

**ÓZBEKISTAN RESPUBLIKASI INFORMACIYALIQ
TEXNOLOGIYALARI HAM KOMMUNIKACIYALARIN
RAWAJLANDIRIW MINISTRILIGI**

***AL-XOREZMIY ATINDAGI TASHKENT INFORMACIYALIQ
TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI NOKIS FILIALI***

Informaciyaliq texnologiyalari kafedrası
Kompyuter injiniringi bagdari

Qorgawga ruxsat

Kafedra basligi _____

2017 jil <<____>> _____

Differenciya teńlemelerdi sheshiwde gradient usilinan
paydalaniw ham kompyuterde modellestiriw
temasinda

PITKERIW QANIYGELIK JUMISI

Pitkeriwshi: _____ Patshaxanov A.A.

Ilimiy basshisi: _____ docent Qojametov A.

Sin beriwshi _____ docent Utebaev D.

Nokis – 2017 jil

Mazmuni

Kirisiw.....	
I Bap. Turaqli koefficientli differenciyal teńlemeler sistemasin sheshiw.....	
1.1 Siziqli differenciyal teńlemeler sistemasin kvadratliq funkciya járdeminde optimallastiriw.....	
1.2. Dinamikaliq sistemalardi optimallastiriw algoritmleri.....	
II Bap. Dinamikaliq sistemalardi gradient usili járdeminde optimallastiriw	
2.1. Optimizaciyalıq máselelerdi gradient usili menen sheshiw.....	
2.2. Gradient proceduraǵa tiykarlangan sanli usil.....	
III Bap. Optimizaciyalıq máselelerdi sheshiwdegi algoritmler.....	
3.1 Nur boyınsha soziw algoritmi.....	
3.2. Kósherdi soziw algoritmi.....	
Juwmaqlaw.....	
Paydalanılǵan ádebiyatlar	
Texnika qáwipsizligi qaǵıydaları.....	

Kirisiw

Lyapunovtiń tuwri metodi yamasa Lyapunov funkciya metodi tábiyattaǵı hár qiyli sistemani izertlewde, fundamental metodlardıń biri bolip esaplanadı. XIX-asirdiń aqırındaǵı kórnekli rus ilimpazlariniń kórsetpeleri jańalaniw dáwirine iye boldı. Egerde oniń járdemi menen alınǵan birinshi nátiyje ápiwayı differenciya teńlemeler sistemasiniń orniqlılıq yamasa orniqsızlıq shártleriniń bar bolıwı teoriyalıq harakterge iye bolsa, onda aldaǵı waqıtta oniń rawajlanıwı eki baǵdarda boladı. Xalanay A., Bromberg P.V., Bellman R., Kunceviş V.M., Shexovogo Yu.N., Marto`nyuk D.I. lerdıń jumıslarında ayırmalı teńlemeler sistemasi qaraldı. Óziniń tábiyatı boyınsha olar differenciya esabına jaqın bolıp hám olarǵa tábiyiy ulıwmalasqan Lyapunov funkciyalar metodi qollanıldı.

Zubov V.I., Krasovskiy N.N., Korobov B.I. lerdıń jumıslarında dinamikalıq sistemani basqarıw máselesi ashın Lyapunov funkciya metodın qollanıw ideyalari keńnen rawajlandı.

Keyingi waqıtta Lyapunovtiń optimal funkciyalar metodi keńnen rawajlanıwǵa baǵdar aladı. Sonıń menen birge bul metod konkret texnikalıq harakteristikalıq sistemani alıwǵa múmkinshilik beredi. Usı waqıtqa shekem matematikaniń kópshilik tarawlarında ayırmalı teńlemeler sistemasi hár qiyli formada úyrenildi. Texnikalıq ilimleriniń rawajlanıw tendenciylarına baylanisli bul oblast boyınsha hár qiyli jańa problemalar kelip shıqtı. Elektron mashinaların diskret basqarıwda informaciyalardı qayta islew processlerinde basqarıwdıń impulsliq sistemaların bayanlawlardı modellestiriwde ayırmalı sistemalar joqarı dárejede qollanıldı. Ayırmalı sistemani bayanlawshi matematikalıq apparat differenciya apparatına uqsas bolıp keledi. Tiykarınan alǵanda Sipkin Y.Z., Barbashin E.A., Beksler D., Bellman P. h.t.b. lardıń jumıslarında diskret sistemaniń orinlılıq teoriyasi tolıq úyrenildi. Keyingi waqıtta esaplaw mashinalari járdeminde ayırmalı sistemaniń orniqlılıǵı haqqındaǵı problemaǵa qızıǵıwshılıq kúsheydi.

I Bab. Turaqli koefficientli differentsiyal teńlemeler sistemasin shesiw.

1.1. Siziqli differentsiyal teńlemeler sistemasin kvadratliq funkciya járdeminde optimallastiriw

Kelesi waqitlari qollanilatugin orniqliligi hám baylanisliligiń tiykargi aniqlamalarin keltirip otemiz.

Egerde $\dot{x}(t) = f(x)$, $x \in R^n$, $t \geq t_0$, $f(0) = 0$

apiwayi differentsiyal teńlemeler sistemasin qarastirsaq, yagniy $x(t) \equiv 0$ bolsa, onda tómendegi orniqliligi aniqlamalari orinli.

A n i q l a m a 1. $x(t) \equiv 0$ sheshimi Lyapunov boyinsha orniqli dep ataladi, egerde qálegen $\varepsilon > 0$ sani ushin, sonday $\delta(\varepsilon) > 0$ sani bar bolip $|x(t_0)| < \delta(\varepsilon)$ teńsizligi orinlaniwinan, qálegen $x(t)$ – sheshim ushin, $t > t_0$ bolganda $|x(t)| < \varepsilon$ teńsizligi orinlansa.

A n i q l a m a 2. $x(t) \equiv 0$ sheshim eksponencial orniqli dep ataladi, egerde sonday $N > 0, \gamma > 0$ turaqlilari bar bolip sistemaniń hár qanday $x(t)$ sheshimi ushin $t > t_0$ bolganda

$$|x(t)| \leq N|x(t_0)|\exp\{-\gamma(t - t_0)\} \quad \text{teńsizligi orinlansa.}$$

$\dot{x}(t) = Ax(t)$, $x(t) \in R^n$ (I) túrindegi turaqli koefficientli siziqli differentsiyal teńlemeler sistemasin qarastiramiz. $x(t_0) = x_0$ baslangish shártin qanaatlantirish (I) sistemaniń sheshimin $x(t)$ turinde ańlatamiz. Lyapunov funkciyasin $V(x) = x^T H x$ kvadratliq forma túrinde alamiz. (I) sistemani esapqa alsaq, onıń toliq tuwindisi tómendegi kóriniske iye boladi

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{x}^T(t) H x(t) + x^T(t) H \dot{x}(t) = x^T(t) [A^T H + H A] x(t)$$

Eger simmetriyali oń aniqlangan N-matricasin $V(t)$ funkciyasiniń toliq tuwindisi dáslepten berilgen teris aniqlangan kvadratliq formağa teń bolatuğinday etip saylap alsaq, yagniy $\dot{V}(x(t)) = -x^T(t) C x(t)$

H -matricasin tabiw Lyapunov matricaliq teńlemesine keltiriledi:

$$A^T H + H A = -C \quad (2)$$

Eger A -matricasi asimptotikalıq opıqlı bolsa, onda (2) teńleme bir sheshimge iye boladı. Bul jerde, S -matricasi oń anıqlanğan bolsa, onda alınğan N -matricasi da oń anıqlanğan boladı. Ámeliy máseleniń sheshiminen tek orniqlılıq faktiniń qoyiliwi ǵana emes bálki shamasın mayta dúziwdi xarakterlewshi $\delta(\varepsilon)$ funkciyasiniń esaplaniwida áhmiyetli mániske iye.

$U_\delta = \{x : |x| < \delta(\varepsilon)\}$ oblastin baslanǵısh qozdiriwlar oblasti dep ataymız.

$V(x) = x^T H x$ – Lyapunov funkciyasi járdeminde U_δ – oblastin tómendegishe aliw múmkin.

Kvadratlıq funkciya ushin

$$\lambda_{\min}(H)|x|^2 \leq V(x) \leq \lambda_{\max}(H)|x|^2 \quad (3)$$

teńsizligi orinlı, bul jerde $\lambda_{\min}(\bullet)$, $\lambda_{\max}(\bullet)$, H -matricasiniń sáykes eń kishi hám eń úlken menshikli mánisleri. (I) sistemaniń kúshi menen bolğan funkciyaniń tolıq

tuwindisi ushin $\dot{V}(x) \leq -\lambda_{\min}(C)|x|^2$ teńsizligi orinlanadı.

(3)shi teńsizlikten paydalanıp minaǵan iye bolamız $\frac{dV(t)}{dt} \leq -\frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)}V(x)$

Bul differenciyal teńsizlikti sheshsek,

$$V(x) \leq V(x_0)e^{-\frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)}(t-t_0)} \quad \text{ge iye bolamız.}$$

Bul jerden qaytadan (3) teńsizlikti paydalanıp, tómendegini jazıwǵa boladı.

$$|x(t)| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(C)}} |x_0| \exp\left\{-\frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)}(t-t_0)\right\} \quad (4)$$

(I)shi sistemaniń $x(t) \equiv 0$ sheshimi asimptotikalıq orniqlı bolsa, onda (4)shi

qatnastan mina kóriniske iye bolamiz:
$$\sup_{t \geq t_0} \|x(t)\| = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}} |x_0|$$

yamasa, ε hám $\delta(\varepsilon)$ shamaların paydalansaq, tómendegishe boladı:

$$\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}} \delta(\varepsilon) \leq \varepsilon$$
 Bul jaǵdayda U_δ , baslanǵısh qozdırıwdıń bahası ushin

tómendegidey ǵárezlilik orın aladı
$$\delta(\varepsilon) \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(H)}{\lambda_{\max}(H)}} \varepsilon$$

Kórinip turǵanday, anıq baxalaw $V(x) = x^T H x$ - Lyapunov funkciyasın saylap alıw menen baylanisli hám egerde $\lambda_{\max}(H) / \lambda_{\min}(H)$ eń kishi shama bolsa, bunnan da anıǵıraq bolatuǵın edi.

Egetde $\varphi_1(H)$ – funkciyasın $\varphi_1(H) = \lambda_{\max}(H) / \lambda_{\min}(H)$ túrinde ańlacaq, hám $\varphi_1(H)$ -funkciyasın minimizaciyalaw máselesin Lyapunov teńlemesiniń sheshimler kópliginde qarastırsaq, onda tómendegi matematikalıq programmalaştırıw máselesine kelemiz. Bizge tómendegini tabıw talap etiledi:

$$H_0 = \arg \inf_{G(H)} \{\varphi_1(H)\}$$

Bul jerde $G(H)$ oń anıqlanǵan H -matricalarınıń kópligi, bunnan $A^T H + H A$ – teris anıqlanǵanlıǵın kórsetedi.

A n i q l a m a 3. $V_0(x) = x^T H x$ – Lyapunov funkciyasın, bunday

$$H_0 = \arg \inf_{H \in G(H)} \{\varphi_1(H)\}, \quad \varphi_1(H) = \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)} \quad (5)$$

baslanǵısh qozdırıwlarıń bahası ushin optimal dep ataymız.

Endi $n > 2$ bolǵandaǵı (5) optimal máselesinde $V_0(x)$ funkciyasın tabıwdı úyrenemiz. $G(H)$ - oblastin qarastıramız. Sonı aytiw kerek, egerde $H_1 \in G(H)$ hám $H_2 \in G(H)$ bolsa, onda α -erikli turaqlısı ushin, bunda $0 < \alpha < 1$, $\alpha H_1 + (1 - \alpha) H_2 \in G(H)$ boladı. Bunnanda basqa, eger $H \in G(H)$ bolsa, onda

μ -erikli tupaqlisi ushin, $0 < \mu < \infty$, $\mu H \in G(H)$ boladi. Bunday jaǵdayda $G(H)$ -tuyiq konus boladi. N - simmetriyali matrica bolǵanliqtan, keńisliktiń ólshemi $n(n+2)/2$ boladi.

$1 \leq \varphi_1(H) < \infty$ ekenin bayqaw qiyin emes. Sonliqtan Lyapunovtiń barliq funkciyasinan “eń jaqsi” si (A -matricasiniń kórinisinen ǵárezli) $V_0(x) = |x|^2$ boladi, bunda $\varphi_0(H_0) = 1$. $\varphi_1(H)$ -geometriyalq jaqtan $\partial V^\alpha = \{x : V(x) = \alpha\}$.

