ÓZBEKISTAN RESPUBLIKASÍ INFORMASIYALÍQ TEXNOLOGIYALARÍ HÁM KOMMUNIKASIYALARÍN RAWAJLANDÍRÍW MINISTRLIGI

MUHAMMED AL-XOREZMIY ATÍNDAǴÍ TASHKENT INFORMASIYALÍQ TEXNOLOGIYALARÍ UNIVERSITETI NÓKIS FILIALÍ

Informasiyalıq texnologiyalar kafedrası

Kompyuter injiniring baǵdarı

Qorǵawǵa ruxsat etildi
Kafedra basliǵı
t.i.k. Aytmuratov B. Sh.
____
2019 j «___»__________

«Tosınnanlı protsesske baylanıslı sistemalardı MatLab sisteması jardeminde modellestiriw hám olardın sheshimlerin alıw»

temasında

PITKERIW QÁNIYGELIK JUMÍSÍ

Pitkeriwshi: Artiqbaev T

Ilimiy basshı: dotsent Kojametv A

Nókis - 2019 j.

MAZMUNI

Kirisiw--3

I-Bap Stoxastikalıq sistemanıń ornıqlılıǵı

1.1 Bir ólshewli sistema ---4

1.2 Baslanǵısh qozdırıwdı bahalaw---7

1.3. Waqıt boyınsha otiw protsessiniń bahası---9

II-Bap Stoxastikalıq sistemada baslanǵısh qozdırıwdı anıqlaw

2.1 Sızıqlı stoxastikalıq sistemada baslanǵısh kozdırıw oblastın bahalaw---------9

2.2 Optimal Lyapunov funksıyasınıń algoritmlerin tabıw--------------------------17

2.3 Integral sapa kriteriyasın optimallastırıw--21

2.4 Sızıqlı stoxastikalıq sistemada waqıt boyınsha otiw protsessin bahalawdı optimallastırıw--22

2.5 Sızıqlı stoxastikalıq sistemanıń ornıqlılıǵın izertleude Silvestr-Lyapunov matritsalıq teńlemesin qollanıw--29

III-Bap Lyapunovtıń ekinshiUsı lınıń stoxastikalıq analogı

3.1 Birge teń itimallıq ornıqlılıq. Lyapunovtıń ekinshiUsı lınıń stoxastikalıq analogı--29

3.2. Stoxastikalıq sistemanıń ornıqlılıǵı--37

3.3 Eksponensial p -ornıqlılıq hám q -ornıqsızlıq------------------------------------50

Juwmaqlaw--54

Kirisiw

Ornıqlılıqtı izertlew máseleleri menen hám dinamikalıq sistemalardıń sheshimleriniń bahalarınıń sanlı hám sapalı xarakteristikaları menen kóplegen watanlas hám sırt el ilimpazları ózleriniń miynetlerin bağıshladı,

Hár qıylı tábiyattağı sistemalardı izertlewde A.M.Lyapunovtıń tuwrıUsı lı yamasa Lyapunov G.Dj., Korenevskiy D.G. miynetlerinde A.M.Lyapunovtıń ekinshiUsı lı menen stoxastikalıq differensial teńlemeler sisteması qaraladı. A.M.Lyapunov funksıyasın sızıqlı sistemanı, sızıqlı ayırmalı sistemalardı, stoxastikalıq sistemalardı, keshigiwshi argumentli stoxastikalıq sistemalardıń ornıqlılığın izertlewde keńnen qollanıladı. Al Korenevskiy D.G. miynetlerinde sızıqlı stoxastikalıq differensial teńleme qaraladı, onnıń ornıqlılığın izertlewde A.M.Lyapunov funksionalınan paydalanadı. Sonday aq Xusaynov D.YA. miynetlerinde sızıqlı stoxastikalıq sistemanıń ornıqlılığın izertlewde Lyapunov funksıyası kvadratlıq forma kórinisinde alınadı hám bul sızıqlı stoxastikalıq sistemanıń ornıqlılığı izertlenedi, asimptotikalıq ornıqlılığın hám baha alınadı. Ulıwma sızıqlı stoxastikalıq sistemanıń ornıqlılığın izertlew matritsalıq kórinistegi teńlemeni sheshiwge alıp kelinedi.

Pitkeriu kanigelik jumısınıń birinshi babında sızıqlı stoxastikalıq differensial teńlemeler sisteması qaraladı. Bul sızıqlı stoxastikalıq teńlemeler sistemasın izertlew ushın A.M.Lyapunovtıń ekinshiUsı lınan paydalanadı, yağnıy Lyapunov funksıyasın kvadratlıq forma kórinisinde aladı. Sızıqlı sistema ushın matematikalıq kútiliw boyınsha baha alınadı. Solay etip sızıqlı stoxastikalıq sistemanıń ornıqlılığın izertlew Lyapunov-Silvestr matritsalıq teńlemesin sheshiwge alıp kelinedi. Sonday-aq bul bapta baslanğısh qozdırıwdı bahalaw hám waqıt boyınsha ótiw protsessiniń bahası qaraladı.

Bul pitkeriu kanigelik jumısı kirisiw bóliminen, úsh baptan hám juwmaqlaw bóliminen ibarat. jumıstıń birinshi babında stoxastikalıq sistemanıń orınıqlılığı máselesi, sistemanıń sheshiminiń baxasın optimallastırıw máselesi qaraladı.

Pitkeriu kanigelik jumısınıń ekinshi babında stoxastikalıq sistemada baslanğısh qozdırıwshı anıqlaw qaraladı.

I-Bap Stoxastikalıq sistemanıń ornıqlılığı

1.1 1.1. Bir ólshewli sistema

Usı bapta koeffitsientler Gaussdin' aq shawqımları gradient siziqli birdey teńlestiriwshi teńlemelerdi úyrenemiz. *n(t)* Bunday sistema

$$\frac{dX_i}{dt} = \sum_{j=1}^{l} \left(b_i^j(t) + \dot{\eta}_i^j(t)\right) X_j(t).$$

Usınıń menen birge, aq shawqımlar astında *x [t]*

ga teń bolǵan ulıwma Gauss tosınarlıprocesslerin nollik ortasha hám kovaryans matritsasini

$$\mathrm{M}\left[\dot{\eta}_i^j(s)\,\dot{\eta}_n^m(t)\right] = k_{ij}^{mn}(t)\,\delta(t-s)$$

Tomendegı kórinistegi sızıqlı staxastikalıq differensial teńlemeler sistemasın qaraymız [3,4]

$$dx(t) = Ax(t)dt + Bx(t)dw(t) \qquad (1.1.1)$$

bunda A,V-turaqlı kvadrati matritsalar, $x(t)$ -bólsa n -ólshemli vektor, $w(t)$ -skalyar standart vinerli protsess. Viner protsessiniń traektoriyası $t \in [t_o, +\infty)$ te úzliksiz, hesh jerde differensiallanbaydı, qálegen shekli waqıt intervalında sheksiz variyasiyaǵa iye. Al $x(t)$ tosınnanlı protsessi sızıqlı stoxastikalıq differensial teńlemeniń sheshimi boladı, egerde erikli $t \geq t_o$ da birge teń itimallıq penen integral teńlik orınlı bólsa

$$x(t) = x(t_o) + \int_{t_o}^{t} Ax(s)ds + \int_{t_o}^{t} Bx(s)dw(s),$$

bunda keyingi integral Ito mánisindegi integral delinedi.

Stoxastikalıq teńlemeniń sheshiminiń ornıqlılıǵınıń hár qıylı kóplegen jetkilikli Anıqlamaları bar.

Anıqlama. 1.1.1 Sızıqlı stoxastikalıq teńlemeler sistemasınıń $x(t) \equiv 0$ sheshimi ortasha kvadratlı ornıqlı dep ataladı, egerde erikli $\varepsilon > 0$ sháması ushın sonday bir $\delta(\varepsilon)$ sháması tabılsa, yaǵnıy qálegen $x(t)$ sheshim sistemanıń $t > t_o$ bolǵanda $M\left\{\|x(t)\|^2\right\} < \varepsilon$ teńsizlik orınlanadı, sol jaǵdayda $\|x(t)\|^2 < \delta(\varepsilon\ )$ bólsa.

Anıqlama **:** 1.1.2. $x(t) \equiv 0$ sheshim ortasha kvadrat asimptotikalı ornıqlı dep ataladı, egerde ol ortasha kvadratlı ornıqlı bólsa hám $\lim\limits_{t \to \infty} M\left\{\|x(t)\|^2\right\} = 0$ bólsa.

Bul jumısta ornıqlılıqtı izertlewde A.M.Lyapunovtıń ekinshiUsı lınan paydalanamız. $[10{,}11]$. Sistemanıń sızıqlı ekenligin esapqa alıp Lyapunov funksıyasın $V(x) = x^T Hx$ kvadratlıq forma túrinde alamız. Onnıń stoxastikalıq differensialı (1.1.1) shi sistemaǵa tiykarlanıp tomendegı túrge iye boladı.

$$\begin{aligned}
&dV(x(t)) = \left(dx((t)\right)^T Hx(t) + x^T(t)Hdx(t) + (dx(t))^T Hdx(t) = \\
&= \left[Ax(t)dt + Bx(t)dw(t)\right]^T Hx(t) + x^T(t)H\left[Ax(t)dt + Bx(t)dw(t)\right] + \\
&+ \left[Ax(t)dt + Bx(t)dw(t)\right]^T H\left[Ax(t)dt + Bx(t)dw(t)\right]
\end{aligned}$$

Standart vinerli proesstiń qásiyetin paydalanıp $M\{dw(t)\} = 0,\ M\{dw(t)\}^2 = dt$ hám ekinshi tártipli sheksiz kishi shámalardı taslap ketip, tomendegıge iye bolamız

$$M\{dV(x(t))\} = M\left\{x^T(t)\left[A^T H + HA + B^T HB\right]x(t)dt\right\}.$$

Egerde oń anıqlanǵan H matritsası bar bólsa,

$$C = -\left(A^T H + HA + B^T HB\right)$$

matritsası oń anıqlanǵan, onda $V(x)$ Lyapunov funksıyasınıń stoxastikalıq differensialınıń matematikalıq kútiliwi teris anıqlanǵan kvadratlıq forma boladı, onda Lyapunov Teóremasınan stoxastikalıq sistema ushın, $x(t) \equiv 0$ rtivial sheshim ortasha kvadratlı asimptotikalıq ornıqlı boladı.

Solay etip (1.1.1) shi sızıqlı stoxastikalıq sistemanıń ornıqlılıǵın izertlew tomendegı matritsalıq teńlemeni sheshiwge alıp keledi

$$A^T H + HA + B^T HB = -C \qquad 1.1.2$$

bazıbir oń anıqlanǵan S matritsası menen. Al N matritsasınıń oń anıqlanǵanlıǵınan $B^T HB$ matritsası da teris emes anıqlanǵan boladı, onda asimptotikalıq ornıqlı bolıwı ushın, A matritsası asimptotikalıq ornıqlı boladı. (yaǵnıy $\operatorname{Re}\lambda_i(A) < 0, i = \overline{1,n}$), al bazibir mániste kishi keleshekte bılay boljaymız, yaǵnıy (2) shi teńlemege iye boladı.

Lyapunov funksıyası járdeminde tek ǵana ornıqlılıq haqqındaǵı tastıyıqlawǵa emes (asimptotikalıq ornıqlılıq yamasa ornıqsızlılıq), (2)shi stoxastikalıq sistemanıń sheshimleriniń xarakteristikaların esaplaw múmkin. Kvadratlıq formanıń bahasınan kelip shıǵadı.

$$\lambda_{\min}(H)\|x\|^2 \le V(x) \le \lambda_{\max}(H)\|x\|^2$$

Sonlıqtan (1.1.1.) shi sistemanıń $x(t)$ sheshiminiń dógereginde tomendegı teńsizlik orınlı

$$\lambda_{\min}(H)M\left\{\|x(t)\|^2\right\} \le M\{V(x(t))\} \le \lambda_{\max}(H)M\left\{\|x(t)\|^2\right\} \quad (1.1.3)$$

$V(x)$ funksıyasınıń stoxastikalıq differensialınıń matematikalıq kútiliwinen tomendegıge iye bolamız

$$M\{dV(x(t))\} \le -\lambda_{\min}(C)M\left\{\|x(t)\|^2\right\}dt \le -\frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)}M\{V(x(t))\}dt.$$

Payda bolǵan differensial teńsizlikti integrallap tomendegıge iye bolamız.

$$M\ \{\ V(x(t))\ \} \le M\{V(x(t_o))\}\exp\left\{-\frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)}(t-t_o)\right\}$$

Endi (1.1.3) shi teńsizlikti paydalanıp, mınaǵan iye bolamız

$$M\left\{\|x(t)\|^2\right\} \le \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}\|x(t_o)\|^2 \cdot e^{-\frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)}(t-t_o)} \qquad (1.1.4)$$

Lyapunov funksıyası, $V(x) = x^T Hx$ kvadratlıq forması parametrlik kóriniste berilgen, bir mánisli emes dúziledi. Ol oń anıqlanǵan H matritsası menen anıqlanadı, Lyapunov-Silvestr teńlemesin sheshiwden anıqlanatuǵın. Endi L_H- arqalı N oń anıqlanǵan matritsasınıń kópligin belgileymiz, - $A^T H - HA - B^T HB$ matritsası oń anıqlanǵan bolatuǵın. Sonnı kóriw qıyın emes, yaǵnıy egerde $H_1 \in L_H$ hám $H_2 \in L_H$, onda erikli α ushın: $0 < \alpha < 1$ boladı hám $\alpha H_1 + (1-\alpha)H_2 \in L_H$. Bunnan basqa, egerde $H \in L_H$, onda erikli μ ushın: $0 < \mu < +\infty$ boladı hám $\mu H \in L_H$. Solay etip L_H kópligi oyıs kóplikti kórsetedi. Solay etip Lyapunov funksıyasınıń kópligi (1.1.1) sistema ushın N oń anıqlanǵan kópligi menen anıqlanadı L_H konustan.

(1.1.4) shi teńsizlik járdeminde (1.1.1) shi sistemanıń sheshimleriniń hár qıylı bahaların alıw múmkin.

1.2 Baslanǵısh qozdırıwdı bahalaw

Bizge belgili birinshi hám ekinsh Anıqlamadan ortasha kvadratlı ornıqlılıq boyınsha hám (1.2.4) bahadan, $\delta(\varepsilon)$ funksıyası ushın, sistemanıń sheshiminiń baslanǵısh qozdırıwın bahalaytuǵın, tomendegı teńsizlik orınlıx[18]

$$\delta(\varepsilon) \le \frac{\lambda_{\min}(H)}{\lambda_{\max}(H)} \cdot \varepsilon$$

Sonlıqtan $V(x) = x^T Hx$ Lyapunov funksıyası $H_o \in L_H$, yaǵnıy

$$\frac{\lambda_{\max}(H_o)}{\lambda_{\min}(H_o)} = \inf_{H \in L_H}\left\{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}\right\}$$

Berilgen sistemanıń sheshiminiń baslanǵısh qozdırıw bahasın dál bahalaydı.

Anıqlama 1.2.1 Lyapunov funksıyasın

$$H_1 = \arg \inf_{H \in L_H} \{\varphi_1(H)\},$$

bunda $\varphi_1(H) = \lambda_{\max}(H) / \lambda_{\min}(H)$, L_H -bólsa N matritsanıń oń anıqlanǵan kópligi, $-A^T H - HA - B^T HB-$ oń anıqlanǵan, baslanǵısh qozdırıw bahası ushın optimal dep ataymız.

Integral baha.

Egerde bizlerdi $t_0 \le t < \infty$ aralıqtaǵı ortasha baha qızıqtırsa, onda tomendegı funksional qaraladı [10]

$$J = \int_{t_0}^{\infty} M\left\{\|x(s)\|^2\right\} ds \le \int_{t_0}^{\infty} \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)} \|x(t_0)\|^2 \cdot$$

$$\cdot e^{\frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)}(S - t_0)} \cdot ds = \frac{\lambda^2{}_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H) \cdot \lambda_{\min}(C)} \|x(t_o)\|^2$$

Anıqlama 1.2.2 $V_1(x) = x^T H_1 x$ Lyapunov funksıyasın

$$H_2 = \arg\inf\{\varphi_2(H)\},$$

bunda $\varphi_2(H) = \lambda^2{}_{\max}(H) / [\lambda_{\min}(H) \cdot \lambda_{\min}(C)]$, L_H -oń anıqlanǵan N matritsasınıń kópligi, $-A^T H - HA - B^T HB$ oń anıqlanǵan, integral mániste optimal dep ataymız.

1.3. Waqıt boyınsha ótiw protsessiniń bahası

Asimptotikalıq ornıqlılıq jaǵdayında nolge erisiw $t \to \infty$ da bolıp ótedi, ámeliy máselelerdi sheshiw ushın jetkilikli, yaǵnıy $M\left\{\left\|x(t)\right\|^2\right\} < \varepsilon$, boladı $t \geq T + t_o$ da. Al T sháması $x(t)$ sheshim $x(t_o)$ jaǵdaydan ε dógerekke ótedi hám sonda qaladı, buǵan waqıt boyınsha ótiw dep ataladı. [17]

(2.1.4) teńsizlikti paydalanıp, tomendegıni jazamız

$$\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}\left\|x(t_o)\right\|^2 \cdot e^{-\frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)}\cdot T} < \varepsilon$$

Bunnan

$$T > \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(C)} \ell_n\left[\frac{\lambda_{\max}(H)\cdot\left\|x(t_o)\right\|^2}{\lambda_{\min}(H)\cdot\varepsilon}\right]$$

Egerde waqıt boyınsha ótiw protsessin dál bahalaytuǵın Lyapunov funksıyasın dúziw zárúrli bólsa, onda mına maqset funksıyasın qaraymız

$$\varphi_3(H) = \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(C)} \cdot \ell_n\left[\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}\right]$$

II-Bap Stoxastikalıq sistemada baslanǵısh qozdırıwdı anıqlaw

2.1 Sızıqlı stoxastikalıq sistemada baslanǵısh qozdırıw oblastın bahalaw

Sistemanıń ornıqlılıǵın yamasa ornıqsızlıǵın izertlew faktları jetkiliksiz boladı. Sóniw dárejesi, basqa kóplegen jumıslarda kórsetilgen sistemanıń menshikli mánislerinen baylanıslı emes. Bul jaǵdayda áhmiyetli xarakteristikalar bolıp onnıń monotonlıǵı esaplanadı koordinata basına qaray. Monotonlıq xarakteristikalarınıń biri bolıp $\varphi_1(H)$ funksıyası esaplanadı [17,18].

