

**ЎЗБЕКСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БАЙЛАНЫС,
ИНФОРМАТИЗАЦИЯЛАЎ ҲАМ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЯ
ТЕХНОЛОГИЯЛАРЫ МЭМЛЕКЕТЛИК КОМИТЕТИ**

**ТАШКЕНТ ИНФОРМАЦИЯЛЫҚ ТЕХНОЛОГИЯЛАРЫ УНИВЕРСИТЕТИ
НӨКИС ФИЛИАЛЫ**

Информациялық технологиялар кафедрасы

Компьютер инжинириңи факультетиниң

«Кәрханалар сервиси» бағдарының

4-курс студенти Исметов Досболдың

ПИТКЕРИЎ ҚӘНИГЕЛИК ЖУМЫСЫ

Темасы: «Сызықлы емес системаның шешимлериниң бахасын алыў ҳәм оларды оптималастырыў алгоритмлери» темасындағы

Илимий басшы: _____ **ф.-м. и.к. А.Хожаметов**

Кафедра баслығы: _____ **т.и.к. Арзымбетов Т.З**

НӨКИС 2014-жыл

Мазмуны

Кирисиў.....	3
§ 1. Сызықлы емес системаның шешимлериниң характеристикасын дүзиў.....	5
§ 2. Ретлестириў системасында ўақыт бойынша отиў характеристикаларын оптималластырыў хәм оларды есаплаў.....	10
§ 3. Ретлестириў системасы ушын Ляпуновтың оптимал функциясын табыў.....	17
§ 4. Нур бойынша созыў алгоритми.....	20
§ 5. Көшерди созыў алгоритми.....	26
§ 6. Абсолют орнықлы кешигиўши системаларды ретлестириў....	28
§ 7. Кешигиўши туўры емес системаларды ретлестириў.....	41
Жуўмақлаў.....	52
Санлы мысал.....	53
Пайдаланылған әдебиятлар.....	55
Қосымша	

Кирисиў

Теманың актуалығы: Ляпунов функциясының усылы системаны сапалы изертлеўде қолланылады, шешимнің асимптотикалық тәртибин есаплайды. Үлкен өлшемдеги системаны изертлеўде векторлы Ляпунов функциясы қолланылады. Бизге белгили, егерде Ляпунов функциясы бар болса онда ол бир текли емес дүзиледи, параметрли берилген класста.

Оптималластырыў усылының раўажланыўы оптимал Ляпунов функциясының түсинигине алып келеди, яғный функцияны есаплаўдың характеристикасын дәл баҳалайтуғын кейинги ўақытлары сызықлы емес системаларды изертлеўге үлкен кеўил бөлинеди. Система қаралады анығырақ айтқанда сызықлы емес ретлестириў системасы тийкарғы хәм тийкарғы емес жағдайларға сәйкес келиўши. Оларда гейпара ўақытлары туўры хәм туўры емес ретлестириў системасы деп айтылады. Бул системалардың шешимин изертлеў абсолют орнықлылық түсинигиниң пайда болыўына ийтермелейди, яғный пүтиң класс системасының ноллик шешиминиң орнықлылығына жақынлаўына ийе боламыз: системаның жийиликли характеристикасына тийкарланған хәм Ляпунов функциясының усылына сол дәлийллениледи, яғный бул жақынлаўлар тийкарынан өз-ара эквивалент.

Бул питкерий қәнигелик жумысында Лурье-Постников түриндеги Ляпунов функциясының усылы қолланылады, яғный квадратлы байланыс хәм қосымша сызықлы еместен интеграл алыў. Бул питкерий қәнигелик жумысында сызықлы емес системаның шешимлериниң характеристикасын дүзий. Ретлестириў системасында ўақыт бойынша өтий характеристикаларын оптималластырыў хәм есаплаў. Ретлестириў функциясы ушын Ляпуновтың оптимал функциясын табыў. Нур бойынша сызыў алгоритми, көшерде созыў алгоритми. Абсолют орнықлы кешигийўши системаларды ретлестириў.

Бундай типтеги системаларды изертлеў менен Санк-Петербургли илимпазлар Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. мектеби кеңнен

шуғылланған. Және де усындай түрдеги системаларды изертлеу менен Лурье А. М., Хусаинов Д. Я., Жуйкова А. Г. кеңнен шуғылланды.

Жумыстың махсети хәм ўазипалары: Сызықлы емес дифференциал теңлемелер системасы қаралады. Туўры хәм туўры емес ретлестириў системасы қаралады. Ляпунов функциясы квадратлық форма көринисинде алынады.

Изертлеу объекти хәм предмети: Оптималластырыў ўсыллары дифференциал теңлемелер басқаруў теориясы

Жумыстын дузилиси: Бул питкеріў қәнигелик жумыс кирисиў бөлими 7-параграф, жуўмақлау хәм пайдаланылған әдебиятлар дизиминен ибарат. Питкеріў қәнигелик жумыстың биринши параграфы сызықлы емес системаның шешимлериниң характеристикасын дүзиў. Бул жерде олардың сызықлы емес дифференциал теңлемелер хәм анықламасы, қәсийетлери берилген. Бул системаны изертлеу ушын Ляпуновтын екинши ўсылынан пайдаланамыз. Берилген системаның орнықтылығын изертлеу ушын Ляпунов функциясы квадратлық форма көринисинде алынады. Питкеріў қәнийгелик жумысында ретлестириў систмасында ўақыт бойынша өтиў процессиниң характеристикасын оптималластырыў мәниси қаралады. Берилген сызықлы емес системаны изертлеу ушын Ляпунов функциясы квадратлық форма түринде алынады хәм матрицалық теңлемени шешіўге алып келинди. Берилген система ушын баха алынды, жәнеде бул питкеріў қәнийгелик жумысында сызықлы емес туўры емес ретлестириў системасы қаралды. Ляпунов функциясы квадратлық форма көринисинде алынды, берилген система ушын бахаға ийе болдық.

§ 1. Сызықты емес системаның шешімлерінің характеристикасын дүзій.

Сызықты емес дифференциал теңлемелерді системасын қараймыз.

$$\dot{x}(t) = F(x, t), x \in \mathbb{R}^n, t \geq t_0, F(0, t) = 0 \quad (1)$$

Мейли төмендегі теңсізлікті қанаатландырыушы дифференциалланыушы $\vartheta(\overline{x}, t)$ функциясы бар болсын:

$$\omega_1(|x|) \leq \vartheta(x, t) \leq \omega_2(|x|) \quad (2)$$

толық тууындысы системаның кириуіне қарата есапланады

$$\dot{\vartheta}(x, t) \leq -\omega_3(|x|) \quad (3)$$

Бунда $W_i(x)$ - үзліксіз дифференциалланыушы функция монотон өсиулі хәм кериси бар болған, мына шәртлерді қанаатландырыушы

$$\omega_i(0) = 0, \lim_{\tau \rightarrow \infty} \omega_i(\tau) = \infty, \tau \geq 0, i = \overline{1, 3}$$

Сонда (1) ши системаның ноллик шешими асимптотикалық орнықты. Ляпуновтың екінши усылы орнықтылық шәртін тиклеуіге мүмкиншилик береді (асимптотикалық орнықтылықты ямаса орнықсызлықты) өтиу процессинің бир қатар әхмийетли характеристикаларын алыуға функцияның монотонлылығынан пайдаланып хәм (2) (3) теңсізліклерден функцияның толық тууындысы ушын төмендегиге ийе боламыз.

$$\frac{dv}{dt} \leq -\omega_3[\omega_2^{-1}(v)]$$

бунда ω_2^{-1} - функция ω_2 ге кері болған. Пайда болған дифференциал теңлемени шешип төмендегиге ийе боламыз.

$$S(v, v_0) = \int_{t_0}^t \frac{dv}{\omega_1[\omega_2^{-1}(v)]} = -(t - t_0) \quad (4)$$

Мейли $S(\mathbf{v}, \mathbf{v}_0)$ биринши аргументке карата шешимге ийе. Монотонлыққа тийкарланып (4) ши теңсизликти төмендеги түрде көрсетемиз.

$$V(x(t), t) \leq S_1^{-1}((t - t_0), v(x(t_0), t_0))$$

жәнеде (2) ши теңсизликти пайдаланып төмендегиге ийе боламыз.

$$|x(t)| \leq \omega_1^{-1}[S_1^{-1}((t - t_0), V(x(t_0), t_0))] \quad (5)$$

(5) ши байланыслылықты (1) ши системаның характеристикалық шешимлерин анықлау үшін пайдаланамыз.

1. Өтиу процессиниң ең әҳмийетли көрсеткишлериниң бири болып қайта ретлестириу шамасы есапланады. Ал $\varphi_1 = \varepsilon/\delta(\varepsilon)$ шамасы шешиминиң мүмкин болған ауысыуын характерлейди, яғный қайта ретлестириу шамасын (5) ши теңсизликти пайдаланып φ_1 ди анықлай үшін төмендеги аңлатпаға ийе боламыз.

$$\sup_{t \geq t_0} \{\omega_1^{-1}[S_1^{-1}((t - t_0), \omega_2(\delta(\varepsilon)))]\} - \varepsilon = 0 \quad (6)$$

үзликсиз дифференциялланыушы $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ функциялар көплигин (2) ши (3) ши шөртлерди қанаатландырыушыны $\mathbf{G}[\mathbf{v}]$ арқалы белгилеймиз.

Бизлерди сол қызықларды өтиу процессиниң дәл анық баҳасын алыу яғный $\mathbf{v}_0(\mathbf{x}, t)$ Ляпунов функциясын алыу, $\mathbf{G}[\mathbf{v}]$ көплигине дерек болған (6) ши шеклеулер орынланатуғын хәм φ_1 өтиу процессиниң функционал сапасы минимал мәнисти қабыл ететуғын.

Солай етип өтиу процессиниң ең жақсы баҳасын табыу Ляпуновтың екінши усылын қолланып оптимал Ляпунов функциясына алып келеди.

АНЫКЛАМА 1. $V_0(\mathbf{x}, t) \in \mathbf{G}[\mathbf{v}]$ Ляпунов функциясын қайта ретлестириу шамасы үшін оптимал деп аталады, егерде

$$V_0 = \underset{V \in G[v]}{\operatorname{arginf}} \left\{ \sup_{t \geq t_0} \omega_1^{-1} [S_1^{-1}((t - t_0), \omega_2(\delta(\varepsilon)))] - \varepsilon, \leq 0 \right\} \quad (7)$$

бунда $\varphi_1 = \varepsilon/\delta(\varepsilon)$ болса.

2) Ең әхмийетлиси өти процесси қыздырыў шамасы бойынша интегралды характерлейди, яғный

$$J = \int_{t_0}^{\infty} |x(t)| dt$$

(5) шини пайдалансақ интеграл критериясы мына қатнас арқалы баҳаланады

$$\varphi_2 = \int_{t_0}^{\infty} \omega_1^{-1} [S_1^{-1}((t - t_0), \omega_2(|x(t_0)|))] dt$$

хәм оптималлық анықламасын киритиў мүмкин интеграл критериясы мәнисинде.

АНЫҚЛАМА 2. $V_0(x, t) \in G[v]$ Ляпунов функциясын интеграл критериясының сапасының баҳасы ретинде оптимал деп атаймыз егерде

$$V_0 = \underset{V \in G[v]}{\operatorname{arginf}} \{ \varphi_2 \} \quad (8)$$

бунда

$$\varphi_2 = \int_{t_0}^{\infty} \omega_1^{-1} [S_1^{-1}((t - t_0), \omega_2(|x(t_0)|))] dt$$

болса.

3) Егерде (1) системаның орнықлылығын шешеми асимптотикалық характерге ийе болса онда қоздырыўдың тең салмақлылық жағдайы $t \rightarrow \infty$ да ериседи. Реал системаларды изертлеўде яғный орнатыў процесси егерде $|x(t)| < \varepsilon$ болса, бунда ε - киши шама алдың ала берилген шама хәм ўақыт шамасы $t = T$ да ε берилген дәллиликке ересе ўақыт бойынша өтиў процесси деп аталады. Бул жерде енди $|x(t_0)|$ киши шама киши шама болмаўы мүмкин. Ал T шамасын мына теңсизликти шешиў арқалы алыў мүмкин

$$\omega_1^{-1}[S_1^{-1}((t - t_0), \omega_2(|x(t_0)|))] \leq \varepsilon$$

функцияның монотонлығын есапқа алсақ, T ны алыў ушын мынаған ийе боламыз.

$$T = S(\omega_1(\varepsilon), \omega_2(|x(t_0)|))$$

АНЫКЛАМА 3 $V_0(x, t) \in G[v]$ Ляпунов функциясын ўақыт бойынша өтиў процессиниң баҳасы ушын оптимал деп атаймыз, егерде

$$V_0 = \underset{v \in G(v)}{\operatorname{arginf}} \{\varphi_3\} \quad (9)$$

бунда

$$\varphi_3 = S(\omega_1(t), \omega_2(|x(t_0)|))$$

Берилген түсиник улыўма характерге ийе. $G[v]$ көплиги кеңислигине үлес көплиги деп аталады, үзликсиз дифференциалланыўшы функциясының оптимал баҳаны табыў шексиз кеңисликтеги оптимизациялық мәселесин шешиўге алып келеди. Сонлықтан конструктив нәтийжелерде (1) ши системаның дара жағдайы ушын алыў мүмкин. Егерде Ляпунов функциясы параметрли берилген Ляпунов функциясы классында дүзилсе, бул жағдайда параметрли кеңисликтеги оптимизациялық мәселеге ийе боламыз мақсет функцияның түри $\omega_i, i = \overline{1, n}$ байланысly болады.