“Eń jaqsi” Lyapunov funkciyasi sferikalıq boladi. Lyapunov funkciyasiniń $\varphi_1(H) = 1$ ushin optimal bar boliwiniń zárúrli hám jetkilikli shártlerin keltirip ótemiz.

T e o r e m a I. $\varphi_1(H_0) = 1$ bolǵanda (2) shi Lyapunov teńlemesi $H_0 \in G(H)$ -matricasiniń sheshimine iye boladi, sonda tek ǵana egerde $A + A^T$ -teris aniqlanǵan matrica bolsa.

Dálillew: (zárúrligi) Meyli on aniqlanǵan C_0 -matricasiniń bap bolsın, bynnan (2) teńleme H_0 -matricasiniń sheshimine iye boladi, buniń ushin $\varphi_1(H_0) = 1$ boliwi kerek. Bizge belgili, $U^T H U$ – diagonallıq strukturaǵa iye bolǵan erikli N -simmetriyalıq matricasi ushin U -ortonormallanǵan matrica bar boladi, bunda $U^T U = E$ hám $\lambda_{\max}(H_0) / \lambda_{\min}(H_0) = 1$ bolǵanliqtan, yamasa

$$\lambda_1(H_0) = \lambda_2(H_0) = \dots = \lambda_n(H_0) = 1 \text{ bolsa, onda } U^T H_0 U = \lambda E.$$

Soniń menen birge H_0 -on aniqlanǵan matrica, onda $\lambda > 0$.

$$\text{Bunnan } (U^T A U)^T (U^T H U) + (U^T H_0 U) (U^T A U) = -(U^T C_0 U).$$

$$\text{Soday-aq } U^T H_0 U = \lambda E, \text{ onda } U^T A^T U + U^T A U = -\frac{1}{\lambda} U^T C_0 U.$$

$$\text{Bul jaǵdayda } A + A^T = -\frac{1}{\lambda} C_0 \text{ teris aniqlanǵan matrica.}$$

Jetkilikliliği: Meyli $A + A^T$ – teris anıqlanğan matrica bolsın.
 $C_0 = -(A + A^T)$ desek, $H_0 = E$ ge iye bolamiz hám demek,
 $\lambda_{\max}(H_0) / \lambda_{\min}(H_0) = 1$

Sonıń menen birge $G(H)$ – kópligi ashıq konus kórinisinde boladı. Sonday jaǵday bolıwı múmkin, egerde H_0 – oń anıqlanğan matrica bolsa buniń ushin $\varphi_1(H_0) = 1$ konus shegarasında jatadı.

L e m m a : Erikli $\varepsilon > 0$ sani ushin sonday C_ε – simmetriyali oń anıqlanğan matrica bar boladı, bunday H_ε -matricası $\varphi_1(H_\varepsilon) < 1 + \varepsilon$ - Lyapunov matricaliq teńlemesiniń sheshimi boladı. Sonda simmetriyali oń yarım anıqlanğan $\bar{C}$ matricasına jıynalıwshi simmetriyali oń anıqlanğan $\{C_k\}, k = 1, 2, \dots$ matricalar izbe-izligi bat boladı, hám oǵan sáykes $\{H_k\}, k = 1, 2, \dots$ izbe-izligi bar boladı, hám oń anıqlanğan $\bar{H}$ -matricasına jıynaladı, bunda

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_1(H_k) = \varphi_1(\bar{H}) = 1 \text{ teńligi orinlanadı.}$$

D á l i l l e w : Meyli $\varepsilon = 1/k$ hám $\varphi_1(H_k) < 1 + 1/k$ berilgen bolsın. Lyapunov teńlemesin $|C_k|$ ǵa bólip,

$$A^T \frac{H_k}{|C_k|} + \frac{H_k}{|C_k|} A = -\frac{C_k}{|C_k|} \text{ iye bolamiz.}$$

Menshikli mánislerdegi siyaqlı bunda da proporcionallıq ózgeredi, onda shegaralanbaǵan ulıwmalıqtı $|C_k| = 1$ dep esaplaymız, $k = 1, 2, \dots$

(bul jerde $|C_k| = \lambda_{\max}(C_k)$) $|C_k| = 1$ teńligi $\{C_k\}$ -izbe-izliginiń birlik radiusli sferaǵa tiyisli bolatuǵının hám oniń kúshi menen $\{C_k\}$ -izbe izliginiń kompaktililigınan $\{C_k\} \rightarrow C$ ǵa umtiliwshi izbe-izlikti ajıratıp alıw múmkin ekenligin bildiredi, bunda S - oń anıqlanğan. A - asimptotikalq orniqlı matrica

bolganligi sebepli $F[H] = A^T H + H A$ -operatorini menshikli manisi ushin

$$\lambda(F) = \lambda_i(A) + \lambda_j(A) \neq 0, 1 \leq i \leq j \leq n \quad \text{orinlanadi.}$$

$F(N)$ -operatori aynimağan operator dep ataladi. Sonin ushin uzliksiz ker operator $F^{-1}(C)$ bar boladi ham Lyapunov tenlemesinin N -sheshimi S -menen uzliksiz baylanisli boladi. Bunday jagday $\{H_{km}\}$ -ules izbe-izligide $\{C_{km}\}$ -ules izbe-izligi siyaqli bazibir N -matricasina jiynaladi. $\{H_{km}\}$ -ules izbe-izligi ushin lemmanin tastiqlawinin orinli ekenligin kórsetemiz.

Bunnan $|A^T| \cdot |H| + |H| \cdot |A| \geq |C|$ iye bolamiz.

Eger $|C| = 1$ bolsa, onda $\lambda_{\max}(H) \geq \lambda_{\max}(C) / 2|A| = 1/2|A| > 0$ boladi.

Harakteristikaliq tenlemenin koreninin matrica elementlerinen uzliksiz gárezsizliginen

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_{\max}(H_{km}) = \lambda_{\max}(\bar{H});$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_{\min}(H_{km}) = \lambda_{\min}(\bar{H}) \quad \text{boladi.}$$

$\lambda_{\max}(\bar{H}) > 0$ ham $\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_1(H_{km}) = 1$ bolganlqtan, $\lambda_{\min}(\bar{H}) > 0$ boladi.

Demek : $\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi(H_{km}) = \varphi_1(\bar{H}) = 1$.

T e o r e m a 2 : $V_0(x)$, $H_0 \in G(H)$ -optimal funkciyasi bar boladi, sonda tek gana egerde $A + A^T$ -teris aniqlangan matrica bolsa.

D á l i l l e w (Zárurligi) : Meyli $V_0(x)$ -Lyapunovtin optimalliq funkciyasi bar bolsin, (2)shi tenlemege kiretugin on aniqlangan H_0 ham C_0 matricalarina iye bolgan ham $\inf_{H \in G(H)} \{\varphi_1(H)\} = \varphi_1(H_0) = \alpha$. ekenligin kórsetemiz.

Kerisinen dalilleymiz, yagniy $\alpha > 1$ bolsin. H_0 -matricasin diagonalliq tipge keltirwshi U -ortogonal matricasi barliq waqitta bap boladi, yagniy

$$U^T H U = \begin{vmatrix} \lambda_1(H_0) & 0 \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2(H) \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots & \lambda_n(H_0) \end{vmatrix} = \Lambda(H_0).$$

Meyli $\lambda_{\min}(H_0) = \lambda_{i_1}(H_0) = \dots = \lambda_{i_k}(H_0)$ bolsin.

$$S = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{bmatrix}, \quad j \neq i_1, i_2, \dots, i_k$$

matricağa kirgizilgen, bunda $\mu_{i_1} = \mu_{i_2} = \dots = \mu_{i_k} = 1$ bolsa, $\mu_j = 0$ boladi.

Egerde C_0 -matrica oń anıqlanğan bolsa, onda jetkilikli dárejede kishi $\delta > 0$ bolğanda C_1 -matrica da oń anıqlanğan boladi.

$$C_1 = C_0 - \delta(A^T U S U^T + U S U^T A)$$

Sunday-aq, $A^T H_1 + H_1 A = -C_1$ teńlemesindegi H_1 hám H_0 matricaları tómektegi qatnas penen baylanisli:

$$H_0 = H_1 - \delta U S U^T,$$

$$\begin{aligned} \text{onda} \quad \varphi_1(H_1) &= \frac{\lambda_{\max}(H_0 + \delta U S U^T)}{\lambda_{\min}(H_0 + \delta U S U^T)} = \frac{\lambda_{\max}[U^T(H_0 + \delta U S U^T)U]}{\lambda_{\min}[U^T(H_0 + \delta U S U^T)U]} = \\ &= \frac{\lambda_{\max}[\Lambda(H_0) + \delta S]}{\lambda_{\min}[\Lambda(H_0) + \delta S]} = \frac{\lambda_{\max}(H_0)}{\lambda_{\min}(H_0) + \delta} < \varphi_1(H_0) = \alpha \end{aligned}$$

Bul jağdayda, $1 \leq \varphi_1(H_1) < \alpha$ ushin H_1 -matricası dúzildi. Demek, $\alpha > 1$ uyğariwimiz duris emes eken. Onda $\alpha = 1$ teris anıqlanğan matrica eken.

Jetkilikliligi: Eger $A + A^T$ -teris aniqlanğan bolsa, onda $C_0 = -(A + A^T)$ - desek, $H_0 = E$ hám $\varphi_1(H_0) = 1$ teńliklerine iye bolamiz. $\varphi_1(H)$ -funkciyasiniń aniqlanuw oblastin keńeytemiz, yaǵniy $G(H)$ -konusqa oniń qaptal betin kirgiziw arqali, $H \in \overline{G}(H)$ ekenligin qarastiramiz, bul jerde

$$\begin{aligned}\overline{G}(H) &= G(H)U\partial G(H), \\ \partial G(H) &= \{H : \lambda_{\min}(-A^T H - HA) = 0\}.\end{aligned}$$

$\overline{G}(H)$ -tuyiq kóplik bolip esaplanadi, sonıń menen birge egerde, $\overline{H} \in DG(H)$ bolsa, onda H -matricasi oń yarim aniqlanğan boliwida múmkin, bunnan kelip shıǵadi, yaǵniy uliwma $\overline{H}$ -matricani Lyapunov funkciyasın dúziw ushin qollanuw múmkin emes.

T e o r e m a 3. $V_0(x) = x^T H_0 x$, $H_0 \in \overline{G}(H)$ Lyapunov funkciyasi $\varphi_1(H_0) = 1$ bolǵanda baslanǵısh berilgenlerdiń baxası ushin optimal boladi, sonda tek sonda ǵana, egerde $-(A + A^T)$ -oń yarim aniqlanğan matrica bolsa .

Dálillew: (Zárúrligi) Meyli $H_0 \in \overline{G}(H)$ hám $\varphi_1(H_0) = 1$ bolsin. Sonda $\lambda_1(H_0) = \lambda_2(H_0) = \dots = \lambda_n(H_0) = \lambda$ boladi. Lyapunov funkciyasın tómendegidey túrge keltiriwshi U -ortogonal matrica bar boladi

$$U^T[A^T(\lambda E) + (\lambda E)A]U = -U^T C_0 U$$

Bunnan:
$$A + A^T = -\frac{1}{\lambda} C_0 .$$

Sonday-aq, $\lambda_{\min}(C_0) = 0$ boladi, onda $-(A + A^T)$ -oń yarim aniqlanğan matrica boladi.

Jetkilikliligi: $C_0 = -(A + A^T)$ -dep alsaq, onda $\varphi_1(H_0) = 1$ ge iye bolamiz. Sonday aq $-(A + A^T)$ -oń yarim aniqlanğan, onda $H_0 \in \overline{G}(H)$.

Teorema 4. Meyli $(A + A^T)$ - matrica o'ň yarim aniqlangan bolip esaplanbasin. Sonda o'ň yarim aniqlangan C_0 - matricasi optimalliqni z'arurli sharti bolip esaplanadi, ya'g'niy $\lambda_{\min}(C_0) = 0$ ham, demek $H_0 \in \partial G(H)$.

Dalillew. Meyli kerisinshe H_0 ham C_0 matricalari optimallastiriv maslesini sheshimi bolip esaplansin ham $H_0 \in G(H)$ bolsin, ya'g'niy C_0 o'ň aniqlangan bolsin, j'ane $\lambda_{\min}(C_0) > 0$ bolsin.

