psi_N))^T,$ размерлери $2N$ болған векторлар, ал $D,\ B,\ A$ – размерлери $2N \times 2N$ болған жети диагоналлы матрицалар. Бунда D («салмақ» матрицасы) матрицасиниң элементлери $(\varphi_i, \varphi_j),\ (\varphi_i, \psi_j),\ (\psi_i, \psi_j),\ i = \overline{1, N-1},\ j = \overline{1, N-1},$ түриндеги скаляр көбеймелерден турады ҳәм буған қосымша $(\varphi_i, \psi_0),\ (\varphi_i, \psi_N),$ $(\psi_i, \psi_0),\ (\psi_i, \psi_N),\ i = \overline{1, N-1}.$ Усыған уқсас, A («қаттылық» матрицасы) матрицасының элементлери $(\varphi_i', \varphi_j'),\ (\varphi_i', \psi_j'),\ (\psi_i', \psi_j')$ скаляр көбеймелеринен турады. B («демпфирования» матрицасы) матрицасы бул жағдайда A матрицасы менен тең болады. Айырмашылығы тек δ: $B = \delta A$. Бунда

$$\varphi_i'(x) = \frac{1}{h}\varphi'\left(\frac{x - x_i}{h}\right),\ \psi_i'(x) = \frac{1}{h}\psi\left(\frac{x - x_i}{h}\right).$$

Жоқарыдағы (4.6)-системаны төмендеги басланғыш шәртлер менен толықтырамыз:

$$u(0) = u_{0,h},\quad \frac{d}{dt}(0) = u_{1,h},\qquad u_{0,h},\ u_{1,h} \in H_h. \tag{4.7}$$

Бунда $a_i(t) \approx u(x_i, t),\ b_i(t) \approx u'(x_i, t),$ болғанлықтан $\varphi(x)$ ҳәм $\psi(x)$ функцияларының қәсийетлерин есапқа ала отырып төмендегилерди қабыл етемиз:

$$u_{0,h} = (u_0'(x_0), \{u_0(x_i), u_0'(x_i)\}_{i=1}^{N-1}, u_0'(x_N)),$$

$$u_{1,h} = (u_1'(x_0), \{u_1(x_i), u_1'(x_i)\}_{i=1}^{N-1}, u_1'(x_N)).$$

(4.3)-ни ҳәм $(\varphi_j, \varphi_i) = (\varphi_j, \psi_i) = (\psi_j, \varphi_i) = 0 \ \forall |i-j| > 1, \quad i, j = \overline{1, N-1},$ аңлатпаларын есапқа ала отырып D ҳәм A матицаларының элементлерин аламыз.

Енди (4.6), (4.7)-мәселени төмендеги айырмалар схемасы менен аппроксимациялаймыз [27]:

$$D_\gamma \dot{y}_t + By_t + A\frac{\hat{y} + y}{2} = \varphi_1,\ D_\alpha y_t - \tau^2 \gamma B \dot{y}_t - D_\beta \frac{\hat{\dot{y}} + \dot{y}}{2} = \varphi_2,\ y^0 = u_0,\ \dot{y}^0 = u_1. \tag{4.8}$$

Бунда

$$y = y^n = y(t_n),\ \hat{y} = y^{n+1},\ D_\gamma = D - \gamma\tau^2 A,\ D_\alpha = D - \alpha\tau^2 A,\ D_\beta = D - \beta\tau^2 A,$$

$$\varphi_1 = \int_0^1 f(t_n + \tau\xi)\vartheta_1(\xi)d\xi, \quad , \qquad \varphi_2 = \int_0^1 f(t_n + \tau\xi)\vartheta_2(\xi)d\xi\,,$$

$$\vartheta_1(\xi) = 1, \quad \xi = \frac{t - t_n}{\tau}, \qquad \vartheta_2(\xi) = s_1\vartheta_2^{(1)}(\xi) + s_2\vartheta_2^{(2)}(\xi),\ \vartheta_2^{(1)}(\xi) = \tau\left(\xi - \frac{1}{2}\right),$$

$$\vartheta_2^{(2)}(\xi) = \tau\left(\xi^3 - \frac{3}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\xi\right),$$

$$p_1 = 6 - 60\gamma, \quad p_2 = 30 - 360\gamma, \quad s_1 = 180\beta - 40\alpha, \quad s_2 = 1680\beta - 280\alpha\,,$$