Егерде система сызықлы болса тұрақлы коэффициентли жоқарыда қаралғанда онда Ляпунов функциясы квадратлы форма түрінде дүзиледи. Бул питкерий қәнигелик жумысында арнаўлы түрдеги сызықлы емес системаларды қараймыз, яғный туўры хәм туўры емес ретлестириў системасы деп аталған. Сызықлы емес ретлестириў берилген класста жатады, сектор арқалы анықлаўшы. Асимптотикалық орнықлылық шәртлерин алыў мәселеси усы класстағы сызықлы емес ерикли функция ушын, абсолют орнықлылық мәселеси деген атамаға ийе болады. Оны шешиўдиң хәр қыйлы

усыллары бар. Ең сапалы усыллардың бири болып жийиликли хәм оның хәр қыйлы мадификациясы.

§ 2. Ретлестириў системасында ўақыт бойынша өтиў характеристикаларын оптималластырыў хәм оларды есаплаў.

Енди сызықлы емес системаны қараймыз, туўры ретлестириўши деп аталатуғын, яғный

$$x = Ax + bf(\sigma), \sigma = c^T x \quad (1)$$

Бунда A асимптотикалық орнықлы матрица $f(\sigma)$ арнаўлы түрдеги сызықлы емес функция. Ол сектор шәртин қанаатландырады

$$(k\sigma - f(\sigma)) \cdot f(\sigma) > 0, k > 0$$

яғный мына $f = 0$ хәм $f = k \cdot \sigma$ туўрылардың арасында жатады. Ал (1) ши системаны изертлеўде Ляпунов функциясы мына төмендеги көринисте алынады

$$V(x) = x^T H x + \beta \int_0^{\sigma(x)} f(\xi) d\xi, \sigma(x) = c^T x \quad (2)$$

Бунда H Ляпунов матрицалы теңлемесиниң шешими

$$A^T H + H A = -C \quad (3)$$

β - он параметр болыўы шәрт емес. Ал $v(x)$ функциясы ушын (2) ши теңsizлик төмендеги түрге ийе болады.

$$\lambda_{\min}(\tilde{H}) |x|^2 \leq v(x) \leq \lambda_{\max}(\tilde{H}) |x|^2 \quad (4)$$

бунда

$$\lambda_{\min}(\tilde{H}) = \begin{cases} \lambda_{\max} \left(H + \frac{1}{2} \beta K C C^T \right), \beta > 0 \\ \lambda_{\max}(H), \beta \leq 0 \end{cases}$$

$$\lambda_{\min}(\tilde{H}) = \begin{cases} \lambda_{\min}(H), \beta > 0 \\ \lambda_{\min} \left(H + \frac{1}{2} \beta K C C^T \right), \beta \leq 0 \end{cases}$$

Енди $v(x)$ функциясының толық туўындысының баҳасын қарап өтеміз (2) ши түріндеги (1) ши системаға тийкарланып. Сектор шәртин пайдаланып төмендегиге ийе боламыз

$$v(x) \leq -(x^T, f(\sigma)) \begin{bmatrix} -(A^T H + HA) & -(Hb + \frac{1}{2} \beta A^T C + \frac{1}{2} C) \\ -(Hb + \frac{1}{2} \beta A^T C + \frac{1}{2} C)^T & \frac{1}{k} - \beta C^T b \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$$

Егерде матрица

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} -(A^T H + HA) & -(Hb + \frac{1}{2} (\beta A + E)^T C) \\ -(Hb + \frac{1}{2} (\beta A + E)^T C) & \frac{1}{k} - \beta C^T b \end{bmatrix}$$

он анықланған болса, онда (1) ши система абсолют орнықлы, яғный $x(t) \equiv 0$ асимптотикалық орнықлы ерикли $f(\sigma)$ функциясы ушын төмендеги түрге ийе болады

$$|x(t)| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\tilde{H})}{\lambda_{\min}(\tilde{H})}} |x(t_0)| \exp \left\{ -\frac{\lambda_{\min}(\tilde{C})}{2\lambda_{\max}(\tilde{H})} (t - t_0) \right\} \quad (5)$$

Ляпунов функциясының он анықланғанлығы орынланады егерде матрица $H + \frac{1}{2} \beta K C C^T$ он анықланған болса, енди ерикли Ляпунов функциясының терис анықланған шәртин қарап өтеміз. Сильвестр критериясынан келип шығады, $-A^T H - HA$ матрицасының он анықланғанлығы хәм $\det \tilde{C} > 0$ теңсизлиги орынланады. Анықлаўышты кейинги бағаналары бойынша ашып, төмендеги теңсизликке ийе боламыз

$$-\left[Hb + \frac{1}{2} (\beta A + E)^T C \right]^T (A^T H + HA)^{-1} \left[Hb + \frac{1}{2} (\beta A + E)^T C \right] < \frac{1}{k} - \beta C^T b \quad (6)$$

Солай етип $G_2[v]$ көплиги H он анықланған матрицалардың көплигин көрсетеди хәм β параметрин $-A^T H - HA$ хәм $H + \frac{1}{2} \beta K C C^T$ он анықланған хәм (6) ши теңсизлик есапланады.

ЛЕММА. 1 $G_2[v]$ көп­ли­ги дө­ңес көп­лик бо­лып та­бы­ла­ды.

ДӘЛИЙЛЛЕҰ. Бизге бел­ги­ли, яғ­ный он анық­лан­ған ма­три­ца­лар­дың көп­ли­ги дө­ңес, ал та­лап он анық­лан­ған ма­три­ца­лар $-A^T H - H A$ хәм $H + \frac{1}{2} \beta K C C^T$ дө­ңес. Шек­ле­у­лер­ди қараймыз \tilde{C} га он анық­лан­ған­лық­ты та­лап ете­ту­ғын. Мей­ли ξ - ери­кли ша­ма бо­л­сын $0 < \xi < 1$ хәм мы­на жұ­бы (H_1, β_1) хәм (H_2, β_2) ушын \tilde{C} дың он анық­лан­ған­лық­ты оры­на­на­ды. Сон­да ма­три­ца

$$\begin{aligned} & \tilde{C}[\xi H_1 + (1 - \xi)H_2, \xi \beta_1 + (1 - \xi)\beta_2] = \\ & = \left[\begin{array}{l} -[A^T(\xi H_1 + (1 - \xi)H_2) + (\xi H_1 + (1 - \xi)H_2)A] \\ -[(\varphi H_1 + (1 - \xi)H_2)b + \frac{1}{2}((\xi H_1 + (1 - \xi)\beta_2)A + E)^T C]^T \end{array} \right] \\ & \left[\begin{array}{l} -[(\xi H_1 + (1 - \xi)H_2)b + \frac{1}{2}(\xi H_1 + (1 - \xi)A + E)^T C]^T \\ \left[\frac{1}{k} - (\xi \beta_1 + (1 - \xi)\beta_2) C^T b \right] \end{array} \right] = \\ & = \xi \tilde{C}[H_1, \beta_1] + (1 - \xi) \tilde{C}[H_2, \beta_2] \end{aligned}$$

он анық­лан­ған бо­ла­ды, он анық­лан­ған ма­три­ца­лар­ды қосындысы он коэф­фи­ци­ент­ле­ри сыяқ­лы. Со­лай етип кейин­ги шек­ле­у­лер­де дө­ңес, бун­нан ке­лип шы­ға­ды бар­лық $G_2[v]$ көп­ли­гиниң дө­ңес екен­ли­ги.

ТЕОРЕМА. (1) ши системаның абсолют орнықты болыуы үшін $G_2[v]$ көп­ли­гиниң бос емес көп­лик бо­луы жет­ки­лік­ли.

ДӘЛИЙЛЛЕҰ. Мей­ли $G_2[v]$ көп­ли­ги бос көп­лик бол­масын. Сон­да асимп­то­тка­лық ор­нық­лық факт­ты ор­на­тыу үшін (1) ши системаның ше­шим­ле­риниң ха­рак­те­ри­сти­ка­сын та­быу керек. Ал $\varphi_1, i = \overline{1, 3}$ функ­ция­сы тө­мен­де­ги түр­ге ийе бо­ла­ды.

$$\varphi_1(H, \beta) = \sqrt{\lambda_{\max}(\tilde{H}) / \lambda_{\min}(\tilde{H})} \quad (7)$$

$$\varphi_2(H, \beta) = \frac{2\lambda_{\max}(\bar{H}) \cdot |x(t_0)|}{\lambda_{\max}(C)} \cdot \sqrt{\lambda_{\min}(\bar{H})} \quad (8)$$

$$\varphi_3(H, \beta) = \frac{\lambda_{\max}(\bar{H})}{\lambda_{\min}(C)} \cdot \ln \left[\frac{\lambda_{\max}(\bar{H})}{\lambda_{\min}(\bar{H})} \cdot \frac{|x(t_0)|^2}{\varepsilon^2} \right] \quad (9)$$

Олар жүдә курамалы, өткен пораграфтағы функцияларға қарағанда олардың анықланыў облысты басқа, оның өзи үзликсиз дифференциалланыўшы функцияны көрсетеди.

Енди сызықлы емес туўры емес ретлестириў системасын қараймыз.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bf(\sigma) \\ \dot{\sigma} &= C^T x - \rho f(\sigma) \end{aligned} \quad (10)$$

A- асимптотикалық орнықлы матрица, ал сызықлы емес $f(\sigma)$ функциясы мына шәртти қанаатландырады

$$(k_2\sigma - f(\sigma))(f(\sigma) - k_1(\sigma)) > 0, k_2 > k_1 > 0$$

яғный мына туўрылар арасында жатады $f = k_1 \cdot \sigma$ хәм $f = k_2 \sigma$ Ляпунов функциясын мына түрде аламыз

$$V(x, \sigma) = x^T H x + \int_0^\infty f(\xi) d\xi \quad (11)$$

бунда H болса (3) теңлемениң шешими. Ал (1) ши системадан айырмашылығы (10) шы система n+1 олшемли кеңисликте жатады (x, σ) өзгермели ал β параметр. Ал $V(x, \sigma)$ функция ушын (11) ши түриндеги мына теңсизлик орынлы

$$\lambda_{\min}(\bar{H}) |x_\sigma|^2 \leq V(x, \sigma) \leq \lambda_{\max}(\bar{H}) |x_\sigma|^2 \quad (12)$$

бунда

$$\lambda_{\max}(\bar{H}) = \max \left\{ \lambda_{\max}(H), \frac{1}{2} K_2 \right\}$$

$$\lambda_{\min}(\bar{H}) = \min \left\{ \lambda_{\min}(H), \frac{1}{2} K_1 \right\}$$

$$|x_\sigma| = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sigma^2 \right\}^{1/2}$$

$V(x, \sigma)$ функциясының толық туыңдысы үшін (11) ши түріндеги, (10) шы системаға тийкарлансақ төмендеги теңлемеге орынлы болады

$$\dot{V}(x, \sigma) \leq -(x^T, f(\sigma)) \begin{bmatrix} -(A^T H + HA) & -(HB + \frac{1}{2}C) \\ -(HB + \frac{1}{2}C)^T & \rho \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ f(\sigma) \end{pmatrix}$$

Егерде матрица

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} -(A^T H + HA) & -(HB + \frac{1}{2}C) \\ -(HB + \frac{1}{2}C)^T & \rho \end{bmatrix}$$

он анықланған болса, онда (10) шы система абсолют орнықлы. Бул жағдайда (5) ши теңсизлик системаның шешимине тийкарланып төмендеги түрге ийе болады

$$|x(t)| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\bar{H})}{\lambda_{\min}(\bar{H})}} |x_\sigma(t_0)| \exp \left\{ -\frac{\lambda_{\min}(\bar{C})}{2\lambda_{\max}(\bar{H})} (t - t_0) \right\} \quad (13)$$

Егерде A матрицасы асимптотикалық орнықлы болса, ал $f(\sigma)$ функциясы мына $f = k_1 \sigma$ хәм $f = k_2 \sigma$ туырылары арасында жатса онда (11) ши түріндеге Ляпунов функциясы хәмме ўақыт он анықланған. Енди туыңдының терис анықланғанлық шәртин қараймыз. Буның ушын $-A^T H - HA$ он анықланғанлығы жеткиликли хәм $\det \bar{C} > 0$. Анықлаўышты кейинги бағаналары бойынша жайып, төмендеги теңсизликке ийе боламыз

$$-(Hb + \frac{1}{2}C)^T (A^T H + HA)^{-1} \cdot (Hb + \frac{1}{2}C) < \rho \quad (14)$$

Солай етип $C_3[v]$ көплиги он анықланған H матрицалардың көплигин көрсетеди. $-A^T H - HA$ матрицасы он анықланғанлығын хәм (14) ши теңсизликтин орынланатуғынын.

ЛЕММА. $G_3[v]$ көп­ли­ги дө­ңес көп­лик болып табылады.