Endi optimal $V_1(x)$ funksıyasınıń bar bolıwın qarap ótemiz. YAǵnıy $1 \leq \varphi_1(H) < \infty$, onda eń jaqsı optimal funksıyalardıń biri bolıp (A hám V matritsalarına baylanıslı) $\lambda_{\max}(H)/\lambda_{\min}(H) = 1$ esaplanadı.

Teórema.1.4.1 . Lyapunov teńlemesi

$$A^T H + HA + B^T HB = -C \qquad (2.1.2)$$

$H_1 \in L_H$ sheshimge iye boladı, $\lambda_{\max}(H_1)/\lambda_{\min}(H_1) = 1$ bolatuǵınday sonda tek ǵana sonda, egerde $A^T + A + B^T B$ teris anıqlanǵan matritsa bólsa.

Zárúrligi. Meylı oń anıqlanǵan $H_1 \in L_H$ matritsası bar bolsın hám $\lambda_{\max}(H_1)/\lambda_{\min}(H_1) = 1$. Solay etip H_1 simmetriyalı, onda $S^{'}$ ortogonal matritsası bar boladı, H_1 matritsasın dioganal kóriniske keltiretuǵın

$$S^{'T} H_1 S^{'} = \Lambda(H_1) = diag\{\lambda_1, \lambda_2 \dots, \lambda_n\},$$

bund $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \le \lambda_n$-bols H_1 matritsasını matritsasını menshikli mánisi. Sonlıtan, solay etip $\lambda_{\max}(H_1)/\lambda_{\min}(H_1)$, onda $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 1$ hám $\Lambda(H_1) = \lambda E,$ bunda $E-$birlik matritsa.

Lyapunov teńlemesin tomendegı túrge keltiremiz

$$\left(S^T A^T S\right)\left(S^T H_1 S\right) + \left(S^T H_1 S\right)\left(S^T A S\right) + \left(S^T B^T S\right)\left(S^T H_1 S\right)\left(S^T B S\right) = -S^T C_1 S$$

Yamasa

$$S^T\left(A^T + B^T B\right)S = -\frac{1}{\lambda} S^T C_1 S$$

Bunnan $A^T + A + B^T B = -\frac{1}{\lambda} C_1 -$ teris anıqlanǵan matritsa.

Jetkilikliligi. Meylı $A^T + A + B^T B -$teris anıqlanǵan bolsın. Endi $C_1 = -\left(A^T + A + B^T B\right)$dep alıp, $H_1 = E$ iye bolamız hám $\lambda_{\max}(H_1)/\lambda_{\min}(H_1) = 1$ L_H kópligi oyıs bolsın, qaptal betke iye bolmaǵan. Mına jaǵdaydı qaraymız, H_1 matritsası L_H shegeraǵa derek bolǵan.

Lemma 2.1.1 Meylı erikli $\varepsilon > 0$ sháması ushın sonday bir C_ε oń anıqlanǵan matritsası bar bolsın, yaǵnıy H_ε ushın (2) shi sáykes teńlemeniń sheshimi ushın $\lambda_{\max}(H_\varepsilon)$ $\lambda_{\max}(H_\varepsilon)/\lambda_{\min}(H_\varepsilon) < 1 + \varepsilon$. Sonda $\{C_k\}$, $k = 1,2,\dots,$ sonda bir oń anıqlanǵan izbe-izligi bar boladı $\overline{C}$ matritsasına jıynaqlı bolǵan, yaǵnıy $\{H_k\}, k = 1,2,\dots,$

matritsasınıń izbe-izligi $\overline{H}$ oń anıqlanǵan matritsasına jıynaqlı boladı hám $\lim_{k\to\infty}\lambda_{\max}(H_k)/\lambda_{\min}(H_k)=\lambda_{\max}\left(\overline{H}\right)/\lambda_{\min}(\overline{H})=1$

Dálillew . Meylı $\varepsilon=\frac{1}{k}$, $\lambda_{\max}(H_k)\lambda_{\min}(H_k)=1+1/_k$. Al endi (2.1.2) shi teńlemeni $\|C_k\|$ ǵa bólip tomendegıge iye bolamız (bul jerde $\|C\|=\sqrt{\lambda_{\max}(C^TC)}=A^T\left(H_k\ \cdot/\|C_k\|\right)+\left(H_k/\|C_k\|\right)A+B^T\left(H_k/\|C_k\|\right)B=-C_k/\|C_k\|$)

Ótkerilgen normirovkadan keyin

$$\left\|C_k^1\right\|=\left\|C_k/\|C_k\|\right\|=1,$$

Onda alınǵan $\{C_k^1\}$, $k=1,2,\ldots,$ izbe-izlik birlik sferaǵa derek boladı, yaǵnıy kompakli kóplikke. Hám onnan $\{C_{km}^1\}\to\overline{C}$, úles izbe-izliklerdi bólip alıwǵa boladı, sonlıqtan ulıwma jaǵdayda $\overline{C}$ oń anıqlanǵan . (2.1.2) shi teńlemeniń sheshimi S ǵa úzliksiz baylanıslı. Hám H_{km} úles izbe-izlik sáykes $\lim_{km\to\infty}\{H_{km}\}=\overline{H}$ ǵa sáykes jıynaqlı boladı.

Solay etip $\lambda_{\max}(\overline{H})\ge\lambda_{\max}(\overline{C})/\left(2\|A\|+\|B\|^2\right)=1/\left(2\|A\|+\|B\|^2\right)>0,$

onda, úzliksiz baylanlılıq shártinen

$$\lim_{m_k\to\infty}\lambda_{\max}(H_{mk})=\lambda_{\max}(\overline{H}),\quad \lim_{m_k\to\infty}\lambda_{\min}(H_{mk})=\lambda_{\min}(\overline{H})$$

Solay etip $\lambda_{\max}(\overline{H})>0$ al $\lim_{m_k\to\infty}\lambda_{\max}(H_{mk})/\lambda_{\min}(H_{mk})=1$, onda $\lambda_{\min}\left(\overline{H}\right)>0$. Solay etip $\overline{H}$ oń anıqlanǵan matritsa hám $\lim_{k_m\to\infty}\lambda_{\max}(H_{km})/\lambda_{\min}(H_{km})=\lambda_{\max}(\overline{H})/\lambda_{\min}\left(\overline{H}\right)=1$

Teórema . 2.1.1 . (2.4.2)shi Lyapunov teńlemesi $\{H_k\}, k=1,2,\ldots,$ sheshimler izbe-izligine iye boladı, yaǵnıy $\lim_{k\to\infty}\lambda_{\max}\left(H_k\right)/\lambda_{\min}(H_k)=1$ sonda tek ǵana sonda , egerde A^T+A+B^TB matritsası –teris turaqlı bolǵan.

Zárúrligi. Meylı $\{H_k\}\in L_H$ hám $\{C_k\}, k=1,2,\ldots$ sheshimler izbe-izligi bar bolsın, talap etilgen qásiyetler menen. Onnan úles izbe-izliklerdi bólim alıp, $\overline{H}$ oń anıqlanǵan matritsasına jıynaqlı bolǵan hám $\overline{C}$ oń turaqlı matritsasına. Sonda

$$\lim_{k_m\to\infty} \lambda_{\max}(H_{k_m}) / \lambda_{\min}(H_{k_m}) = \lambda_{\max}(\overline{H}) / \lambda_{\min}(\overline{H}) = 1.$$

(2.1.2) shi teńlemeni $\overline{H}$ hám $\overline{C}$ matritsaları menen qaraymız.

SHep tárepten S^T, al ońnan $S^{'}$ kóbeytip tomendegıge iye bolamız.

$$\left(S^T A^T S\right)\left(S^T \overline{H} S^{'}\right)+\left(S^T \overline{H} S^{'}\right)\left(S^T A S^{'}\right)+\left(S^T B^T S\right)\left(S^T \overline{H} S\right)\left(S^T B S\right)=-S^T \overline{C} S^{'}.$$

Solay etip $S^T \overline{H} S^{'} = \lambda E$, onda

$$S^T A^T S^{'} + S^T A S^{'} + S^T B^T B S^{'} = -\frac{1}{\lambda} S^T \overline{C} S^{'}.$$

Bunnan $A^T + A + B^T B = -\frac{1}{\lambda}\overline{C}$ matritsası oń turaqlı boladı.

Jetkilikliligi. Meylı $A^T + A + B^T B$ matritsası oń turaqlı bolsın hám H^*, C^*-bazıbir oń anıqlanǵan matritsalar bolsın, (1.4.2) teńlemeni qanaatlandırıwshı. Endi $C_k = -\left(A^T + A + B^T B\right) + \frac{1}{k} C^*$ izbe-izliklerin dúzemiz. Sonda $\{C_k\}$ oń anıqlanǵan boladı, al $C = \lim_{k\to\infty}\{C_k\}$-oń turaqlı boladı. Sonda Lyapunov Silvestr teńlemesiniń sheshimi $H_k \frac{1}{k} H^* + E$ túrge keledi. Sonı kóriw qıyın emes, yaǵnıy $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k} H^* = 0$ bunda 0-nollik matritsa hám $\lim_{k\to\infty} \lambda_{\max}(H_k)/\lambda_{\min}(H_k) = 1$.

Teórema. 2.1.3. $V_1(x), H_1 \in L_H$ Lyapunov funksıyası baslanǵısh qozdırıw bahası ushın optimal bolǵan, sonda tek ǵana sonda bar boladı, egerde $A^T + A + B^T B$ teris anıqlanǵan matritsa bólsa, hám

$$\varphi_1(H_1) = \lambda_{\max}(H_1) / \lambda_{\min}(H_1) = 1.$$

Zárúrligi. Meylı $V_1(x) = x^T H_1 x,\ H_1 \in L_H$ baslanǵısh qozdırıw bahası ushın funksıyası bar bolsın, yaǵnıy

$$\inf_{H\in L_H}\left\{\lambda_{\max}(H) / \lambda_{\min}(H)\right\} = \lambda_{\max}(H_1) / \lambda_{\min}(H_1) = \alpha$$

Sonnı kórsetemiz, yaǵnıy $\alpha = 1$, yaǵnıy $H_1 = \lambda \mathrm{E}$. Meylı kerisinshe bolsın $\alpha > 1$, Endi H_1 matritsasın S ortogonal túrlendiriw jolı menen dioganal túrge keltiremiz

$$S^T H_1 S = diag\{\lambda_1(H_1), \lambda_2(H_1), \dots, \lambda_n(H_1)\} = \Lambda(H_1).$$

Meylı $\lambda_{\min}(H_1) = \lambda_{i1}(H_1) = \dots = \lambda_{is}(H_1), S < n.$ $V = diag\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$ matritsasın kiritemiz. Bunda $\mu_{i1} = \dots = \mu_{is} = 1,$ $\mu_j = 0$ eger $j \neq i_1, i_2, \dots, i_s$ bólsa. Al ε_1 matritsası oń anıqlanǵan, onda turaqlı jetkilikli δ ushın mına matritsası oń anıqlanǵan boladı.

$$C_\delta = C_1 - \delta \cdot \left[A^T SUS^T + SUS^T A + B^T SUS^T B\right]$$

Al H_δ matritsası mına teńlemeni sheshiw arqalı

$$A^T H_\delta + H_\delta A + B^T H_\delta B = -C_\delta$$

hám H_1 matritsası $H_1 = H_\delta - \delta \cdot SUS^T$ qatnas penen baylanıslı. Sonlıqtan

$$\frac{\lambda_{\max}(H_\delta)}{\lambda_{\min}(H_\delta)} = \frac{\lambda_{\max}\left(H_1 + \delta SUS^T\right)}{\lambda_{\min}\left(H_1 + \delta SUS^T\right)} = \frac{\lambda_{\max}\left[S\left(S^T H_1 S + \delta U\right)S^T\right]}{\lambda_{\min}\left[S\left(S^T H_1 S^1 + \delta U\right)S^T\right]} =$$
$$= \frac{\lambda_{\max}(H_1)}{\lambda_{\min}(H_1)} + \delta < \frac{\lambda_{\max}(H_1)}{\lambda_{\min}(H_1) + \delta} < \frac{\lambda_{\max}(H_1)}{\lambda_{\min}(H_1)} = \alpha.$$

Solay etip $\alpha = 1,$ $H_0 = \lambda E$ hám $A^T + A + B^T B = \frac{1}{\lambda}\left(A^T H_0 + H_0 A + B_T H_0 B\right) = -\frac{1}{\lambda} C_0$ teris anıqlanǵan matritsa.

<u>Jetkilikliligi.</u> Meylı $\underline{A^T + A + B^T B}$ teris anıqlanǵan matritsa bolsın. Sonda $H_0 = E$ hám $\lambda_{\max}(H_0)/\lambda_{\min}(H_0) = 1.$

Solay etip tomendegılerge iye boldıq. L_H -kópligi oyıs kóplik boladı, qaptal betti ózinde uslamaytuǵın. Egerde mına máseleni tabıwdı qarasaq:

$H_1 = \arg\inf\limits_{H \in L_H} \{\varphi(H)\}, \varphi_1(H) = \lambda_{\max}(H)/\lambda_{\min}(H),$ onda ol $H_1 \in L_H$ sheshimge iye boladı, sonda tek ǵana sonda, egerde $A^T + A + B^T B$ -teris anıqlanǵan bólsa.

Sonlıqtan $H_1 = \lambda E, \lambda > 0$ hám $\lambda_1(H_1) = 1.$

Endi L_H kópligin keńeytemiz, onnıń qaptal betin qosıp, yaǵnıy

$$\bar{L}_H = L_H U \partial L_H, \text{ bunda } \partial L_H = \left\{H : \lambda_{\min}\left(A^T H + HA + B^T HB\right) = 0\right\} \text{ hám}$$

$$H_1 = \arg\min_{H \in \bar{L}_H} \{\varphi_1(H)\}, \varphi_1(H) = \lambda_{\max}(H)/\lambda_{\min}(H)$$

isleymiz.

Teórema: 2.1.4. Meylı $A^T + A + B^T B$ oń anıqlanǵan matritsa bolmasın. Al $V_1(x) = x^T H_1 x,\ H_1 \in \overline{L}_H$ optimallıqtıń zárúrli shárti bolıp C_1 matritsasınıń oń turaqlılıǵı esaplanadı, yaǵnıy $H_1 \in \partial L_H$.

Dalılllew. Meylı $\lambda_{\min}\left(-A^T - A - B^T B\right) < 0$ hám $\inf\limits_{H \in L_H} \{\lambda_{\max}(H)/\lambda_{\min}(H)\} = \lambda_{\max}(H_1)/\lambda_{\min}(H_1)$. Kerisine boljayıq, C_1 oń anıqlanǵan, yaǵnıy $\lambda_{\min}(C_1) > 0$. Sonday bir ortogonal S matritsası bar boladı, C_1 dı diagonal túrge alıp keliwshi.

$$S^T C_1 S = diag\{\lambda_1(C_1), \lambda_2(C_1), \ldots, \lambda_n(C_1)\} = \Lambda(C_1).$$

Endi (2.1.2) shi teńlemeni tomendegı túrde túrlendiremiz

$$\left(S^T A^T S\right)\left(S^T H_1 S\right) + \left(S^T H_1 S\right)\left(S^T A S\right) + \left(S^T B^T S\right)\left(S^T H_1 S\right)\left(S^T B S\right) = -S^T C_1 S.$$

YAmasa

$$A_1^T \overline{H}_1 + \overline{H}_1 A_1 + B_1^T \overline{H}_1 B_1 = -\Lambda(C_1)$$

Bunda $A_1 = S^T A, S, B_1 = S^T BS, \overline{H}_1 = S^T H_1 S$. Al $A_1^T + A_1 + B_1^T B_1 = S^T\left(A^T + A + B^T B\right)S$ onda $\lambda_{\min}\left(A_1^T + A_1 + B_1^T B_1\right) = \lambda_{\min}\left(A^T + A + B^T B\right) < 0.$

Bılay belgileymiz $\delta = \left|\lambda_{\min}\left(-A^T - A - B^T B\right)\right| / \lambda_{\min}(C_0)$ hám mına teńlemeni qaraymız

$$A_1^T \overline{H}_1 + \overline{H}_1 A + B_1^T \overline{H}_1 B_1 = -\delta \cdot \Lambda(C_1) + A$$

Sonı kórsetemiz, yaǵnıy bunıń oń jaǵı teris turaqlı matritsa ekenligin.