$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ – параметрлери төмендеги

$$\alpha + \gamma = \beta + 1/6 \tag{4.9}$$

шәртин қанаатландырады. Бул схеманық төртинши тәртипли дәллигин тәминлейди.

Мейли (4.6)-теңлемениң операторлары $A^* = A > 0$, $B^* = B \geq 0$, $D^* = D > 0$, $AD = DA,\ AB = BA,\ DB = BD$ болсын ҳәм

$$D_\omega = D - \omega\tau^2 A \geq lD,\ \ 0 < l < 1,\ \ \omega = \max[\alpha, \beta, \gamma, 1/4]\,, \quad \alpha + \gamma = \beta + 1/6$$

(4.10)

орнықлылық шәрти орынлансын [12,16].

3-§. Схеманиң алгоритми.

Жоқарыдағы (4.8)-схеманы реализациялаў ушын оны төмендегише жазып аламыз:

$$\begin{cases} D_\gamma \hat{\dot{y}} + \left(B + \frac{\tau}{2}A\right)\hat{y} = \Phi_1 \equiv \tau\varphi_1 + \left(B - \frac{\tau}{2}A\right)y + D_\gamma \dot{y}, \\ D_\alpha \hat{y} - \frac{\tau}{2}\left(D_\beta + \frac{\tau}{6}B\right)\hat{\dot{y}} = \Phi_2 \equiv \tau\varphi_2 + D_\alpha y + \frac{\tau}{2}\left(D_\beta - \frac{\tau}{6}B\right)\dot{y}. \end{cases} \tag{4.11}$$

Енди жаңа $\hat{\vartheta} = D^{1/2}\hat{y}, \hat{\dot{\vartheta}} = D^{1/2}\hat{\dot{y}}$ өзгериўшилерин киритип (4.11)-схеманы төмендеги түринде жазамыз:

$$\begin{cases} \tilde{D}_\gamma \hat{\dot{\vartheta}} + \left(\tilde{B} + \frac{\tau}{2}\tilde{A}\right)\hat{\vartheta} = \tilde{\Phi}_1 \equiv D^{-1/2}\Phi_1, \\ \tilde{D}_\alpha \hat{\vartheta} - \frac{\tau}{2}\left(\tilde{D}_\beta + \frac{\tau}{6}\tilde{B}\right)\hat{\dot{\vartheta}} = \tilde{\Phi}_2 \equiv D^{-1/2}\Phi_2, \end{cases} \tag{4.12}$$

бунда

$$\tilde{D}_\mu = \tilde{D} - \mu\tau^2\tilde{A},\ \ \mu = \alpha,\beta,\gamma;\ \ \tilde{B} = D^{-1/2}BD^{-1/2},\ \ \tilde{A} = D^{-1/2}AD^{-1/2},\ \ \tilde{D} = E$$

.

Бизде $B = \delta A$ болғанлықтан, $\tilde{D}, \tilde{B}, \tilde{A}$ операторлари өз-ара орын алмасыўшы операторлар болып табылады. Буған қосымша олар $\tilde{D}_\alpha, \tilde{D}_\beta, \tilde{D}_\gamma$ операторлари мененде орын алмасыўшы болып табылады.