Lyapunov tenlemesini sheshimi bolatu'g'inday N ham S jubi bar boladi ham $\varphi_1(\bar{H}) < \varphi_1(H_0)$ bolatu'g'inin ko'rsetemiz. Uy'gariwimiz boyinsha, $\lambda_{\min}(C_0) > 0$ onda $0 < \lambda_{\min}(C_0) = \lambda_1(C_0) \leq \dots \leq \lambda_n(C_0) = \lambda_{\max}(C_0)$ boladi.

C_0 -matricani diagonalliq t'urge keltiretu'g'inday U -ayriqsha emes ortogonalliq matrica bar boladi, ya'g'niy : $U^T C_0 U = \Lambda(C_0)$.

Lyapunov tenlemesini shep ja'in U^T -matricasina, o'ň ja'in U -matricasina ko'beycek, to'mendegidey tenlemege iye bolamiz

$$A_1^T H_1 + H_1 A_1 = -\Lambda(C_0),$$

bul jerde $A_1 = U^T A U$, $H_1 = U^T H_0 U$, $A_1 + A_1^T = U^T (A + A^T) U$

bol'ganliqtan, $(A_1 + A_1^T)$ ham $-(A_1 + A_1^T)$ -matricalari birdey menshikli manislerge iye boladi, ya'g'niy

$$\lambda_i(-A_1 - A_1^T) = \lambda_i(-A - A^T), \quad i = \overline{1, n}$$

$$\lambda_1(-A - A^T) \leq \lambda_2(-A - A^T) \leq \dots \leq \lambda_n(-A - A^T)$$

Sunday-aq $-(A + A^T)$ -matrica o'ň aniqlangan emes, sonliqtan $\lambda_1(-A - A^T) < 0$

boladi. $\delta = |\lambda_1(-A - A^T)| / \lambda_{\min}(C_0)$ dep a'latamiz ham Lyapunov tenlemesin

qaraymiz. $A_1^T H + H A_1 = (A_1 + A_1^T) - \delta \Lambda(C_0)$ (6)

$-(A_1 + A_1^T) - \delta \Lambda(C_0)$ -matricasini o'ň yarim aniqlanba'ganin ko'rsetemiz .

Haqiqattanda, $-(A_1 + A_1^T) + \delta \Lambda(C_0) = -(A_1 + A_1^T) + |\lambda_1(-A_1 - A^T)| E + \delta \Lambda_1(C_0)$

bul jerde $\Lambda_1(C_0) = \Lambda(C_0) - \lambda_{\min}(C_0) \cdot E$

$$0 < \lambda_{\min}(C_0) = \lambda_1(C_0) \leq \lambda_2(C_0) \leq \dots \leq \lambda_n(C_0)$$

hám $\delta > 0$ bolganliqtan, $\delta\Lambda_1(C_0)$ -matrica ón yarim aniqlangan boladi.

$-(A_1 + A_1^T) + |\lambda_1(-A - A^T)| \cdot E$ matricasiniń menshikli mánisleri

$\lambda_1 = 0, \lambda_i = \lambda_i(-A - A^T) + |\lambda_1(-A - A^T)| \geq 0, i = \overline{2, n}$ boladi.

Bunnan $-(A_1 + A_1^T) + \delta\Lambda(C_0)$ -matricasi da ón yarim aniqlangan boladi.

Endi (6) teńlemeneni qarastiramiz, oniń ón bólegi ón yarim aniqlangan bolip esaplanadi. Meyli, H_2 -matricasi oniń sheshimi bolsin. Teńlemeneni tómendegishe túrlendiremiz:

$$A_1^T(H_2 - E) + (H_2 - E)A_1 = \delta\Lambda(C_0)$$

Shep jaǵın U -ǵa, al ón jaǵın U^T -matricasina kóbeytiw arqali tómendegige iye bolamiz :

$$A^T(\tilde{H}_2 - E) + (\tilde{H}_2 - E)A = -\delta C_0$$

Bul jerde $\tilde{H}_2 = UH_2U^T$ hám H_2 -matrica da sonday menshikli mánislerge

iye boladi. $\tilde{H}_2$ -matrica $A^T\tilde{H}_2 + \tilde{H}_2A = (A + A^T) - \delta C_0$ teńlemeniniń sheshimine

iye boladi. Egerde H_0 -ón aniqlangan C_0 -matricasi boyinsha Lyapunov

funkciyasiniń sheshimi bolsa, al H_2 -ón yarim aniqlangan $-(A + A^T) + \delta C_0$ -

matrica boyinsha bolsa, onda olar $\tilde{H}_2 - E = \delta H_0$ qatnasi menen baylanisli boladi,

al olardiń menshikli mánisleri

$$\lambda_i(\tilde{H}_2) = \lambda_i(E + \delta H_0) = 1 + \lambda_i(H_0) \frac{|\lambda_i(-A - A^T)|}{\lambda_{\min}(C_0)}, \quad i = \overline{1, n} \quad \text{boladi.}$$

Demek, $\lambda_i(\tilde{H}_2) > 0, i = \overline{1, n}$ yaǵniy alingan matrica ón aniqlangan.

Soniń menen birge $\varphi_1(\tilde{H}_2) = \frac{\lambda_{\max}(E + \delta H_0)}{\lambda_{\min}(E + \delta H_0)} = \frac{1 + \delta\lambda_{\max}(H_0)}{1 + \delta\lambda_{\min}(H_0)} < \varphi_1(H_0)$

Bunday jaǵdayda H_2 -matricani aliw, $\varphi_1(\tilde{H}_2) < \varphi_1(H_0)$ bolǵanda, H_0 -di optimal dep uyǵariwimizǵa qarsi keledi. Bul dálillewden kórinip turǵanınday bunday momenttiń boliwi C_0 -diń oń anıqlanǵanlıǵı bolıp esaplanadı.

1.2 Dinamikaliq sistemalardi optimallastiriw algoritmleri

I. Nur boyınsha soziw algoritmi

Meyli S -erikli oń anıqlanǵan matrica hám N -Lyapunov teńlemesiniń sáykes sheshimi bolsin. Oni tómendegishe túrlendiremiz

$$A^T(H + \delta E) + (H + \delta E)A = [C - \delta(A + A^T)]$$

$-(A + A^T)$ -matrica oń anıqlanǵan matrica bolıp esaplanbaydı ($H_0 = E$ den basqa).

Egerde $0 < \delta < \delta_0$ bolǵanda, $C - \delta(A + A^T)$ -matricasiniń úzliksiz baylanisliliǵınan da oń anıqlanǵan boladı. $\delta > 0$ bolǵanda

$$\varphi_1(H + \delta E) = \frac{\lambda_{\max}(H + \delta E)}{\lambda_{\min}(H + \delta E)} = \frac{\delta + \lambda_{\max}(H)}{\delta + \lambda_{\min}(H)} < \frac{\lambda_{\min}(H)}{\lambda_{\min}(H)} = \varphi_1(H)$$

teńligi orinlanadı hám monoton baylanisliliqqa iye boladı, yaǵniy $\delta_1 > \delta_2$ bolǵanda $\varphi_1(H + \delta_2 E) < \varphi_1(H + \delta_1 E)$ boladı. δ_0 -diń maksimal mánisin tabamiz, bunnan $C - \delta(A + A^T)$ matrica oń anıqlanǵanlıǵınsha qaladı. 4-teoremadan kelip shiqqanday,

$$0 < \delta < \lambda_{\min}(C) / |\lambda_{\min}(-A - A^T)|$$

bolǵanda

$$\lambda_{\min}[C - \delta(A + A^T)] \geq \lambda_{\min}(C) - \delta \lambda_{\min}(A + A^T) \geq 0$$

teńsizligi orinlanadi. Bul jaǵdayda $\delta_0 = \frac{\lambda_{\min}(C)}{|\lambda_{\min}(-A - A^T)|}$ ni aliw múmkin.

Bul algoritm tómendegishe geometriyalıq interpretaciyaǵa iye:

$H(\delta)$ -matrica ózine $H_0 = \delta E$ ǵa sáykes keliwshi matricani qabil etedi, yaǵniy $\delta \rightarrow \infty$ bolǵanda optimallıqqa umtiliwshi hám $H + \delta E$ -nurda jaylasqan.

2.Kósherdi soziw algoritmi

Buniń algoritmi N-matricasiniń ortogonal túrlendiriwler sistemasiniń jolin basli kósherge keltiriwden turadi. Keyin kósherden eń minimali soziladi, yaǵniy

$$\lambda_{\min}(H) \rightarrow \lambda_{\min}(H) + \varepsilon.$$

ε -sani S-matrica oń anıqlanǵan matrica bolǵanǵa shekem artip baradi.

Lyapunov tenlemesiniń shep jaǵın U -ǵa, al oń jaǵın U^T -ni kóbeytiw arqali tómendegige iye bolamiz. Bul jerde, U, H ti dioganallıq túrge keltiretuǵınday

ortogonal matrica $(U^T A U)^T (U^T H U) + (U^T H U)(U^T A U) = -(U^T C U)$

yamasa $A_1^T \Lambda + \Lambda A_1 = -C_1$, bul jerde $A_1 = U^T A U$, $U^T C U$

Alınǵan teńlemenı tómendegishe túrde jazamiz:

$$A_1^T \begin{vmatrix} \lambda_1 + \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 + \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{vmatrix} A_1 = -C_1 A_1^T \begin{vmatrix} \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} A_1$$

Meyli $A_1 = \{a_{ij}^1\}$, $C_1 = \{C_{ij}^1\}$, $i = j = \overline{1, n}$ bolsin.

Onda
$$\Lambda(\varepsilon) = \begin{vmatrix} \lambda_1 + \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{vmatrix}$$
 dep ańlacaq,

$A_1^T \Lambda(\varepsilon) + \Lambda(\varepsilon) A_1 = -C_1(\varepsilon)$ ǵa iye bolamiz, bul jerde

$$C_1(\varepsilon) = \begin{vmatrix} C_{11}^1 - 2\varepsilon a_{11}^1 & C_{11}^1 - \varepsilon a_{12}^1 & \dots & C_{1n}^1 - \varepsilon a_{1n}^1 \\ C_{12}^1 - \varepsilon a_{12}^1 & C_{22}^1 & \dots & C_{2n}^1 \\ \hline C_{1n}^1 - \varepsilon a_{1n}^1 & C_{2n}^1 & \dots & C_{nn}^1 \end{vmatrix}$$

Bizge belgili, egerde $C_1(\varepsilon)$ -matrica $\varepsilon = 0$ bolǵanda oń aniqlanǵan bolsa, al ε -parametriniń ósiwi menen oń aniqlanǵanlıq joǵalip barsa, onda ε -maksimal shama $\det C_1(\varepsilon) = 0$ teńlemesinen aniqlanadi.