Haqıyqatındada, onı mına túrde kórsetemiz

$$\delta \cdot \Lambda(C_1) - A_1^T - A_1 - B_1^T B_1 = \delta \cdot [\Lambda(C_1) - \lambda_{\min}(C_1) \cdot E] + \left\{\left|\lambda_{\min}\left(-A^T - A - B^T B\right)\right| E + \left(-A_1^T - A_1 - B_1^T B_1\right)\right\}$$

Al $\delta \cdot [\Lambda(C_1) - \lambda_{\min}(C_1) E]$ hám $\left\{\left|\lambda_{\min}\left(-A^T - A - B^T B\right)\right| E + \left(-A_1^T - A_1 - B_1^T B_1\right)\right\}$ matritsaları oń turaqlı, yaǵnıy olardıń summalarında sonday boladı. Endi (1.4. 1) shi teńlemeni mına túrge túrlendiremiz

$$A_1^T (H_1(\delta) - E) + (H_1(\delta) - E) A_1 + B_1^T (H_1(\delta) - E) B_1 = -\delta \cdot \Lambda(C_0),$$

bunda $H_1(\delta)$-bólsa (2.1.1) teńlemeniń sheshimi $\overline{H}_1$ matritsası menen baylanıslı bolǵan $H_1(\delta) - E = \delta \cdot \overline{H}_1$

Bunnan $\lambda_i(H_1(\delta)) = 1 + \delta \cdot \lambda_i(\overline{H}_1) > 0$, al $H_1(\delta)$ matritsası oń anıqlanǵan, sonlıqtan $\varphi(H_1(\delta)) = \dfrac{\lambda_{\max}(H_1(\delta))}{\lambda_{\min}(H_1(\delta))} = \dfrac{1 + \delta \cdot \lambda_{\max}(\overline{H}_1)}{1 + \delta \cdot \lambda_{\min}(\overline{H}_1)} < \dfrac{\lambda_{\max}(H_1)}{\lambda_{\min}(H_1)} = \varphi(H_1).$

Solay etip, egerde C_1 oń anıqlanǵan bólsa, yaǵnıy $\lambda_{\min}(C_1) > 0$, onda $C(\delta) = \delta \cdot C_1 - A^T - A - B^T B$ oń turaqlı matritsalardı tabıwǵa boladı, bunda $\delta = \left|\lambda_{\min}\left(-A^T - A - B^T B\right)\right| / \lambda_{\min}(C_1)$, yaǵnıy Lyapunov teńlemesiniń sáykes sheshiminde $H(\delta) = E + \delta \cdot H_1$ da $\varphi(H(\delta)) < \varphi(H_1)$.

Solay etip, egerde $A^T + A + B^T B$ matritsası teris anıqlanǵan bolmasa, onda Lyapunov funksıyasınıń optimallıǵınıń zárúrli shárti $\lambda_{\min}(C_1) = 0$ yaǵnıy $H_1 \in \partial L_H$.

Teórema-2.1.5 Erikli (2.1.1) shi teńlemeler sisteması ushın Lyapunov funksıyası $V_1(x) = x^T H_1 x,\ H_0 \in \overline{L}_H$, baslanǵısh qozdırıw bahası ushın optimal bolǵan barlıq waqıtta bar boladı.

Dalıllew. Bizge belgili $\overline{L}_H$ oyıs konus bolıp esaplanadı, óziniń qaptal betin konus penen tutatuǵın. Al $\varphi_1(H) = \lambda_{\max}(H) / \lambda_{\min}(H)$ bir tekli, yaǵnıy erikli μ ushın $: 0 < \mu < \infty,\ \varphi_1(H) = \varphi_1(\mu H)$.

Anıqlanıw oblastınıń bir bólimin qarap ótiw múmkin.

$$\overline{L}_H^1 = \overline{L}_H \cap \{H : \|H\| = 1\}.$$

Payda bolǵan kóplik $\|H\| = 1$ sferanıń bir bólimin kórsetedi, dóńes tuyıq $\overline{L}_H$ kópligi menen alınǵan, kompaktlı kóplik penen.

Al $\varphi_1(H) = \lambda_{\max}(H) / \lambda_{\min}(H)$ minimumdı tabıw hám $\tilde{\varphi}_1 = \lambda_{\min}(H) / \lambda_{\max}(H)$ maksimumdı L_H^1 kópliginde ekvivalent máseleler bolıp esaplanadı. Al L_H^1 kópliginde $\varphi_1(H)$ funksıya $\tilde{\varphi}(H) = \lambda_{\min}(H)$ túrge iye boladı. $\overline{L}_H^1$, $\tilde{\varphi}_1(H)$ funksıya maksimal mániske iye boladı. Solay etip $V_1(x) = x^T H_1 x,\ H_1 \in \overline{L}_H$ optimal funksıyanı tabıw barlıq waqıtta sheshimge iye boladı.

Sonnı kórsetip ótemiz, yaǵnıy ulıwma jaǵdayda $V_1(x)$ funksıyasın dúziw jetkilikli bolmaydı.

Meylı (2.1.1) sistema A hám B matritsalarǵa iye bolsın, bloklı diagonal strukturadaǵı.

$$A=\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}B_1 & 0\\ 0 & B_2\end{bmatrix},$$

bunda A_1, A_2 sáykes B_1, B_2 kvadrat matritsalar n_1 hám n_2 ólshemli $(n_1+n_2)=n$

Sonı kórsetip ótemiz optimal funksıyanı tabıw ushın matritsa bloklı-diagonal túrde alıw kerek
$$C_1=\begin{bmatrix}C_{11}^1 & 0\\ 0 & C_{22}^1\end{bmatrix}$$

hám sáykes H_1 bloklı-diogonal túrge iye boladı

$$H_1=\begin{bmatrix}H_{11}^1 & 0\\ 0 & H_{22}^1\end{bmatrix}$$

Teórema-2.1.6. Egerde A hám B matritsaları bloklı-diagonal strukturaǵa iye bólsa, $V_1(x)=x^T H_1 x$ optimal Lyapunov funksıyası bloklı-diagonal strukturaǵa iye boladı.

Dalılllew. Meylı C_1 hám H_1 matritsaları mına optimizatsiyalaw máseleniń sheshimi bolsın

$$\arg\inf_{H\in L_H}\{\varphi_1(H)\}=\varphi(H_1)$$

hám bloklı formada jazılıwı, tomendegı kóriniste boladı.

$$C_1=\begin{bmatrix}C_{11}^1 & C_{12}^1\\ (C_{12}^1)^T & C_{22}^1\end{bmatrix},\qquad H_1=\begin{bmatrix}H_{11}^1 & H_{12}^1\\ (H_{12}^1)^T & H_{22}^1\end{bmatrix}$$

Endi $\overline{C}_1$ matritsasın qaraymız

$$\overline{C}_1=\begin{bmatrix}C_{11}^1 & 0\\ 0 & C_{22}^1\end{bmatrix}$$

(2.1.2)shi Lyapunov teńlemesi, bloklı formada jazılǵan, tomendegı túrge iye boladı

$$\begin{aligned}A_1^T H_{11}+H_{11}A_1+B_1^T H_{11}B_1&=-C_{11}\\ A_1^T H_{12}+H_{12}A_2+B_1^T H_{12}B_2&=-C_{12}\\ A_2^T H_{22}+H_{22}A_2+B_2^T H_{22}B_2&=-C_{22}\end{aligned}\qquad(2.1.2)$$

Egerde (2.1.2) sistemada oń jaǵında $C_{11}=C_{11}^1, C_{12}=0, C_{22}=C_{22}^1$ dep alsaq, onda $H_{11}=H_{11}^1,\ H_{12}=0, H_{22}=H_{22}^1$ onnıń sheshimi boladı. Sonlıqtan

$$\lambda_{\min}(H_1) \le \lambda_{\min}(\overline{H}_1) \le \lambda_{\max}(\overline{H}_1) \le \lambda_{\max}(H_1)$$
$$\lambda_{\min}(C_1) \le \lambda_{\min}(\overline{C}_1) \le \lambda_{\max}(\overline{C}_1) \le \lambda_{\max}(C_1), \quad (2.1.3)$$

yaǵnıy C_1 hám H_1 matritsaları, bunda

$$\overline{H}_1 = \begin{bmatrix} H_{11}^1 & 0 \\ 0 & H_{22}^1 \end{bmatrix},$$

Oń anıqlanǵan boladı, (1.1.3) shi teńsizlikten kórinip turıptı

$$\varphi_1(\overline{H}_1) \le \varphi_1(H_1).$$

Solay etip, H_1 matritsası bloklı-diagonal strukturaǵa iye boladı.

<u>Mısal 1.</u>

$$dx'(t) = Ax'(t)dt + Bx'(t)dw(t),\ x'(t) \in R^{n-1}$$
$$dx_n(t) = ax_n(t)dt + bx_n(t)dw(t),\ x_n(t) \in R^1 \quad (2.1.4)$$

Meylı birinshi úles sistema ushın optimal funksıya mına túrge iye boladı $V_1(x) = (x')^T H_1^* x,$ sonlıqtan $\lambda_{\max}(H_1^*) = \lambda_{n-1},\ \lambda_{\min}(H_1^*) = \lambda_1,\ \lambda_{n-1} > \lambda_1.$ Sonda $V_1(x) = x^T H_1 x,\quad x = (x^1, x_n)^T$ túrindegi funksıya

bunda

$$H_1 = \begin{bmatrix} H_1^* & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix},$$

,

(2.1.4) shi túrindegi barlıq sistema ushın optimal boladı.

2.2 Optimal Lyapunov funksıyasınıń algoritmlerin tabıw

Ulıwma jaǵdayda H_1 máseleni tabıw matematikalıq programmalastırıwdıń qıyın máselesi bolıp tabıladı dóńes emes $\varphi_1(H)$ funksıyası menen $\overline{L}_H$ kópliginde.

Egerde $A^T + A + B^T B$ matritsası teris turaqlı bólsa, onda $H_1 = E$ dep alıp, yaǵnıy $V_1(x) = \|x\|^2$, optimal Lyapunov funksıyasına iye bolamız.

Haqıyqatındada

$$\varphi(H_1) = \lambda_{\max}(E) / \lambda_{\min}(E) = 1$$

Sonlıqtan keleshekte bılay boljaymız, yaǵnıy $A^T + A + B^T B$ teris twraqlı bolmasın.

Endi kvazioptimal Lyapunov funksıyasınıń eki algoritmin qarap ótemiz.

I.<u>**Tuwındını parametrizatsiyalaw algoritmi**</u>

Meylı H hám C matritsaları oń anıqlanǵan bolsın hám (2.2.2) shi teńlemeni qanaatlandırsın. Endi H_1 matritsasın $H_1 = H + \delta E$ túrinde izleymiz, bunda $\delta > 0$-bazıbir sanlı parametr. Sonda (2.2.2)shi teńleme mına túrge keledi

$$A^T(H+\delta E)+(H+\delta E)A+B^T(H+\delta E)B=-\left[C-\delta\left(A^T+A+B^TB\right]\right. \quad (2.2.5)$$

Meylı S sonday matritsa, C matritsasın diagonal túrge keltiriwshi, yaǵnıy $S^TCS = \Lambda(C)$, bunda

$$\Lambda(C)=\begin{bmatrix} \lambda_1(C) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2(C_1) & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n(C_1) \end{bmatrix}$$

Endi (2.2.5)shi teńlemeni shepten S^T, al ońnan S ke kóbeytip S' tomendegıge iye bolamız.

$$\left[S^TAS\right]^T\left[S^T(H+\delta E)S\right]+\left[S^T(H+\delta E)S\right]\left[S^TAS\right]+\left[S^TB^TS\right]\left[S^T(H+\delta E)S\right]\left[S^TBS\right]=-$$
$$=-\left[\Lambda(C)-\delta\cdot S^T\left(A^T+A+B^TB\right)\right].$$

Endi $\delta > 0$ parametrin mına shártten alamız

$$\lambda_{\min}\left[\Lambda(C)-\delta\cdot S^T\left(A^T+A+B^TB\right)S\right]\to 0$$

Bunıń ushın bılay qoyamız

$$\delta=\lambda_{\min}\left[\Lambda(C)\right]/\left|\lambda_{\min}\left[-S^T\left(A^T+A+B^TB\right)S\right],\right.$$

,

yamasa

$$\delta = \lambda_{\min}(C)/|\lambda_{\min}(-A^T - A - B^T B)|.$$

.

Al sonda hám

$$\varphi(H+\delta E) = \frac{\lambda_{\max}(H+\delta E)}{\lambda_{\min}(H+\delta E)} = \frac{\lambda_{\max}(H)+\delta}{\lambda_{\min}(H)+\delta} < \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)} = \varphi(H).$$

.

Mısal. Meylı A hám B matritsaları tomendegı túrge iye bolsın.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -0{,}1 & 0 \\ 0 & -0{,}1 \end{bmatrix}.$$

.

Egerde $C = E$ dep alsaq, onda

$$H = \begin{bmatrix} 0{,}502 & 1{,}009 \\ 1{,}009 & 4{,}558 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{\max}(H) = 4{,}78 \quad \lambda_{\min}(H) = 0{,}27, \quad \varphi(H) = 17{,}74$$

Sonda $A^T + A + B^T B$ tomendegı túrge iye boladı

$$A^T + A + B^T B = \begin{bmatrix} -1{,}99 & 4 \\ 4 & -1{,}99 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{\min}(-A^T - A - B^T B) = -2{,}01$$

Bunnan $\delta = \lambda_{\min}(C)/|\lambda_{\min}(-A^T - A - B^T B)| = 0{,}49.$

Tomendegıge iye bolamız:

$$\varphi(H+\delta E) = \frac{0{,}49 + 4{,}79}{0{,}27 + 0{,}49} = 6{,}947$$

II. Funksıyanı parametrizatsiyalaw algoritmi.

Meylı H hám C oń anıqlanǵan matritsalar bolsın, (2.2.2)shi Lyapunov teńlemesin qanaatlandırıwshı. Sonday bir S ortogonal túrlendiriwi bar boladı, H matritsasın diagonal túrge keltiriwshi $S^T H S = \Lambda$,

Bunda

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1(H) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2(H) & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n(H) \end{bmatrix}$$

(2.2.2) shi teńlemeni shepten S^T, al ońnan S ke kóbeytip mınaǵan iye bolamız

$$(S^T A^T S)(S^T HS) + (S^T HS)(S^T AS) + (S^T B^T S)(S^T HS)(S^T BS) = -(S^T CS)$$

Yamasa

$$A_1^T \Lambda + \Lambda A + B_1^T \Lambda B_1 = -C_1$$

bunda

$$A_1 = S^T AS = \{a_{ij}^1\},\ i, j = \overline{1,n},\ B_1 = S^T BS = \{b_{ij}^1\},$$
$$i, j = \overline{1,n}, C_1 = S^T CS = \{C_{ij}^1\}, \quad i, j = \overline{1,n}$$

Payda bolǵan teńlemeni tomendegıshe túrlendiremiz

$$A_1^T \begin{bmatrix} \lambda_1(H)+\varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1(H) & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n(H) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1(H)+\varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2(H) & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n(H) \end{bmatrix} A_1 +$$
$$+ B_1^T \begin{bmatrix} \lambda_1(H)+\varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2(H) & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n(H) \end{bmatrix} B_1 = -C_1 + \left\{ A_1^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} A_1 + \right.$$
$$\left. + B_1^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} B_1 \right\}$$

yamasa

$$A_1^T \Lambda(\varepsilon) + \Lambda(\varepsilon) A_1 + B_1^T \Lambda(\varepsilon) B_1 = -[C_1 - \varepsilon \cdot \Delta_1],$$

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} 2a_{11}^1 + (b_{11}^1)^2 & a_{12}^1 + b_{11}^1 b_{12}^1 & \dots & a_{1n}^1 + b_{11}^1 \cdot b_{1n}^1 \\ a_{12}^1 + b_{12}^1 b_{11}^1 & (b_{12}^1)^2 & \dots & b_{12}^1 b_{1n}^1 \\ . & . & \dots & . \\ a_{1n}^1 + b_{11}^1 \cdot b_{1n}^1 & b_{12}^1 \cdot b_{1n}^1 & \dots & (b_{1n}^1)^2 \end{bmatrix}$$

Sonlıqtan $\varepsilon > 0$ da : $\varphi_1(\Lambda(\varepsilon)) < \varphi(\Lambda)$, onda ε dı optimallastırıwdıń zárúrligi shártinen saylap alamız $\lambda_{\min}[C_1 - \varepsilon \cdot \Delta_1] \to 0$. Solay etip $\lambda_{\min}[C_1 - \varepsilon \cdot \Delta_1] \geq \lambda_{\min}(C_1) - \varepsilon \cdot \lambda_{\max}(\Delta_1)$ onda bılay alamız

$$\varepsilon = \lambda_{\min}(C_1) / \lambda_{\max}(\Delta_1)$$

Lyapunov funksıyası $V_1(x) = x^T H_1 x,$ bunda $H_1 = S\Lambda(\varepsilon)S^T$, baslanǵısh qozdırıwshılardıń kópligi jaqsı bahalaydı, solay etip

$$\varphi_1(H_1) = \frac{\lambda_{\max}[\Lambda(\varepsilon)]}{\lambda_{\min}[\Lambda(\varepsilon)]} = \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H) + \varepsilon} < \varphi_1(H).$$

2.3 Integral sapa kriteriyasın optimallastırıu

Sonday Lyapunov funksıyasın dúziwdi qaraymız, integral sapa kriteriyasın optimal bahalawshı. Sonlıqtan ortasha kvadratlı asimptotikalıq ornıqlılıq qaraladı, yaǵnıy optimal obraz arqalı mına funksional qaraladı

$$J(H, x_o) = \int_{t_o}^{\infty} \mathrm{M}\left\{\|x(t)\|^2\right\} dt,$$

Onda bul jerde ápiwayı nátiyjeler bolıwı múmkin. Meylı Lyapunov-Silvestr teńlemesi $C = E$ de $H = H_E$ sheshimge iye bolsın, yaǵnıy

$$A^T H_E + H_E A + B^T H_E B = -E,$$

Sonda mına qatnas orınlı

$$d\mathrm{M}\{V(x(t))\} = -\mathrm{M}\left\{\|x(t)\|^2\right\} dt$$

Bunnan

$$\mathrm{M}\{V(x(t))\} - V(x(t_o)) = -\int_{t_o}^{t} \mathrm{M}\left\{\|x(s)\|^2\right\} ds$$

(2.3.1) shi sistema ortasha kvadratlı asimptotikalı ornıqlı, onda

$$\lim_{t \to \infty} \mathrm{M}\left\{\|x(t)\|^2\right\} = 0$$

Bunnan

$$\lim_{t \to \infty} \mathrm{M}\{V(x(t))\} = 0$$

Sonlıqtan $t \to +\infty$ shekke ótsek, tomendegıge iye bolamız

$$\int_{t_o}^{\infty} \mathrm{M}\left\{\|x(s)\|^2\right\} ds = V(x(t_o)) = x^T(t_o) H_E x(t_o)$$

Solay etip tomendegıge tastıyıqlawǵa iye boldıq.