Енди (4.12)-дан белгисиз $\hat{\dot{\vartheta}}$ ны жоғатып, белгисиз $\hat{\vartheta}$ ушын

$$\tilde{C}\hat{\vartheta} = \tilde{\Phi} \equiv \tilde{\Phi}_2 + \frac{\tau}{2}\left(\tilde{D}_\beta + \frac{\tau}{6}\tilde{B}\right)\tilde{D}_\gamma^{-1}\tilde{\Phi}_1, \tag{4.13}$$

теңлемесине ийе боламыз. Бунда

$$\tilde{C} = \tilde{D}_\alpha + \frac{\tau}{2}\tilde{D}_\beta\tilde{D}_\gamma^{-1}\tilde{B} + \frac{\tau^2}{12}\tilde{B}\tilde{D}_\gamma^{-1}\tilde{B} + \frac{\tau^2}{4}\tilde{D}_\beta\tilde{D}_\gamma^{-1}\tilde{A} + \frac{\tau^3}{24}\tilde{B}\tilde{D}_\gamma^{-1}\tilde{A} = \tilde{D}_\gamma^{-1}\overline{C},$$

$$\overline{C} = \tilde{D}_\gamma\tilde{D}_\alpha + \frac{\tau}{2}\tilde{D}_\beta\tilde{B} + \frac{\tau^2}{12}\tilde{B}^2 + \frac{\tau^2}{4}\tilde{D}_\beta\tilde{A} + \frac{\tau^3}{24}\tilde{B}\tilde{A} =$$

$$= \tilde{D}^2 - (\alpha + \gamma - \frac{1}{4})\tau^2 \tilde{D}\tilde{A} + \frac{\tau^2}{12}\tilde{B}^2 + \frac{\tau}{2}\tilde{D}\tilde{B} + (\frac{1}{24} - \frac{\beta}{2})\tau^3 \tilde{B}\tilde{A}.$$

Енди $\overline{C}$ операторын факторизациялаймыз:

$$\overline{C} = \overline{C}_1\overline{C}_2 = (\tilde{D} - \omega_1\tau^2\tilde{A} + \nu_1\tau\tilde{B})(\tilde{D} - \omega_2\tau^2\tilde{A} + \nu_2\tau\tilde{B}).$$

Бундағы $\omega_1, \omega_2, \nu_1, \nu_2$ параметрлери ушын

$$\omega_1 + \omega_2 = \alpha - \frac{1}{6}, \quad \omega_1 \cdot \omega_2 = \frac{\alpha}{12} - \frac{\beta}{4}, \quad \nu_1 + \nu_2 = \frac{1}{2},$$
$$\nu_1 \cdot \nu_2 = \frac{1}{12}, \quad \omega_1\nu_2 + \omega_2\nu_1 = \frac{\beta}{2} - \frac{1}{24}, \quad \alpha - \beta = \frac{1}{12}.$$

системасына ийе боламыз. Бул системаниң шешими:

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{24}\left(-1 \pm i\sqrt{3}\right), \quad \nu_{1,2} = \frac{1}{4}\left(1 \pm i\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \quad \alpha = \frac{1}{12}, \quad \beta = 0.$$

Енди белгисиз $\hat{\vartheta} = D^{1/2}\hat{y}$ дан (4.13)-деги ески белгисиз $\hat{y}$ ке өтсек онда төмендегиге ийе боламыз:

$$C_1 D^{-1} C_2 \hat{y} = \Phi, \tag{4.14}$$

бунда

$$C_k = D - \omega_k\tau^2 A + \nu_k\tau B, \ k = 1,2; \ \Phi = \Phi_2 + \frac{\tau}{2}\left(D_\beta + \frac{\tau}{6}B\right)D_\gamma^{-1}\Phi_1.$$

Бул (4.14)-теңлеме еки этапта шешиледи: дәслеп избе-из $C_1 g = \Phi$, $C_2\hat{y} = Dg$ теңлемелери шешиледи. Буннан соң (4.11)-системаниң биринши теңлемеси тийкарында $\hat{\dot{y}}$ аңлатпасы табылады: $D_\gamma \hat{\dot{y}} = \Phi_1 - \left(B + \frac{\tau}{2}A\right)\hat{y}$.