Bunda oń aniqlanǵanlıq qásiyeti saqlanadi, yamasa bul teńlemeni jayıp jazsaq tómendegige iye bolamiz:

$$\begin{aligned} & (-\varepsilon)^n \begin{vmatrix} -2a_{11}^1 - a_{12}^1 & \dots & a_{1n}^1 \\ -a_{12}^1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline -a_{1n}^1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} + (-\varepsilon)^{n-1} \left\{ \begin{vmatrix} C_{11}^1 - a_{12}^1 & \dots & -a_{1n}^1 \\ C_{12}^1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline C_{1n}^1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} + \right. \\ & \left. + \dots + \begin{vmatrix} -2a_{11}^1 - a_{12}^1 & \dots & a_{1n-1}^1 & C_{11}^1 \\ -a_{12}^1 & 0 & \dots & 0 & C_{12}^1 \\ \hline -a_{1n}^1 & 0 & \dots & 0 & C_{1n}^1 \end{vmatrix} \right\} + \dots + \begin{vmatrix} C_{11}^1 & C_{12}^1 & \dots & C_{1n}^1 \\ C_{12}^1 & C_{22}^1 & \dots & C_{2n}^1 \\ \hline C_{1n}^1 & C_{1n}^1 & \dots & C_{nn}^1 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

No'llik aǵzaların taslap jazsaq, tómendegi kvadratlıq teńlemege iye bolamiz

$$\varepsilon^2 \begin{vmatrix} 0 & a_{11}^1 & \dots & a_{1n}^1 \\ a_{12}^1 & C_{22}^1 & \dots & C_{2n}^1 \\ \hline a_{1n}^1 & C_{2n}^1 & \dots & C_{nn}^1 \end{vmatrix} - 2\varepsilon \begin{vmatrix} a_{11}^1 & C_{12}^1 & \dots & C_{2n}^1 \\ a_{12}^1 & C_{22}^1 & \dots & C_{2n}^1 \\ \hline a_{1n}^1 & C_{2n}^1 & \dots & C_{nn}^1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_{11}^1 & C_{12}^1 & \dots & C_{1n}^1 \\ C_{12}^1 & C_{22}^1 & \dots & C_{nn}^1 \\ \hline C_{1n}^1 & C_{2n}^1 & \dots & C_{nn}^1 \end{vmatrix} = 0$$

C_1 -matrica o'ni aniqlanganliqtan, oni to'menedegishe a'latamiz :

$$P_0 = \begin{vmatrix} 0 & a_{12}^1 & \dots & a_{1n}^1 \\ a_{12}^1 & C_{22}^1 & \dots & C_{2n}^1 \\ \hline & & & \\ a_{1n}^1 & C_{2n}^1 & \dots & C_{nn}^1 \end{vmatrix} < 0, P_1 = \begin{vmatrix} a_{11}^1 & C_{12}^1 & \dots & C_{1n}^1 \\ a_{12}^1 & C_{22}^1 & \dots & C_{2n}^1 \\ \hline & & & \\ a_{1n}^1 & C_{2n}^1 & \dots & C_{nn}^1 \end{vmatrix}, P_2 = \begin{vmatrix} C_{11}^1 & C_{12}^1 & \dots & C_{1n}^1 \\ C_{12}^1 & C_{22}^1 & \dots & C_{2n}^1 \\ \hline & & & \\ C_{1n}^1 & C_{2n}^1 & \dots & C_{nn}^1 \end{vmatrix} = 0$$

hám $P_0 \varepsilon^2 - 2P_1 \varepsilon + P_2 = 0$ te'lemege iye bolamiz. Ol hárqiyli belgidegi haqiqiy korenlerge iye boladi

$$\mu_1 = \frac{P_1 + \sqrt{P_1^2 - hP_1}}{P_0} < 0, \quad \mu_2 = \frac{P_1 - \sqrt{P_1^2 - hP_1}}{P_0} > 0$$

$\varepsilon = \mu_2$ desek, $H(\varepsilon) = U\Lambda(\varepsilon)U^T$ matrica'ga iye bolamiz, bunda

$$\varphi_1(H(\varepsilon)) = \frac{\lambda_{\max}(H)}{\min\{\lambda_1 + \varepsilon, \lambda_2\}} < \varphi_1(H)$$

E s k e r t i w: Egerde $\lambda_1 + \varepsilon > \lambda_2$ - bolsa, onda $H(\varepsilon)$ matricani'ni minimal menshikli sani λ_2 - bolip qaladi hám o'gan uqsas t'urde onnan keyingi menshikli san'ga t'urlendirip o'tkeriw m'umkin, ya'g'niy $\lambda_2 \rightarrow \lambda_2 + \varepsilon$.

II Bap. Dinamikaliq sistemalardi gradient usili járdeminde optimallastiriw

1 Optimizacialiq máselelerdi gradient usili menen sheshiw.

Siziqli emes programmalastiriwdiń uliwma máselesin sheshiwde

$$f_0(H) \rightarrow \min_{H \in \Omega(H)} \quad f_i(H) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad H \in \Omega(H)$$

Lagranjdiń anıq emes kóbeıtiwshiler usilin qollanıw boladı. Lagranj funkciyası tómenıdegi kórinisite boladı:

$$Z(H, \beta) = f_0(H) + \sum_{i=0}^m \beta_i f_i(H), \quad \beta_i \geq 0.$$

Kun-Takker teoremasi boyınsha tómenıdegi keler shıǵadı:

Meyli $f_i(H), i = \overline{1, m}$, dónes funkciya, $\Omega(H)$ kópligi oyis hám Sleyterdiń regulyarlıq shárti orınlanadı, yaǵniy sonıay bir $\tilde{H} \in \Omega(H)$ bar boladı, $f_i(\tilde{H}) < 0$ bolatuǵınday. Endi H_0 optimal máseleńiń sheshimi bolıwı ushin sonıńday $\bar{\beta}_0 = (\beta_1^0, \beta_2^0, \dots, \beta_n^0)$ vektoriniń bar bolıwı zárúrli hám jetkilikli, (H_0, β_0) jubi $Z(H, \beta)$ funkciyasiniń erlik toshkasi bolıwı kepek. Sonda baslanǵısh másele sheklewler menen berilgen mina tómenıdegi funkciyanı minimumlaw menen teń kúshli:

$$F(H) = \max_{\beta \geq 0} Z(H, \beta) \rightarrow \min_{H \in \Omega(H)}$$

yamasa mina minimumlaw máselesin sheshiw menen

$$Z(H, \beta) \rightarrow \min_{H \in \Omega(H)} \max_{\beta \geq 0}$$

Bul máseleńi sanlı sheshiwdiń usıllariniń biri gradient usılları hám oniń modifikaciyası. Bul máseleńi sheshiwdiń eki gradient usilin qaraymız.

1. Tuwri gradient usili.

$$H_{k+1} = Q_H \left(H_k - \rho_k \left[\text{grad} f_0(H_k) + \sum_{i=1}^m c_i(H_k) \text{grad} f_i(H_k) \right] \right),$$

Bunda $Q_H(Z) - Z$ toshkasin $\Omega(H)$ kópliginde proektrlew operaciyası, $C_i(H)$ funkciyası tómenıdegi jol menen esaplanadı

$$C_i(H) = \begin{cases} C_i, & \text{egerde } f_i(H) > 0, i = \overline{1, m} \\ 0, & \text{egerde } f_i(H) \leq 0, i = \overline{1, m}. \end{cases}$$

C_i -jetkilikli úlken san, $\widetilde{grad} f_i(H) - f_i(H)$ funkciyasiniń N-toshkada obobshenniy gradienti.

2. Errou-Gurvica usili. Bul eki koordinata boyinsha erlik toshkalardi bir waqitta izertlew proceduralarin kórsetedi.

$$H_{i+1} = Q_H \left(H_k - \rho_k \left[grad f_0(H_k) + \sum_{i=1}^m \beta_i^n \cdot grad f_i(H_k) \right] \right)$$

$$\beta_i^{k+1} = \max \{ 0, \beta_i^k + \rho_k \cdot f_i(H_k) \}, i = \overline{1, m}.$$

yaǵniy $Z(H, \beta)$ gradientiniń baǵitinda β boyinsha hám N boyinsha antigradienti. Egerde $f_0(H)$ qatań oyis funkciya bolsa, $f_i(H)$ oyis, onda $Z(H, \beta)$ funkciyasiniń erlik toshkasi bar boladi, egerde

$$\rho_k \rightarrow 0, \rho_k \geq 0, \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k = \infty.$$

onda $\{(H_k, \beta_k)\}$ izbe-izligi sonday mániste jiynaqli boladi, yaǵniy bir shek toshkasi $\{H_k\}$ sheshimler kópligine derek boladi. Endi bul algoritmlerdi $\varphi_i(H)$ funkciyasini minimumlawda qollanilatuginin qaraymiz.

$$1) \varphi_1(H) \rightarrow \inf_{H \in \overline{G}(H)}$$

bunda $\varphi_1(H) = \lambda_{\max}(H) / \lambda_{\min}(H)$, $\overline{G}(H) = \{H : \lambda_{\min}(A^T H - HA) > 0\}$.

Jorarida aytilǵanday, H_k optimal sheshim $\partial G(H)$ shegarasinda boladi, $\varphi_1(H)$ funkciyasiniń bir teńliliginen bul juptiń birewi $\lambda_{\max}(H) = 1$ di qaraymiz, $\overline{G}(H)$ tiń ishinde jaylasqan. Solay etip mina funkciyani minimumlaw máselesin qaraymiz

$$f_0^1 \rightarrow \min_{H \in \Omega(H)}$$

mina sheklewlerde $f_1(H) \leq 0, f_2(H) \leq 0$,

Bunda

$$f_0(H) = -\lambda_{\min}(H), f_1(H) = -\lambda_{\min}(-A^T H - HA),$$

$$f_2(H) = \lambda_{\max}(H) - 1$$

Ω -simmetriyali o'ni aniqlangan matricalarini koplighi. Lagranj funkciyasi tomondagi turde boladi

$$Z_1(H, \beta) = f_0^1(H) + \sum_{i=1}^2 \beta_i f_i(H).$$

Sonda N boyinsha gradient $grad_H Z_1(H, \beta) = grad f_0^1(H) + \sum_{i=1}^2 \beta_i grad f_i(H)$

Bunda $grad f_0^1(H) = -x_{\min} \cdot x_{\min}^T, grad f_2(H) = x_{\max} x_{\max}^T$

$$grad f_1(H) = D[H] = \begin{bmatrix} y^T D[\Delta_1] y \dots y^T D[\Delta_{1n}] y \\ \vdots \dots \vdots \\ y^T D[\Delta_{n1}] y \dots y^T D[\Delta_{nn}] y \end{bmatrix}$$

$x_{\min}, x_{\max}$ -vektorlar, birlik sferani ishinde jatiwshi, kvadratliq forma $x^T H x$ minimal ham maksimal maniske erisetugin al $D[\Delta_{ij}] = -A^T \Delta_{ij} - \Delta_{ij} A, \Delta_{ij}$ -matricalar i - shi jolda ham j - shi baganada birler turatugin, al basqa elementler nol bolgan, y_{bum} -vektor birlik sferada jatiwshi kvadratliq $y^T (-A^T H - HA) y$ minimumga erisetugin. Al $f_0^1(H), f_i(H), i = 1, 2$ funkciyalari dones Sleyter sharti orinlanadi. Lagranj funkciyasi $Z_i(H, \beta)$, mina $(H_0, \beta_1^0, \beta_2^0)$ erlik toshkaga iye ham H_0 optimalliq maseleni sheshimi.

2) Endi mina $\varphi_2(H) \rightarrow \inf_{H \in G(H)}$ maslesin minimumlawdi qaraymiz,

$$\text{bunda } \varphi_2(H) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}(-A^T H - HA)} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}} \text{ boladi.}$$

bunda optimal sheshim H_0 mina $G(H)$ oblastinda boladi, $\varphi_2(H)$ ti birtekliliginen.

Berilgen baslangish maseleni tomondagi

$$f_0^2(H) \rightarrow \min_{H \in \Omega}, f_1(H) \leq 0, f_2(H) \leq 0 \text{ maslesi menen almastiramiz.}$$

Bunda $f_0^2(H) = -\ln[\lambda_{\min}(-A^T H - HA)] - \frac{1}{2} \ln[\lambda_{\min}(H)]$ Lagranj funkciyasi tómendegi

túrge keledi $Z_2(H, \beta) = f_0^2(H) + \sum_{i=1}^2 \beta_i \cdot f_i(H)$.

Al N boyinsha gradient $\text{grad}_H \tilde{Z}_2(H, \beta) = \text{grad}_H f_0^2(H) + \sum_{i=1}^2 \beta_i \text{grad} f_i(H)$

Bunda $\text{grad} f_0^2(H) = -\frac{D[H]}{\lambda_{\min}(-A^T H - HA)} - \frac{1}{2} \frac{x_{\min} x_{\min}^T}{\lambda_{\min}(H)}$

Al $f_0^2(H)$ funkciyasi, eki dónes funkciyaniń qosindisin kórsetedi, Sleyter shárti orinlanadi.

3) Bunda $\varphi_3(H) \rightarrow \inf_{H \in G(H)}$ funkciyasın minimulawdi qaraymız.

Bunda $\varphi_3(H) = \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(-A^T H - HA)} \ln \left[\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)} \right]$

Bul máseleni mina $f_0^3(H) \rightarrow \min_{H \in \Omega(H)}, f_2(H) \leq 0, f_2(H) \leq 0$

hám oni $f_0^3(H) = -\ln[\lambda_{\min}(-A^T H - HA)] - \ln\{\ln[\lambda_{\min}(H)]\}$

máselesi menen almastiramız. Lagranj funkciyasi mina kóriniste boladi

$$Z_3(H, \beta) = f_0^2(H) + \sum_{i=1}^2 \beta_i f_i(H)$$

Al N boyinsha gradient

$$\text{grad} \tilde{Z}_3(H, \beta) = \text{grad} f_0^3(H) + \sum_{i=1}^2 \beta_i \text{grad} f_i(H)$$

Bunda $\text{grad} f_0^3(H) = -\frac{D[H]}{\lambda_{\min}(-A^T H - HA)} - \frac{x_{\min} x_{\min}^T}{\lambda_{\min}(H) \ln[\lambda_{\min}(H)]}$

Sonda $f_0^3(H)$ funkciyasi eki dónes funkciyaniń qosindisin kórsetedi Sleyter shárti orinlanadi.