2.4. Sızıklı stoxastikalık sistemada uakıt boyınsha otiu protsessin bahalawdı optimallastırıw

Bul paragrafta $V_3(x)=x^T H_3 x$ Lyapunov funksıyasın tabıwdı qaraymız, sheshimler xarakteristikasın optimal bahalawshı waqıt boyınsha ótiw protsessii sıyaqlı. Endi $\varphi_3(H)$ maqset funksıyasın qaraymız, $H \in L_H$ anıqlanǵan$[17,18]$.

Optimizatsiyalıq máseleniń sheshiminiń sistemanıń túrine baylanıslılıǵı.

Egerde $H \in L_H$ ushın $\lambda_{\max}(H) \geq \lambda_{\min}(H), \lambda_{\min}(C) > 0,$ bólsa, onda $0 \leq \varphi_3(H) < \infty$ Optimal Lyapunov funksıyasınıń eń jaqsı funksıyası bolıp (A hám B matritsalarına baylanıslı)$\varphi_3(H_3)=0$. Bul $\lambda_{\max}(H_3) \neq \lambda_{\min}(H_3)=E$ sáykes keledi, yaǵnıy sferalıq Lyapunov funksıyasına.

Teórema.-2.4.1. $V_3(H_3), H_3 \in L_H$ optimal Lyapunov funksıyası $\varphi_3(H_3)=0$ bolatuǵın, sonda tek ǵana sonda bar boladı, egerde $A^T + A + B^T B$ teris anıqlanǵan matritsa bólsa. Bul jaǵdayda $H_3 = \lambda E, \lambda > 0$.

Dalılllew. Joqarıdaǵı Teóremada kórsetilgenindey (2)shi Lyapunov-Silvestr teńlemesi $H \in L_H$ sheshimge iye boladı, $\lambda_{\max}(H)/\lambda_{\min}(H)=1$sonda tek ǵana sonda, egerde $A^T + A + B^T B$ teris anıqlanǵan matritsa bólsa. Al mına $\lambda_{\max}(H)/\lambda_{\min}(H)=1$ shárti $\varphi_3(H)=0$ bolıwdıń zárúrli hám jetkilikli shárti bolıp tabıladı.

Egerde $A^T + A + B^T B$ matritsası teris turaqlı bólsa, yaǵnıy$\lambda_{\max}\left[A^T + A + B^T B\right]=0$ onda

$$\lim_{H \to \lambda E} \cdot \ell n \left[\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)} \right] = 0, \quad \lim_{H \to \lambda E} \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)} = \infty$$

Sonlıqtan $\varphi_3(H)$ funksıyası konustıń ∂L_H shegaralıq toshkalarında úziliske ushıraydı.

Úshinshi jaǵdaydı qarap ótemiz, egerde $A^T + A + B^T B$ teńlemesi teris turaqlı bolmaǵan, yaǵnıy $\lambda_{\max}\left[-A^T + A + B^T B\right] > 0, \quad \lambda_{\min}\left[-A^T - A - B^T B\right] < 0$

Teórema.2.4.2 Meylı $A^T + A + B^T B$ terris anıqlanǵan bolmasın. $V_3(x)=x^T H_3 x, \ H_3 \in L_H$ optimal Lyapunov funksıyası bar boladı.

Dalılllew. $\varphi_3(H)$ funksıyası bir tekli, sonlıqtan onnıń anıqlanıw oblastın sozamız, sferalıq bólimi boyınsha

$$\overline{L}_H^1 = \{H : \|H\| = 1\} \cap L_H .$$

SHegaraǵa jaqınlanǵanda

$$\partial L_H = \{H : \|H\| = 1, \lambda_{\min}\left(-A^T H - HA - B^T HB\right) = 0\}$$

$\lim\limits_{H \to \partial L_H} \varphi_3(H) = +\infty$, funksıyanı minimizatsiyalaw máselesi esaplanadı, onda ε shegara oblastın qaramaw múmkin,

$$L_H^\varepsilon = \{H : \lambda_{\min}\left(-A^T H - HA - B^T HB\right) \geq \varepsilon\} \cap L_H^1$$

qanaatlandırıladı.

Payda bolǵan kóplik kompaktli hám onda $\varphi_3(H)$ úzliksiz funksıya óziniń minimal mánisine erisedi. Solay etip $\varphi_3(H)$ optimal funksıya $H_3 \in L_H$ bar boladı.

Sonnı kórsetsek ótemiz, ulıwma jaǵdayda H_3 bir mánisli dúziledi.

<u>Teórema.2.4.</u>3 Egerde (1)shi sistemanıń A hám B matritsaları bloklı diogonal strukturaǵa iye bólsa, onda $V_3(x) = x^T H_3 x$ Lyapunov funksıyası bloklı diogonal strukturaǵa iye boladı.

Dalılllew**.** (2.4.1)shi sistemanı A hám B matritsaları menen qaraymız

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}$$

bunda A_1, B_1, A_2, B_2-bólsa, $n_1 x n_1, n_2 x n_2, n_1 \neq n_2 = n$ ólshemli úles matritsalar.

Meylı bizge belgili bolsın, yaǵnıy optimal jup bolıp

$$H_3 \begin{bmatrix} H_{11}^3 & H_{12}^3 \\ \left(H_{12}^3\right)^T & H_{22}^3 \end{bmatrix}, \qquad C_3 = \begin{bmatrix} C_{11}^3 & C_{12}^3 \\ \left(C_{12}^3\right)^T & C_{22}^3 \end{bmatrix}$$

Sonı tekseriw qıyın emes, yaǵnıy matritsalar

$$\overline{H}_3 = \begin{bmatrix} H_{11}^3 & 0 \\ 0 & H_{22}^3 \end{bmatrix}, \qquad \overline{C}_3 = \begin{bmatrix} C_{11}^3 & 0 \\ 0 & C_{22}^3 \end{bmatrix}$$

Oń anıqlanǵan boladı hám Lyapunov –Silvestr teńlemesin qanaatlandıradı. Bunnan basqa, tomendegı orınlı

$$\lambda_{\min}(H_3) \le \lambda_{\min}(\overline{H}_3) \le \lambda_{\max}(\overline{H}_3) \le \lambda_{\max}(H_3)$$
$$\lambda_{\min}(C_3) \le \lambda_{\min}(\overline{C}_3) \le \lambda_{\max}(\overline{C}_3) \le \lambda_{\max}(C_3)$$

Sonlıqtan

$$\lambda_{\max}(\overline{H}_3)/\lambda_{\min}(H_3) \le \lambda_{\max}(H_3)/\lambda_{\min}(H_3)$$
$$\lambda_{\max}(\overline{H}_3)/\lambda_{\min}(\overline{C}_3) \le \lambda_{\max}(H_3)/\lambda_{\min}(C_3)$$

Bunnan kelip shıǵadı $\varphi_3(\overline{H}_3) \le \varphi_3(H_3)$ hám optimal Lyapunov funksıyası bloklı-diogonal strukturaǵa iye boladı.

Mısal. Sistemanı mına matritsalar menen qaraymız

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

Meylı $A_1^T + A_1 + B_1^T B_1$ teris anıqlanǵan bolmasın, hám birinshi úles sistema ushın optimal funksıya bolıp $V_3^1(x) = x_1^T H_3^1 x_1, \quad H_3^1 \ne E, x_1 \in R^{n-1}$ Sonda barlıq sistemalar ushın Lyapunov funksıyasın $V_3(x) = x^T H_3 x$ túrinde alamız H_3 matritsası menen:

$$H_3 = \begin{bmatrix} H_3^1 & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix}$$

Bunda $\lambda_{\min}(H_3^1) \le h \le \lambda_{\max}(H_3^1), \ h < -\lambda_{\min}(c)/(2a + b^2)$

Optimizatsiyalaw algoritmleri

Endi $\varphi_3(H), H \in L_H$ _funksıyasın optimizatsiyalaw algoritmin qaraymız. Olar ideyası jaǵınan joqarıda qaralǵan algoritmge uqsas.

I. Nur boyınsha sozıw algoritmi.

Lyapunov-Silvestr teńlemesin tomendegishe túrlendiremiz.

$$\varphi^T(H_E + \delta E) + (H_E + \delta E)A + B^T(H_E + \delta E)B = -[E - \delta(A^T + A + B^T B)]$$

$\varphi_3(H)$ maqset funksıyası fiksirlengen H_E hám E matritsalarında δ parametrli funksıyaǵa aylanadı, yaǵnıy

$$\varphi_3(\delta) = \frac{\lambda_{\max}(H_E + \delta E)}{\lambda_{\min}[E - \delta(A^T + A + B^T B)]} \cdot \ell n \left[\frac{\lambda_{\max}(H_E + \delta E)}{\lambda_{\min}(H_E + \delta E)} \right] \quad (2.4.1)$$

Boljaw boyınsha $A^T + A + B^T B$ teris anıqlanǵan matritsa bolmaydı (oń anıqlanǵanda bolmaydı, basqasha aytqanda teń salmaqlılıq jaǵdayı ornıqsız boladı). Sonlıqtan

$$\lambda_{\max}\left(A^T + A + B^T B\right) > 0,\ \lambda_{\min}\left(A^T + A + B^T B\right) < 0 \quad \text{hám}$$

$$\lambda_{\min}\left[1-\delta\left(A^T + A + B^T B\right)\right] = \begin{cases} 1-\delta\lambda_{\max}\left(A^T + A + B^T B\right), & \delta > 0 \\ 1-\delta\cdot\lambda_{\min}\left(A^T + A + B^T B\right), & \delta < 0 \end{cases} \tag{2.4.2}$$

Wlıwma kórinistegi $\varphi(\delta)$ funksıyasın qaraymız.

$$\varphi(\delta)\frac{a+\delta}{1-\delta c}\cdot \ell n\left(\frac{a+\delta}{b+\delta}\right).$$

Ekstremumnıń zárúrli shárti bolıp $\varphi^1(\delta) = 0$ yaǵnıy

$$\varphi^1(\delta) = \frac{1+ac}{(1-\delta c)^2}\cdot\left[\ell n\left(\frac{a+\delta}{b+\delta}\right) - \frac{(a-b)(1-\delta c)}{(b+\delta)(1+ac)}\right] = 0 \tag{2.4.3}$$

Meylı δ_o bólsa (2.4.3)shi teńlemeden tabılsın. Al δ_o toshkada minimumnıń jetkilikli shárti $\varphi^{11}(\delta_o) > 0$ bolıp tabıladı.

$$\varphi^{11}(\delta_o) = \frac{(a-b)^2}{(1-\delta_o c)(a+\delta_o)(b+\delta_o)^2}$$

Sonlıqtan, egerde $(1-\delta_o c)(a+\delta_o) > 0$ bólsa, onda δ_o toshkada (2.4.3)shi teńlemeniń sheshimi bolatuǵın, $\varphi(\delta)$minimumǵa iye boladı.

Alınǵan nátiyjelerdi paydalana otırıp, (2.4.1)shi optimizatsiyalıq funksıyaǵa qollanamız. Ol tomendegı túrge iye boladı.

$$\varphi_3(\delta) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_{\max}(H_E)+\delta}{1-\delta\lambda_{\max}\left(A^T + A + B^T B\right)}\ell n\left[\dfrac{\lambda_{\max}(H_E)+\delta}{\lambda_{\min}(H_E)+\delta}\right], \text{ egerde} \\ \qquad\qquad \dfrac{1}{\lambda_{\max}\left(A^T + A + B^T B\right)} > \delta \geq 0 \\ \dfrac{\lambda_{\max}(H_E)+\delta}{1-\delta\lambda_{\min}\left(A^T + A + B^T B\right)}\ell n\left[\dfrac{\lambda_{\max}(H_E)+\delta}{\lambda_{\min}(H_E)+\delta}\right], \quad \text{egerde} \\ \max\left\{-\lambda_{\min}(H_E) - \dfrac{1}{\lambda_{\min}\left(A^T + A + B^T B\right)}\right\} < \delta < 0 \end{cases}$$

Tomendegı belgilewlerdi kiritemiz

$$a = \lambda_{\max}(H_E),\ b = \lambda_{\min}(H_E),\ C_1 = \lambda_{\max}\left(A^T + A + B^T B\right),\ C_2 = \lambda_{\min}\left(A^T + A + B^T B\right)$$

Sonda, egerde δ_1 tomendegıge teńlemeniń sheshimi bólsa

$$\ell n\left(\frac{a+\delta}{b+\delta}\right) - \frac{(a-b)(1-\delta c_1)}{(b+\delta)(1+ac_1)} = 0$$

hám tomendegıge orınlanadı

$$0 \le \delta_1 < 1/C_1,$$

al δ_2 mınanıń sheshimi boladı

$$\ell n\left(\frac{a+\delta}{b+\delta}\right) - \frac{(a-b)(1-\delta c_2)}{(b+\delta)(1+ac_2)} = 0$$

hám mınaw orınlanadı

$$\max\{-b, 1/C_2\} < \delta_2 < 0$$

Onda optimal Lyapunov funksıyası sıpatında $V_3(x) = x^T(H_E + \delta_0 E)x$ bunda

$$\delta = \arg\min\{\varphi_3(\delta_1), \varphi_3(\delta)\}$$

Egerde shártlerdiń hesh birewi orınlanbasa, onda $\delta_0 = 0$, yaǵnıy $H_3 = E$

II. **Menshikli vektor retinde sozıw algoritmi**

Meylı H_E, E jubı Lyapunov-Silvestr teńlemesiniń sheshimi bolsın, yaǵnıy

$$A^T H_E + H_E A + B^T H_E B = -E$$

hám U -ortogonal túrlendiriw, H_E diagonal túrge alıp keliwshi. Teńlemeniń shepten U ǵa, al ońnan U^T kóbeytip, tomendegıge iye bolamız

$$A_1^T \Lambda + \Lambda A_1 + B_1^T \Lambda B_1 = -E$$

Bunda $A_1 = U^T A U = \{aij^1\}, ij = \overline{1,n},\ B_1 = U^T B U = \{bij^T\}, i, j = \overline{1,n}$

Payda bolǵan teńlemeniń tomendegı túrge keltiremiz

$$A_1^T \begin{bmatrix} \lambda_1(H_E)+\varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2(H_E) & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n(H_E) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1(H_E)+\varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2(H_E) & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n(H_E) \end{bmatrix} A_1 +$$
$$+ B_1^T \begin{bmatrix} \lambda_1(H_E)+\varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2(H_E) & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n(H_E) \end{bmatrix} B_1 = -E + \varepsilon\left\{ A_1^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} A_1 + \right.$$
$$\left. + B_1^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} B_1 \right\}$$

yamasa

$$A_1^T \Lambda(\varepsilon) + \Lambda(\varepsilon) A_1 + B_1^T \Lambda(\varepsilon) B_1 = -[E - \varepsilon \cdot \Delta_1],$$

Bunda

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 2a_{11}^1 + (b_{11}^1)^2 & a_{12}^1 + b_{11}^1 b_{12}^1 & \dots & a_{1n}^1 + b_{11}^1 b_{1n}^1 \\ a_{12}^1 + b_{12}^1 b_{11}^1 & (b_{12}^1)^2 & \dots & b_{12}^1 \cdot b_{1n}^1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{1n}^1 + b_{1n}^1 \cdot b_{11}^1 & b_{1n}^1 \cdot b_{12}^1 & \dots & (b_{1n}^1)^2 \end{bmatrix}$$

Meylı $\varphi_3(H)$ funksıyası fiksirlengen H_E hám E ε marametrli funksıyaǵa aylanısın, yaǵnıy

$$\varphi_3(\varepsilon) = \frac{\lambda_{\max}(H_E)}{\lambda_{\min}(E - \varepsilon \cdot \Delta_1)} \cdot \ell n\left[\frac{\lambda_{\max}(H_E)}{\lambda_{\min}(H_E) + \varepsilon}\right]$$

Sonlıqtan

$$\lambda_{\min}(E - \varepsilon \cdot \Delta_1) = \begin{cases} 1 - \varepsilon \cdot \lambda_{\min}(\Delta_1), \ egep\ \varepsilon > 0 \\ 1 - \varepsilon \cdot \lambda_{\max}(\Delta_1), \ egep\ \varepsilon \le 0 \end{cases}$$

Onda $\varphi_3(\varepsilon)$ funksıyası tomendegı túrge iye boladı

$$\varphi_3(\varepsilon) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_{\max}(H_E)}{1 - \varepsilon\lambda_{\min}(\Delta_1)} \cdot \ell n\left[\dfrac{\lambda_{\max}(H_E)}{\lambda_{\min}(H_E) + \varepsilon}\right] \\ 0 < \varepsilon < 1/\lambda_{\min}(\Delta_1),\ egep\ \lambda_{\min}(\Delta_1) > 0 \\ 0 < \varepsilon\ \ egep\ \lambda_{\min}(\Delta_1) < 0 \\ \dfrac{\lambda_{\max}(H_E)}{1 - \varepsilon \cdot \lambda_{\max}(\Delta_1)} \ell n\left[\dfrac{\lambda_{\max}(H_E)}{\lambda_{\min}(H_E) + \varepsilon}\right] \\ 0 \ge \varepsilon > \max\{-\lambda_{\min}(H_E), 1/\lambda_{\max}(\Delta_1)\},\ egep\ \lambda_{\max}(\Delta_1) < 0 \\ 0 \ge \varepsilon > -\lambda_{\min}(H_E),\ egep\ \lambda_{\max}(\Delta_1) > 0 \end{cases} \quad (2.4.5)$$

Funksıyanıń minium shártin qarap ótemiz

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{a}{1 - \varepsilon c} \cdot \ell n\left(\frac{a}{b + \varepsilon}\right)$$

Ekstremumnıń $\varphi^1(\varepsilon) = 0$ zárúrlik shárti tomendegı túrge iye boladı.

$$\varphi^1(\varepsilon) = \frac{ac}{(1 - \varepsilon c)^2} \cdot \ell n\left(\frac{a}{b + c}\right) - \frac{a}{(1 - \varepsilon c)(b + \varepsilon)} = 0$$

Sonlıqtan ε_o mánisi mına teńlemeden tabıladı

$$\ell n\left(\frac{a}{b + \varepsilon}\right) - \frac{(1 - \varepsilon c)}{c(b + \varepsilon)} = 0 \quad (2.4.6)$$

Endi $\varphi(\varepsilon)$ funksıyasınıń ε_0 toshkada ekinshi tuwındısın qaraymız

$$\varphi^{11}(\varepsilon_o)=\frac{a}{(1-\varepsilon_o c)(b+\varepsilon_o)^2}$$

Sonlıqtan, egerde $a(1-\varepsilon_o c)>0$ bólsa, onda $\varphi(\varepsilon)$ funksıyası ε_o toshkada, (2.4.6)shı teńlemeden tabılǵan tomendegı túrge iye boladı.