4-§. Санлы шешимлер ҳәм оларды дәл шешим менен салыстырыў.

Жоқарыдағы параграфтағы алгоритмниң реализацияланыўын ҳәм дәллигин тексериў ушын төмендеги мәселени қараймыз:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \delta\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = 0,\ u(0,t) = 1, u(1,t) = 0,\ 0 < t \le T,\ u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$$

.

Бул мәселе $u(x,t) = v(x,t) + 1 - x$ түрлендириўинен кейин биртекли шегаралық шәртлерге ийе төмендеги мәселеге айланады:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \delta\frac{\partial^3 v}{\partial t \partial x^2} = 0,\ v(0,t) = v(1,t) = 0,\ 0 < t \le T,\ v(x,0) = x - 1,\ \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = 0$$

.

Бул соңғы мәселениң дәл шешими

$$v(x,t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k}\cos\left(\sqrt{1 - \delta^2\frac{(\pi k)^2}{4}}\pi k t\right)\sin(\pi k x)\exp\left(-\frac{\delta(\pi k)^2}{2}t\right)$$

көринисинде болады. Ал берилген дифференциалы мәселениң шешими:

$$u(x,t) = v(x) + 1 - x.$$

Электрон есаплаў машинасында есаплаўлар жүргизгенде дәл шешимниң мәнислерин есаплағанда қосындыниң шексиз шеги $M = 100$ мәниси менен алмастырылды.

Төмендеги схемалар салыстырылды:

I - схема – ўақыт ҳәм кеңислик бойынша екинши тәртипли дәлликке ийе схема (үш қатламлы схема "крест");

II - схема – ўақыт бойынша екинши тәрипли ("крест" схемасы) ҳәм кеңислик бойынша түртинши тәртипли дәлликке ийе схема (бул B_3- куб сплайны);

III - схема - ўақыт ҳәм кеңислик бойынша төртинши тәртипли дәлликке ийе схема (эрмит сплайны жәрдеминде); ониң ағзалары:

схема IIIa:

$$\gamma=\frac{1}{12};\ \alpha=\frac{1}{8};\ \beta=0;$$
$$\omega_1=-0.0416667+i\ 0.0721688; \omega_2=-0.0416667-i\ 0.0721688;$$
$$\nu_1=0.25+i\ 0.144338; \nu_2=0.25-i\ 0.144338.$$

схема IIIb:

$$\gamma=\frac{1}{8}+\frac{i}{8\sqrt{3}};\ \alpha=\frac{1}{8}-\frac{i}{8\sqrt{3}};\ \beta=\frac{1}{12};$$
$$\omega_1=\omega_2=0;$$
$$\nu_1=0.25+i\ 0.144338; \nu_2=0.25-i\ 0.144338.$$

IV - схема - ўақыт ҳәм кеңислик бойынша төртинши тәртипли дәлликке ийе схема (B_3-куб сплайны); оның ағзалары:

схема IVa:

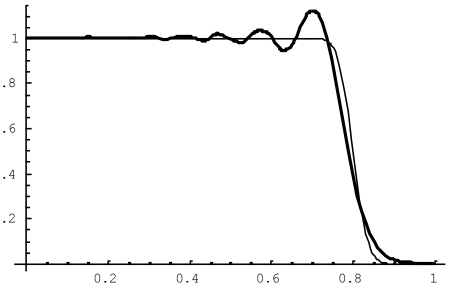
$$\gamma=\frac{1}{12};\ \alpha=\frac{1}{8};\ \beta=0;$$
$$\omega_1=-0.0416667+i\ 0.0721688; \omega_2=-0.0416667-i\ 0.0721688;$$
$$\nu_1=0.25+i\ 0.144338; \nu_2=0.25-i\ 0.144338.$$