ДӘЛИЙЛЛЕҰ. Он анық­лан­ған матрицалардың көп­ли­гин мына $-A^T H - H A$ он анық­лан­ған, дө­ңес көп­лик болып табылады. Енди C матрицаның он анық­лан­ған­лық шәр­тин тексереміз. Мейли $0 < \xi < 1$ ерик­лик фиксирленген шама. Егерде $H_1, H_2 \in G_2[v]$ болса, онда $\bar{C}[\xi H_1 + (1 - \xi)H_2]$ ушын төмендеги тең­лик орынланады

$$\begin{aligned} \bar{C}[\xi H_1 + (1 - \xi)H_2] &= \begin{bmatrix} -[A^T(\xi H_1 + (1 - \xi)H_2)A] & -[(\xi H_1 + (1 - \xi)H_2)b + \frac{1}{2}C] \\ -[(\xi H_1 + (1 - \xi)H_2)b + \frac{1}{2}C]^T & \rho \end{bmatrix} = \\ &= \xi \bar{C}[H_1] + (1 - \xi) \bar{C}[H_2] \end{aligned}$$

Онда $\bar{C}[\xi H_1 + (1 - \xi)H_2]$ матрицасы он анық­лан­ған болады. Он анық­лан­ған матрицалардың қосындысы ретінде, он коэффициентлер менен. Солай етип кейинги шек­леулер дө­ңес хәм $G_3[v]$ - дө­ңес көп­лик.

ТЕОРЕМА: (10) шы системаның абсолют орнық­лығы ушын $G_3[v]$ көп­ли­гиниң бос емес болыуы жеткиликли.

ДӘЛИЙЛЛЕҰ: Теорема ушын (1) ши Ляпуновтың екінши теоремасының дәлиийллеуин қайталау сыяқлы болады.

Мейли $G_3[v]$ көп­ли­ги бос емес болсын. Сонда система абсолют орнықлы хәм оның шешиминиң бақасын дүзиу ушын оптимизациялық мәселени қойыу мүмкин критериялы функция ушын

$$\begin{aligned} \varphi_1(H) &= \sqrt{\lambda_{\max}(\tilde{H})/\lambda_{\min}(\tilde{H})} \\ \varphi_2(H) &= \frac{2\lambda_{\max}(\tilde{H}) \cdot |x(t_0)|}{\lambda_{\max}(\tilde{C})} \cdot \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\tilde{H})}{\lambda_{\min}(\tilde{H})}} \\ \varphi_3(H) &= \frac{\lambda_{\max}(\tilde{H})}{\lambda_{\min}(\tilde{C})} \cdot \ln \left[\frac{\lambda_{\max}(\tilde{H})}{\lambda_{\min}(\tilde{H})} \cdot \frac{|x(t_0)|^2}{\varepsilon^2} \right] \end{aligned}$$

бунда $\lambda_{max}(\tilde{H}), \lambda_{min}(\tilde{H}), \lambda_{min}(\tilde{C})$ алдың ала анықланған.

§ 3. Ретлестіріу системасы үшін Ляпуновтың оптимал функциясын табыу.

Оптималластырыу мәселесиниң шешими, өткен параграфта қойылған мәнисине ийе, егерде система абсолют орнықты болса, яғный $G[v]$ көплиги бос емес. Енди бир жақынлауды қараймыз. Усы факт үшін оптимизацион мәселесин шешимине тирелиуши.

Енди мақсет функциясын қараймыз

$$\psi_1(H, \beta) = [f_0[H] + \beta f_1 + f_2]^T \cdot F^{-1}[H][f_2[H] + \beta f_1 + f_2] + \beta g_0$$

бунда $f_0[H] = Nb, f_1 = \frac{A^T c}{2}, f_2 = \frac{c}{2}, F[H] = -A^T H - HA, g_0 = -c^T b, \Omega(H, \beta)$

көплигинде анықланған, жуп (H, β) он анықланған H матрицадан хәм скаляр β дан турыушы, $F[H], H + \beta K C C^T / 2$ он анықланған.

АНЫКЛАМА: мына Ляпунов функциясы

$$v_0(x) = x^T H_0 x + \beta \int_0^{c^T x} f(\xi) d\xi$$

бунда

$$(H_0, \beta_0) = \underset{(H, \beta) \in \Omega(H, \beta)}{\operatorname{arg\,inf}} \{ \psi_1(H, \beta) \}$$

абсолют орнықтылық мәнисинде оптимал деп есаплаймыз.

Енди $\Omega(H, \beta)$ областының қәсийетин хәм $\psi_1(H, \beta)$ функциясын қараймыз.

ЛЕММА: $\Omega(H, \beta)$ көплиги дөңес көпликти аңлатады.

ДӘЛИЙЛЛЕУ: Мейли $(H_1, \beta_1) \in \Omega(H, \beta), (H_2, \beta_2) \in \Omega(H, \beta)$ болсын.

Онда ерикли $0 < \alpha < 1$ үшін

$F[\alpha H_1 + (1 - \alpha) H_2] = \alpha F[H_1] + (1 - \alpha) F[H_2]$ матрицасы он анықланған

болады, он анықланған матрицалардың қосындысы ретінде, он коэффициентлер менен. Кейин матрица

$$\begin{aligned} & [\alpha H_1 + (1 - \alpha)H_2] + \frac{[\alpha\beta_1 + (1 - \alpha)\beta_2]KCC^T}{2} \\ &= \alpha \left[H_1 + \frac{\beta KCC^T}{2} \right] + (1 - \alpha) \left[H_2 + \frac{\beta KCC^T}{2} \right] \end{aligned}$$

он анықланған болады.

Буннан басқа ерикли $0 < \gamma < \infty$ ушын $(H, \beta) \in \Omega(H, \beta)$ дан келип шығады, яғный $(\gamma H, \gamma \beta) \in \Omega(H, \beta)$. Солай етип $\Omega(H, \beta)$ дөңес конус.

ТЕОРЕМА: $\psi_1(H, \beta), (H, \beta) \in \Omega(H, \beta)$ функциясы дөңес болады.

ДӘЛИЙЛЛЕҮ: Үшликтен турыўшы $(H, \beta, g_1), (H, \beta) \in \Omega(H, \beta), g_1 > 0$ көпликти қараймыз, C матрицасы он анықланған болатуғын. Усы көпликтің дөңес екенлигин корсетемиз. хаккыйкатында да, мейли $(H_1, \beta_1) \in \Omega(H_2, \beta_2), (H_2, \beta_2) \in \Omega(H, \beta), g_1^1 > 0, g_1^2 > 0$ хәм усыған сайкес мына матрица $C[H_1, \beta_1, g_1^1]$ хәм $C[H_2, \beta_2, g_1^2]$ он анықланған. Яғный $F[H], f_0[H]$ сызықлы оператор, онда ерикли $0 < \alpha < 1$ ушын төмендеги орынланады

$$\begin{aligned} & C[\alpha H_1 + (1 - \alpha)H_2, \alpha\beta_1 + (1 - \alpha)\beta_2, \alpha g_1^1 + (1 - \alpha)g_1^2] = \\ &= \begin{bmatrix} F_0[\alpha H_1 + (1 - \alpha)H_2] & f_0[\alpha H_1 + (1 - \alpha)H_2] + \alpha\beta_1 + (1 - \alpha)\beta_2 + f_2 \\ [f_0[\alpha H_1 + (1 - \alpha)H_2] + \alpha\beta_1 + (1 - \alpha)\beta_2 + f_2]^T & -(\alpha\beta_1 + (1 - \alpha)\beta_2 + \alpha g_1^1 + (1 - \alpha)g_1^2) \end{bmatrix} \\ &= \alpha C[H_1, \beta_1, g_1^1] + (1 - \alpha)C[H_2, \beta_2, g_1^2] \end{aligned}$$

он анықланған болады. Он матрицалардың қосындысы ретінде он коэффициентлер менен. Солай етип (H, β, g_1) ушлиги, C матрицасы он анықланған дөңес болады.

Гурвица критериясының келип шығады, $C[H, \beta, g_1]$ матрицасының он анықланғанлығын зәрүрли хәм жеткиликли шәрт болып мына теңсизлик есапланады

$$\psi_1(H, \beta) < g_1$$

Солай етип мынаған ийе болдық, яғнай $\psi_1(H, \beta)$ диң график үсти болып дөңес көплик есапланады. Буннан келип шығады $\psi_1(H, \beta)$ функциясының өзи тегис болады хәм оның градиентти аналитикалық түрде есапланады.

§ 4. Нур бойынша созыу алгоритми

Мына (H_1, β_1) жубын табыудың алгоритмин қараймыз, $\psi_1(H_1, \beta_1) < \psi_1(H, \beta)$ бунда H Ляпунов теңлемесиниң шешими, базы бир ерикли C матрицасы менен β ерикли фиксирленген турақлы $H + \frac{\beta K C C^T}{2}$ матрицасы он анықланған болатуғын. Енди бизлер (H_1, β_1) ди излеймиз мына $H_1 = \alpha H, \beta_1 = \alpha \beta$ түринде бунда $\alpha > 0$. Ал $\psi_1(H, \beta)$ функциясы мына $\psi_1(\alpha H, \alpha \beta)$ функцияға айналады.

$$\begin{aligned} \psi_1(\alpha H, \alpha \beta) &= \alpha [f_0[H] + \beta f_2]^T \cdot F^{-1}[H] [f_0[H] + \beta f_1] + \\ &+ 2 [f_0[H] + \beta f_1]^T \cdot F^{-1}[H] f_2 + \frac{1}{2} f_2^T F^{-1}[H] \cdot f_2 + \alpha \beta g_0 \end{aligned}$$

Функцияның экстремумының зэрүр шэрти $\psi_1(\alpha H, \alpha \beta)$ ның α өзгерийшиси бойынша бул $\psi_1(\alpha H, \alpha \beta) = 0$ яғный

$$[f_0[H] + \beta f_1]^T F^{-1}[H] \cdot [f_0[H] + \beta f_1] - \frac{1}{\alpha^2} f_2^T \cdot F^{-1}[H] \cdot f_2 + \beta g_0 = 0$$

Буннан

$$\alpha = \sqrt{\frac{f_2^T F^{-1} \cdot [H] \cdot f_2}{[f_0[H] + \beta f_1]^T \cdot F^{-1}[H] [f_0[H] + \beta f_1] + \beta g_0}}$$

хэм мына (H_1, β_1) жубы, бунда $H_1 = \alpha H, \beta_1 = \alpha \beta$ орныклы шэртиң жақсы береді, (H, β) га қарағанда.

Тууры емес ретлестирийу системасын изертлеуде абсолют орныклы ушын мына теңсизликтің орынланыуы талап етиледі

$$[f_0[H] + f_2]^T \cdot F^{-1}[H] [f_0[H] + f_1] < \beta$$

мына мақсет функциясын киритемиз

$$\psi_2(H) = [f_0[H] + f_1]^T \cdot F^{-1}[H] \cdot [f_0[H] + f_1]$$

бунда $f_0[H] = Hb, f_1 = \frac{c}{2}, F[H] = -A^T H - HA, H$ он анықланған матрицалар көплигинде анықланған мына $F[H]$ он анықланған болатуғын. Өз-өзинен анық яғный $H_0 \in G(H)$ матрицасы $\psi_2(H)$ функциясы минимал мәнисти қабыллайтуғын абсолют орнықтылыққа жууап береді хәм оптимизациялау мәселесиниң қойылыуына.

АНЫҚЛАМА: Мына түрдеги Ляпунов функциясына

$$V_0(x, \sigma) = x^T H_0 x + \int_0^\sigma f(\xi) d\xi$$

яғный

$$H_0 = \underset{H \in G(H)}{\operatorname{arg\,inf}} \{ \psi_2(H) \}$$

Ляпуновтың оптимал функциясы деп аталады.

Енди оптимизациялық мәселелерди шешиу сорауларын қараймыз. Егерде $F[H]$ симметриялы он анықланған матрица болса, меншикли мәнислери менен

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$$

онда $F^{-1}[H]$ симметриялы он анықланған матрица болады, мына меншикли мәнислер менен

$$0 < \lambda_n^{-1} \leq \lambda_{n-1}^{-1} \leq \dots \leq \lambda_1$$

Сонлықтан $\psi_2(H) \geq 0$. Солай етип Ляпуновтың ен жақсы оптимал функциясы болып (системаның параметрине байланысly) сондай болады, $\psi_2(H_2) = 0$.

ТЕОРЕМА: Мына $V_0(x, \sigma)$ Ляпунов функциясы $\psi_2(H_0) = 0$ болатуғын сонда тек ғана сонда бар болады, егерде мына теңлеме

$$f_0[H] + f_1 = 0$$

H_0 он анықланған симметриялы он анықланған матрица болса, $F[H_0]$

ЗӘРҮРЛИГИ: Мейли $V_0(x, \sigma)$ функциясы бар болсын, $\psi_2(H_0) = 0$ болатуғын хәм $F[H_0]$ он анықланған. Сонда $F^{-1}[H_0]$ болса, булда он анықланған квадратлы матрица болады, яғный $\psi_2(H_0)$ он анықланған квадратлы матрица хәм мына $\psi_2(H_0) = 0$ ден келип шығады, яғный $f_0[H_0] + f_1 = 0$.

ЖЕТКИЛИКЛИГИ: егерде теңлеме H_0 он анықланған матрицалар шешимине ийе болса, $F[H_0]$ анықланған болатуғын, онда $\psi_2(H_0) = 0$ болады.

Солай етип, оптимал Ляпунов функциясына ийе болыў ушын, симметриялы он анықланған квадратлы матрицалар классында теңлемениң шешими табылады хәм матрицаның он анықланғанлығын тексерип көриў керек.