Meylı ε_1 teńlemeniń sheshimi bolsın

$$\ell n\left[\frac{\lambda_{\max}(H_E)}{\lambda_{\min}(H_E)+\varepsilon}\right]-\frac{1-\varepsilon\cdot\lambda_{\min}(\Delta_1)}{\lambda_{\min}(\Delta_1)[\lambda_{\min}(H_E)+\varepsilon]}=0 \quad (2.7.7)$$

yamasa

$$0<\varepsilon<1/\lambda_{\min}(\Delta_1) егерде\, \lambda_{\min}(\Delta_1)>0$$
$$0<\varepsilon_1 егерде \lambda_{\min}(\Delta_1)<0$$

Al ε_2-mına teńlemeniń sheshimi

$$\ell n\left[\frac{\lambda_{\max}(H_E)}{\lambda_{\min}(H_E)+\varepsilon}\right]-\frac{1-\varepsilon\cdot\lambda_{\max}(\Delta_1)}{\lambda_{\max}(\Delta_1)\cdot[\lambda_{\min}(H_E)+\varepsilon]}=0$$

hám mına shárt orınlanadı

$$\max\{-\lambda_{\min}(H_E),\, 1/\lambda_{\max}(\Delta_1)\}<\varepsilon\le 0 \text{ egerde } \lambda_{\max}(\Delta_1)<0$$

Yamasa $\quad -\lambda_{\min}(H_E)<\varepsilon\le 0$ egerde $\lambda_{\max}(\Delta_1)>0$

Sonda optimal Lyapunov funksıyası retinde mınanı alıwǵa boladı $V_3(x)=x^T(H_E+\varepsilon_o E)x,$ bunda

$$\varepsilon_o=\arg\min\{\varphi_3(\varepsilon_1),\varphi_3(\varepsilon_2)\}$$

Egerde (2.7.7)shi, (2.7.8)shi shártlerdiń hesh biri orınlanbasa, onda $\varepsilon_o=0$ dep alamız.

2.5 Sızıqlı stoxastikalıq sistemanıń ornıqlılıǵın izertlewde Silvestr-Lyapunov matritsalıq teńlemesin qollanıw

Meylı bizge sızıqlı stoxastikalıq differensial teńleme berilgen bolsın Ito túrindegi [10,11].

$$dx^{\varepsilon}(t) = x^{\varepsilon}(t)Adt + \sum_{i=1}^{p} x^{\varepsilon}(t)B_i(\varepsilon)dw_i(t),$$
$$x^{\varepsilon}(t) = \left[x_1^{\varepsilon},\dots,x_n^{\varepsilon}\right],\ x^{\varepsilon}(t_o) = x_o,\ t = t_o \qquad (2.5.1)$$

Al (2.8.1)shi teńlemede tomendegıler belgilengen:

x^{ε} -bólsa, n -ólshemli vektor, ε -parametr; $A, B_i(\varepsilon)$ bólsa $n\,x\,n$ ólshemli turaqlı matritsa, sonlıqtan $B_i(\varepsilon)$ bólsa ε parametrine analitikalıq baylanıslı hám $B_i(0) = 0, W_i(t)$ -ǵáressiz komponentler p -ólshemi standart vinerli protsess. Al $\varepsilon = 0$ sistema determinirlengen differensial teńlemeler sistemasına aylanadı.

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(x),\ x(t) = \left[x_1,\dots,x_n\right].(1^0)$$

Bılay boljaymız, yaǵnıy sistema tosınanlı aǵzasız-(1^0) sistema Lyapunov boyınsha asimptotikalıq ornıqlı, basqasha sóz benen aytqanda matritsa A -guritsalı

Keyin ala sol kórsetiledi, (2.5.1) teńleme boyınsha Silvestr algebralıq teńlemesin dúziwge bolatuǵının, hám keyin Silvestr teńlemesi boyınsha (2.5.1)shi sistemanıń birge teń itimallıq penen ornıqlılıq kriteriyasın formulirovkalawǵa bolatuǵının.

III-Bap Lyapunovtıń ekinshiUsı lınıń stoxastikalıq analogı

3.1Birge teń itimallıq ornıqlılıq. Lyapunovtıń ekinshiUsı lınıń stoxastikalıq analogı

Belgili Anıqlamalardı hám Lyapunovtıń ekinshiUsı lınıń Teóremaların keltiremiz sistema ushın

Mudamǵı koeffitsientlarga iye bolǵan asimptotik tárepten turaqlı doğrusal deterministiksistema qatań túrde turaqlı ekenligi jaqsı belgili.Usı funktsiya ózgeriwshen koeffitsientlargaiye bolǵan sistema ushın da ámel etedi, bul birdey asimptotik tárepten turaqlı.

Usı bólimdebiz mudamǵı koeffitsientlarga iye linear stokastik sistemalar ushın bul ayrıqshalıqlardıńuqsawlıǵın tastıyıqlaymız. Ózgeriwshen koeffitsientlarga iye sistemalar keyingi baptatalqılaw etiledi.

Lemma 4. 1. Eger mudamǵı koeffitsientlar menen siziqli sistema bólsa.

Bul ayrıqshalıqlardan, atap aytqanda, itimallıq boyınsha asimptotik tárepten turaqlı bolǵanlinear stoxastik sistema asimptotik tárepten turaqlılıǵın menen ajralıp turadı.

Anıqlama 3.1.1. $x^{\varepsilon}(t) \equiv 0$ trivial sheshim (3.1.1)shi teńlemeler sistemasınıń birge teń itimallıq penen Lyapunov boyınsha ornıqlı dep ataladı, egerdde qálegen kishi δ sanı hám q ushın, sonday bir $\theta > 0$ sonın kórsetiw múmkin bólsa, yaǵnıy $\|x_o\| < \theta$ shártinen P itimallıǵı ushın $\{\gamma\}$ waqıya

$$\{\gamma\} = \left\{ \sup_t \|x^{\varepsilon}(t)\| < \delta \right\}$$

dan

$$\mathrm{P}\{\gamma\} > 1 - q$$

kelip shıqsa.

Anıqlama **3.1.2.** (3.1.1) shi teńlemeler sistemasınıq trivial sheshimi bire teń itimallıq penen Lyapunov boyınsha asimtotikalıq ornıqlı dep ataladı, egerde ol birinshi Anıqlama boyınsha ornıqlı bólsa, onnan basqa, P itimallıǵı ushın $\{\gamma_t\}$ waqıyası

$$\{\gamma_t\} = \left\{ \lim_{T \to \infty} \sup_{t_o + T < t} \|x^{\varepsilon}(t)\| = 0 \right\}$$

bólsa tomendegı baha orınlı

$$\mathrm{P}\{\gamma_t\} = 1$$

Teórema 3.1.1. Egerde (3.1.1) stoxastikalıq teńlemeler sisteması ushın $V(x^{\varepsilon})$ oń anıqlanǵan Lyapunov funksıyası bar bólsa, yaǵnıy $V(0) = 0$ hám (3.1.1) shi sistemanıń tolıq tuwındısınıń matematikalıq kútiliwi waqıt boyınsha alınǵan teris bólsa, onda $x^{\varepsilon}(t) \equiv 0$ trivial. SHeshim birge teń itimallıq penen asimptotikalıq ornıqlı boladı.

Solay etip sistema sızıqlı, onda: (3.1.1) Lyapunovfunksıyasın oń anıqlanǵan kvadratlı funksıya retinde tomendegı túrde izlewge boladı

$$V(x^{x}) = x^{\varepsilon} \mathrm{X} x^{\varepsilon^*} \quad (3.1.2)$$

2) (3.1.1) Teórema qaytımǵa iye yaǵnıy (3.1.2) shi kvadratlıq formanıń ishinde kvadratlıq forma bar boladı zárúrlik hám jetkiliklik shártleriniń informatsiyaların alıp keletuǵın, asimtotikalıq ornıqlılıq shártlerinde.

Silvestr teńlemesiniń juwmaǵı.

Solay etip, (3.1.1)shi sistema ushın, stoxastikalıq Lyapunov funksıyası retinde (3.1.2)shi kvadratlıq formanı alamız, bunda $X > 0$ belgisiz turaqlı matritsa, anıqlaw kerek bolǵan. Egerde bizlerge sızıqlı teńlemeni tabıw múmkin bólsa, X matritsasın tabıw múmkin bolǵan, onda algebralıq ornıqlılıq kriteriyasın alıw máselesi sheshiletuǵın. Ekenin aytıw kerek, járdemshi algebraik teńlemeniń túbirleri belgili bolǵan táǵdirde,mudamǵı koeffitsientlar menen bir qatarda birdey homogenli deterministik sistemanıńsheshimi jazılıwı múmkin. Ókiniw menen aytamiz, stokastik sistemalar ushın bundayyamasa soǵan uqsaw maǵlıwmatlar, itimal, múmkin emes

Ito formulasın paydalanıp quramalı funksıyanıń stoxastikalıq differensiallaw ushın, dv stoxastikalıq differensialı ushın (3.1.2)shi Lyapunov funksıyası (3.1.1)shi Teóremaǵa tiykarlanıp tomendegıge iye bolamız

$$dv(x^{\varepsilon}) = x^{\varepsilon}\left(AX + XA^{*} + \sum_{i=1}^{P} B_i X B_i^{*}\right)x^{\varepsilon^{*}}dt + x^{\varepsilon}\left[\sum_{j=1}^{P}\left(B_j X + XB_j^{*}\right)dw_j\right]x^{\varepsilon^{*}}$$

(3.1.3)

(3.1.1)shi sistemaǵa tiykarlanıp $\mathrm{M}\{dv/dt\}$ tuwındınıń matematikalıq kútiliwin esaplaymız. Tomendegıge iye bolamız

$$\mathrm{M}\left\{\frac{dv}{dt}\middle| x^{\varepsilon} \equiv x\right\} = \frac{\mathrm{M}\{dv | x^{\varepsilon} \equiv x\}}{dt} = x\left(AX + XA^{*} + \sum_{i=1}^{P} B_i X B_i^{*}\right)x^{*} \qquad (3.1.4)$$

(4)shidegi matematikalıq kútiliw sonda tekǵana sonda teris boladı, egerde $AX + XA^{*} + \sum_{i=1}^{P} BXB_i^{*}$ teris anıqlanǵan bólsa.

<u>**Teórema 3.1. 2.**</u> (birge teń itimallıq penen asimptotikalıq ornıqlılıq kriteriyası) (3.1.1)shi sistemanıń trivial sheshiminiń birge teń itimallıq penen A gurvitsalı

matritsa ushın asimtotikalıq ornıqlılıǵınıń zárúrli hám jetkilikli shárti bolıp X ońanıqlanǵan sheshiminiń bar bolıwı Silvestr matritsalı teńlemesi ushın

$$AX + XA^* + \sum_{i=1}^{P} B_i XB_i^* = -\text{Y} \quad (3.1.5)$$

Bunda Y bólsa $n\ x\ n$ ólshemli erikli saylap alınǵan simmetriyalı oń anıqlanǵan matritsa .

Sonı bayqaymız, (3.1.1)shi sistemada tosınanlı shámalardıń qalıp qoyıwı (yaǵnıy $\varepsilon = 0$) (3.1.5)shi Silvestr matritsalıq teńlemesi Lyapunov teńlemesine keledi.

Silvestr teńlemesiniń sheshiminiń oń anıqlanǵanlıǵı.

(3.1.5)shi teńleme, Silvestr sızıqlı matritsalıq teńlemeler klassına baylanıslı, (3.1.1)shi sistemanıń sheshiminiń birge teń itimallıq penen ornıqlılıǵınıń analiziniń quralı bolǵan.

Joqarıdaǵı belgilewlerdi saqlap, $B_i(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} B_i$ dep alamız.

$$L(X) = -AX - XA^*, R(X) = \sum_{i=1}^{P} B_i XB_i^* \qquad (3.1.6)$$

Sonlıqtan (3.1.5)shi teńleme (3.1.3) túrge iye boladı hám másele (3.1.6)shı operatorlar tobınıń qaytımlılıq shártinen turadı $M_i = L - \varepsilon R$, (3.1.1) shı talapta qanaaatlandırıwshı.

Meylı $B - n\,x\,n$ ólshemli matritsa, mına bloklı matritsanıń barlıq ǵáressiz baǵanalarınan dúzilgen

$$\beta = \lfloor B_1, \ldots, B_p \rfloor$$

Óz-ózinen anıq, egerde β tolıq rangke iye bólsa, onda $m = n$. Ulıwma jaǵdayda $m \le n$. Al barlıq B_i koeffitsientlerin B arqalı ańlatıp skeletli joyılmaǵa iye bolamız.

$$\beta = B\lfloor C_1 \ldots, C_p \rfloor = BC$$

Bunda C_1 bólsa $m\,x\,n$ ólshemli bloklar, B hám C m tolıq ranglı matritsa.

Al U hám V aperatorlarınıń tásirlerin tomendegishe anıqlaymız

$$U(Z) = BZB^*\left(Z \in C^{mxm}\right), V(X) = Cdiag\{X, \ldots, X\}C^* \quad (3.1.7)$$

Al B matritsasınıń b_i baǵanaların ayırıp hám C_k bloginiń $C_i^{(z)}$ qatarların mına jayılmaǵa iye bolamız, yaǵnıy

$$U_{ij} = b_i b_j^*, V_{ij} = V_j^* V_i, V_i = \begin{bmatrix} C_i^{(1)} \\ \vdots \\ C_i^{(p)} \end{bmatrix}, \; V_{ij}(X) = tr(V_{ij} X)$$

Sonlıqtan, Δ_U hám Δ_V matritsaları bloklı birge teń rangqa iye hám sáykes m ge.Sonlıqtan $rang\Delta_U = m,\ rang\Delta_U = 1$

yaǵnıy C tolıq rangqa iye bólsa, onda $V(X) > 0$ barlıq $X > 0$ ushın. Egerde (L, U) -oń basqarıwshı operatorlar jubı bólsa, yaǵnıy mına teńlemeniń sheshimi

$$-AX - XA^* = BZB^* \quad (3.1.8)$$

bar boladı hám barlıq $Z > 0$ ushın oń anıqlanǵan. Bul jaǵdayda oń basqarılıw mına (A, B) matritsalar jubınıń basqarılıwına alıp kelinedi hám A matritsasınıń gurvitsalılıǵı.

Al (3.1.1)shi hám (3.1.2)shi Teóremalardı qollanıw $W = V \cdot L^{-1} U$ operatorlarınıń spektorlıq qásiyetlerin úyreniwge alıp keledi. Al W operatorlarınıń tásiri dúzilgen V operatorlarınıń tásiri menen sáykes keledi, (3.1.8)shi teńlemeniń sheshiminde .
Bunnan kelip shıǵadı, (3.1.8)shi Lyapunov teńlemesiniń sheshimin dúziwdiń belgiliUsı lıbirge teń itimallıq penen asimptotikalıq ornıqlılıq kriteriyasın paydalanıwǵa jol ashadı.

Tomendegı zárúrli shárt kelip shıǵadı

$$\varepsilon\left(B_1 X B_1^* + \ldots + B_p X B_p^*\right) < Y \quad (3.1.9)$$

Bunda $Y > 0$ berilgen matritsa, $X > 0$ berilgen teńlemeniń sheshimi.

Egerde $rangB = n$ yamasa, eń bolmaǵanda , mına (A, B_i) matritsalar jubı basqarıwshı bólsa, onda (L, R) oń basqarıwshı operatorlar jubı.
Al

$$\varepsilon X < I_n, \; -AX - XA^* = BB^* \quad (3.1.10)$$

(3.1.5)shi teńlemeniń oń anıqlanǵanlıǵınıń bar bolıwınıń jetkilikli shárti ańlatadı. Egerde β ushın skelet joyılma belgili bólsa, ondaUsı ǵan uqsas shárt (3.1.8)shi teńleme menen formulirovkalanadı (Mısalı, $z = I_m$)

Barlıq B_i koeffitsientlerin sklet joyılma túrinde kórsetemiz.