Keńislikti soziwdağı gradientlik tusiw algoritmi.

Adim 1. $f(H)$ funkciyasiniń H^0 toshkadaǵı gradientin esaplaymız. Berilgen $h_k + 1$, $d_k + 1$ formula boyınsha H^1, α_1 di esaplaymız hám keyin $H^1 = H^0 - h_1 g_{ij}(H^0)$ di. $B_1 = E$ dep alamız.

Adim 2. $k = 1$ dep alamız.

Adim 3. $g_{ij}(H^k)$ esaplaymız.

Adim 4. Egerde $|g_{ij}(x_k)| < E$ bolsa, onda juwmaqlanadı.

Adim 5. Mina $r_k = B_k^T [g_{ij}(H^k) - g_{ij}(H^{k-1})]$

Adim 6. $k+1$ shi aralıqtı esaplaymız $\xi_{k+1} = r_k / |r_k|$

Adim 7. $k+1$ shi qozǵalıstaǵı adimdi esaplaymız $h_k + 1$ di hám soziliw koefficientin $\alpha_k + 1$ di tabamız.

Adim 8. $k+1$ shi adimdaǵı soziliw matricasi

$$B_k + 1 = B_k [E + (\alpha_{k+1}^{-1} + 1) \xi_{k+1} \xi_{k+1}^T]$$

Adim 9. $g_{k+1} = B_{k+1}^T g(H^k)$

Adim 10. Itaraciyanıń $k+1$ shi adimi qaraldi

$$H^{k+1} = H^k - h_{k+1} B_{k+1} g_{k+1} / |g_{k+1}|$$

Adim 11. $k = k+1$ mánisti beremiz hám 3 shi adimǵa ótemiz.

4. Sanlı misal .

Tómendegi matricalıq teńlemenı sheshiń:

$$A^T H + H A = -C$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3h_{11} & 3h_{12} \\ h_{11} + 2h_{21} & h_{12} + 2h_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3h_{11} & h_{11} + 2h_{12} \\ 3h_{21} & h_{11} + 2h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6h_{11} & h_{11} + 5h_{12} \\ h_{11} + 5h_{21} & h_{12} + h_{21} + 4h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 6h_{11} = 1 \\ h_{11} + 5h_{12} = 0 \\ h_{11} + 5h_{12} = 0 \\ h_{12} + h_{21} + 4h_{22} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_{11} = 0,1667 \\ h_{12} = -0,033 \\ h_{21} = -0,033 \\ h_{22} = 0,2667 \end{cases}$$

Demek, $H = \begin{bmatrix} 0,1667 & -0,033 \\ -0,033 & 0,2667 \end{bmatrix}$ $\det H = 0,0433 > 0$

Endi matricaliq teńlemenin on jaǵı bolǵan S matricasi qálegen simmetriyali matrica bolǵan jaǵdayın qarap ótemiz.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3h_{11} & 3h_{12} \\ h_{11} + 2h_{21} & h_{12} + 2h_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3h_{11} & h_{11} + 2h_{12} \\ 3h_{21} & h_{21} + 2h_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6h_{11} & h_{11} + 5h_{12} \\ h_{11} + 5h_{21} & h_{12} + h_{21} + 4h_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 6h_{11} = -2 \\ h_{11} + 5h_{12} = -1 \\ h_{11} + 5h_{12} = 0 \\ h_{12} + h_{21} + 4h_{22} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_{11} = -0,333 \\ h_{12} = -0,133 \\ h_{21} = 0,0667 \\ h_{22} = -0,233 \end{cases}$$

Demek, $H = \begin{bmatrix} -0,333 & -0,133 \\ 0,0667 & -0,233 \end{bmatrix}$ $\det H = 0,0866 > 0$

2.2 Gradient procedurağa tiykarlangan sanli usil

Tuwri retlestiriw sisteması tómendegi sistema menen berilgen:

$$\dot{X}(t) = Ax(t) + b f(\delta(t)), \quad \delta(t) = c^T x(t), \quad A \in R^{n \times n}, \quad X(t), c, b \in R^n \quad (1)$$

Al, A matricası (1) shi sistemaniń assimpotikalıq orniqlı, al $f(\delta)$ siziqlı emes funkcıyası $\delta(t) = c^T x(t)$ bizge belgili sektor shártin qanaatlandıradi:

$$0 \leq \delta f(\delta) \leq k \delta^2, \quad k = \text{const.}$$

Bul sistema absolyut orniqlı dep ataladi, egerde oniń nóllek sheshimi pútin assimpotikalıq orniqlı bolsa, yaǵniy barlıq keńislikte $f(\delta)$ erikli funkcıyası ushin, sektor shártin qanaatlandırsa.

Absolyut orniqlılıqtı izertlew usıllariniń biri bolıp Lyapunovtıń ekinshi usilin qollanıw bolıp esaplanadi. Endi absolyut orniqlılıqtıń garantiyalangán máselesin aliwdi qaraymız.

Lyapunov klasında

$$V(x) = x^T H x + \beta \int_0^\alpha f(\delta) d\delta \quad (2)$$

bazirbir óń aniqlangán H matricası menen hám skalyar $\beta \geq 0$ shaması menen.

Endi sektor shártin paydalanıp (2) shi funkcıyanıń tolıq tuwindisin (1) shi sistemaǵa tiykarlanıp kvadratlıq forma túrinde jazıwǵa boladi:

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = -X^T(t) C(H, \beta, v) x(t),$$

Bunda

$$C(H, \beta, v) = \begin{bmatrix} -A^T H - A & -\left[Hb + \frac{1}{2}(\beta A^T + Iv)C \right] \\ -\left[Hb + \frac{1}{2}(\beta A^T + Iv) \right]^T & \frac{v}{k} + \beta b^T C \end{bmatrix}$$

Yamasa mina túrde
$$\frac{d}{dt}V(x(t)) \leq -\lambda_{\min}[C(H, \beta, v)]|x(t)|^2$$

Bunda I birlik matrica, $v \geq 0$ - bazibir turaqli.

Solay etip, absolyut orniqliligi izertlew máselesi optimizatsiyaliq máselege alip kelinedi. H° ón aniqlangan matricasin hám $\beta^\circ \geq 0$, $v^\circ \geq 0$ shamasin tabiwga yaǵniy minimal menshikli mánisi $C(H^\circ, \beta^\circ, v^\circ)$ simmetriyali matricaniń (1)shi sistemaǵa tiykarlanip Lyapunov funkciyasiniń tuwindisin tabiw maksimal boladi.

Optimizatsiyaliq másele mina úshlik kópliginde $L = \{(H, \beta, v) : H \geq 0, \beta \geq 0, v \geq 0\}$ qaraladi, bunda $H \geq 0$ bolsa H matricaniń ón aniqlanganligin bildiredi. Norma retinde tómendegni alamiz:

$$|(H, \beta, v)| = \sqrt{|H|^2 + \beta^2 + v^2}; \quad |H| = \lambda_{\min}(H)$$

Bul jerde jánede tómendegi belgilewdi kiritemiz $\lambda_{\max}(\bullet), \lambda_{\min}(\bullet)$ - bolsa, sáykes ón aniqlangan simmetriyali ekstremal menshikli san. Bizge belgili, simmetriyali $C(H, \beta, v)$ matricasi ón aniqlangan sonda tek ǵana sonda egerde $\lambda_{\min}[C(H, \beta, v)] > 0$ bolsa. Solay etip (1)shi sistemaniń garantiyalangan orniqliligin tabiw máselesin (2)shi funkciya klasinda mina optimizatsiyaliq másele retinde qarawga boladi:

$$\varphi(H, \beta, v) \rightarrow \min_{(H, \beta, v) \in L} \quad (3)$$

tómendegi sheklewlerde

$$\lambda_{\min}(H) \geq 0, \beta \geq 0, v \geq 0 \quad \varphi(H, \beta, v) = -\lambda_{\min}[C(H, \beta, v)] \quad (4)$$

Solay etip, egerde (3)shi hám (4)shi optimizatsiyaliq másele mina úshlik $(H^\circ, \beta^\circ, v^\circ)$ sheshimge iye bolsa, tómendegi teńsizlikler orinlanadi:

$$\varphi(H^\circ, \beta^\circ, v^\circ) < 0$$

Onda (1)shi sistema absolyut orniqli boladi. Al egerde $\varphi(H^\circ, \beta^\circ, v^\circ) > 0$ bolsa, onda berilgen sistemaniñ absolyut orniqliligiñ izertlew sheshimge iye bolmaydi.

Endi L_1 arqali (H, β, v) úshlikten turiwshi L úles kóplikti belgileymiz, birlik sferaniñ, ishinde jatiwshi, yaǵniy tómendegi shártti qanaatlandiriwshi

$$\lambda_{\max}^2(H) + \beta^2 + v^2 \leq 1 \quad (5)$$

Bul keltirilgen optimizaciyalıq máselesi dinamikaliq programmalastiriw máselesi bolip tabiladi. Bunday máselelerdi sheshiwdiñ jiyi qollanilatugın usıllariniñ biri gradient usili hám oniñ modifikaciya bolip tabiladi. Maqset funkciyasınan gradientti esaplaw ekstremal menshikli san bolǵan, uliwma jaǵdayda qiyin bolip tabiladi, optimizaciyalıq mäseleni sheshiw ushin baǵiti boyınsha tuwindidan paydalanamiz.

Anıqlama: Meyli eki úshlik ushin $(H_0, \beta_0, v_0) \in L_1$, $(M, \alpha, \gamma) \in L_1$ hám $0 \leq t \leq t_1$

tómendegishe orinlanadi $(H_0 + tM, \beta_0 + t\alpha, v_0 + t\gamma) \in L_1$ egerde mina shek bar bolsa:

$$\frac{d\varphi(H_0, \beta_0, v_0)}{d(M, \alpha, \gamma)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{ \varphi(H_0 + tM, \beta_0 + t\alpha, v_0 + t\gamma) - \varphi(H_0, \beta_0, v_0) \} \quad (6)$$

Onda mina ańlatpanı $d\varphi(H_0, \beta_0, v_0)/d(M, \alpha, \gamma)$ bolsa $\varphi(H, \beta, v)$ funkciyasiniñ (M, α, γ) baǵiti boyınsha (H_0, β_0, v_0) toshkadaǵı tuwindisi dep ataladi.

Lemma: Mina funkciyaniñ tuwindisi $\varphi(H, \beta, v) = -\lambda_{\min}[C(H, B, v)]M(\alpha, \beta, \gamma)$

baǵiti boyınsha $(H_0, \beta_0, v_0) \in L_1$ toshkada tómendegi túrge iye boladi :

$$\frac{d\varphi(H_0, \beta_0, v_0)}{d(M, \alpha, \gamma)} = -(y_{\min}^\circ)^T C(M, \alpha, \gamma) y_{\min}^\circ \quad (7)$$

Bul jerde $y_{\min}^\circ$ bolsa $C(H_0, \beta_0, v_0)$ matricasiniñ shegaralıq birlik menshikli vektorli (M, α, γ) baǵiti boyınsha, yaǵniy :

$$y_{\min}^{\circ} = \lim_{t \rightarrow 0} y_{\min}(t), y_{\min}(t) = y_{\min}[C(H_0 + tM, \beta_0 + t\alpha, v_0 + t\gamma)]$$

Dalillew: Endi qozdiriwshi matricani qaraymiz $C[(H_0 + tM, \beta_0 + t\alpha, v_0 + t\gamma)]$, $0 \leq t \leq t_1$ hám sáykes onıń minimal menshikli sanın hám $y_{\min}(t)$ minimal normallangan menshikli vektorin qaraymiz.