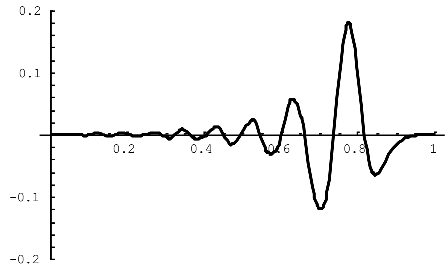
схема IVb:

$$\gamma=\frac{1}{8}+\frac{i}{8\sqrt{3}};\ \alpha=\frac{1}{8}-\frac{i}{8\sqrt{3}};\ \beta=\frac{1}{12};$$
$$\omega_1=\omega_2=0;$$
$$\nu_1=0.25+i\ 0.144338; \nu_2=0.25-i\ 0.144338.$$

Төменде схемалардың графигин келтиремиз (№ 1-6-сызылмалар-а): $y(x,y)$-үзликсиз қалың сызықлар ҳәм $u(x,t)$-үзликли жиңишке сызықлар; t ўақыт бирлигинде ҳәм тордың параметрлериниң h,τ мәнислеринде қәтелик (№ 1-6-сызылмалар-б) $z=y(x,y)-u(x,y)$ болады.

I-схема

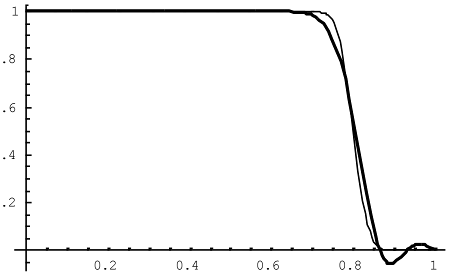


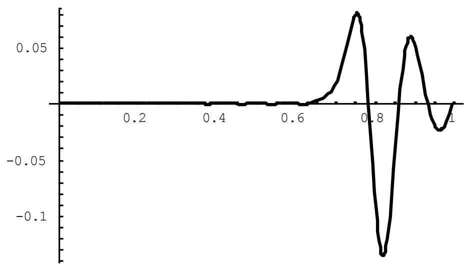


а) б)

1-сызылма. $t = 0.8,\ h = 0.03125,\ \tau = 0.02$

II-схема

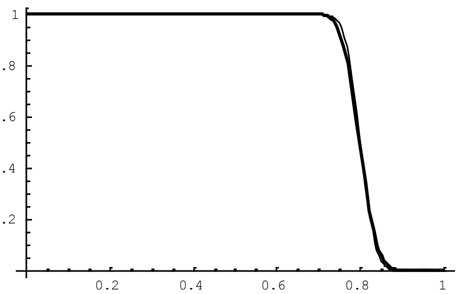


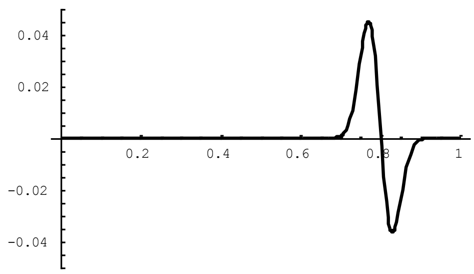


а) б)

2-сызылма. $t = 0.8,\ h = 0.03125,\ \tau = 0.02$

IIIa-схема

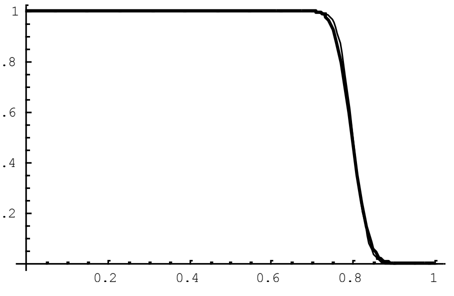


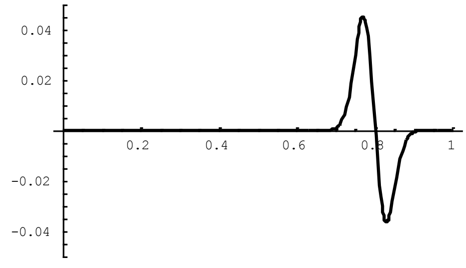


а) б)