Қаралып атырған теңлеме тийкарынан мына түрге ийе болады

$$Hb + C = 0 \quad (1)$$

Оның шешимин $H \in G(H)$ симметриялы он анықланған матрицалар классында қараймыз. Былай белгилеймиз $b^T = (b_1, b_2, \dots, b_n)$. Егерде барлық $b_i = 0, i = \overline{1, n}$ болса, онда (1) ши система ерикли $C_i = 0$ шешимге ийе болады, хәм шешимге ийе болмайды, егерде $C_i \neq 0$ элементлердиң биреуи нолден өзгеше болса.

Мейли, яғный $b_1 \neq 0$ болсын. Сонда (1) ши системаны мына түрде қайта жазамыз

$$\sum_{i=1}^n h_{1i} b_i = -C_1, \sum_{i=1}^n h_{2i} b_i = -C_2, \dots, \sum_{i=1}^n h_{mi} b_i = -C_m$$

Бул, улыўма айтқанда n теңлемеге ийе анықланбаған система, $\frac{n(n+1)}{2}$ белгисизли. Бул системаның улыўма шешимин мына түрде қайта жазыўға болады.

$$H_0 = \begin{bmatrix} h_{11} & h_1 \\ h_1^T & \tilde{H} \end{bmatrix}$$

бунда

$$h_{11} = \frac{1}{b_1^2} [-b_1 c_1 + \sum_{i=2}^n b_i c_i + \sum_{i,j=2}^n b_i b_j h_{ij}]$$

$$h_1^T = (h_{12}, h_{13}, \dots, h_{1n})$$

$$h_{1j} = \frac{1}{b_1} \left[-c_j - \sum_{i=2}^n b_i h_{ij} \right], j = \overline{2, n}$$

$\tilde{H} = \{h_{ij}\}, i, j = \overline{2, n}$ ерикли он анықланған матрица

ТЕОРЕМА: $V_0(x, \sigma)$ оптимал функциясы, $\psi_2(H_0) = \mathbf{0}$ болатуғын, сонда тек гана сонда бар болады егерде H симметриялы он анықланған матрицасы бар болса, $F(H_0)$ он анықланған болатуғын.

ЗӘРҮРЛИГИ: Мейли он анықланған $V_0(x, \sigma)$ Ляпунов функциясы бар болсын, $\psi_2(H_0) = \mathbf{0}$ болатуғын. Сонда өткен теоремалардан келип шығады (1) ши теңлеме H_0 симметриялы он анықланған матрицалы шешимге ийе болады, яғный $F(H_0)$ он анықланған болатуғын. Солай етип (2) ши системаның шешиминиң улыўма екенлигин көрсетеди, онда H матрицасы бар болады.

$$H_0 = \begin{bmatrix} h_{11} & h_1 \\ h_1^T & \tilde{H} \end{bmatrix}$$

бунда h_{11}, h_{1i} болса (2) де анықланған.

ЖЕТКИЛИКЛИГИ: Мейли симметриялы он анықланған H матрицасы бар болсын, $F(H_0)$ элементтери менен анықланған, он анықланған. Бул саны аңлатады, матрицалы теңлеме H_0 он анықланған шешимге ийе болатуғынлығын. Солай етип анықланған матрица H_0 болса оптимизациялық мәнисиниң шешимен көрсетеди, $\psi_2(H_0) = \mathbf{0}$ болатуғын.

Соны белгилеп өтиў керек яғный теорема зәрүрли хәм жеткиликли шәртке ийе болатуғынын көрсетеди, оларды тексерий қыйын мәселе.

Санлы түрдеги оптимизациялық усылды қоллаўды қарап өтемиз.

ТЕОРЕМА: $\psi_2(H), H \in G(H)$ дөнес болып есапланады.

ДӘЛИЙЛЛЕҰ: Енди (H, ρ) жублар көплигин қараймыз, мына $H \in G(H)$ хәм $\rho > 0$ матрицалардан турыўына, яғный мына матрица

$$C[H, \rho] = \begin{bmatrix} F_0[H] & (f_0[H] + f_1) \\ (f_0[H] + f_1)^T & \rho \end{bmatrix}$$

он анықланған. Соны көрсетемиз, яғный усы көпликтиң дөнес екенлигин. Мейли $(H_1, \rho_1), (H_2, \rho_2)$ жубы сондай, яғный $H_1 \in G(H), H_2 \in G(H), \rho_1, \rho_2 > 0$ мына матрицалары $C[H_1, \rho_1], C[H_2, \rho_2]$ он анықланған. Сонда ерикли $0 < \alpha < 1$ ушын

$$\begin{aligned} C[\alpha H_1 + (1 - \alpha)H_2, \alpha \rho_1 + (1 - \alpha)\rho_2] &= \\ &= \begin{bmatrix} F_0[\alpha H_1 + (1 - \alpha)H_2] & (f_0[\alpha H_1 + (1 - \alpha)H_2] + f_1) \\ (f_0[\alpha H_1 + (1 - \alpha)H_2] + f_1)^T & \alpha \rho_1 + (1 - \alpha)\rho_2 \end{bmatrix} = \\ &= \alpha C[H_1, \rho_1] + (1 - \alpha)C[H_2, \rho_2] \end{aligned}$$

он анықланған матрица болады, он анықланған матрицалардың сызықлы комбинациясы ретинде он коэффициенттери менен Сильвестр критериясынан келип шығады, $C[H, \beta]$ матрицасының он анықланғанлығын

зәрүрли хәм жеткиликли шәрти болып мына теңсизликти орынланыўы есапланады

$$\psi_2(H) < \rho$$

Яғный $\psi_2(H)$ функциясының график үсти болып дөңес көплик есапланады, онда $\psi_2(H)$ дөңес функциясы есапланады.

Енди $\psi_2(H)$ функциясының оптималластырыў алгоритмин қараймыз, $G(H)$ областының спецификасын есапқа алып.

§ 5. Көшерди созыу алгоритми.

Енди H_1 матрицасын алыудың алгоритмин қараймыз, $\psi_2(H_1) < \psi_2(H)$ бунда H ерикли он анықланған матрица $H \in G(H)$. Оны мына αH_1 түрінде излеймиз, бунда $\alpha > 0$ санлы параметр. Ал $\psi_2(H)$ функциясы болса, $\psi_2(\alpha H)$ функцияга айналады α өзгеріушили

$$\psi_2(\alpha H) = \alpha f_0[H] \cdot F^{-1}[H] f_0[H] + 2f_0[H] F^{-1}[H] \cdot f_1 + \frac{1}{2} f_1^T \cdot F^{-1}[H] \cdot f_2$$

Ал $\psi_2(\alpha H)$ функциясының экстремумының шәрти α өзгеріушиси бойынша $\psi_2(\alpha H) = 0$ ямаса

$$f_0^T[H] F^{-1}[H] f_0[H] - \frac{1}{\alpha^2} g_1^T \cdot F^{-1}[H] \cdot f_1 = 0$$

Буннан

$$\alpha = \sqrt{\frac{f_1^T \cdot F^{-1}[H] \cdot f_1}{f_0^T[H] \cdot F^{-1}[H] \cdot f_0[H]}}$$

Солай етип $H_1 = \alpha H$ матрицасы $\psi_1(H)$ функциясының кем мәнисин тәмийнлейди.

Оптимал $\psi_1(H, \beta)$ функциясының оптималластырыудың градиент усылы

Мына

$$\psi_1(H, \beta) = [f_0[H] + \beta f_1 + f_2]^T \cdot F^{-1}[H] \cdot [f_0[H] + \beta f_1 + f_2] + \beta g_0$$

функциясы берилген областта үзликли дифференциалланыушы болып табылады, градиенти анық түрде есапланады. Соның ушын улыуа түрдеги градиент усылын қолланыу керек. Мына белгилеуди киритемиз град

$\psi(\mathbf{H}, \boldsymbol{\beta}) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{H}}, \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\beta}} \right)$ матрицадан турыўшы $\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{H}} = \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial h_{ij}} \right\}$ $i, j = \overline{1, n}$ хэм скалярдан

$\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\beta}}$, бунда

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial h_{ij}} &= f_0^T[\Delta_{ij}] F^{-1}[\mathbf{H}] [f_0[\mathbf{H}] + \boldsymbol{\beta} f_1 + f_2] - \\ &- [f_0[\mathbf{H}] + \boldsymbol{\beta} f_1 + f_2]^T \cdot F^{-1}[\mathbf{H}] \cdot F[\Delta_{ij}] \cdot F^{-1}[\mathbf{H}] \cdot [f_0[\mathbf{H}] + \boldsymbol{\beta} f_1 + f_2] + \\ &+ [f_0[\mathbf{H}] + \boldsymbol{\beta} f_1 + f_2]^T \cdot F^{-1}[\mathbf{H}] \cdot f_0[\Delta_{ij}] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\beta}} = f_1^T F^{-1}[\mathbf{H}] [f_0[\mathbf{H}] + \boldsymbol{\beta} f_1 + f_2] + [f_0[\mathbf{H}] + \boldsymbol{\beta} f_1 + f_0]^T \cdot F^{-1}[\mathbf{H}] \boldsymbol{\delta}_1 + \boldsymbol{g}_0$$

бунда Δ_{ij} матрица элементлери i - шы жолдың j - шы бағананың кесилиспесиниң элементлеринен тұрган бирге тен, ал калган элементлери нолге тен.

Төмендеги оптималластырыў алгоритмлерин қараймыз

1) $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_E$ деп алып, бунда \mathbf{H}_E болса $F[\mathbf{H}] = \mathbf{E}$, $\boldsymbol{\beta}_1 = \mathbf{0}$ матрицалық теңлемениң шешими.

2) $k=2$ деп аламыз

3) Мына $\mathbf{H}_1 = \alpha_{n-1} \cdot \mathbf{H}_{n-1}$ матрицасын табамыз хэм $\boldsymbol{\beta}_n = \alpha_{n-1} \cdot \boldsymbol{\beta}_{n-1}$

бунда

$$\alpha_{n-1} = \sqrt{\frac{f_2^T \cdot F^{-1}[\mathbf{H}_{n-1}] f_2}{[f_0[\mathbf{H}_{n-1}] + \boldsymbol{\beta}_{n-1} f_1]^T F^{-1}[\mathbf{H}_{n-1}] [f_n[\mathbf{H}_{n-1}] + \boldsymbol{\beta}_{n-1} f_1]}} \cdot \mathbf{K}$$

4) Кейин $\text{grad } \psi(\mathbf{K}_k, \boldsymbol{\beta}_k)$ есапланады.

§ 6. Абсолют орнықты кешигиуши системаларды ретлестириу.

Бул параграфта сызықты емес кешигиуши аргументли системалар каралады. Бул система тууры ретлестириу системасы деп аталады.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau) + b_0 f(\sigma(t)) + b_1 f(\sigma(t - \tau)) \\ \sigma(t) = C_0^T x(t) + C_1^T x(t - \tau) \end{cases}$$

Сызықты емес $f(\sigma)$ функциясы бир аргументке байланыслы, тураклы L менен Липшин шертин қанаатландырады хэм $0 \leq f(\sigma)\sigma \leq R\sigma^2$ сектор шертин. Кешигиуши аргументли системалардың абсолют орнықтылығын Ляпуновтың екінши усылы жәрдемінде иске асырылады. Ляпунов функциясы мына түрде дүзиледи

$$V(x) = x^T H x + \beta \int_0^{\sigma(x)} f(\xi) d\xi, \sigma(x) = C^T x, \sigma = \sigma_1 + \sigma_2$$

бунда H -он анықланған матрица, β базы бир параметр. Ал $v(x)$ функциясы ретінде төмендеги теңсизликти аламыз

$$\lambda_{\min}(\tilde{H})|x|^2 \leq V(x) \leq \lambda_{\max}(\tilde{H})|x|^2, (1)$$

бунда

$$\lambda_{\min}(\tilde{H}) = \begin{cases} \lambda_{\min}(H), & \beta \geq 0 \\ \lambda_{\min}\left[H + \frac{1}{2}\beta K C C^T\right], & \beta < 0 \end{cases}$$

Ал ∂v^α арқалы Ляпунов функциясының бетлик қәддин белгилеймиз, ал v^α арқалы усы бет пенен шегараланған абсолютты белгилеймиз, яғный

$$\partial v^\alpha = \left\{ x: x^T H x + \int_0^{\sigma(x)} f(\xi) d\xi = \alpha \right\}, v^\alpha = \{x: x^T H x + \int_0^{\sigma(x)} f(\xi) d\xi < \alpha\}$$

Төмендеги белгилеулерден пайдаланамыз

$$\varphi_1(\tilde{H}) = \lambda_{max}(\tilde{H})/\lambda_{min}(\tilde{H})$$

$x(t)$ шешиминиң экспоненциал баҳасын алыў ушын $v(x, t)$ автоном емес функциядан пайдаланамыз.

$$v(x, t) = e^{\gamma t} \left(x^T H x + \int_0^{\sigma(x)} f(\xi) d\xi \right)$$

Буның ушын төмендеги теңсизлик орынлы

$$e^{\gamma t} \lambda_{min}(\tilde{H}) |x|^2 \leq v(x, t) \leq e^{\gamma t} \lambda_{max}(\tilde{H}) |x|^2 \quad (2)$$