Úzliksizlik kúshinen paydalanıp $t \rightarrow 0$ da tómendegi teńsizlik orınlanadı:

$$\lambda_{\min}[C(H_0 + tM, \beta_0 + t\alpha, v_0 + t\gamma)] \rightarrow \lambda_{\min}[C(H_0, \beta_0, v_0)], y_{\min}(t) \rightarrow y_{\min}^0$$

Bizge belgili $y_{\min}(t)$ normallasqan vector, onda anıqlama boyınsha $0 \leq t \leq t_1$ ushin tómendegi teńlikler orınlanadı:

$$y_{\min}^T(t) y_{\min}(t) \equiv 1 ;$$

$$\lambda_{\min}[C(H_0 + tM, \beta_0 + t\alpha, v_0 + t\gamma)] \equiv y_{\min}^T(t) C(H_0 + tM, \beta_0 + t\alpha, v_0 + t\gamma) y_{\min}(t)$$

Menshikli sanlari hám menshikli vektorlari simmetriyali matricanıń bólek úzliksiz differenciyanıwshi funksiya bolıp tabıladi, hám bazibir aralıqta

$0 \leq t \leq t_1$, $y_{\min}(t)$ hám $\lambda_{\min}[C(H_0 + tM, \beta_0 + t\alpha, v_0 + t\gamma)]$ funksiylari tuwindıǵa iye boladı. Bul keltirilgen birdeyliklerdi t boyınsha differenciyaalap, tómendegilerge iye bolamiz:

$$(y_{\min}'(t))^T \cdot y_{\min}(t) + y_{\min}^T(t) \cdot y_{\min}(t) \equiv 0, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \lambda_{\min}[C(H_0 + tM, \beta_0 + t\alpha, v_0 + t\gamma)] &\equiv (y_{\min}')^T C(H_0 + tM, \beta_0 + t\alpha, v_0 + t\gamma) y_{\min}(t) + \\ &+ (y_{\min}(t))^T \frac{d}{dt} C(H_0 + tM, \beta_0 + t\alpha, v_0 + t\gamma) y_{\min}(t) + \\ &+ (y_{\min}(t))^T \cdot C(H_0 + tM, \beta_0 + t\alpha, v_0 + t\gamma) y_{\min}'(t) \end{aligned} \quad (10)$$

Birinshi birdeylik sonı beredi : $(y_{\min}'(t))^T \cdot y_{\min}(t) = -y_{\min}^T(t) \cdot y_{\min}(t)$ birdeylik teńliklerine iye bolamiz,

$$C(H_0 + tM, \beta_0 + t\alpha, v_0 + t\gamma) \equiv \lambda_{\min}[C(H_0 + tM, \beta_0 + t\alpha, v_0 + t\gamma)] y_{\min}(t)$$

Bunda:

$$C(H_0 + tM, \beta_0 + t\alpha, v_0 + t\gamma) = \begin{bmatrix} -A^T H_0 - H_0 A & -\left[H_0 b + \frac{1}{2}(\beta A^T + I v_0)C\right] \\ -\left[H_0 b + \frac{1}{2}(\beta A^T + I v_0)C\right]^T & \frac{v_0}{k} - \beta b^T C \end{bmatrix} +$$

$$+ t \begin{bmatrix} -A^T M - M A & -\left[M b + \frac{1}{2}(\alpha A^T + I \gamma)C\right] \\ -\left[M b + \frac{1}{2}(\alpha A^T + I \gamma)C\right]^T & \frac{\gamma}{k} - \alpha b^T C \end{bmatrix}$$

Bunnan kelip shig'adi, ya'niy:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{d}{dt} \lambda_{\min}[C(H_0 + tM, \beta_0 + t\alpha, v_0 + t\gamma)] = \lim_{t \rightarrow 0} (y_{\min}(t))^T \cdot C(M, \alpha, \gamma) y_{\min}(t) =$$

$$= (y_{\min}^{\circ}(t))^T C(M, \alpha, \gamma) y_{\min}^{\circ}(t)$$

hám tómendegige iye bolamiz:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \lambda_{\min}[C(H_0 + tM, \beta_0 + t\alpha, v_0 + t\gamma)] = \\ & = \lambda_{\min}[C(H_0 + tM, \beta_0 + t\alpha, v_0 + t\gamma)] (y'_{\min}(t))^T \cdot y_{\min}(t) - \\ & - (y_{\min}(t))^T \cdot C(M, \alpha, \gamma) y_{\min}(t) + \\ & + \lambda_{\min}[C(H_0 + tM, \beta_0 + t\alpha, v_0 + t\gamma)] (y_{\min}(t))^T \cdot y'_{\min}(t) = \\ & = (y_{\min}(t))^T \cdot C(M, \alpha, \gamma) y_{\min}(t) \end{aligned}$$

Endi $t \rightarrow 0$ de shekke ócek (7)shi formulağa iye bolamiz. Solay etip (3) ham (4)shi optimizatsiyaliq máseleniń sheshiminiń shártin keltirip ótemiz, toliqtirilğan gradientte.

Aniqlama: Meyli $V \leq L_1$ bazibir kóplik hám $(H_0, \beta_0, v_0) \in V$ al, (M, α, γ) baǵitin mina toshkada (H_0, β_0, v_0) mýmkin dep esaplaymiz, egerde sonday $t_0 > 0$ bolsa barliq $0 \leq t \leq t_0$ ushin $(H_0 + tM, \beta_0 + t\alpha, v_0 + t\gamma) \in V$ orinlansa.

Teorema: Meyli V bolsa $\varphi(H, \beta, v)$ funkciyasiniń toshkalariniń kópligi bolsin

L_1 de hám (H, β, ν) toshkada al, $\varphi(H, \beta, \nu)$ funkciyasi barliq mýmkin bolǵan baǵitlar boyinsha tuwindıǵa iye bolsin. Sonda egerde (H, β, ν) toshkada funkciya minimumǵa iye bolsa, onda mýmkin bolǵan erikli baǵitlar (M, α, γ) boyinsha tómendegi shárt orinlanadi:

$$\frac{d\varphi(H, \beta, \nu)}{d(M, \alpha, \gamma)} \geq 0 \quad (11)$$

Dálillew: Meyli $(H, \beta, \nu) \in L_1$ hám (M, α, γ) usi toshkadaǵı mýmkin bolǵan baǵitlar. Sonda, shárt boyinsha

$$\varphi(H_* + tM, \beta_* + t\alpha, \nu_* + t\gamma) - \varphi(H_*, \beta_*, \nu_*) \geq 0$$

Buni $t \geq 0$ bóliphám $t \rightarrow 0$ de, tómendegige iye bolamiz:

$$\frac{d\varphi(H_*, \beta_*, \nu_*)}{d(M, \alpha, \gamma)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(H_* + tM, \beta_* + t\alpha, \nu_* + t\gamma) - \varphi(H_*, \beta_*, \nu_*)}{t} \geq 0$$

yaǵniy teoremaniń tástıyqlanıwına iye bolamiz. Mýmkin bolǵan baǵitlar retinde bazislik vektorlardı alamiz, tómendegi obraz arqalı dúzilgen. Keńislikte j simmetriyali matricanı alamiz Δ_{sk} matricasınıń bazisi retinde yaǵniy (s,k) -shi hám (k,s) -shi orinlarda ekiden bir bolǵan, al qalǵan elementleri nóller, θ -nóllık matrica. Sonda erikli simmetriyali matricanı

$$H = \{h_{ij}\}, \quad 1 \leq i \leq j \leq n$$

mina túrde kórsetemiz:

$$H = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} h_{ij} \Delta_{ij}$$

Bazislik baǵitlar retinde $(\Delta_{ij}, 1, 1)$ úshlikti alamiz. Úshlikti dúzemiz, birinshi elementti $n(n+1)/2$ pútin bolǵan $C(\Delta_{ij}, 0, 0)$ matricanıń kvadratlıq formasi

bolǵan, al kvadratliq formasi ekinshi hám úshinshi elemntleri bolip $C(\theta,1,0)$, $C(\theta,0,1)$ matricasiniń

$$\nabla(H, \beta, \gamma) = \left\{ (y_{\min}^1(s, k))^T C(\Delta_{ij}, 0, 0) y_{\min}^1(s, k), (y_{\min}^2)^T C(\theta, 1, 0) y_{\min}^2, (y_{\min}^3)^T C(\theta, 0, 1) y_{\min}^3 \right\} \quad (12)$$

Bunda

$$C(\Delta_{ij}, 0, 0) = \begin{bmatrix} -A^T \Delta_{ij} - \Delta_{ij} A & -\Delta_{ij} b \\ -b^T \Delta_{ij} & 0 \end{bmatrix},$$

$$C(\theta, 1, 0) = \begin{bmatrix} \theta & -\frac{1}{2} A^T C \\ -\frac{1}{2} C^T A & -b^T C \end{bmatrix},$$

$$C(\theta, 0, 1) = \begin{bmatrix} \theta & -vC \\ -C^T v & \frac{1}{k} \end{bmatrix}$$

Bul jerde $y_{\min}^1(s, k)$ -bolsa, $C(\Delta_{ij}, 0, 0)$ matricasiniń minimal birlik menshikli vektoriniń shegi, $(\Delta_{ij}, 0, 0)$ baǵitina juwap beretuǵın, $y_{\min}^2$ - bolsa $C(\theta, 1, 0)$ matricasiniń minimal birlik menshikli vektoriniń shegi, $y_{\min}^3$ -bolsa $C(\theta, 0, 1)$ matricasiniń minimal menshikli birlik vektoriniń shegi, $(\theta, 0, 1)$ juwap beredituǵın.

Anıqlama: Mina úshlikti:

$\nabla(H, \beta, \gamma) = \left\{ (y_{\min}^1(s, k))^T C(\Delta_{ij}, 0, 0) y_{\min}^1(s, k), (y_{\min}^2)^T C(\theta, 1, 0) y_{\min}^2, (y_{\min}^3)^T C(\theta, 0, 1) y_{\min}^3 \right\}$ (12)shi bazislik baǵıtlardıń tuwindilarinan dúzilgen, $\varphi(H, \beta, v)$ funkciyasiniń gradient dep ataymız.

Meyli A asymptotikalıq orniqlı matrica bolsın, biraq $A + A^T$ teris anıqlanǵan matrica bolmaydı. Bul jaǵdayda tómendegi teorema orinlı.

Teorema: Lyapunov funkciyası baslanǵısh qozdiriw baxası ushin optimal bolǵan, integral sapa kriteriyanı esaplaǵanda qollanılmaydı, solay etip $\varphi_2(H_0) = +\infty$

Dalillew: Egerde $A + A^T$ teris aniqlanğan bolmasa, onda Lyapunov funkciyasi ushin baslanğısh qozdiriw baxasi ushin optimal bolğan, tómendegi teńliktiń orinlaniwi zárúrli : $\lambda_{\min}(C_0) = \lambda_{\min}[-(A^T H_0 + H_0 A)] = 0$ Sonliqtan $\varphi_2(H_0) = +\infty$

Solay etip $\varphi_2(H_0)$ funkciyasın optimallastiriw sheshimge iye boladi, yaǵniy Lyapunov funkciyasi integral mániste optimal bolğan barliq waqitta bar boladi.

Teorema: $v_0(x) = x^T H_0 x$ Lyapunov funktiyasi $H_0 \in G(H)$, integral kriteriya ushin optimal bolğan hámme waqitta bar boladi.

Dálillew: $G(H)$ kópligi dónes konusti beredi, al orayi koordinata basinda bolğan, jáne $\varphi_2(H)$ funkciyasi bir tekli bolip tabiladi, onda oniń aniqlaniw oblasti retinde $G(H)$ tiń barlıǵın qaraw jetkilikli emes, al oniń bir bólimin $G_1(H) = G(H) \cap \{H : |H| = 1\}$. Al, $G_1(H)$ kópligi shegaralanğan, biraq tuyiq emes. Biraq oniń shegarasi $\partial G_1(H)$ qa ótiwde :

$$\varphi_2(H) = \frac{1}{\lambda_{\min}(C) \sqrt{\lambda_{\min}(H)}} \rightarrow \infty$$

Yaǵniy minimal mánis izlenedi, onda $G_1(H)$ oblastin qisiw múmkin, ε jetkilikli kishini shegaraǵa taslap, yaǵniy oblasstaǵı optimallastiriw máselesin sheship:

$$G_1^\varepsilon(H) = G_1(H) / \{H : \lambda_{\min}(-A^T H - HA)\} > \varepsilon$$

Al, $G_1^\varepsilon(H)$ kópligi kompaktli hám $\varphi_2(H)$ funkciyasi, onda minimal mániske erisedi, yaǵniy optimal Lyapunov funkciyasi bar boladi.

Soni kórsetemiz, yaǵniy uliwma jaǵdayda ($n \geq 3$) optimal Lyapunov funkciyasiniń bir mánisli emes qurilatuǵınlıǵı. Solay etip, baslanğısh qozdiriw baxasi ushin, ol aralıq menshikli sanlardı variaciyalaw menen baylanisli. Dara jaǵdayda bizge belgili sistema qaralsa $\dot{x}(t) = Ax(t)$, $x(t) \in R^n$ blokli dioganal matrica A menen hám H_0 menen, yaǵniy optimal bolğan, onda hámme waqitta H_0 di dúziw múmkin, $\varphi_2(H_0') \leq \varphi_2(H_0)$ bolsa.