$B_i = E_i F_i$, $rang B_i = rang E_i = rang F_i = r_i$, $i = 1, \dots, p$ bunda E_i hám F_i tolıq ranglı tuwrı múyeshli matritsa $n x r_i$ hám $r_i x n$ ólshemli . sonnı ornatıw qıyın emes, yaǵnıy barlıq $X \geq 0$ ushın mına teńsizlik orınlanatuǵın

$$B_i X B_i^* \leq tr(X) B_i B_i^*, \quad B_i X B_i^* \leq tr\left(F_i X F_i^*\right) E_i E_i^* \quad (3.1.11)$$

Bunnan bılay alıw múmkin

$$\hat{R}(X) = tr(X) BB^*, \; \hat{R}(X) = \sum_{i=1}^{p} tr(V_i X) U_i$$

bunda

$$U_i = E_i E_i^*, \; V_i = F_i^* F_i, \quad i = 1, \dots, p$$

Jetkilikli shártin, joqarıdaǵı nátiyjelerden alınǵan, qısqalıq ushın L^{-1} keri operatorı járdeminde tastıyıqlaymız, oń tárepine sáykes

$$\varepsilon < 1 / tr\left[L^{-1}\left(DD^*\right)\right], \qquad (3.1.12)$$

$$\det(I_k - \varepsilon T_k) > 0, \; T_k = \left\| tr\left[V_i L^{-1}(V_j)\right]\right\|_{ij=1}^{k}, \quad k = \overline{1, p} \quad (3.1.13)$$

$$\varepsilon\rho^* - \mu + \mu\sqrt{\frac{\varepsilon\rho^- - \mu}{\varepsilon\rho^+ - \mu}} < 1, \;\; \min_{i,j} \varepsilon tr\left[V_i L^{-1}\left(U_j\right)\right] \geq \mu \geq 0 \quad (3.1.14)$$

$$\rho^+ = \max_i tr\left[V_i L^{-1}(U_\Sigma)\right], \; \rho^- = \min_i tr\left[V_i L^{-1}(U_\Sigma)\right],$$

$$U_\Sigma = \sum_{j=1}^{p} U_j \quad (3.1.15)$$

$$\varepsilon < 1/\rho^+ \qquad (\mu = 0)$$

Egerde barlıq B_i Ler birlik rangke iye bólsa, onda (3.1.11)shi teńsizliktiń ekinshi gruppası birdeylikke aylanadı. Bul jaǵdayda $R(x) = \hat{R}(x)$ hám (3.1.13)shi teńsizligi (3.1.1)shi sistemanıń sheshiminiń birge teń itimallıq penen asimptotikalıq ornıqlılıq kriteriyasın kórsetedi.

Al (3.1.14)niń jetkilikli shárti (3.1.15)ge qaraǵanda zárúrligine qaraǵanda jaqın, sol jaǵdayda, egerde $T = T_p$ -qatań oń anıqlanǵan bólsa.

Egerde bar F_i kóbeymeler skelet joyılmada $B_i = E_i \cdot F_i$ betlesse hám F_o ge teń bólsa, onda (3.1.13) de barlıq T_k lar birlik rangqa iye boladı. Bul jaǵdayda ornıqlılıqtıń jetkilikli shártine iye bolamız sol $l_i = 1$ zárúrlik

$$\varepsilon < 1/tr\left[V_0 L^{-1}(U_\Sigma)\right] \quad (3.1.16)$$

bunda $V_0 = F_0^* F_0, \quad U_\Sigma = U_1 + \ldots + U_p$.

Usı ǵan uqsas jaǵday $E = \ldots = E_p = E_0$ mına túrde boladı.

$$\varepsilon < 1/tr\left[V_\Sigma \cdot L^{-1}(U_0)\right], \quad (3.1.17)$$

bunda $U_0 = E_0 E_0^*, V_\Sigma = V_1 + \ldots V_p$.

Dara jaǵdayda, (3.1.16) hám (3.1.17) teńsizlikler orınlanadı, egerde sáykes

$$\varepsilon p tr\left|V_0 L^{-1}(U_i)\right| < 1, \quad \varepsilon p tr\left|V_i L^{-1}(U_0)\right| < 1, \quad i = 1, \ldots, p.$$

Ekinshi, úshinshi hám basqa buyrıqlar momentlerin qandiradigan teńlemeler sisteması Itoformulasıdan paydalanıp (3. 3. 8) isletiliwi múmkin.

<u>Mısal. 1.</u> Úshinshi tártipli skalyar standart vinerli protsessli $W_1(t)$ Ito teńlemeler sistemasın qaraymız,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 10 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B_1(\varepsilon) \begin{bmatrix} 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.1.18)$$

Al A matritsası (3.1.18)de gurvitsialı, onnıń menshikli mánisleri

$$\delta(A) = \{-1, -1, -1\}$$

(3.1.1)shi, (3.1.18)shi sistemalar ushın (3.1.5)shi Silvestr teńlemesiniń sheshimi $Y = 21$, mına túrge iye boladı

$$X = \frac{1}{8 - 15000\varepsilon^2} \begin{bmatrix} 8 + 204\varepsilon^2 & 40 - 1020\varepsilon^2 & 200 + 1000\varepsilon^2 \\ 40 - 1000\varepsilon^2 & 408 - 4800\varepsilon^2 & 3040 + 1500\varepsilon^2 \\ 200 + 10000\varepsilon^2 & 3040 - 1500\varepsilon^2 & 30408 \end{bmatrix} \quad (3.1.19)$$

Silvestr kriteriyasınan (3.1.19)shı matritsanıń ońanıqlanǵanlıǵınan kelip shıǵadı, yaǵnıy $X > 0$ sol jaǵdayda, egerde $|\varepsilon| < 0{,}0231$. Bunnan kelip shıǵadı, (3.1.2)Teóremanıń kúshine tiykarlanıp (3.1.1)shi sistemanıń $x^\varepsilon \equiv 0$ sheshimi birge teń itimallıq penen Lyapunov boyınsha asimptotikalıq ornıqlı boladı, sonda tek ǵana sonda, egerde $|\varepsilon| < 0{,}0231$ bólsa.

Mısal. Meylı (3.1.1)shi sistemada matritsalıq koeffitsientler tomendegı strukturaǵa iye bolsın

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}, \qquad B_1(\varepsilon)=\alpha\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}, B_2(\varepsilon)=\beta\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}_{(p-2)} \quad (3.1.20)$$

bunda $\alpha=\sqrt{\varepsilon}$ hám $\beta=\sqrt{\varepsilon}b$-parametrler.

Al A matritsası gurvitsialı, úsh eseli menshikli mániske iye -1 hám $B_1(\varepsilon)$ menen birgelikte tolıq basqarıw jubın dúzedi $\varepsilon\neq 0$ de.

Skelet joyılmadaǵı B_1 hám B_2 kóbeymeler tomendegı túrge iye boladı

$$E_1=\begin{bmatrix}1\,0\\ 0\,1\\ 1\,0\end{bmatrix}, F_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}, E_2=\begin{bmatrix}b\\ 0\\ 0\end{bmatrix}, F_2=[1, 0, 0]$$

Belgilewler kiritemiz $Z=F_1XF_1^*=\|z_{ij}\|^2$, tomendegıge iye bolamız

$$R=UV_i,\ U(z)=E_1ZE_1^*+z_{11}E_2E_2^*, \quad V(X)=Z$$

W operatorınıń tásiri tomendegı túrde anıqlanadı

$$W(Z)=VL^{-1}U(z)=\begin{bmatrix}\left(1+\frac{b^2}{2}\right)z^{11} & \frac{1}{2}(z_{12}-z_{11})\\ \frac{1}{2}(z_{21}-z_{11}) & \frac{1}{2}(z_{11}+z_{22}-z_{12}-z_{21})\end{bmatrix}.$$

Mınanı esapqa alsaq, yaǵnıy $W(\theta)=\rho(w)\theta$, bunda $\theta=\|\theta_{ij}\|^2\geq 0$ bazı bir matritsa, $\theta_{11}\neq\theta$ spektrol radiuske iye bolamız $\rho(w)=1+\dfrac{b^2}{2}$.

EkinshiUsı nısqa tiykarlanıp, (3.1.1)sistema asimptotikalıq ornıqlı birge teń itimallıq penen sol jaǵdayda, egerde mına teńsizlik orınlansa $\rho(w)t1/\varepsilon$. Bunnan kelip shıǵadı, ε ushın maksimal múmkin bolǵan interval tomendegı túrge iye boladı

$$0 \le \varepsilon < \frac{1}{1+\frac{b^2}{2}} \quad (3.1.21)$$

Al b parametriniń tásiri onnıń razmerine óz ózinen anıq. Dara jaǵdayda, $b=0$de (skalyar vinerli protsess) ε bólsa birden asıp ketpeydi.

Egerde $b \to \infty$ da, onda (3.1.21) interval $\varepsilon = 0$ toshka arqalı ańlatıladı. (3.1.21)shi teńsizlikke bılay keliwge boladı, (3.1.5)shi teńleme arqalı.

3.2 Stoxastikalıq sistemanıń ornıqlılıǵı

$$dX(t) = b(t, X)dt + \sum_{r=1}^{k} \sigma_r (r, X) d\varsigma_r(r) \quad \textbf{(3.2.1)}$$

Meylı bılay esaplayıq, yaǵnıy $X(t), b(t, X)$ hám $\sigma_r(t, X)$ bólsa E_ℓ degi vektorlar, $\varsigma_r(t)$ ǵáressiz vinerli protsessler $[16,17]$. Jáne bılay boljayıq, yaǵnıy b hám σ_r bólsa t boyınsha úzliksiz, hám Lipshits shártin qanaaatlandıradı x boyınsha, yaǵnıy

$$\sum_{r=1}^{k} \left|\sigma_r(t, x) - \sigma_r(t, y)\right| + \left|b(t, x) - b(t, y)\right| < B|x - y| \quad \textbf{(3.2.2)}$$

Ayırım jaǵdaylarda bılay boljayıq, yaǵnıy B Lipshits turaqlısı oblastan ǵáressiz, yaǵnıy (3.2.2)shi qatnas $E = \{(t > 0)\} x E_\ell$ orınlı. Bizler tek ǵana $X(t) \equiv 0$ trivial sheshiminiń ornıqlılıq shárti menen shegaralanamız.Usı ǵan sáykes bılay boljaymız, yaǵnıy

$$b(t,0) \equiv 0, \ \sigma_r(t,0) \equiv 0 \quad \textbf{(3.2.3)}$$

Usı ǵan baylanıslı tomendegı Anıqlamanı kiritemiz.

Meylı U -bazıbir oblast $\overline{U}$ -tuyıqlıǵı menen $E = \mathrm{I} \times E_\ell$ de, al $U^{\varepsilon}(0)\{(t, x) : |x| < \varepsilon\}$. Al $V(t, x)$ funksıyası mına klassqa derek dep aytamız

$C_2^0(U)\big(V(t,x)\in C_2^0(U)\big]$, egerde ol eki mártebe x boyınsha úzliksiz differensiallanıwshı bólsa hám t boyınsha bir mártebe barlıq U oblastında, onnan basqa, mınaw bolıwı múmkin, $x=0$ kópligi $\overline{U}\setminus U^{\varepsilon}(0)$ tuyıq kópliginde úzliksiz qálegen $\varepsilon>0$ ushın. Sonlıqtan sonı kútiw tábiyiy, yaǵnıy úlken klasslar jaǵdayında (3.2.1)shi sistemanıń ornıqlılıǵı bolıp, egerde birinshi juwıqlasıw sisteması ornıqlı bólsa

$$dX(t)=\frac{\partial b(t,0)}{\partial x}Xdt+\sum_{r=0}^{k}\frac{\partial\sigma_r(t,0)}{\partial x}Xd\varsigma_r(t) \qquad \textbf{(3.2.4)}$$

Egerde mına jaǵdayda, $\frac{\partial b}{dx}$ hám $\frac{\partial\sigma_r}{\partial x}$ lar t ǵa baylanıslı bolmasa, onda bunıń ushın (3.2.4)shi sistemanıń itimallıǵı boyınsha asimtotikalıq ornıqlılıq jetkilikli.

Tilekke qarsı, ornıqsızlıq shártleri jaǵdayı qıyınraq. Stoxastikalıq sistema ushın, ulıwma aytqanda, Lyapunov hám SHetaevtiń ornıqsızlıq Teóremalarınıń analogi durıs emes. Qatań aytqanda, bunıń sebebi sonnan ibarat, yaǵnıy stoxastikalıq sistema ushın traektoriyası ornıqsızlıq kópliginen shıǵıwı múmkin, tosınnanlı kúshlerdiń tásirinen. Determinirlengen sistema $dx_1/dt=x_1, dx_2/dt=-x_2$ kishi snostı hám kishi diffuziyanı qosıw nátiyjesinde buzıladı

$$\begin{cases} dX_1(t)=\big(X_1+b(X_1,X_2)\big)dt+\sigma(X_1,X_2)d\varsigma_1(t) \\ dX_2(t)=-X_2dt+\sigma(X_1,X_2)d\varsigma_2(t) \end{cases} \qquad \textbf{(3.2.5)}$$

Sonnıń ushın qálegen kishi $\varepsilon>0$ sonı ushın b hám σ funksıyaların tańlap alıw múmkin, mına shártti qanaatlandırıwshı

$$|b(x_1,x_2)|+|\sigma(x_1,x_2)|<\varepsilon|x|$$

yaǵnıy (5)shi sistema pútinley asimptotikalıq ornıqlı boladı.

<u>Mısal. 2.</u> Meylı $V(t,x)$ eki mártebe úzliksiz differensiallanıwshı funksıya x boyınsha hám t boyınsha bir mártebe $I\times U$da, bunda $U\in E_\ell$ shegaralanǵan tuyıq oblast, hám MeylıUsı oblastta

Bazı bir qosımsha nátiyjeler.

Meylı (Ω,U,P) itimallıq keńisligi bolsın, $\mu_t CU$-bólsa, Ω dan alınǵan σ algebra waqıyalarınıń jıyını, hár bir $t\geq 0$ ushın anıqlanǵan, hám sonday, yaǵnıy $\mu_s C\,\mu_t$ egerde $s<t$ bólsa. Meylı $y(t,w), t\geq 0$-tosınnanlı protsess. $My(t,w)$ shekli

matematikalıq kútiliw menen, sonlıqtan $y(t,w)=y(t)-\mu_t$ bólsa hár bir t ushın ólsheniwshi tosınanlı sháma. Al $(y(t,w),\mu_t)$ supermartingal dep ataladı, egerde qálegen $s<t$ ushın $\quad M(y(t)/\mu_s)\le y(s) \quad$ (3.2.6)

Egerde (3.2.6)teńsizlikti teńlik penen almastırsaq, onda martingal Anıqlamasına iye bolamız.

Mısal 1. $\varsigma(t)$ vinerli protsessi martingal bolıp esaplanadı N_t nıń σ algebra sistemasına salıstırmalı, solay etip

$$M(\varsigma(t)/N_s)=M([\varsigma(s)+(\varsigma(t)-\varsigma(s))]/N_s)=\varsigma(s)$$

YAǵnıy martingal bolıp mına ulıwma protsess esaplanadı

$$y(t)=\int_0^t \sigma(s)d\varsigma(s)$$

Mısal.2. Meylı $V(t,x)$ eki mártebe úzliksiz differensiallanıwshı funksıya x boyınsha hám t boyınsha bir mártebe $I\times U$ da, bunda $U\in E_\ell$ -shegaralanǵan tuyıq oblast, hám MeylıUsı oblastta

$$LV(t,x)=\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{b}b_i(t,x)\frac{\partial V}{\partial x_i}\equiv\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k}\left(\sigma_r(t,x),\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\cdot V+\left(b(t,x),\frac{\partial}{\partial x}\right)V\le 0$$

Bılay belgileymiz $\tau(t)=\min(\tau,t)$, bunda τ -bólsa birinshi shıǵıw momenti $U(t)$ traektoriyadan $X(t)$ protsesste, (3.2.6)shi teńleme arqalı anıqlanıwshı. Sonda $y(t)=V(\tau(t),X(\tau(t)))$ supermartingaldı kórsetedi, N_t sistemaǵa qarata

Sonda
$$M[V(\tau(t),X(\tau(t)))/N_t]\le V(s,X(s))$$

Bunnan kelip shıǵadı, yaǵnıy barlıq traektoriyalar ushın, $\tau\ge s$ ten, $X(\tau(s))=X(s)\in U$, , (3.2.6)shi shárt orınlanadı. Barlıq traektoriyalar ushın mına $\tau<s$ shártti qanaatlandırıwshı mına $M(y(t)/N_s)=y(s)$ teńlik orınlı, solay etip bul jaǵdayda $\tau(s)=\tau(t)=\tau$. Egerde LV shárt orınlansa barlıq $x\in E_\ell$ ushın, $t>0$, al $M_{s,x}V(t,X(t))$ bar boladı, yaǵnıy protsess $V(t,X(t))$ supermartingal bolıp esaplanadı.

Bul qásiyet, ulıwma aytqanda, durıs eemes, egerde $LV\le 0$ shárt buzılsa bazıbir kóplikte.

Lemma. 3.2.1. Meylı $V(t,x)$ funksıyası x boyınsha eki mártebe úzliksiz differensiallanıwshı hám t boyınsha bir mártebe $I\times\{U/\Gamma\}$ kóplikte hám $I\times U$

shegeralanǵan, bunda U bólsa E_ℓ degi shegaralanǵan kóplik, $\Gamma \subset U$ bólsa $X(t)$ protsess ushın erisilmegen, (3.2.6) teńleme menen anıqlanǵan.

Meylı $I \times (U \setminus \Gamma)$ oblastında $LV \le 0$ shárti orınlansın. Sonda $V(\tau_U(t), X(\tau_U(t)))$ protsess-supermartingal.

Dalılllew. Endi $\tau_{U,\delta}$ dep $U \setminus U_\delta(\Gamma)$, $\tau_{U,\delta} = \min(\tau_{U,\delta}, t)$ kópligindegi birinshi shıǵıw momentin belgileymiz. Solay etip Γ kópligi erisilmegen, sonda barlıq t ushın $\delta \to 0$ da

$$\tau_{U,\delta}(t) \to \tau_U(t) \quad (3.2.7)$$

Ekinshi jaqtan, ekinshi Mısaldan kórinip turıptı.

$$\mathrm{M}\left(V\left(\tau_{U,\delta}(x), X\left(\tau_{U,\delta}(t)\right)\right)/ N_s\right) \le V\left(\tau_{U,\delta}(s), X\left(\tau_{U,\delta}(s)\right)\right)$$

Usı teńsizlikte $\delta \to 0$da shekke ótsek hám V funksıyasınıń shegaralanǵanlıǵın esaplqa alsaq hám (3.2.7)shini, lemmanıń nátiyjesine iye bolamız.