Енди (x, t) өзгериўшилер кеңислигин қараймыз ҳәм $v(x, t)$ функциясының бетлик кәддин $\partial v_t^{\alpha, \gamma}$ арқалы белгилеймиз, ал $v_t^{\alpha, \gamma}$ арқалы ол жататуғын областты, яғный

$$\partial v_t^{\alpha, \gamma} = \left\{ (x, t) : e^{\gamma t} \left(x^T H x + \int_0^{\sigma(x)} f(\xi) d\xi \right) = \alpha \right\},$$

$$v_t^{\alpha, \gamma} = \left\{ (x, t) : e^{\gamma t} \left(x^T H x + \int_0^{\sigma(x)} f(\xi) d\xi \right) < \alpha \right\}$$

Енди бизлер туўры емес ретлестириў системасын қараймыз

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau) + b_0 f(\sigma(t)) + b_1 f(\sigma(t - \tau)) \\ \dot{\sigma}(t) = C_0^T x(t) + \sigma_1^T x(t - \tau) - \rho f(\sigma(t)) \end{cases}$$

Бул жерде $f(\sigma)$ функциясы сызықлы емес ҳәм секторға дерек

$$k_1 \sigma^2 \leq f(\sigma) \sigma \leq k_2 \sigma^2$$

Туўры ретлестириў системасынан парқы, туўры емес ретлестириў системасы $R^n \times R$ кеңислигинде қаралады (x, σ) өзгөрмели. Сонлықтан векторлы норма ретинде төмендегини аламыз

$$|x_\sigma(t)| = \left\{ \sum_{i=0}^n x_i^2(t) + \sigma^2(t) \right\}^{n/2}, \quad \|x_\sigma(t)\|_\tau = \max\{|x_\sigma(s+t)|\}, \quad -\tau \leq \sigma \leq 0$$

Абсолют орнықлылық шәртің келтирип шығарыў ушын мына түрдеги Ляпунов функциясын пайдаланамыз

$$v(x(t)) = x^T H x + \int_0^\sigma f(\xi) d\xi$$

Буниң ушын төмендеги теңсизлик орынлы

$$\lambda_{\min}(H)|x|^2 + \frac{1}{2}k_1\sigma^2 \leq v(x, \sigma) \leq \lambda_{\max}(H)|x|^2 + \frac{1}{2}k_2\sigma^2 \quad (3)$$

Енди $v(x, \sigma)$ функциясының бетиниң қәддин ∂v^α арқалы белгилеймиз, ал v^α арқалы шегараланған беттиң майданын белгилеймиз, яғный

$$\partial v^\alpha = \left\{ (x, \sigma): x^T H x + \int_0^\sigma f(\xi) d\xi = \alpha \right\},$$

$$v^\alpha = \left\{ (x, \sigma): x^T H x + \int_0^\sigma f(\xi) d\xi < \alpha \right\}$$

Экспоненциал сөниўдиң коэффициентлерине ийе болыў ушын төмендеги функциядан пайдаланамыз

$$v(x, \sigma, t) = e^{\gamma t} \left(x^T H x + \int_0^\sigma f(\xi) d\xi \right)$$

буның ушын төмендеги теңсизлик орынлы

$$e^{\gamma t} [\lambda_{\min}(H)|x|^2 + \frac{1}{2}k_1\sigma^2] \leq v(x, \sigma, t) \leq e^{\gamma t} [\lambda_{\max}(H)|x|^2 + \frac{1}{2}k_2\sigma^2] \quad (4)$$

Бул параграфта бир кешигиўши аргументке ийе болған ретлестириў системасын қараймыз

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau) + b_0 f(\sigma(t)) + b_1 f(\sigma(t - \tau)) \\ \dot{\sigma}(t) = \sigma_0^T x(t) + \sigma_1^T x(t - \tau) \end{cases} \quad (1)$$

Былай болжаймыз, яғный кешигиўсиз система

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + B)x(t) + bf(\sigma(t)) \\ \sigma(t) = C^T x(t), b = b_0 + b_1, \sigma = \sigma_0 + \sigma_1 \end{cases} \quad (2)$$

абсолют орнықлы. Дара жағдайда орнықлылық шертлерин келтирип шығарыўда төмендеги системаны пайдаланамыз

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + B)x(t) + bf(\sigma(t)) \\ \sigma(t) = (\sigma_0 + \nu\sigma_1)^T x(t), b = b_0 + b_1 \end{cases} \quad (3)$$

бунда параметр $0 \leq \nu \leq 1$ болса (3) ши системаның максимал орнықлылық шертинен алынады. Егерде $A + B$ матрица асимптотикалық орнықлы болса, онда Ляпунов функциясының H матрицасы

$$v(x) = x^T H x + \beta \int_0^{\sigma(x)} f(\xi) d\xi, \sigma(x) = C^T x, \sigma = \sigma_0 + \sigma_1 \quad (4)$$

мына матрицалық теңлемени шешиў арқалы алынады

$$(A + B)^T H + H(A + B) = -C$$

Егерде (3) ши системаны изертлеўде пайдалансақ, онда H ты мына теңлемени шешиў арқалы табылады

$$(A + \nu B)^T H + H(A + \nu B) = -C$$

ЛЕММА: Мейли (1) ши системаның $x(t)$ шешими ушын $\|x(t_0)\|_{2\tau} < \delta$ теңсизлиги орынланады. Сонда $t_0 \leq t \leq t_0 + 2\tau$ болғанда төмендеги теңсизлик орынланады

$$|x(t)| < (1 + \delta\tau)^2 \cdot e^{2i\tau} \quad (5)$$

бунда

$$R = |B| + K(|e_0/C_1| + |e_1/C_0| + |e_1/C_1|),$$

$$L = |A| + K|e_0/C_0|. \quad (6)$$

ДӘЛИЙЛЛЕҰ: (1) ши системаны мына түрде жазамыз

$$\begin{aligned} x(t) = x(t_0) + \int_0^t [Ax(S) + Bx(S - \tau) + b_0 f(C_0^T x(S) + C_1^T x(S - \tau)) + \\ + b_1 f(C_0^T x(S - \tau) + C_1^T x(S - 2\tau))] dS \end{aligned}$$

ал мына аралықта $0 < t \leq \tau$

$$\begin{aligned} |x(t)| < \delta + \int_0^t |A||x(S)| dS + |B| \cdot \delta \cdot \tau + |b_0|K \left[\int_0^t |C_0||x(S)| dS + \right. \\ \left. + |\sigma_1| \delta \tau \right] + |b_1|K(|C_0| + |C_1|) \delta \tau = (1 + R\tau)\delta + \bar{L} \int_0^t |x(S)| dS \end{aligned}$$

бунда R хәм L болса (6) да анықланған. Беллман теңсизлигинен пайдаланамыз $0 < t \leq \tau$ төмендегиге ийе боламыз

$$|x(t)| < (1 + R\tau)\delta \cdot e^{\bar{L}\tau}$$

Енди $\tau < t \leq 2\tau$ аралықты қараймыз. Төмендегиге ийе боламыз.

$$\begin{aligned} |x(t)| \leq |x(t_0 + \tau)| + \int_\tau^t |A||x(S)| dS |B| \max\{|x(S)|\} \tau + \\ + |b_0| \tau \left[|C_0| \int_\tau^t |x(S)| dS + |C_1| \max_{0 \leq S \leq \tau} \{|x(S)|\} \tau \right] + \\ + |b_1|K \left[|C_0| \max_{0 \leq S \leq \tau} \{|x(S)|\} + |C_1| \delta \right] \tau \end{aligned}$$

жәнеде Беллман теңсизлигинен пайдаланып $\tau < t \leq 2\tau$ (5) теңсизлик орынланады.

Төмендеги белгилеулерди киритемиз

$$\bar{C}_1 = - \left[(A+B)^T H + H(A+B) + (p_1 + q_1) + \frac{p_2 + q_2}{2\xi^2} \cdot \left(1 + \sqrt{\varphi(\bar{H})E} \right) \right] \\ - [Hb + \beta(A+B)^T + E]C/2]^T$$

$$- [Hb + \beta(A+B)^T + E]C/2] \\ \frac{1}{K} - \beta b^T C - (p_2 + q_2)\xi^2) * (1 + \sqrt{\varphi(\tilde{H})})/2$$

$$p_1 = 2(|HB| + L|Hb_0||C_1| + L|Hb_1||C_0|)$$

$$p_2 = |\beta C^T E| + |\beta C^T b_0|L|C_1| + |\beta C^T b_1|L|C_0| \quad (7)$$

$$q_1 = 2L|Hb_1||C_1|, q_2 = |\beta C^T b_1|L|C_1|$$

$$b = b_0 + b_1, c = c_0 + c_1$$

ТЕОРЕМА: Мейли H матрицасы хәм β параметри сондай, яғный $\lambda_{\min}(\tilde{H}) > 0$ хәм сондай ξ бар болады, C_1 матрицасы он анықланған болатуғын. Сонда (1) ши система ерикли $\tau > 0$ ушын абсолют орнықлы. Сонда $|x(t)| < \varepsilon, t > 0$ егерде $\|x(\bar{0})\|_{2\tau} < \delta(\varepsilon)$ болса, бунда

$$\delta(\varepsilon) = \varepsilon / \sqrt{\varphi(\bar{H})}, \varphi(\bar{H}) = \lambda_{\max}(\bar{H}) / \lambda_{\min}(\bar{H}) \quad (8)$$

ДӘЛИЙЛЛЕҮ: Ерикли $\varepsilon > 0$ ушын $\alpha > 0$ сондай етип сайлап аламыз, яғный v^α областы ε дөгеректиң ишинде жататуғындай етип. Буның ушын $\alpha = \lambda_{\min}(\tilde{H}) \cdot \varepsilon$ шамасын сондай етип сайлап аламыз, $x(t)$ ушын системаның шешими, орынланатуғындай етип $x(t) \in v^\alpha, -2\tau \leq t \leq 0$. Былай аламыз $\alpha \geq \delta \lambda_{\max}(\bar{H})$ Буннан (8) ге ийе боламыз. Мейли $x(t)$ (1) ши системаның ерикли шешими болсын, яғный $\|x(\bar{0})\|_{2\tau} < \delta(\varepsilon)$ Сонда $2\tau \leq t \leq 0$ де $x(t) \in v^\alpha$ Соны көрсетемиз, яғный $t > 0$ де усы сақланатуғындай. Мейли керисинше болсын, $T > 0, x(T) \in \partial v^\alpha$ Енди $v(x)$

функциясының толық тууындысын қараймыз (1) ши системаның дөгерегінде.

$$\begin{aligned} \dot{v}(x(t)) = & x^T(t)[(A+B)^T H + H(B+A)]x(t) + 2x^T(t)Hbf(\sigma(t)) + \\ & + 2x^T(t)H[B(x(t-\tau) - x(t))] + b_0[f(\sigma(t)) - f(\sigma(t))] + b_1[f(\sigma(t-\tau)) - \\ & f(\sigma(t))] + \beta f(\sigma(t))C^T[(A+B)x(t) + bf(\sigma(t))] + \beta f(\sigma(t))C^T[B(x(t-\tau)) - \\ & x(t)] + b_0[f(\sigma(t)) - f(\sigma(t))] + b_1[f(\sigma(t-\tau)) - f(\sigma(t))] \end{aligned}$$

Белгилеулер киритемиз

$$\bar{C}_1 = \begin{bmatrix} -[(A+B)^T H + H(A+B)] & -[Hb + \frac{1}{2}(\beta(A+B)^T + E)C] \\ -[Hb + \frac{1}{2}(\beta(A+B)^T + E)C]^T & \frac{1}{K} - \beta b^T C \end{bmatrix}$$

Пайда болған аңлатпаны мына түрде жазамыз

$$\begin{aligned} \dot{v}(x(t)) \leq & -\left(x(t), f(\sigma(t))\right)^T \bar{C}_1(x(t), f(\sigma(t))) + 2|x(t)|[|HB| \cdot |x(t-\tau)| + \\ & + |x(t)|] + |Hb_0||f(\sigma(t)) - f(\sigma(t))| + |Hb_1||f(\sigma(t-\tau)) - f(\sigma(t))| + \\ & + |f(\sigma(t))|[|\beta C^T E| \cdot (|x(t-\tau)| + |x(t)|) + |\beta C^T b_0||f(\sigma(t))| - f(\sigma(t)) + \\ & + |\beta C^T b_1||f(\sigma(t-\tau)) - f(\sigma(t))| \end{aligned}$$

Болжау бойынша $x(t) \in v^\alpha, x(T) \in \partial v^\alpha, -2\tau \leq t \leq T$ онда $|x(t)| < \sqrt{\varphi(\bar{H})} \cdot |x(T)|$ Сонлықтан $t=T$ да $v(x(T))$ функциясының толық тууындысы ушын төмендегеиге ийе боламыз

$$\begin{aligned} \dot{v}(x(T)) \leq & \left(x(T), f(\sigma(T))\right)^T \bar{C}_2(x(T), f(\sigma(T))) + 2[|HB| + L|Hb_0||\sigma_1| + \\ & + L|Hb_1| \cdot (|\sigma_0| + |\sigma_1|)] \left(1 + \sqrt{\varphi(\bar{H})}\right) |x(T)|^2 + |f(\sigma(T))|[|\beta C^T B| + \end{aligned}$$

$$+L|\beta C^T b_0| |C_1| + L|\beta C^T b_1| (|C_0| + |C_1|) (1 + \sqrt{\varphi(\bar{H})}) |x(T)|$$

Ерикли ξ ушын

$$|f(\sigma(T))| |x(T)| \leq \frac{[\xi^2 |f(\sigma(T))|^2 + \frac{|x(T)|^2}{\xi^2}]}{2}$$

Сонлықтан, (7) ши белгилеулерден пайдаланып, төмендегиге ийе боламыз

$$\dot{v}(x(T)) \leq - \left(x(T), f(\sigma(T)) \right)^T \bar{C}_2 \left(x(T), f(\sigma(T)) \right)$$

хәм (1) ши системаның абсолют орнықлылығы ушын жеткиликли, яғный матрица C_2 он анықланған болыў керек.