Teorema: Egerde A matricasi blokli diogonal strukturağa iye bolsa, onda H_0 matricasi, optimal Lyapunov funkciyasi bolğan blokli diogonal boladi.

Dálillew: Meyli A matricasi mina túrge iye bolsin:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{bmatrix},$$

al, $v_0(x) = x_0^T H_0 x$ bolsa, optimal Lyapunov funkciyasi boladi. Endi H_0 hám C_0 matricani bilay jazamiz:

$$H_0 = \begin{bmatrix} H_{11}^0 & H_{12}^0 \\ (H_{12}^0)^T & H_{22}^0 \end{bmatrix} \quad C_0 = \begin{bmatrix} C_{11}^0 & C_{12}^0 \\ (C_{12}^0)^T & C_{22}^0 \end{bmatrix}$$

Soni kóriw qiyin emes, yaǵniy mina jubi H_0^1 hám C_0^1

$$H_0^1 = \begin{bmatrix} H_{11}^0 & 0 \\ 0 & H_{22}^0 \end{bmatrix}, \quad C_0^1 = \begin{bmatrix} C_{11}^0 & 0 \\ 0 & C_{22}^0 \end{bmatrix}$$

Lyapunov teńlemesiniń sheshimi boladi hám onin ushin

$$\lambda_{\min}(H_0) \leq \lambda_{\min}(H_0^1) \leq \lambda_{\max}(H_0^1) \leq \lambda_{\max}(H_0)$$

$$\lambda_{\min}(C_0) \leq \lambda_{\min}(C_0^1) \leq \lambda_{\max}(C_0^1) \leq \lambda_{\max}(C_0)$$

Sonliqtan

$$\varphi_2(H_0^1) = \frac{\lambda_{\max}(H_0^1)}{\lambda_{\min}(C_0^1)} \cdot \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H_0^1)}{\lambda_{\min}(H_0^1)}} \leq \frac{\lambda_{\max}(H_0)}{\lambda_{\min}(C_0)} \cdot \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H_0)}{\lambda_{\min}(H_0)}} = \varphi_2(H_0)$$

Keltirilgen teoremani paydalanip missal dúzemiz, optimal Lyapunov funkciyasiniń bir mánisli emes dúzilgenligin kórsetetuǵın.

Meyli A_1 asymptotikalıq orniqli matrica bolsin, ólshemi $(n-1)$ ge $(n-1)$ bolğan mina optimal funkciyasi menen $v_0^1(x) = (x^1)^T H_{11}^0 x^1$ hám $\lambda_{\min}(H_{11}^0) < \lambda_{\max}(H_{11}^0)$ bolğan. Egerde

$A_2 = -a < 0$ skalyar bolsa, jánede $a > \lambda_{\min}(C_{11}^0)/2\lambda_{\max}(H_{11}^0)$ bolsa, onda optimal Lyapunov funkciyasi retinde barliq sistemalar ushin, bilay aliw kerek.

$$v_0(x) = x_0^T H_0 x \text{ bunda } H_0 = \begin{bmatrix} H_{11}^0 & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{\min}(H_{11}^0) \leq h \leq \lambda_{\max}(H_{11}^0); \quad h \geq \lambda_{\min}(C_{11}^0)/2a$$

Endi kvazi optimizaciyanıń bir adimli algoritmin qaraymız, yaǵniy algoritmdi sonday H matricasin izlewge alıp keletuǵın, $\varphi_2(H)$ funkciyasın jaqsılaytuǵın.

III bap. Optimizatsiyaliq máselelerdi sheshiwdegi algoritmler

3.1 Nur boyinsha soziw algoritmi.

Meyli H_E - bolsa Lyapunov teńlemesiniń sheshimi bolsin, minaǵan sáykes keliwshi $C = E$, yaǵniy

$$A^T H_E + H_E A = -E$$

Teńlemeni mina túrge keltiremiz:

$$A^T (H_E + \delta E) + (H_E + \delta E) A = -[E - \delta(A + A^T)]$$

Endi $\varphi_2(H)$ funkciyasi δ parametriniń funkciyasi boladi, yaǵniy:

$$\varphi_2(\delta) = \frac{\lambda_{\max}(H_E + \delta E)}{\lambda_{\min}[E - \delta(A + A^T)]} \cdot \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H_E + \delta E)}{\lambda_{\min}(H_E + \delta E)}}$$

Endi $\varphi_2(\delta)$ funkciyasiniń minimumin δ ózgeriwshisi boyinsha izleyviz.

Sonliqtan $H_E + \delta E$ hám $E - \delta(A + A^T)$ matricalari oń aniqlanǵan boliwi kerek,

onda δ saylap aliwda sheklewlerge tuwra keledi

$$\delta + \lambda_{\min}(H_E) > 0, \quad 1 - \delta \cdot \lambda_i(A + A^T) > 0, \quad i = \overline{1, n};$$

Lemma: Egerde A asimptotikalıq orniqli bolsa, onda $\operatorname{Re} \lambda_i(A) < 0, i = \overline{1, n}$.

Bunnan minaǵan iye bolamiz:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(A + A^T) = \operatorname{Sp}(A + A^T) = 2\operatorname{Sp}A = 2 \cdot \sum_{i=1}^n \operatorname{Re} \lambda_i(A) < 0$$

Bul jerde $SpA = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ bolsa, A matricasiniń izi. Solay etip $\sum_{i=1}^n \lambda_i(A + A^T) < 0$,
al barliq $\lambda_i(A + A^T), i = \overline{1, n}$ simmetriyalıqqa baylanisli $(A + A^T)$ matricasiniń
xaqiyqiy, onda minağan iye bolamiz, yaǵniy $\lambda_{\min}(A + A^T) < 0$.

Endi mina úsh jaǵdaydi qaraymiz:

- 1) Egerde A matricasi normal bolsa, onda qaralǵan algoritmdi qollaniw kerek
emes. Bilay aliw kerek : $H_0 = E, C_0 = -(A + A^T)$.
- 2) Meyli A matricasi normal bolmasin, biraq $(A + A^T)$ teris anıqlanǵan. Bul
jaǵdayda $\lambda_{\min}(A + A^T) < 0$ hám

$$\lambda_{\min}[E - \delta(A + A^T)] = \begin{cases} 1 - \delta \cdot \lambda_{\min}(A + A^T), & \delta < 0 \\ 1 - \delta \cdot \lambda_{\max}(A + A^T), & \delta \geq 0 \end{cases}$$

Tómendegi belgilewlerdi kiritemiz

$$a = \lambda_{\max}(H_E), b = \lambda_{\min}(H_E), c_1 = \lambda_{\min}(A + A^T), c_2 = \lambda_{\max}(A + A^T)$$

Al, $\varphi_2(\delta)$ funkciyasi mina túrge iye boladi

$$\varphi_2(\delta) = \frac{\delta + a}{1 - \delta c_1} \sqrt{\frac{\delta + a}{\delta + b}}; \quad \max\left\{-b, \frac{1}{c_1}\right\} < \delta < 0, \quad \frac{\delta + a}{1 - \delta c_2} \sqrt{\frac{\delta + a}{\delta + b}}, \quad (\delta) \geq 0.$$

Tómendegi túrdegi funkciyani qaraymiz:

$$\varphi(\delta) = \frac{\delta + a}{1 - \delta c} \sqrt{\frac{\delta + a}{\delta + b}};$$

Oniń ushin ekstremumniń zárúrli shárti $\varphi'(\delta) = 0$ boladi, yaǵniy:

$$\varphi'(\delta) = \frac{(3ac - bc + 2)\delta - (a - 3b - 2abc)}{2(1 - \delta c)^2 \cdot (\delta + b)} \sqrt{\frac{\delta + a}{\delta + b}} = 0$$

Bunnan minagán erisemiz: $\delta_0 = \frac{a - 3b - 2abc}{3ac - bc + 2}$

Endi δ_0 totshkada tuwindiniń ekinshi túrin jazamiz:

$$\varphi''(\delta_0) = \frac{3ac - bc + 2}{2(1 - \delta_0 c)^2 \cdot (\delta_0 + b)} \sqrt{\frac{\delta_0 + a}{\delta_0 + b}}$$

Ekstremumniń jetkilikli shárti bolip, ekinshi tuwindiniń oń anıqlanğanlıgı, yaǵniy $3ac - bc + 2 > 0$, $\delta_0 + b > 0$ (2)

Solay etip, egerde mánisi

$$\delta_0 = \frac{a - 3b - 2abc}{3ac - bc + 2}$$

$\varphi(\delta)$ funkciyasiniń anıqlaniw oblastında jaca, hám (2)shi teńsizlik orinlansa, onda $\varphi(\delta)$ bolsa $\delta = \delta_0$ bolǵanda minimal mánisti qabillaydi. Solay etip (1)shi funkciyasi ushin tómendegige iye bolamiz.

Meyli $(A + A^T)$ teris anıqlanğan matrica bolip hám tómendegi teńsizliklerdi eń keminde birewi orinlansın.

$$\begin{cases} 3ac_1 - bc_1 + 2 > 0 \\ \max\left\{-b, \frac{1}{c_1}\right\} < \frac{a - 3b - 2abc_1}{3ac_1 - bc_1 + 2} < 0 \end{cases} \quad (3)$$

yamasa
$$\begin{cases} 3ac_2 - bc_2 + 2 > 0 \\ a - 3b - 2abc_2 > 0 \end{cases}$$

Onda bilay aliw kerek: $\delta_0 = \arg \min\{\varphi_2(\delta_1), \varphi_2(\delta_2)\}$,

bunda
$$\delta_1 = \frac{a - 3b - 2abc_1}{3ac_1 - bc_1 + 2}, \quad \delta_2 = \frac{a - 3b - 2abc_2}{3ac_2 - bc_2 + 2}$$

Egerde (1)hám(2) teńsizlikler orinlanbasa onda $\delta_0 = 0$ yaǵniy $H_0 = H_E$

3) Meyli $A + A^T$ teris aniqlangan bolmasin, ya'niy $\lambda_{\max}(A + A^T) > 0$

Onda $\varphi_2(\delta)$ funkciyasi mina turg'e iye boladi:

$$\varphi_2(\delta) = \begin{cases} \frac{\delta + a}{1 - \delta c_1} \sqrt{\frac{\delta + a}{\delta + b}}, \max\left\{-b, \frac{1}{c_1}\right\} < \delta < 0 \\ \frac{\delta + a}{1 - \delta c_2} \sqrt{\frac{\delta + a}{\delta + b}}, 0 \leq \delta < \frac{1}{c_2} \end{cases} \quad (4)$$

Bunda

$$a = \lambda_{\max}(H_E), b = \lambda_{\min}(H_E), c_1 = \lambda_{\min}(A + A^T), c_2 = \lambda_{\max}(A + A^T)$$

Ótkendegilerdi qaytalap tómendegige iye bolamiz.