3-сызылма. $t = 0.8,\ h = 0.03125,\ \tau = 0.02$

IIIb-схема

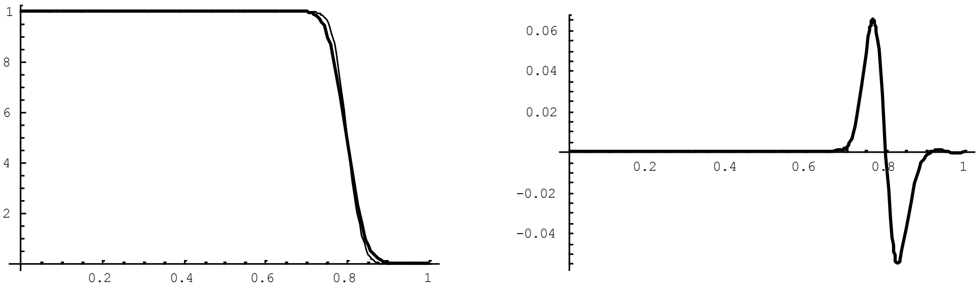




а) б)

4-сызылма. $t = 0.8,\ h = 0.03125,\ \tau = 0.0125$

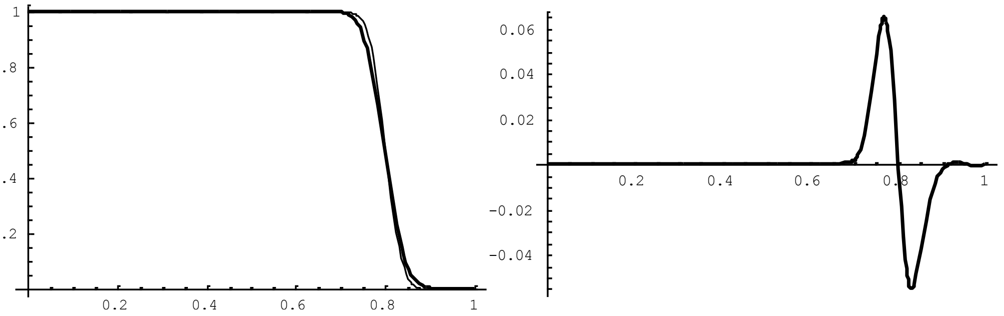
IVa-схема



а) б)

5-сызылма. $t = 0.8,\ h = 0.03125,\ \tau = 0.02$

IVb-схема



а) б)

6-сызылма. $t = 0.8,\ h = 0.02,\ \tau = 0.02$

Жуўмақ

Бул бапта Фохта теңлемесине дүзилген көп параметрли схеманың санлы моделлестирилиўи қаралды. Схеманиң алгоритми дүзилди. Санлы жуўмақлар алынды. Жуўмақлар графикалық түрде сүўретленди.

Фохта теңлемесин шешиўден кеткен қәтеликти анализлейтуғын болсақ,

1. Төртинши тәртипли дәлликке ийе схема (III, IV - схемалар) екинши тәртипли схемаға қарағанда анағурлым дәлирек.

2. Төртинши тәртипли дәлликке ийе барлық схемалар шама менен бирдей жуўмақлар береди (интерполяциялық сплайнлардың типи бойыншада, α, β, γ параметрлери бойыншада). Бул жерде соныда айтып өтиўимиз керек, B_3 сплайнлары менен дүзилген схемалар экономлырақ болып келеди.

ӘДЕБИЯТЛАР

Сабақлық ҳәм оқыў қолланбалар:

1. Годунов С.К. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1979. – 391 С.