Соны көрсетемиз, яғный орнықлылықтың экспоненциал характери ийе екенлигин, яғный сондай бир $N > 0$ хәм $\gamma > 0$ турақлылары бар болады

$$|x(t)| \leq N \|x(0)\|_{2\tau} \exp(-\gamma t/2)$$

Автоном емес Ляпунов функциясынан пайдаланамыз

$$v(x, t) = e^{\gamma t} (x^T H x + \beta) \int_0^{\sigma(x)} f(\xi) d\xi, \sigma(x) = C^T x \quad (10)$$

ЛЕММА: Мейли (10) шы түриндеги Ляпунов функциясы ушын $x(t)$ қәлеген шешиминиң дөгерегинде төмендеги теңсизлик орынлансын

$$\dot{v}(x(t), t) < -\tau |x(t)|^2 \cdot e^{\gamma t}, \tau > 0, \gamma > 0$$

Сонда $x(t)$ ушын мына катнас орынлы

$$|x(t)| < \sqrt{\varphi(\bar{H})} |x(0)| \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\gamma + \frac{r}{\lambda_{\max}(H)} \right] t \right\} \quad (11)$$

ДӘЛИЙЛЛЕҰ: (2) ши теңсизликтен пайдаланып мынаған ийе боламыз

$$\dot{v}(x(t), t) < -\frac{r}{\lambda_{\max}} v(x(t), t)$$

Бул теңсізлікті интеграллап

$$v(x(t), t) < \exp\left\{\frac{r}{\lambda_{\max}(H)}\right\} v(x(0), 0)$$

жәнеде (2) ни пайдаланып (11) ге ийе боламыз.

ТЕОРЕМА: Мейли H матрица хәм β параметри сондай, яғный $\lambda_{\max}(\bar{H}) > 0$ хәм сондай ξ бар болады, C_1 матрицасы анықланған. Сондай $x(t)$ шешими ушын (1) ши системаның мына теңсізлік орынлы

$$|x(t)| < \sqrt{\varphi(\bar{H})} \|x(0)\|_{2\tau} \exp\left\{-\frac{\gamma t}{2}\right\} \quad (12)$$

бунда

$$\gamma = \min\left\{\frac{\gamma_1 \lambda_{\min}(\bar{C}_1)}{\gamma_1 \lambda_{\max}(E) + \lambda_{\min}(\bar{C}_1)}, \gamma\right\}$$

$$\gamma_1 = \frac{2}{\tau} \ln\left\{\left[\sqrt{[(p_1 + p_2) + 2(q_1 + q_2)]^2 + 4\lambda_{\min}(\bar{C}_1)(q_1 + q_2)/\sqrt{\varphi(\bar{H})} - (p_1 + p_2)]/2(q_1 + q_2)}\right]\right\} \quad (13)$$

$$\gamma_2 = \frac{2}{\tau} \ln\left\{\frac{\left[\sqrt{[p_1 + 2q_2]^2 + \frac{16\lambda_{\min}(\bar{C}_1)q_2}{\sqrt{\varphi(\bar{H})}} - p_2}\right]}{2q_2}\right\}$$

p_1, p_2, q_1, q_2 болса (7) де анықланған.

ДӘЛИЙЛЛЕҰ: Мейли (1) ши системаның $x(t)$ шешими $\|x(0)\|_{\tau} < \delta$ теңсізлікті қанаатландырсын. Сонда $(x(t), t) \in v_t^{\alpha, \gamma}$ болса $-2\tau \leq t \leq 0$ де,

$$\alpha = \delta^2 \cdot \lambda_{\max}(\bar{H})$$

γ - ерикли турақлы. Яғный $-2\tau \leq t \leq 0$ де (12) ши теңсизлик орынланады. Сондай бир $\gamma > 0$ табылады ол $\tau > 0$ жағдайда да орынланатуғын.

Мейли бул былай болмасын хәм сондай бир $T > 0$ табылады, яғный $(x(T), T) \in \partial v^\alpha$ болатуғын. Сонда (10) шы теңсизликтің (1) ши системаға тийкарланып толық туўындысына ийе боламыз

$$\begin{aligned} \dot{v}(x(T), T) \leq & e^{-\gamma t} (x(T), f(\sigma(T)))^T \bar{C}_1 (x(T), f(\sigma(T))) + \\ & + \gamma e^{\gamma \tau} v(x(T), T) + 2e^{\gamma \tau} \{ |HB| + \left(1 + \sqrt{\varphi(\bar{H})} e^{\frac{\gamma \tau}{2}} \right) + \\ & + L|Hb_0| |C_1| \left(1 + \sqrt{\varphi(\bar{H})} e^{\frac{\gamma \tau}{2}} \right) + L|Hb_1| |C_0| \left(1 + \sqrt{\varphi(\bar{H})} e^{\frac{\gamma \tau}{2}} \right) + \\ & + |C_1| \left(1 + \sqrt{\varphi(\bar{H})} e^{\gamma \tau} \right) \{ |x(T)|^2 + |f(\sigma(T))| [|\beta C^T B| \left(1 + \sqrt{\varphi(\bar{H})} e^{\frac{\gamma \tau}{2}} \right) + \\ & + L|\beta C^T b_0| |C_1| \left(1 + \sqrt{\varphi(\bar{H})} e^{\frac{\gamma \tau}{2}} \right) + L|\beta C^T b_1| |C_0| \left(1 + \sqrt{\varphi(\bar{H})} e^{\frac{\gamma \tau}{2}} \right) + \\ & + |C_1| \left(1 + \sqrt{\varphi(\bar{H})} e^{\gamma \tau} \right) \} \cdot |x(T)| \end{aligned}$$

Енди (7) ши белгилеўден пайдаланып төмендегиге ийе боламыз

$$\begin{aligned} \dot{v}(x(T), T) \leq & -e^{\gamma \tau} \{ \lambda_{\min}(\bar{C}_1) [|x(T)|^2 + |f(\sigma(T))|^2] - \\ & - \gamma \lambda_{\min}(\bar{H}) |x(T)|^2 - [p_1 \left(e^{\frac{\gamma \tau}{2}} - 1 \right) + q_1 (e^{\gamma \tau} - 1)] \cdot \sqrt{\varphi(\bar{H})} |x(T)|^2 - \\ & - [p_2 \left(e^{\frac{\gamma \tau}{2}} - 1 \right) + q_2 (e^{\gamma \tau} - 1)] \sqrt{\varphi(\bar{H})} |f(\sigma(T))| |x(T)| \} \end{aligned}$$

Ерикли ξ ушын төмендеги теңсизлик орынлы

$$|f(\sigma(T))||x(T)| \leq \frac{\left[\xi^2 |f(\sigma(T))|^2 + \frac{|x(T)|^2}{\xi^2} \right]}{2}$$

Сонлықтан

$$\begin{aligned} \dot{v}(x(T), T) &\leq -e^{\gamma\tau} \{ \lambda_{\min}(\bar{C}_1) - \gamma \lambda_{\max}(\bar{H}) - \\ &- \left[\left(p_1 + \frac{p_2}{2\xi^2} \right) \left(e^{\frac{\gamma\tau}{2}} - 1 \right) + \left(q_1 + \frac{q_2}{2\xi^2} \right) (e^{\gamma\tau} - 1) \right] \sqrt{\varphi(\bar{H})} \} |x(T)|^2 - \\ &- e^{\gamma\tau} \{ \lambda_{\min}(\bar{C}_1) - [p_2 \left(e^{\frac{\gamma\tau}{2}} - 1 \right) + q_2 (e^{\gamma\tau} - 1)] \cdot \xi^2 \sqrt{\varphi(\bar{H})/2} \} |f(\sigma(T))|^2 \end{aligned}$$

Егерде

$$\begin{aligned} &\lambda_{\min}(\bar{C}_1) - \gamma \lambda_{\max}(\bar{H}) - \\ &- \left[\left(p_1 + \frac{p_2}{2\xi^2} \right) (e^{\gamma\tau} - 1) + \left(q_1 + \frac{q_2}{2\xi^2} \right) (e^{\gamma\tau} - 1) \right] \sqrt{\varphi(\bar{H})} > 0 \quad (14) \end{aligned}$$

$$\lambda_{\min}(\bar{C}_1) - \left[p_2 \left(e^{\frac{\gamma\tau}{2}} - 1 \right) + q_2 (e^{\gamma\tau} - 1) \right] \cdot \frac{\xi^2 \sqrt{\varphi(\bar{H})}}{2} > 0$$

онда, леммадан келип шығады, (11) теңсізліктің орынлы екенлігі $(x(T), T) \in v_t^{\alpha, \gamma}$ орынланбайды хәм бир $T > t_0$ де. Сондай $\gamma > 0$, ξ табамыз (14) ши теңсізлік орынланатуғын. Эпиўайылық ушын $\xi^2 = 1/2$ деп аламыз.

Сонда

$$\lambda_{\min}(\bar{C}_1) - \left[\left(p_1 + \frac{p_2}{2\xi^2} \right) (e^{\gamma\tau} - 1) + \left(q_1 + \frac{q_2}{2\xi^2} \right) (e^{\gamma\tau} - 1) \right] \sqrt{\varphi(\bar{H})} > \gamma \lambda_{\max}(\bar{H})$$

$$4\lambda_{\min}(\bar{C}_1) - \left[p_2 \left(e^{\frac{\gamma\tau}{2}} - 1 \right) + q_2 (e^{\gamma\tau} - 1) \right] \sqrt{\varphi(\bar{H})} > 0$$

Екинши теңсізлікті шешип төмендегиге ийе боламыз

$$\gamma = \frac{2}{\tau} \ln \left\{ \frac{\left[\sqrt{[p_1 + 2q_2]^2 + \frac{16\lambda_{\min}(\bar{C}_1)q_2}{\sqrt{\varphi(\bar{H})}} - p_2} \right]}{2q_2} \right\}$$

Бириншден теңсізліктің шеп тәрәпи монотон келиўши функцияны береді. Оны $0 < \gamma < \gamma_1$ аралықта алмастырамыз, бунда теңсізліктің шеп тәрәпи γ_1 нолге айналады. Ал γ шамасы мына теңлемени шешип табамыз

$$\lambda_{\min}(\bar{C}_1) \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_1} \right) = \gamma \lambda_{\max}(\bar{H})$$

буннан (13) ге ийе боламыз.

ЛЕММА: Мейли ерикли $\alpha > 0$ ушын (1) ши системаның $x(t)$ шешими ушын сондай бир $t > 2\tau$ бар болады, яғнай $x(t) \in \partial v^d$ ал $x(t) \in v^\alpha$ егерде $2\tau \leq S < t$ болса. Онда төмендеги теңсізлік орынлы.

$$|x(t) - x(t - \theta)| \leq M(0) \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda_{\min}(\bar{H})}} \cdot \theta \quad (15)$$

бунда

$$M(0) = |A| + |B| + K(|b_1| + |b_2|)(|C_1| + |C_2|), \quad 0 \leq S \leq 2\tau$$

ДӘЛИЙЛЛЕҮ: Егерде $x(S) \in \partial v^\alpha$ болса, онда $|x(S)| < \sqrt{\alpha/\lambda_{\min}(\bar{H})}$

Енди (1) ши системаны былай жазамыз

$$x(t) = x(t - \theta) + \int_{t-\theta}^t [Ax(S) + Bx(S - \tau) + b_0 f(\sigma[S]) + b_1 f(\sigma[S - \tau])] ds$$

Буннан

$$|x(t) - x(t - \theta)| < |A| \int_{t-\theta}^t |x(S)| ds + |B| \int_{t-\theta}^t |x(S - \tau)| ds +$$

$$\begin{aligned}
& +K \left[|b_0| \int_{t-\theta}^t (|C_0||x(S)| + |C_1||x(s-\tau)|) ds + |b_1| \int_{t-\theta}^t [|C_0||x(S)| + \right. \\
& \quad \left. + |C_1||x(S-2\tau)|] ds \right] \leq M(0) \cdot \max_{t-2\tau \leq S \leq t} \{|x(S)|\} \cdot \theta
\end{aligned}$$

хэм (6) га ийе боламыз.

§ 7. Кешигиўши туўры емес системаларды ретлестириў.