Meyli tómendegi teńsizlikler sistemasiniń eń keminde birewi orinlansin

$$\begin{cases} 3ac_1 - bc_1 + 2 > 0 \\ \max\left\{-b, \frac{1}{c_1}\right\} < \frac{a - 3b - 2abc_1}{3ac_1 - bc_1 + 2} < 0 \end{cases}$$

yamasa

$$\begin{cases} 3ac_2 - bc_2 + 2 > 0 \\ 0 \leq \frac{a - 3b - 2abc_2}{3ac_2 - bc_2 + 2} < \frac{1}{c_2} \end{cases} \quad (6)$$

Onda tómendegishe aliw kerek:

$$\delta_0 = \arg \min\{\varphi_2(\delta_1), \varphi_2(\delta_2)\}$$

bunda

$$\delta_1 = \frac{a - 3b - 2abc_1}{3ac_1 - bc_1 + 2}, \quad \delta_2 = \frac{a - 3b - 2abc_2}{3ac_2 - bc_2 + 2}$$

Egerde (5) hám (6) teńsizlikler orinlanbasa onda $\delta_0 = 0$ ya'niy $H_0 = H_E$

3.2 Kósherdi soziw algoritmi.

Meyli H_E Lyapunov teńlemesiniń sheshimi bolsin, $C=E$ sáykes keliwshi. Sonday bir V ayriqsha emes túrlendiriwi bar boladi, H_E matricasin dioganal turg'e

keltirish. Endi Lyapunov te'ntemesin shepten V^T al, o'nnan V ga kóbeytemiz , solay etip tómendegige iye bolamiz:

$$A_1^T \Lambda + \Lambda A_1 = -E$$

$$\text{ya'g'niy} \quad V^T A V = A_1 = \{a_{ij}^1\}, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Payda bol'gan te'ntemeni tómendegishe túrlendiremiz:

$$A_1^T \begin{bmatrix} \lambda_1(H_E) + \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2(H_E) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n(H_E) \end{bmatrix} + A_1 \begin{bmatrix} \lambda_1(H_E) + \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2(H_E) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n(H_E) \end{bmatrix} =$$

$$= -E + \varepsilon \begin{bmatrix} 2a_{11}^1 & a_{12}^1 & \dots & a_{1n}^1 \\ a_{12}^1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n}^1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Al $\varphi_2(H)$ funkciyasi $C=E$ fuksirlengen matricada hám $H = H_E$ de ε parametrine baylanisli funkciyaga aylanadi:

$$\varphi_2(\varepsilon) = \frac{\lambda_{\max}(H_E)}{\lambda_{\min}[E - \varepsilon \cdot \Delta]} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H_E)}{\lambda_{\min}(H_E) + \varepsilon}} ;$$

Bunda

$$\Delta = \begin{bmatrix} 2a_{11}^1 & a_{12}^1 & \dots & a_{1n}^1 \\ a_{12}^1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n}^1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Al, Δ matricasi menshikli maniske iye boladi.

$$\lambda_i(\Delta) = 0, \quad i = \overline{1, n-2}, \quad \lambda_{n-1, n}(\Delta) = a_{11}^1 \pm \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_{1i}^1)^2}$$

sonliqtan

$$\lambda_{\min}[E - \varepsilon \Delta] = \begin{cases} 1 - \varepsilon \left[a_{11}^1 - \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_{1i}^1)^2} \right] & \varepsilon < 0 \\ 1 + \varepsilon \left[a_{11}^1 + \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_{1i}^1)^2} \right] & \varepsilon \geq 0 \end{cases}$$

Bunnan $\varphi_2(\varepsilon)$ funkciyasi tómendegi túrge iye boladi:

$$\varphi_2(\varepsilon) = \frac{\lambda_{\max}(H_E)}{1 - \varepsilon \left[a_{11}^1 - \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_{1i}^1)^2} \right]} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H_E)}{\lambda_{\min}(H_E) + \varepsilon}},$$

$$\max \left\{ -\lambda_{\min}(H_E), 1 / \left[a_{11}^1 - \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_{1i}^1)^2} \right] \right\} < \varepsilon < 0,$$

$$\frac{\lambda_{\max}(H_E)}{1 - \varepsilon \left[a_{11}^1 + \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_{1i}^1)^2} \right]} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H_E)}{\lambda_{\min}(H_E) + \varepsilon}};$$

$$0 \leq \varepsilon < 1 / \left[a_{11}^1 + \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_{1i}^1)^2} \right]$$

Tómendegi belgilewlerdi kóremiz

$$a = \lambda_{\max}(H_E), \quad b = \lambda_{\min}(H_E), \quad c_1 = a_{11}^1 - \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_{1i}^1)^2},$$

$$c_2 = a_{11}^1 + \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_{1i}^1)^2}$$

hám funkciyaniń uliwma túrdegi minimum shártin qaraymiz:

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{a}{1-\varepsilon c} \sqrt{\frac{a}{b+\varepsilon}}$$

Minimumniń zárúrlık shártı bolsa $\varphi^1(\varepsilon) = 0$ mina kóriniske iye boladı:

$$\varphi^1(\varepsilon) = \frac{a\sqrt{a}(2bc + \varepsilon c + 1)}{2(1-\varepsilon c)^2(b+\varepsilon)^{3/2}}$$

Al toshka bolsa, ekstremumğa uqsas bolğan

$$\varepsilon_0 = (1 - 2bc) / c$$

Minimumniń jetkilikli shártı $\varphi''(\varepsilon_0) > 0$ yaǵniy

$$\varphi''(\varepsilon_0) = \frac{a\sqrt{a} \cdot c}{2(1-\varepsilon_0 c)^2(b+\varepsilon_0)^{3/2}} > 0$$

Solay etip (6)shi formulağa baylanisli tómendegige iye bolamiz.

$$\text{Egerde} \quad 0 < \frac{1-2bc_2}{c_2} < \frac{1}{a_{11}^1 + \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_{1i}^1)^2}}$$

onda tómendegishe aliw kerek $H_0 = V\Lambda(\varepsilon_0)V$, bunda

$$\varepsilon_0 = 1 / \left[a_{11}^1 + \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_{1i}^1)^2} \right] - 2\lambda_{\min}(H_E)$$

yamasa basqasha aytqanda $\varepsilon_0 = 0$ yaǵniy $H_0 = H_E$.

Siziqli sistemaniń sheshiminiń baxasi

1) Dáslep kvadratliq forma teoriyasinan bir áhmiyetli teńsizlikti kiritemiz.

Endi $v(x) = x^T Hx$ kvadratliq formani qaraymiz hám usi kvadratliq formaniń eń kishi hám eń úlken mánislerin izertlew máselesin izertleyemiz. Sferada

$x^T x = \sum_{i=1}^n x_i^2 = r^2$ usi máseleni sheshiwdiń belgili qádesine tiykarlanip, salistirmali ekstremumdi izertlew kerek. Ekstremum toshkasında mina shárt orinlaniwi kerek:

$$\text{grad} w = \text{grad} v - 2\lambda x = 0$$

Solay etip $\text{grad} v = 2Bx$ bolsa, onda ekstremumniń zárúrlik shártı bizlerdi mina teńlemenı sheshiwge alıp keledi:

$$Bx = \lambda x \quad (1)$$

Bul teńleme nóllek emes sheshimge iye sol jaǵdayda, egerde λ mina teńlemenıń sheshimi bolsa :

$$|B - \lambda E| = 0 \quad (2)$$

Solay etip B matricası simmetriyalı, onda onıń menshikli mánisli haqıyqiy. Endi λ_1 arqalı B matricasınıń kishi menshikli sanın belgileyміz al, λ_n arqalı onıń úlken menshikli sanın belgileyміz. Endi (1) teńlemenıń oń hám shep táreplerin x qa kóbeytip tómendegige iye bolamız:

$$v = (Bx)^T x = \lambda x^T x, \text{ yaǵniy } v = \lambda r^2$$

Solay etip , λ retinde, eń úlken hám eń kishi menshikli sanlardı alsaq, teńsizlikti shıǵaramız:

$$\lambda_1 r^2 \leq v \leq \lambda_n r^2 \quad (3)$$

Keńisliktiń barlıq toshkalari ushin orinli. Egerde $r^2 = 1$ dep alsaq, sonday juwmaqqa kelemiz, yaǵniy λ_1 bolsa birlik sferada v funkciyasınıń minimal mánisi, al λ_n bolsa maksimal mánisi.

- 2) Endi siziqlı differenciya teńlemeler sistemasin qaraymız hám bilay boljayıq, yaǵniy A matricasınıń barlıq menshikli sanlari, teris haqıyqiy bólimge iye.

Belgili teorema boyinsha $v(x) = x^T H x$ o'ni aniqlangan kvadratliq formasi bar boladi, ya'niy belgili sistema'ga tiykarlanip to'mendegige iye bolamiz:

$$\frac{dv}{dt} = -\sum_{i=1}^n x_i^2 \quad (4)$$

Ekinshi ta'repten (3)shi te'nsizlikten mina te'nsizlik kelip shigadi :

$$-\frac{v}{\lambda_n} \geq -r^2 \geq -\frac{v}{\lambda_1} \quad (5)$$

Bunda $r^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$, λ_1, λ_n -ler v kvadratliq formani'ni e'ni kishi ham e'ni ulken menshikli sanlari. Solay etip, (2)shi ham (5)shi qatnaslardan mina te'nsizlikke iye bolamiz

$$-\frac{v}{\lambda_1} \leq \frac{dv}{dt} \leq -\frac{v}{\lambda_n} \quad ;$$

Mina turde jaziw'ga bolatu'gin

$$-\frac{dt}{\lambda_1} \leq \frac{dv}{v} \leq -\frac{dt}{\lambda_n} \quad (6)$$

Al, (6)shi te'nsizlikni nol'den t ga shekem integrallap ham v_0 arqali v funkciyasini'ni manisin belgilep x_0 baslang'ish toshkasini'ni traektoriyasinda mina'gan iye bolamiz:

$$v_0 \exp\left(-\frac{t}{\lambda_1}\right) \leq v \leq v_0 \exp\left(-\frac{t}{\lambda_n}\right)$$

(5)shi te'nsizlikten paydalanip, (5)shi sistemani'ni dogereginde ahmiyetli baxa'ga iye bolamiz

$$\frac{v_0}{\lambda_n} \exp\left(-\frac{t}{\lambda_1}\right) \leq r^2 \leq \frac{v_0}{\lambda_1} \exp\left(-\frac{t}{\lambda_n}\right) \quad (7)$$

3) Al, (7)shi teńsizlikti waqıt boyınsha ótiw processı ushin paydalaniwi múmkin.

Xaqiyqatında, teńlemenı t ğa salıstırmalı sheshsek

$$\frac{v_0}{\lambda_n} \exp\left(-\frac{t}{\lambda_n}\right) = \varepsilon^2$$

Mınağan iye bolamız

$$t = -\lambda_n \ln \frac{\lambda_1 \varepsilon^2}{v_0}$$

Solay etip, $t(x_0, \varepsilon)$ waqıt boyınsha ótiw processı waqıt, sonıń ushin zárúrli yaǵniy r shamasi, keleshekte ε nan kishi bolıp qalsın, tómendegi teńsizlikti qanaatlandırıwshi bolıp

$$t(x_0, \varepsilon) \leq -\lambda_n \cdot \ln \frac{\lambda_1 \varepsilon^2}{v_0}$$

4) Tómendegi máselenı sheshemiz. Al, $x(t, x_0)$ traektoriyası ushin (5)shi sistemasi menen aniqlanatuǵın mina shamani tabıw kerek

$$J = \int_0^\infty w(x(t, x_0)) dt \quad (8)$$

Bunda $w = x^T(t, x_0) B x(t, x_0)$ kvadratlıq forma bolıp tabıladi. Ádette J shamasın retlestiriwdiń integral sapa kriteriyası dep ataydı.

Máselenı sheshiw ushin bilay boljaymız, yaǵniy (5)shi sistema asimptotikalıq orniqlı hám v kvadratlıq formanı tabamız, mina teńlemenı qanaatlandırıwshi $v = w$. Endi (8)ge tiykarlanıp tómendegige iye bolamız

$$J = \lim_{t \rightarrow \infty} v(x(t, x_0)) - v(x_0) ,$$

solay etip jazsaq

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(x(t, x_0)) - v(x_0) = 0 ,$$

minağan iye bolamiz:

$$J = -v(x_0) \quad (9)$$

Solay etip J shaması Lyapunov funkciyasi bolip tabiladi, tómendegi shártti qanaatlandiriwshi

$$\frac{dJ}{dt} = -w$$

JUWMAQLAW

Pitkeriw qániygelik jumisinda turaqli koefficientli differenciya teńlemeler sistemasi qaraladi. Bul sistemaniń orniqliligin izertlew ushin funkciyani kvadratliq forma kórinisinde alamiz.

Usi funkciya járdeminde berilgen sistemaniń orniqliligin izertlew máselesi matricaliq Silvestr teńlemesin sheshiwge alip klinedi. Usi teńlemenin orinli ekenligin kórsetiw ushin konkret misal kórip shigildi.

Berilgen turaqli koefficientli dinamikaliq sistema ushin Lyapunov funkciyasidan paydalanip norma boyinsha baxa alindi. Pitkeriw qániygelik jumisinda kvazioptimizaciyanin eki algoritmi qaraladi, atap aytqanda nur boyinsha soziw algoritmi hám soziw algoritmi.

Sunday-aq pitkeriw qániygelik jumisinda optimizaciyalıq máselelerdi gradient usili menen sheshiw máselesi kórip shıgıldı. Matricaliq teńlemenıń sanlı sheshimi electron esaplaw mashinasında alındı. Sonıń menen birge bul pitkeriw qániygelik jumisin orinlaw barisında men differenciya teńlemeler sistemasi haqqındaǵı iye bolǵan maǵliwmatlarimdi jánede arttırıp alıwǵa eristim.