Lemma3.2. 2. Meylı b hám σ_r koeffitsientleri (1,1) t teńlemeniń (1.3) shártti qanaatlandıradı hám $E = I \times E_\ell$ oblastında (1.2) shárti orınlanadı. Sonda qálegen haqıyqıy $\beta, t \ge s, x \ne 0$ ushın teńsizlik orınlı

$$\mathrm{M}\left|X^{s,x}(t)\right|^{\delta} \le |x|^{\beta} \cdot \exp\{k(t-s)\} \quad (3.2.8)$$

bunda k -turaqlı, tek ǵana ℓ, β baylanıslı hám B turaqlısı (1.2) shártten.

Dalılllew. Al $V(x) = |x|^{\beta}$ funksıyası $|x| > \delta$ oblastında eki mártebe úzliksiz differensiallanıwshı $\delta > 0$ ushın.Usı oblasta Ito formulasın qollanıp tomendegıge iye bolamız

$$Y^{s,x}(\tau_\delta(t)) = Y^{s,x}(s) + \beta \int_s^{\tau_\delta(t)} \left|X^{s,x}(u)\right|^{\beta-2}$$
$$\left[\left(b\left(u, X^{s,x}(u)\right), X^{s,x}(u)\right)du + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\ell} a_{ii}\left(u, X^{s,x}(u)\right)du + \sum_{r=1}^{k}\left(\sigma_r\left(u, X^{s,x}(u)\right), X^{s,x}(u)\right)d\varsigma_r(u)\right] +$$
$$+\frac{1}{2}\beta(\beta-2)\int_s^{\tau_\delta(t)} \left|X^{s,x}(u)\right|^{\beta-u}\left(A\left(u, X^{s,x}(u)\right) \cdot X^{s,x}(u), X^{s,x}(u)\right)du \quad (3.2.9)$$

tomendegıshe belgilengen: τ_δ bólsa $|x| > \delta$, kóplikten shıǵıwdıń birinshi momenti , al $\tau_\delta(t) = \min(\tau_\delta, t)$. Al $Y^{s,x}(\tau_\delta(t))$ tosınanlı sháması matematikalıq kútiliwge iye. Endi

(3.2.9)de matematikalıq kútiliwde esaplap, bazıbir $k = k(\beta, B, \ell)$ ushın tomendegı bahaǵa iye bolamız

$$MY^{s,x}(\tau_\delta(t)) \le |x|^\beta + kM\int_s^{\tau_\delta(t)} Y^{s,x}(u)du \quad (3.2.10)$$

Solay etip $u < \tau_\delta(t)$ ushın $\tau_\delta(u) = u$ qatnası orınlı, onda (3.2.10)den tomendegıge iye bolamız

$$MY^{s,x}(\tau_\delta(t)) \le |x|^\beta + kM\int_s^{\tau_\delta(t)} Y^{s,x}(u)du \le |x|^\beta + k\int_s^t MY^{s,x}(\tau_\delta(u))du$$

Keyingi teńsizlikten Gronuolla-Bellman teńsizliginiń tomendegı bahaǵa iye bolamız

$$M\left|X^{x,s}(\tau_\delta(t))\right|^\beta \le |x|^\beta \exp\{k(t-s)\} \quad (3.2.11)$$

Endi (3.2.6)da $\rho = -1$ dep alıp hám SHebıshev teńsizliginen paydalanıp, tomendegı teńsizlikke iye bolamız

$$P_{s,x}\{(\tau_\delta(t)) < t\} < \frac{\delta}{|x|}e^{k(t-s)}$$

yaǵnıy qálegen $s < t$ ushın

$$P_{s,x}\{\tau_\delta < t\} \to 0, \ \delta \to 0 \text{ da } \quad (3.2.12)$$

Al endi $\delta \to 0$ da (3.1.11)da shekke ótsek hám (3.1.12)ni esapqa alsaq (3.2.8.)ge iye bolamız.

Lemma. 3.2.3. Egerde (3.2.6)shi teńlemeniń koeffitsientleri (3.2.8)shi shártti qanaatlandırsa, hár bir x boyınsha shegaralanǵan oblast (3.2.7) shárt orınlans, al $X^{s,x}(t)$ protsessi regulyarlı bólsa, onda $x = 0$ toshka nedostijima onnıń traektoriyası ushın $x_0 \ne 0$.

Lemma. 3.2.4. Meylı $V(t,x)$ funksıyası $C_2^0((t>0)xU)$ klasqa derek bolsın hám $(t>0)xU$ oblasta shegaralanǵan, bunda U -bólsa baslanǵısh koordinatalar dógeregi, hámUsı oblastta $LV(t,x) \le 0$ Sonda $V(\tau_U(t), X(\tau_U(t)))$ protsessii supermortingal, solay etip $x \in U$ ushın

$$MV(\tau_U(t), X^{s,x}(\tau_U(t))) \le V(s,x)$$

Teórema3.2.1. Egerde $(y(t,w),M_t,t\geq 0)$-oń supermartingal bólsa, onda birge teńitimallıq penen shekli sheek bar boladı $y_\infty = \ell im\, y(t,w)$ Sonlıqtan $\mathrm{M}y_\infty = \ell im_{t\to\infty} \mathrm{M}y(t,w)$

Teórema3.2.2. Egerde $(y(t,w),M_t,t\geq 0)$ martingal bólsa, onda qálegen $k>0$ ushın

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{t_0\leq t\leq T}|y(t,w)|>k\leq\frac{\mathrm{M}|y(T,w)|}{k}\right\}$$

Itimallıq boyınsha ornıqlılıq

Teńlemeniń $X(t,w)$ sheshimi itimallıq boyınsha ornıqlı dep ataladı $t\geq 0$ da, egerde qálegen $S\geq 0$ hám $\varepsilon>0$ ushın

$$\ell im_{x\to 0}\mathrm{P}\left\{\sup_{t>s}\left|X^{s,x}(t)\right|>\varepsilon\right\}=0$$

bólsa.

$V(t,x)$ funksıyası oń anıqlanǵan dep ataladı $x=0$ kópliginiń dógereginde, egerde $V(t,0)=0$ hámUsı dógerekte $V(t,x)>w(x)$ bólsa, sonlıqtan $w(x)>0$ boladı $x\neq 0$ bólsa.

Teórema3.2.3. Meylı $\{t>0\}xU=U_1$ oblastında, $x=0$ tuwrıǵa iye bolǵan úzliksiz oń anıqlanǵan Lyapunov mánisindegi $V(t,x)\in C_2^0(U_1)$ funksıyası bar boladı hám $x\neq 0$ de tomendegı shártti qanaatlandırıwshı

$$LV=\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{i=1}^{\ell}b_i(t,x)\frac{\partial V}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{b}a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\partial x_j}\leq 0$$

Sonda (3.2.6.) teńlemeniń trivial sheshimi itimallıq boyınsha ornıqlı boladı.

Dalılllew**:** r sanın sonday etip saylap alamız, yaǵnıy U_r diń r-dógeregi $x=0$ toshkada óziniń shegarası menen U da jatsın. Endi $V_r=\inf_{x\in UiU_r}V(t,x)$ dep belgileymiz.

Al (3.2.9)shi lemmadan $|x|<r$ ushın tomendegıge teńsizlik orınlı

$$\mathrm{M}V\left(\tau_{U_r}(t),X^{s,x}\left(\tau_{U_r}(t)\right)\right)\leq V(s,x)$$

Usı qatnastan hám SHebıshev teńsizliginen tomendegıge iye bolamız

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{s\le u\le t}\left|X^{s,x}(u)\right|>r\right\}\le\frac{\mathrm{M}V\left(\tau_{U_r}(t),X^{s,x}\left(\tau_{U_r}(t)\right)\right)}{V_r}\le\frac{V(s,x)}{V_r}$$

Endi $t\to\infty$ da shekke ótsek, tomendegıge iye bolamız

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{u\ge s}\left|X^{s,x}(u)\right|>r\right\}>\frac{V(t,x)}{V_r}$$

Solay etip $V(s,0)=0$ hám $V(s,x)$ funksıyası úzliksiz, onda keyingi teńsizlikten Teóremanıń durıslıǵı kelip shıǵadı.

Eskertiw (3.2.6) teńlemeniń $X(t)\equiv 0$ sheshimin $t\ge o$ de itimallıǵı boyınsha teń ólshemli ornıqlı dep ataymız, egerde qálegen $s>0$ de $\mathrm{P}\left\{\sup_{t>s}\left|X^{s,x}(t)\right|>\varepsilon\right\}$ funksıyası $x\to 0$ da nolge umtılsa teń ólshemli $s\ge 0$ de.

Teórema. 3.2.4.. Meylı (3.2.6) teńlemeniń $X\equiv 0$ sheshimi waqıtqa baylanıssız $b\,u\,\sigma_r$ koeffitsientleri menen itimallıǵı boyınsha ornıqlı. Bılay boljayıq, yaǵnıy $x=0$ toshkasınıń dógereginde (3.2.7)shi shárt orınlansın hám aynımaǵanlıq shárti

$$\sum_{i,j=1}^{\ell}aij\lambda_i\lambda_j>m.(x)\sum_{i=1}^{\ell}\lambda_i^2 \qquad (3.2.13)$$

bunda $m(x)>0$ boladı, $x\ne 0$ de hám úzliksiz.

Sonda $x\ne 0$ toshkasınıń dógereginde eki mártebe úzliksiz differensiallanıwshı $V(x)$ oń anıqlanǵan funksıyası bar boladı, $LV=0$ bolatuǵın.

Dalıllew: Meylı $U_r=\{|x|<r\}$ bólsa $x=0$ toshkasınıń jetkilikli kishi dógeregi. Al $u_\delta(x)$ arqalı $U_r\setminus U_\delta$ oblastındaǵı sheshimdi belgileymiz máseleniń

$$Lu=0;u\Big|_{|x|=r}=1;u\Big|_{|x|=\delta}=0$$

yaǵnıy

$$u_\delta(x)=\mathrm{P}\left\{\left|X^{x}\left(\tau_{r,\delta}\right)\right|=r\right\}$$

bunda $\tau_{r,\delta}$ bólsa $\{|x|=r\}U\{|x|=\delta\}$ kópligindegi birinshi jetiskenlik momenti.

Óz-ózinen anıq, yaǵnıy L izbe-izlik $u_\delta(x)$.

Funksıyanıń $\delta\to 0$ monoton ósedi. Onnıń shegi $V(x)$ bólsa, olda L-garmonikalıq funksıyaı kórsetedi.

Endi τ_0 arqalı nol toshkası jetiskenlik momentiniń traektoriya protsessin belgileymiz. Uaqıyalar arasındaǵı qatnaslardan

$$\left\{\sup_{t>0}\left|X^{\varepsilon}(t)\right|\geq r\right\}\subset\bigcup_{\delta>0}\left\{\left|X^{\varepsilon}\left(\tau_{r,\delta}\right)\right|=r\right\}\cup\{\tau_0<\infty\},$$

$$\bigcup_{\delta>0}\left\{\left|X^{\varepsilon}\left(\tau_{r,\delta}\right)\right|=r\right\}\subset\left\{\sup_{t\geq 0}\left|X^{x}(t)\geq r\right\}$$

hám 2.3. lemmodan mına teńsizlik kelip shıǵadı

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{t>0}\left|X^{x}(t)\right|\geq r\right\}=\lim_{\delta\to 0}\mathrm{P}\left\{\left|X^{x}\left(\tau_{r,\delta}\right)\right|=r\right\}=V(x)$$

Usı teńsizlikten hám $X\equiv 0$ sheshimnen itimallıq boyınsha ornıqlılıq $V(x)\to 0$ eger $x\to 0$ kelip shıǵadı. Maksimumnıń kúsheytirilgen prinsipinen $u\delta(x)$ funksıyasınıń oń ekenligi kelip shıǵadı, ol bólsa, $V(x)$ta eger $|x|>\delta_1>\delta$. Solay etip , $V(x)$ funksıyası Lyapunov mánisi boyınsha oń anıqlanǵan, al $LV=0$

Mısal. Meylı $X(t)$-bir ólshemli protsess, tomendegı teńleme menen jazılǵan

$$dX(t)=bXdt+\sigma Xd\varsigma(t) \qquad (3.2.14)$$

bunda b hám σ turaqlılar. Differensialı tuwındılı operator protsess ushın mına túrge iye boladı.

$$L=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+bx\frac{\partial}{\partial x}.$$

Egerde $b<\sigma^2_{/2}$ bólsa, onda $X(t)\equiv 0$ sheshim (3.2.14) sistemanıń ornıqlı, solay etip $V(x)=|x|^{1-2b/\sigma^2}$ Teóremanıń shártin qanaatlandıradı. Al $b\geq 0$ de bul funksıya nolde tuwındıǵa iye emes. Sonnı ańsat kórsetiw múmkin, elliptikalıq teńleme ushın maksimum prinsipine tiykarlanıp, yaǵnıy qálegen $V_1(x)$ funksıyası ushın sonday, yaǵnıy $V_1(0)=0, V_1(\varepsilon)\geq\delta,$ al $0<x<\varepsilon$ oblastında mına qatnas orınlanadı $V_1(x)>\delta((x)/|\varepsilon|^{1-2b/\sigma^2}$

Itimallıǵı boyınsha asimtotikalıq ornıqlılıq hám ornıqsızlıq.

(3.2.1)shi teńlemeniń $X(t)\equiv\theta$ sheshimi itimallıǵı boyınsha asimptotikalıq ornıqlı dep ataladı, egerde ol itimallıǵı boyınsha ornıqlı bólsa hám onnan basqa, tomendegı qatnas orınlı bólsa

$$\underset{x\to 0}{\ell im}\,\mathrm{P}\left\{\underset{t\to\infty}{\ell im}\,X^{s,x}(t)=0\right\}=1 \qquad (3.2.15)$$

Bul paragrafta jiyi bılay boljaymız, yaǵnıy tomendegı orınlanıwı kerek D shárti: (3.2.15)teńlemeniń sheshimi, $\varepsilon<|x|<r$ oblastta baslanatuǵın, shekli waqıt aralıǵında birge teń itimallıq penen shegaraǵa shıǵatuǵın jetkilikli kishi r hám $\varepsilon>0$ qanday bolıwına qaramastan

D shárti orınlanadı, egerde $0<|x|<r$ oblastında $V(t,x)\in C_2^0\left(\{t>0\}x\cup_r\right)$ funksıyası bar bólsa, yaǵnıy qálegen x ushın

$$W(t,x)\geq 0,\ LW(t,x)<C_\varepsilon<0,\ e\varepsilon ep\ |x|>\varepsilon \quad (3.2.16.)$$

Gezektegi Teóremada $\cup\in E_\ell$ koordinat basınıń bazibir dógeregi.

<u>Teórema. 3.2.5 </u> Meylı oń anıqlanǵan, sheksiz kishi shámaǵa iye $V(t,x)\in C_2^0\left(\{t>0\}x\cup\right)$ funksıyası bar bolsın hám $LV\leq 0$ shártin qanaatlandırsın. Meylı, bunnan basqa, D shárti orınlansın. Sonda $X(t)\equiv 0$ teńlemeniń sheshimi itimallıǵı boyınsha asimptotikalıq ornıqlı.

Dalılllew. (3.2.18) lemmadan kelip shıǵadı, yaǵnıy $V\left(\tau_\cup(t),X^{s,x}\left(\tau_\cup(t)\right)\right)$ tosınnanlı protsessii supermartingaldı kórsetedi.Usı dan hám (3.2.15) Teóremadan birge teń itimallıq penen shekke iye bolamız

$$\underset{t\to\infty}{\ell im}V\left(\tau_U(t),X^{s,x}\left(\tau_U(t)\right)\right)=\varsigma \quad (3.2.17.)$$

Endi B_x arqalı $X^{s,x}(t)$ traektoriyalarınıń kópligin belgileymiz. Solay etip V funksıyası 3.2.15 Teóremanıń shártlerin qanaatlandıradı, onda $X(t)\equiv 0$ sheshim itimallıǵı boyınsha ornıqlı, hám bunnan kelip shıǵadı

$$\mathrm{P}\left(B_x\right)\to 1 \text{ dı } x\to 0 \text{ da } (3.2.18)$$

D shártten, yaǵnıy B_x kópligindegi barlıq traektoriyalardan, nol itimallıqtaǵı traektoriyalar kópliginen basqa, mına qatnas orınlı $\inf\limits_{t>0}\left|X^{s,x}(t)\right|=0$, ol egerde (3.2.17) lemmanı esapqa alsaq, onda júdá kúshlirek qatnasqa iye bolamız.

$$\frac{\ell im}{t\to\infty}\left|X^{s,x}(t)\right|=0$$

Solay etip V funksıyası joqarı tártipli shekke iye boladı, onda $\lim_{t \to \infty} V(t, X^{s,x}(t)) = 0$.

Biraq (3.2.17) baylanıslı barlıq traektoriyalar ushın B_x kópligindegi shekke iye bolamız

$$\lim_{t\to\infty} V\left(\tau_U(t), X^{s.x}(\tau_U(t))\right) = \lim_{t\to\infty} V\left(t, X^{s,x}(t)\right)$$

Bunnan hám $V(t,x)$ funksıyasınıń oń anıqlanǵanlıǵınan B_x traektoriyasınan mına teńlikke iye bolamız

$$\lim_{t\to\infty} |X(t)| = 0$$

Usı qatnastan hám (3.2.18)ten Teóremanıń durıslıǵı kelip shıǵadı.