Бул параграфта туўры емес ретлестириў системаның абсолют орнықлылығын аламыз

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau) + b_0 f(\sigma(t)) + b_1 f(\sigma(t - \tau)) \\ \dot{\sigma}(t) = C_0^T x(t) + C_1^T x(t - \tau) - \rho f(\sigma(t)) \end{cases} \quad (1)$$

Аўысыўсыз аргументли система төмендеги түрге ийе болады

$$\dot{x}(t) = (A + B)x(t) + bf(\sigma(t))$$

$$\ddot{\sigma}(t) = C^T x(t) - \rho f(\sigma(t)), b = b_0 + b_1, C = C_0 + C_1 \quad (2)$$

Дара жағдайда мына система қолланылады

$$\dot{x}(t) = (A + vB)x(t) + bf(\sigma(t))$$

$$\ddot{\sigma}(t) = (C_0 + vC_1)x(t) - \rho f(\sigma(t)), b = b_0 + b_1 \quad (3)$$

бунда $0 \leq v \leq 1$ Ляпунов функциясын мына түрде аламыз

$$v(x, \sigma) = x^T Hx + \int_0^\sigma f(\xi) d\xi \quad (4)$$

(4) ши Ляпунов функциясы ушын мына теңсизлик орынлы

$$\lambda_{\min}(\bar{H})|x_\sigma|^2 \leq v(x, \sigma) \leq \lambda_{\max}(\bar{H})|x_\sigma|^2 \quad (5)$$

бунда

$$\lambda_{\min}(\bar{H}) = \min\left\{\lambda_{\min}(\bar{H}), \frac{K_1}{2}\right\}$$

$$\lambda_{\max}(\bar{H}) = \max\left\{\lambda_{\max}(\bar{H}), \frac{K_2}{2}\right\}$$

Енди $\varphi_1(\bar{H}) = \lambda_{max}(\bar{H})/\lambda_{min}(\bar{H})$ деп белгилеймиз. (1) ши системаның абсолют орнықтылығының жеткиликли шәртинге ийе боламыз, ерикли $\tau > 0$ хәм $\tau < \tau_0$ ге сайкес келиуши. Буннан

$$|x_\sigma(t)| < \{[1 + (|B| + K_2|b_1|)\tau]^2 + [1 + |C_1|\tau]^2\}^{1/2} \cdot \delta + \bar{L} \int_0^t |x_\sigma(S)| ds$$

БЕЛЛМАН теңсизлигинен пайдаланып (6) шыға ийе боламыз.

Төмендеги белгилеуди киритемиз.

$$\bar{C}_1 = \begin{bmatrix} -[(A+B)^T H + H(A+B) + (\rho_1 + \rho_2 \xi^2/2)E] & -[Hb + C/2] \\ -[Hb + C/2]^T & \rho - \rho_3 - \rho_2 \xi^2/2 \end{bmatrix}$$

$$\rho_1 = 2[|HB|(1 + \sqrt{\varphi(H)}) + |Hb_1|K_2\sqrt{2\lambda_{max}(H)/K_1}] \quad (7)$$

$$\rho_2 = \frac{2 \left[|HB| \sqrt{\frac{K_2}{2\lambda_{min}(H)}} + |Hb_1|(1 + K_2\sqrt{\varphi(H)}) \right]}{K_1} + |C_1|(1 + \sqrt{\varphi(H)})$$

$$\rho_3 = \frac{|C_1| \sqrt{\frac{K_2}{2\lambda_{min}(H)}}}{K_1}, \quad \varphi(K) = \frac{K_2}{K_1}$$

ТЕОРЕМА: Мейли $A+B$ асимптотикалық орнықты C_1 матрицасы он анықланған болатуғын. Сонда (1) ши система ерикли $\tau > 0$ ушын абсолют орнықты, сонлықтан $|x_\sigma(t)| < \varepsilon, t > 0$ егерде $\|x_\sigma(0)\|_\tau < \delta(\varepsilon)$ болса, бунда

$$\delta(\varepsilon) = \varepsilon/\sqrt{\varphi(\bar{H})} \quad (8)$$

ДӘЛИЙЛЛЕҮ: Ерикли $\varepsilon > 0$ шамасы ушын сондай бир $\alpha = \lambda_{min}(\bar{H})\varepsilon$ шамасын аламыз сондай етип яғный v^α болса ε дөгеректиң ишинде болсын. Жәнеде δ шамасын сондай етип аламыз, яғный $x_\sigma(t) \in v^\alpha$ егерде $\|x_\sigma(0)\|_\tau < \delta$ болса. Соның ушын былай аламыз

$$\delta = \sqrt{\alpha/\lambda_{\max}(\bar{H})}$$

яғный $\delta(\varepsilon)$ шамасын (8) ши шәрттен аламыз. Белгилеў киритемиз

$$\bar{C}_2 = \begin{bmatrix} -[(A+B)^T H + H(A+B)] & -[Hb + C/2] \\ -[Hb + C/2]^T & \rho \end{bmatrix} \quad (9)$$

Ал $v(x, t)$ функциясы ушын толық туўындысы (1) ши системаның мына түрге келеди

$$\begin{aligned} \dot{v}(x(t), \sigma(t)) = & -\left(x(t), f(\sigma(t))\right)^T \bar{C}_2 \left(x(t), f(\sigma(t))\right) + \\ & + 2x^T(t)H[B(x(t-\tau) - x(t)) + b_1(\sigma(t-\tau)) - f(\sigma(t))] + \\ & + f(\sigma(t))C_1^T(x(t-\tau) - x(t)) \end{aligned}$$

Мейли $x_\sigma(T) \in \partial v^\alpha$ бази бир $T > 0$ ушын. Сонда $-\tau \leq t < T$

$$|x(t)| < \sqrt{\varphi(H)}|x(T)| + \sqrt{K_2/2\lambda_{\min}(H)} \cdot |\sigma(t)|,$$

$$|\sigma(t)| < \sqrt{2\lambda_{\max}(H)/K_1}|x(T)| + \sqrt{\varphi(H)} \cdot |\sigma(T)|$$

хәм толық туўынды ушын мынаған ийе боламыз

$$\begin{aligned} \dot{v}(x(T), \sigma(T)) < & -\left(x(T), f(\sigma(T))\right)^T \bar{C}_2 \left(x(T), f(\sigma(T))\right) + \\ & + 2|HB||x(T)| \left[\left(1 + \sqrt{\varphi(H)}\right)|x(T)| + \sqrt{\frac{K_2}{2\lambda_{\min}(H)}}|\sigma(T)| \right] + \\ & + 2|Hb_1||x(T)| \left[|f(\sigma(T))| + K_2 \left(\frac{\sqrt{2\lambda_{\max}(H)}}{K_1|x(T)|} + \sqrt{\varphi(H)}|\sigma(T)| \right) \right] + \end{aligned}$$

$$+|C_1||f(\sigma(T))|[(1 + \sqrt{\varphi(H)})|x(T)| + \sqrt{\frac{K_2}{2\lambda_{\min}(H)}}|\sigma(T)|$$

Ерикли ξ ушын мына қатнас орынлы

$$|f(\sigma(T))||x(T)| < \frac{\xi^2 |f(\sigma(T))| + |x(T)|^2 \xi^{-2}}{2}$$

Буннан басқа сектор шәртинен келип шығады, яғный $|\sigma(T)| \leq \frac{|f(\sigma(T))|}{K_1}$

Сонлықтан

$$\dot{v}(x(T), \sigma(T)) < -(x(T), \sigma(T))^T \bar{C}_1(x(T), \sigma(T))$$

бунда C_1 болса (7) де анықланған.

Енди (1) ши системаның $x_\sigma(t)$ шешиминің экспоненциал сөниўиниң коэффициентлерин аламыз. Ляпунов функциясын мына көринисте аламыз

$$\dot{v}(x, \sigma, t) = e^{\gamma t} (x^T H x + \int_0^\sigma f(\xi) d\xi) \quad (10)$$

ЛЕММА: Мейли (10) ши ерикли функциясы ушын $x_\sigma(t)$ қозғалысының дөгерегинде мына теңсизлик орынлансын.

$$\dot{v}(x(t), \sigma(t)) < -r e^{\gamma t} |x_\sigma(t)|^2, r > 0, \gamma > 0$$

Сонда $x_\sigma(t)$ ушын теңсизлик орынлы

$$|x_\sigma(t)| < \sqrt{\varphi_1(\bar{H})} |x_\sigma(0)| \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{r}{\lambda_{\max}(H)} + \gamma \right] t \right\} \quad (11)$$

ДӘЛИЙЛЛЕҮ: (5) ши теңсизликти қолланып төмендегиге ийе боламыз

$$\dot{v}(x(t), \sigma(t), t) < -\frac{r}{\lambda_{\max}(\bar{H})} v(x(t), \sigma(t), t)$$

Буны интеграллап

$$v(x(t), \sigma(t), t) < v(x(0), \sigma(0), 0) \exp\left\{-\frac{r}{\lambda_{\max}(H)} t\right\}$$

жәнеде (5) ни пайдаланып (11) ге ийе боламыз.

ТЕОРЕМА: Мейли $A+B$ асимптоткалық орнықты матрица хәм сондай бир ξ бар болады C_1 он болатуғын. Сонда $x_\sigma(t)$ шешим ушын (1) ши системаның экспоненциал баға орынлы

$$\|x_\sigma(t)\| < \sqrt{\varphi(\bar{H})} \|x_\sigma(0)\|_\tau \cdot \exp\left\{-\frac{\gamma t}{2}\right\}$$

бунда

$$0 < \gamma \leq \min\left\{\frac{\lambda_{\min}(\bar{C}_1)\gamma_1}{\lambda_{\min}(\bar{C}_1) + \gamma_1 \lambda_{\max}(H)}, \frac{\lambda_{\min}(\bar{C}_1)K_1\gamma_2}{\lambda_{\min}(\bar{C}_1)K_1 + \frac{\gamma_2 K_2}{2}}\right\}$$

$$\gamma_1 = \frac{2}{\gamma} \ln\left\{\frac{\lambda_{\min}(\bar{C}_1) + q_2 + \xi^2 q_2}{q_1 + \xi^2 q_2}\right\}$$

$$\gamma_2 = \frac{2}{\gamma} \ln\left\{\frac{\lambda_{\min}(\bar{C}_1)K_1 + q_3 + \xi^2 q_2}{q_3 + \xi^2 q_2}\right\}$$

$$q_1 = 2 \left[|HB| \sqrt{\varphi(H)} + |HB| K_2 \sqrt{\frac{2\lambda_{\max}(H)}{K_1}} \right] \quad (13)$$

$$q_2 = |HB| \sqrt{\frac{K_2}{2\lambda_{\min}(H)}} + |Hb_1| K_2 \sqrt{\varphi(K)} + |C_1| K_2 \sqrt{\varphi(H)}/2$$

$$q_3 = |C_1| K_2 \sqrt{\frac{K_2}{2\lambda_{\min}(H)}}, 0 < \xi < \infty$$

ДӘЛИЙЛЛЕҮ: Мейли $x_\sigma(t)$ (1) ши ушын системаның шешими болсын $\|x_\sigma(0)\|_\tau < \delta$ теңsizликти қанаатландырыўшы. Сонда $-\tau \leq t \leq 0$ де $(x_\sigma(t), t) \in v_t^{\alpha\gamma}$ бунда $\alpha = \delta^2 \lambda_{\min}(H)$ ал γ ерикли турақлы. Сондай γ

шамасы бар болады усының $t > 0$ болған жағдайда сақланатуғын. Мейли керисинше болсын $(x_\sigma(T), T) \in \partial v_t^{\alpha\gamma}$ бази бир $T > 0$ де. Сонда $(x_\sigma(t), t)$ шешимде $-\tau \leq t < T$ мынаған ийе боламыз.

$$|x(T)| < \left[\sqrt{\varphi(H)} |x(T)| + \sqrt{\frac{K_2}{2\lambda_{\min}(H)}} |\sigma(T)| \right] e^{\gamma(T-t)/2}$$

$$|\sigma(T)| < \left[\sqrt{\frac{2\lambda_{\max}(H)}{K_1}} |x(T)| + \sqrt{\varphi(K)} |\sigma(T)| \right] e^{\gamma(T-t)/2}$$

хәм $v(x, \sigma, t)$ функциясының толық туўындысы ушын мына теңсизлик орынлы

$$\begin{aligned} \dot{v}(x(T), \sigma(T), T) &< -e^{\gamma T} (x(T), f(\sigma(T)))^T \overline{C}_2 (x(T), f(\sigma(T))) + \\ &+ e^{\gamma T} v(x(T), \sigma(T), T) + 2e^{\gamma T} |HB| |x(T)| \left[\left(1 + \sqrt{\varphi(H)} e^{\frac{\gamma\tau}{2}} \right) |x(T)| + \right. \\ &+ \left. \sqrt{K_2/2\lambda_{\min}(H)} e^{\gamma\tau/2} |\sigma(T)| \right] + 2e^{\gamma T} |Hb_1| |x(T)| [|x(\sigma(T))| + \\ &+ K_2 \left(\sqrt{\frac{2\lambda_{\max}(H)}{K_1}} |x(T)| + \sqrt{\varphi(K)} |\sigma(T)| \right) e^{\gamma\tau/2} + \\ &+ |C_1| |f(\sigma(T))| \left[\left(1 + \sqrt{\varphi(H)} e^{\frac{\gamma\tau}{2}} \right) |x(T)| + \sqrt{\frac{K_2}{2\lambda_{\min}(H)}} e^{\frac{\gamma\tau}{2}} |\sigma(T)| \right] \end{aligned}$$

ямаса

$$\begin{aligned} \dot{v}(x(T), \sigma(T), T) &< -e^{\gamma T} \lambda_{\min}(\overline{C}_1) [|x(T)|^2 + K_1 |\sigma(T)|^2] + \\ &+ \gamma e^{\gamma\tau/2} \left[\lambda_{\max}(H) |x(T)|^2 + \frac{K_2 |\sigma(T)|^2}{2} \right] + e^{\gamma\tau} \{ 2|HB| \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot |x(T)| \left[\sqrt{\varphi(H)} |x(T)| + \sqrt{\frac{K_2}{2\lambda_{\min}(H)}} |\sigma(T)| \right] + \\
& + 2|Hb_1|K_2|x(T)| \left[\sqrt{\frac{2\lambda_{\max}(H)}{K_1}} |x(T)| + \sqrt{\varphi(K)} |\sigma(T)| \right] + \\
& + |C_1|K_2|\sigma(T)| \left[\sqrt{\varphi(H)} |x(T)| + \sqrt{\frac{K_2}{2\lambda_{\min}(H)}} |\sigma(T)| \right] \left(e^{\frac{\gamma\tau}{2}} - 1 \right)
\end{aligned}$$