2. Зеленка И. Пъезоэлектрические резонаторы на объемных и поверхностных акустических волнах. – М.: Мир, 1990. – 584 С.

3. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязко-упругости. – М.: Наука, 1970. – 280 С.

4. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1974.

5. Крейн С.К. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1972. – 544 С.

6. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики.– М.: Наука, 1980. – 536 С.

7. Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. – М.: Наука, 1981. – 416 С.

8. Николаевский В.Н. Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра, 1970. – 355 С.

9. Норри Д. Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов. М. Мир 1981. 304С

10. Отаров А., Алланазаров Ж.П. Есаплаў усыллары, I – бөлим. - Нөкис: Билим, 2001.

11. Отаров А., Алланазаров Ж.П. Есаплаў усыллары, I I – бөлим. – Нөкис: Билим, 2006.

12. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1977. – 656 С.

13. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. - М.: Наука, 1971. – 552 С.

14. Самарский А.А. Введение в численные методы.- . – СПб.: Лань,2005. – 288 С.

15. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Аддитивные схемы для задач матетатической физики. – М.: Наука, 2001. – 319 С.

16. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем.- М.: Наука, 1973. – 416 С.

17. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы.- М.: Наука, 1989. – 432 С.

18. Самарский А.А, Лазаров Р.Д., Макаров В.Л. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. – М.: Наука, 1978. – 296 С.

19. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – М.: Наука, 2001. – 316 С.

20. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. М. Мир 1979. 392С.

21. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 С.

22. Утебаев Д., Бабакаев С.Н. Исследования взаимодействия газожидкостьных систем численными методами. – Нукус: Билим, 2004. – 152 С.

Илимий журналлардағы мақалалар:

23. Москальков М.Н., Утебаев Д. О сходимости схемы метода конечных элементов для гиперболического уравнения второго порядка с обобщенными решениями // Узбекский математический журнал – Ташкент, 2009. – № 2. – С. 119-128.

24. Москальков М. Н., Утебаев Д. Исследование разностных схем метода конечных элементов для системы уравнений второго порядка //

Питання оптимізації обчислень: Праці міжн. конф. – Київ, 2005. – С.156-157.

25. Москальков М.Н., Утебаев Д. Об одном методе численного решения уравнения с сильной дисперсией // Питання оптимізації обчислень: Праці міжн. конф. – Київ, 2007. – С. 210.

26. Москальков М.Н., Утебаев Д. Исследование сходимости метода конечных элементов для уравнения Фохта в слабой метрике // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – Київ, 2007. – №2(95). – С 81 – 87.

27. Утебаев Д., Решение краевой задачи для уравнения Фохта методом конечных элементов // Проблемы информатики и энергетики. –Ташкент, 2006. – №1. –С. 73-77.

28. Утебаев Д. Численное решение линейных нестационарных задач теории внутренних волн // ДАН РУз., Сер. Математика, технические науки, естествознание. – Ташкент, 2008. – №3. – С. 49-53.

29. Утебаев Д. Об одном методе численного решения операторного дифференциального уравнения второго порядка // ДАН РУз., Сер. математика, технические науки, естествознание. – Ташкент, 2007. –№1. –С. 31 – 34.

30. Утебаев Д. Оценки точности схемы метода конечных элементов по времени и по пространству для гиперболических уравнений // Вісник Київ. нац. унів., Сер. фіз.-мат.науки. – 2007. – № 2.

31. Утебаев Д., Бабакаев С.Н., Шельмуханов Г.И. Численное моделирование движения вязкоупругих сред методом конечных элементов // Вестник КК отд. АН РУз., г. Нукус, 2014 г., № 1, с. 5-11.

32. Утебаев Б.Д., Шельмуханов Г.И. Разностные схемы для телеграфного уравнеия // Сборник материалов научной работы магистрантов ККГУ, 2014, С.

Қ О С Ы М Ш А Л А Р