Пайда болған теңсізлікті төмендегіше жазамыз.

$$\begin{aligned}
\dot{v}(x(T), \sigma(T), T) & < -e^{\gamma T} \left\{ [\lambda_{\min}(\bar{C}_1) - \gamma\lambda_{\max}(H) - C_1 \left(e^{\frac{\gamma\tau}{2}} - 1 \right)] \cdot \right. \\
& \cdot |x(T)|^2 - 2C_2 \left(e^{\frac{\gamma\tau}{2}} - 1 \right) |x(T)| |\sigma(T)| + [\lambda_{\min}(\bar{C}_1)K_1 - \frac{\gamma K}{2} - \\
& \left. - C_3 \left(e^{\frac{\gamma\tau}{2}} - 1 \right) |\sigma(T)|^2 \right\}
\end{aligned}$$

бұнда C_1, C_2, C_3 - лер (13) де анықланған. Ерикли ξ үшін мына теңсізлік орынлы

$$|x(T)| |\sigma(T)| < \frac{\xi^2 |x(T)|^2 + |\sigma(T)|^2 \xi^{-2}}{2}$$

Сонлықтан, мына теңсізлік орынланса

$$\begin{aligned}
\dot{v}(x(T), \sigma(T), T) & < -e^{\gamma T} \left\{ [\lambda_{\min}(\bar{C}_1) - \gamma\lambda_{\max}(H) - (C_1 + \xi^2 C_2) \cdot \right. \\
& \cdot \left(e^{\frac{\gamma\tau}{2}} - 1 \right)] |x(T)|^2 + \left[\lambda_{\min}(\bar{C}_1)K_1 - \frac{\gamma K_2}{2} + (C_3 + C_2 \xi^{-2}) \left(e^{\frac{\gamma\tau}{2}} - 1 \right) \right] \cdot |\sigma(T)|^2 \left. \right\}
\end{aligned}$$

Енді γ ны сондай етип аламыз, бір ұақыт мына теңсізліклер орынланатуғын етип

$$\lambda_{\min}(\bar{C}_1) - (C_1 + \xi^2 C_2) \left(e^{\frac{\gamma\tau}{2}} - 1 \right) > \gamma\lambda_{\max}(H)$$

$$\lambda_{\min}(\overline{C}_1)K_1 - (C_3 + C_2\xi^{-2})\left(e^{\frac{\gamma\tau}{2}} - 1\right) > \gamma K_2/2$$

Сонда (11) ден келип шығады, (12) ның орынлы екенлиги.

Абсолют орнықтылық

Туўры емес басқарыў системасын қараймыз

$$\begin{cases} \dot{y} = Ay + \xi \\ \xi = f(\sigma) \\ \sigma = C^T y - \rho\xi \end{cases} \quad (1)$$

бунда b, c, y -н өлшемлі векторлар, ал A болса $n \times n$ квадратлы матрица, ξ, σ, ρ скаляр шамалар, C^T болса n өлшемлі вектор жол. Ал

$$x = Ay + b\xi, \sigma = C^T y - \rho\xi \quad (2)$$

(1) ши системаны мына түрге алып келеди

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bf(\sigma) \\ \dot{\sigma} = C^T x - \rho f(\sigma) \end{cases} \quad (3)$$

(1) ши хәм (3) ши орнықтылық системасы мәселеси эквивалент болыў ушын (2) ши түрлендириўши айнымаған болыў керек. Ал (2) ши түрлендириўиниң айнымағанлық шәрти мына формада жазылады

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & b \\ C^T & -\rho \end{vmatrix} \neq 0 \quad (4)$$

Келешекте хәммә жерде $f(\sigma)$ функциясы төмендеги шәрти қанаатландырсын

$$f(\sigma)\sigma > 0, \sigma \neq 0 \quad (*)$$

Бул шәртке абсолют орнықтылық деп аталады.

Туўры басқарыў системасы

Енди (3) ши системаны қараймыз мына жағдайда, егерде A матрицасының барлық меншикли мәніслери терис ҳақыйқый бөлимге ийе болса.

Системаның эпиўайы мысалын қараўдан баслаймыз

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + bf(\sigma) \\ \dot{\sigma} = Cx - \rho f(\sigma) \end{cases} \quad (5)$$

бунда x, σ, C, a, ρ - скаляр шамалар, $a > 0$. Ал (1) ши система ушын Ляпунов функциясын мына түрде излеймиз

$$v = \alpha x^2 + \int_0^\sigma f(\sigma) d\sigma, \alpha > 0$$

буннан төмендегиге ийе боламыз.

$$\dot{v} = -2\alpha ax^2 + 2df(\sigma)x - \rho f^2(\sigma)$$

бунда $d = ab + \frac{1}{2}C$ Ал \dot{v} функциясының терис болыў шәрти мына түрде жазылады

$$\left(ab + \frac{c}{2}\right)^2 - 2\alpha a\rho < 0 \quad (6)$$

(6) шы теңсизлиги $\alpha > 0$ он шешимге ийе болыўы ушын мына $a\rho > bc$ теңсизлигиниң орынланыўы зәрүрли хәм жеткиликли, теңлемениң еки корениниң он болыўын тәмийнлейтуғын

$$\alpha^2 b^2 + \alpha(bc - 2a\rho) + \frac{c^2}{4} = 0$$

Енди (3) ши системаның улыўма жағдайын изертлеўге өтемиз. Мейли симметриялы он анықланған матрицасы берилген болсын хәм симметриялы B матрицасын табамыз

$$A^T B + B A = -C \quad (7)$$

Бул (3) ши системасы ушын Ляпунов функциясын мына түрде излеймиз

$$v(x, \sigma) = x^T Bx + \int_0^\sigma f(\sigma) d\sigma \quad (8)$$

Енди v функциясының туўындысын (3) ши системаға тийкарланып алынған, төмендеги түрге ийе болады:

$$\begin{aligned} \dot{v}(x, \sigma) &= x^T B\dot{x} + x^T B\dot{x} + f(\sigma)\dot{\sigma} = \\ &= x^T (A^T B + BA)x + (b^T Bx + x^T Bb - C^T x)f(\sigma) - \rho f^2(\sigma) \end{aligned}$$

(6) шыны есапқа алсақ хәм мына қатнастарды

$$b^T Bx = (Bb)^T x, x^T Bb = (Bb)^T x$$

мынаған ийе боламыз

$$\dot{v}(x, \sigma) = -x^T Cx + 2f(\sigma)d^T x - \rho f^2(\sigma)$$

бунда $d = Bb + \frac{c}{2}$

Өз-өзинен анық мынаған ийе боламыз

$$\begin{aligned} \dot{v}(x, \sigma) &= (x^T - f(\sigma)d^T C^{-1})C(x - f(\sigma)C^{-1}d) + \\ &+ (\rho - d^T C^{-1}d)f^2(\sigma) \end{aligned}$$

жәнеде $C > 0$ онда $(x^T - f(\sigma)d^T C^{-1})C(x - f(\sigma)C^{-1}d)$ терис анықланған квадратлық форма $(x - f(\sigma)C^{-1}d)$ векторының проекциясы бойынша. Сонлықтан $\rho > d^T C^{-1}d$ шәрти $\dot{v}(x, \sigma)$ ның он анықланғанлығының жеткиликли шәрти.

Туўры басқару системасын изертлеў

Туўры басқару системасын қараймыз

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bf(\sigma) \\ \sigma = C^T x \end{cases} \quad (9)$$

бунда A болса $n \times n$ орнықлы матрица, b болса, n -өлшемлі вектор бағана C^T болса, n -өлшемлі вектор жол, $f(\sigma)$ үзлексіз функция мына шәрті қанаатландырыўшы

$$f(\sigma)\sigma > 0, \sigma \neq 0 \quad (10)$$

Бурынғыша мейли C симметриялы матрицасы берілген болсын меншикли мәніслери он болған, буны мына теңлемеден табамыз

$$A^T B + B A = -C.$$

(9) шы системасы ушын Ляпунов функциясын мына түрде дүземиз

$$v = x^T B x + \beta \int_0^\sigma f(\sigma) d\sigma$$

Солай етип $B > 0$, онда v координата функциясы ретінде x_1, x_2, \dots, x_n он болады $\beta > 0$ де хәм шексиз үлкен. Бизлердің мақсетимиз соннан ибарат, C хәм β параметрлери есабынан \dot{v} функциясына терис болыўын тәмийнлеймиз. Соны көриў қыйын емес, яғный \dot{v} ушын мына аңлатпаға ийе боламыз

$$\dot{v} = -x^T C x + 2d^T x f(\sigma) + \beta C^T b f^2(\sigma)$$

бунда

$$d = B b + \beta \frac{A^T C}{2}$$

Өз-өзинен анық, $C^T B \leq 0$ шәрті \dot{v} функциясының терис анықланғанлығының зәрүрлі шәрті.

Жууымақ

Бул питкеріу қәнигелик жумысында сызықлы емес системаның шешимлериниң бақаларының характеристикаларын Ляпунов функциясы усылы жәрдеминде оптималластырыу мәселеси қарайды. Ляпунов функциясы квадратлық форма түринде алынады. Сондай-ақ питкеріу қәнигелик жумысында сызықлы емес системаның шешимлериниң характеристикаларын дүзиу мәселеси қаралады. Өтиу процессиниң ең әхмийетли характеристикаларының бири болып қайта ретлестириу шамасы есапланады. Жәнеде питкеріу қәнигелик жумысында ретлестириуши системаның өтиу процесслерин есаплақ хәм оптималластырыу мәселелери қаралады. Сызықлы емес система қаралады тууры ретлестириуши деп аталған, Ляпунов функциясы квадратлық форма көринисинде алынады. Солай етип, сызықлы емес системаның орнықлылығын изертлеу матрицалық теңлемени шешиуге алып келеди. Бул питкеріу қәнигелик жумысында тууры емес ретлестириуши сызықлы емес система қаралады. Ляпунов функциясы квадратлық форма көринисинде алынады. Сондай-ақ бул питкеріу қәнигелик жумысында ретлестириуши система ушын оптимал Ляпунов функциясын табыу мәселеси қаралады, еки алгоритм келтириледи: Нур бойынша созыу алгоритми хәм көшерди созыу алгоритми.

Санлы мысал

Енди бизлер берилген матрицалық теңлемениң шешимин қараймыз

$$A^T H + H A = -C$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; A^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}$$

Буларды теңлемеге апарып қойсақ, онда төмендеги көрніске ийе боламыз

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Нәтийжеде

$$\begin{bmatrix} 3h_{11} + 2h_{21} & 3h_{12} + 2h_{22} \\ 2h_{11} + 3h_{21} & 2h_{12} + 3h_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3h_{12} + 2h_{12} & 2h_{11} + 3h_{12} \\ 3h_{21} + 2h_{22} & 2h_{21} + 3h_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Бул теңлемеді сызықты алгебралық теңлемелер системасына ийе боламыз

$$\begin{cases} 6h_{11} + 2h_{21} + 2h_{12} = 1 \\ 6h_{12} + 2h_{22} + 2h_{11} = 0 \\ 6h_{21} + 2h_{11} + 2h_{22} = 0 \\ 6h_{22} + 4h_{12} + 2h_{21} = 1 \end{cases}$$

Сызықты алгебралық теңлемелер системасын шешіп төмендегі H матрицасына ийе боламыз

$$H = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,125 \\ 0,125 & 0,04 \end{bmatrix}$$

нэтийжеси

$$H=0,0144$$

Әдебиятлар.

1. Азбелев Н.В., Сульво Н.В. К вопросу об устайгивости решений дифференциальных уравний с запаздывающим аргументам. // Дифференц уравнения 1974. Т 10, №2. С.2091-2100

2. Айзерман М.А. Гантмахр Ф.Р. Абсолютная устойчивость регулируемых систем, М: Изд-во АН СССР, 1963.140 с
3. Барбашин Е.А. функции Ляпунова .М.: Наука, 1970 210с
4. Боркин И.А. Методы оценки координат абсолютно устойчивых систем. // Авт .И телемех. 1979 №1 С.182-186
5. Боркин И.А. оценки качества нелинейных систем регулирования.М: Наука, 1982.253 с.
6. Беллман Р. Введение в теорию матриц.: Наука 1976. 351 с.
7. Гантмахр Ф.Р. Якубович В.А. Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем. Обзор докладов. М.: Наука, 1966. Вип. 1. с. 30-63.
8. Хусайнов Д.Я. оценки устойчивости регулируемых систем с отклоняющимся аргументом нейтрального типа. // Докл. АН Украины №5. 1992.с.76-78
9. Хусайнов Д.Я. Жуйкова А.Г. получение оценок устойчивости нелинейных систем регулирования с запаздывающим аргументом. К. 1986, 36с.
10. Хусайнов Д.Я. Жуйкова А.Г. исследование устойчивости нелинейных систем регулирования нейтрального типа. //Укр мат журн. 1989. Т. 41,№6. с: 848-853.