<u>Teórema</u> 3.2.6 Meylı $V(t,x) \in C_2^0(\{t>0\} x U_r)$ funksıyası bar bolsın, mına shártlerdi qanaatlandırıwshı

$$LV \le 0 \text{ eger } x \in U_r,\ x \ne 0 \quad (3.2.19)$$

$$\lim_{x\to 0} \inf_{t>0} V(t,x) = \infty \qquad (3.2.20)$$

Bılay boljayıq, yaǵnıy D shárti orınlansın. Sonda $X(t) \equiv 0$ sheshim (3.2.15) teńlemeniń itimallıǵı boyınsha ornıqsız. Bunnan,Usı jaǵdayda waqıya

$$\left\{\sup_{t>0} \left|X^{s,x}\right|(x)| < r\right\}$$

barlıq $s>0, x \in U_r$ ushın nolge teń itimallıqqa iye.

<u>Dálilew.</u> Endi $\tau_{r,\varepsilon}$-arqalı $\{|x| = r\} \cup \{|x = \varepsilon\}$, $\tau_{r,\varepsilon}(t) = \min(\tau_{r,\varepsilon} t)$ kópliginiń jetiskenligin belgileymiz. Al $U_r \setminus U_\varepsilon$ oblastta barlıq $\varepsilon < r$ ler ushın (3.2.19) den hám lemmadan mına qatnas

$$MV\left(\tau_{r,\varepsilon})(t), X^{s,x}\left(\tau_{r,\varepsilon}(t)\right)\right) \le V(s,x)$$

Endi $t \to \infty$ da shekke ótsek hám D shártin esapqa alsaq, mınaǵan iye bolamız yaǵnıy

$$MV\left(\tau_{r,\varepsilon}) X^{s,x}\left(\tau_{r,\varepsilon}(t)\right)\right) \le V(s,x)$$

SHebıshev teńsizliginen tomendegı bahaǵa iye bolamız.

$$\inf_{|x|<\varepsilon, t>0} V(t,x) \mathrm{P}\left\{\sup_{0<t<\tau^\varepsilon} \left|X^{s,x}(t)\right| < r\right\} < V(s,x)$$

bunda τ^ε -bólsa $|x| = \varepsilon$ kópliginde erisilgen birinshi moment

<u>Eskertiw</u>. Ornıqsızlıqtıń tomendegıge jetkilikli shártin alıwǵa boladı.

1) (3.2.15.) teńlemeniń $X(t)\equiv 0$ sheshimi ornıqsız egerde $\{\varepsilon t>0\}xU_r$ oblastında (3.2.19), (3.2.20) hám (3.2.15) shártleri orınlansa.

2) (3.2.15) teńlemeniń $X(t)\equiv 0$ sheshimi ornıqsız, egerde (3.2.20) shárt orınlansa hám $\sup\limits_{s<|x|<r} LV<0$ shárti qálegen $\varepsilon>0$ ushın.

Anıqlama. (3.2.15) teńlemeniń $X(t)\equiv 0$ sheshimi pútkilley (asimtotikalı) ornıqlı dep ataladı, egerde ol itimallıǵı boyınsha ornıqlı bólsa hám onnan basqa, barlıq s,x lar ushın

$$\mathrm{P}\left\{\lim_{t\to\infty} X^{s,x}(t)=0\right\}=1$$

Teórema-3.2.7. (3.2.15) teńlemeniń $X(t)\equiv 0$ sheshiminiń pútkilley ornıqlılıǵınıń jetiskenligi , yaǵnıy ol itimallıǵı boyınsha teń ólshemli ornıqlı bolıwı kerek, onnan basqa, $X(t)$ protsessii $|x|<\varepsilon$ oblasta qálegen $\varepsilon>0$ ushın qaytımlı bolıwı kerek.

Dalılllew. Solay etip $X(t)\equiv 0$ sheshim itimallıǵıboyınsha teń ólshemli ornıqlı bólsa, onda qálegen $\varepsilon>0$ ushın $\delta>0$ sháması bar bolıp, yaǵnıy

$$\sup_{\varepsilon>0,|y|<\delta} \mathrm{P}\left\{\sup_{t>s}\left|X^{s,y}(t)\right|>\varepsilon\right\}<\varepsilon$$

τ_0 arqalı $|x|\le\delta$ kópliginiń birinshi jetiskenlik momentin belgileymiz Markov protsessiniń qásiyetine tiykarlanıp hám $\delta>0$ sonday etip alıp, yaǵnıy $|x|>\delta$ da, tomendegige iye bolamız.

$$\mathrm{P}\left\{\overline{\lim_{t\to\infty}}\left|X^{s,x}(t)\right|>\varepsilon\right\}=\int_{u=s}^{\infty}\int_{|y|=\delta}\mathrm{P}\left\{\tau_\delta\in du, X^{s,x}(\tau_\delta)\in dy\right\}\mathrm{P}\left\{\overline{\lim_{t\to\infty}}\left|X^{u,y}(t)\right|>\varepsilon\right\}\le\int_{u=s}^{\infty}\int_{|y|=\delta}\mathrm{P}\left\{\tau_\delta\in du, X^{s,x}(\tau_\delta)\in dy\right\}$$

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{t>u}\left|X^{u,y}(t)\right|>\varepsilon\right\}\le\varepsilon$$

Usı teńsizlikten Teóremanıń durıslıǵı kelip shıǵadı.

Teórema-3.2.8. (3.2.15) teńlemeniń $X(t)\equiv 0$ sheshimi pútkilley ornıqlı bolıwı ushın, sonday bir oń anıqlanǵan $V(t,x)\in C_2^0(E)$ funksıyasınıń bar bolıwı jetkilikli, shekisz kishi joqarı shekke iye bolıwı kerek, yaǵnıy LV funksıyası teris anıqlanǵan bolıwı kerek, sonlıqtan

$$\inf_{t>0} V(t,x)\to\infty \text{ dı } |x|\to\infty$$

Teórema-3.2.9. (3.2.15) teńlemeniń $X(t) \equiv 0$ sheshimi pútkilley ornıqlı bolıwı ushın, tomendegı shártlerdiń orınlanıwı jetkilikli.

1) $X(t)$ protsessi regulyarlı.

2) Sonday bir $V_1(t,x) \in C_2^0(E)$ teris emes funksıyası bar boladı, yaǵnıy LV_1 funksıyası teris anıqlanǵan.

3) Sonday bir sheksiz kishi shekke iye $V_2(t,x) \in C_2^0(E)$ funksıyası bar boladı, oń anıqlanǵan, yaǵnıy $LV_2 \leq 0$

Mısallar. Bir ólshemli protsessti qaraymız, E_1 de Ito stoxastikalıq differensial teńleme menen berilgen

$$dX(t) = b(t,X)dt + \sigma(t,X)d\varsigma(t) \qquad (3.2.21)$$

Onnıń tuwındılı differensial operatorı tomendegı túrde boladı

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + b(t,x)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (3.2.22)$$

Tomendegıshe boljaymız, yaǵnıy $x = 0$ toshkasınıń dógereginde tomendegı joyılma orınlı

$$b(t,x) = b(t)x + 0(|x|);\ \sigma(t,x) = \sigma(t)x + 0(|x|) \qquad (3.2.23)$$

Bunda $b(t)$ hám $\sigma(t)$ funksıyaları shegarlanǵan.

Meylı bazibir $\varepsilon > 0, k > 0$ hám barlıq $t > 0$ mına shártler orınlanadı.

$$\int_0^t \left[b(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2} + \varepsilon \right] ds < k \qquad (3.2.24)$$

Sonda járdemshi funksıya

$$V_1(t,x) = |x|^\gamma \cdot \exp\left\{ -\gamma \int_0^t \left(b(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2} + s \right) ds \right\} = |x|^\gamma V(t)$$

jetkilikli kishi $\gamma > 0$ ushın Teóremanıń barlıq shártlerin qanaatlandıradı. Haqıyqatında da $V_1(t,x)$ funksıyasınıń oń anıqlanǵanlıǵı (3.2.24)den kelip shıǵadı. Ekinshi tárepinen (3.2.22) hám (3.2.16)ge tiykarlanıp tomendegıge iye bolamız

$$LV_1(t,x) = \gamma |x|^\gamma V(t)\left[-\varepsilon + \frac{1}{2}\gamma\sigma^2(t) \right] + 0(|x|^\gamma).$$

Sonlıqtan $\gamma < |x|^{\gamma} \sup \sigma^2(t)$ da $LV_1(t^{\gamma} x)$ funksıyası teris anıqlanǵan, jetkilikli kishi $x = 0$ toshkasınıń dógereginde. Bunnan kelip shıǵadı, $X \equiv 0$ sheshim (3.2.24)shi shárttiń orınlanıwında itimallıǵı boyınsha ornıqlı.

Meylı bılay boljayıq, yaǵnıy bazibir $\varepsilon > 0, k > 0$ de hám barlıq $t > 0$ de mına shárt orınlanadı

$$\int_0^t \left[b(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2} - \varepsilon \right] ds > -k \qquad (3.2.25)$$

Bul jaǵdayda járdemshi funksıya

$$V_2(t,x) = -\ell n|x| + \int_0^t \left[b(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2} - \varepsilon \right] ds$$

(3.3.21) shártti qanaatlandıradı. Bunnan basqa, bul jaǵdayda

$$LV_2(t,x) \le -\varepsilon + 0(1)$$

Qaralıp atırǵan jaǵdayda linerizatsiyalanǵan sistemanıń ornıqlılıǵı

$$dX(t) = b(t)Xdt + \sigma(t)Xd\varsigma(t)$$

(3.2.15) sistemanıń ornıqlılıǵın óziniń ishine aladı. Ulıwma jaǵdayda bulUsı lay emes Al (3.2.19) shárti sonnı qanaatlandıradı, dara jaǵdayda, (3.2.15) sistema oń $b(s)$ funksıyası menen, egerde $b(s) - \sigma^2(s)/2$ teris turaqlıdan kishi bólsa. Solay etip, ornıqsız sistema $dx/dt = b(t,x)$ stobilizerlengen bolıwı múmkin $\sigma(t,x)d\varsigma(t)$ stoxastikalıq aǵzanı kiritiw menen, egerde shawqımnıń inteksivligi $\sigma^2(t,x)$ jetkilikli kishi bólsa Mısalı, turaqlı koeffitsientli sızıqlı $dX = bXdt + \sigma Xd\varsigma(t)$ sistema $b < \frac{\sigma^2}{2}$ ornıqlı bólsa. Keyingi teńlemeni mına túrde jazıp

$$X = (b + \sigma\varsigma)X \qquad (3.2.26)$$

alınǵan nátiyjeni bılay aytıw múmkin.

3.3 Eksponensial p-ornıqlılıq hám q-ornıqsızlıq

Teńlemeniń $X(t)\equiv 0$ sheshimi

$$dX(t)=b(t,X)dt+\sum_{r=1}^{k}\sigma_r(t,X)d\varsigma_r(t) \quad (3.3.1)$$

E_ℓ de bılay aytıladı [17].

1) r-ornıqlı $(p>0), t\geq 0$ de, egerde

$$\sup_{|x|<\delta, t\geq 0} M\left|X^{s,x}(t)\right|^p \to 0,\ \delta\to 0 \quad (s\geq 0)$$

2) asimptotikalı r-ornıqlı, egerde al r-ornıqlı hám, bunnan basqa, $\mathrm{M}\left|X^{s,x}(t)\right|^p \to 0,\ t\to\infty$

3) eksponensial r-ornıqlı dep ataladı, egerde bazibir oń turaqlı A hám α

$$\mathrm{M}\left|X^{s,x}(t)\right|^p \leq A|x|^p \cdot \exp\{-\alpha(t-s)\}. \quad (3.3.2)$$

Teórema. 3.3.1. (3.3.1) sistemanıń trivial sheshiminiń eksponensial r-ornıqlı bolıwı ushın $t\geq 0$ de, $V(t,x)$ funksıyasınıń bar bolıwı jetkilikli $C_2^0(E)$ klassqa derek bolǵan hám bazibir turaqlı k_1,k_2,k_3 tomendegı teńsizliklerdi qanaatlandırıwshı

$$K_1|x|^p \leq V(t,x)\leq k_2|x|^p \quad (3.3.3)$$

$$LV(t,x)\leq -k_3|x|^p \quad (3.3.4.)$$

Dálillew. (3.3.3),(3.3.4) shártler $X(t)$ protsessiniń regulyarlıǵı ushın jetkilikli, solay etip $V(t,x)$ funksıyası Teóremanıń shártlerin qanaatlandıradı.Usı Teóremadan kelip shıǵadı, yaǵnıy $\mathrm{M}V(t,X^{s,x}(t))$ bólsa barlıq $t>s$ ler ushın bar boladı. Mına $V(t,X^{s,x}(t))-V(s,x)$ ayırmanı Ito formulası arqalı ańlatamız, matematikalıq kútiliwin esaplap, hám (3.3.3),(3.3.4) shártti paydalanıp, mına teńlikke iye bolamız

$$MV(t,X^{s,x}(t))-V(s,x)=\int_s^t MLV(u,X^{s,x}(u))du$$

Usı teńlikti t boyınsha differensiallap hám (3.3.3), (3.3.4) esapqa alıp mınanı tabamız $\frac{d}{dt}MV(t,X^{s,x}(t))\leq -\frac{k_3}{k_2}MV(t,X^{s,x}(t))$

Bunnan bahaǵa kelip shıǵadı

$$MV\left(t, X^{s,x}(t)\right) \le V(s,x)\exp\left\{-\frac{k_3}{k_2}(t-s)\right\}$$

Usı bahadan hám (3.3.3) ten (3.3.2) kelip shıǵadı.

Teórema dálillenedi.

Teórema. 3.3.2 Egerde (3.3.1) sistemanıń $X(t) \equiv 0$ sheshimi eksponensial r-arqalı bólsa, al b hám σ koeffitsientleri x boyınsha shegaralanǵan úzliksiz tuwındılarǵa iye bólsa ekinshi tártipli , onda $V(t,x) \in C_2^0(E)$ funksıyası bar bólsa, (3.3.3), (3.3.4) teńsizliklerdi qanaatlandırıwshı hám bazibir $k_4 > 0$

$$\left|\frac{\partial V}{\partial x_i}\right| < k_4 |x|^{p-1}, \left|\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\right| < k_4 |x|^{p-2} \qquad (3.3.5)$$

Dálillew. Endi mına funksıyanıń

$$V(t,x) = \int_t^{t+T} M\left|X^{t,x}(u)\right|^p du \quad (3.3.6)$$

Teóremanıń barlıq shártlerin qanaatlandıratuǵının kórsetemiz, $T > 0$ saylap alıwda. Haqıyqatındada , (3.3.2) ge tiykarlanıp

$$V(t,x) \le \int_t^{t+T} A|x|^p \exp\{-\alpha(u-t)\}du = k_1|x|^p$$

Solay etip b hám σ_r koeffitsientleri x_i boyınsha shegaralanǵan dara tuwındılarǵa iye bólsa, al $\sigma_r(t,0) = 0,\ b(t,0) = 0$ onda mına baha orınlı

$$|a_{ij}(t,x)| < k_5|x|^2;\ |b_i(t,x)| < k_5|x|$$

Bunnan kelip shıǵadı, yaǵnıy

$$\left|L\left(|x|^p\right)\right| < k_6|x|^p \qquad (3.3.7)$$

Endi $|x|^p$ funksıyaǵa Ito formulasın qollanıp hám (3.3.7)ni paydalanıp, mınaǵan iye bolamız

$$M\left|X^{t,x}(t+T)\right|^p - |x|^p = \int_t^{t+T} ML\left(\left|X^{t,x}(u)\right|^p\right)du \ge -k_6 \int_t^{t+T} M\left|X^{t,x}(u)\right|^p du = -k_6 V(t,x)$$

Endi T saylap alıp, mına shárt orınlanatuǵın etip

$$M\left|X^{t,x}(t+T)\right|^p < \frac{1}{2}|x|^p \quad (3.3.8)$$

bunnan mına teńsizlikke iye bolamız $V(t,x) > |x|^p / p(2k_6)$. Al (3.3.3) qatnas dálillenedi. $V(t,x)$ funksıyasınıń tegisligi talap etilgen hám (3.3.4) qatnastı alamız. Aqırında tomendegı bahaǵa iye bolamız

$$\left|\frac{\partial V(t,x)}{\partial xi}\right| = \int_t^{t+T} \frac{\partial}{\partial x_i} M\left|X^{t,x}(u)\right|^p du \le \int_t^{t+T} k_1|x|^{p-1} \cdot \exp\{k_2(u-t)\}du = k_1|x|^{p-1}$$

Lemma 3.3.1. Meylı $b(t,x), \sigma_r(t,x)$ koeffitsientleri 3.3.2 Teóremanıń shártlerin qanaatlandırsın, sonlıqtan

$$\int_s^{\infty} M\left|X^{s,x}(t)\right|^p dt < \infty \quad (3.3.9)$$

Sonda

$$\lim_{t\to\infty} M\left|X^{s,x}(t)\right|^p = 0 \quad (3.3.10)$$

Dalılllew Bazibir turaqlı $k > 0$ ushın teńsizlik orınlı

$$\left|M\left|X^{s,x}(t+h)\right|^p - M\left|X^{s,x}(t)\right|^p\right| < k\int_t^{t+h} M\left|X^{s,x}(u)\right|^p du$$

Solay etip,

$$\left|\frac{\partial}{\partial t} M\left|X^{s,x}(t)\right|^p\right| \le kM\left|X^{s,x}(t)\right|^p \quad (3.3.11)$$

Al (3.3.9) hám (3.3.11), kelip shıǵadı (3.3.10) qatnas

Endi q-ornıqsızlıq túsinigin úyrenemiz.

(3.3.1) sistemanıń trival sheshimi q-eksponensial ornıqsız dep ataladı, egerde bazibir oń A hám α turaqlısı ushın

$$M\left|X^{s,x}(t)\right|^{-q} < A|x|^{-q}\exp\{-\alpha(t-s)\}$$

Al q asimtotikalıq ornıqsızlıqtan bazibir $q > 0$ ushın itimallıǵı boyınsha ornıqsızlıq kelip shıǵadı, solay etip SHebıshev teńsizliginen qálegen $R > 0$ ushın.

$$\mathrm{P}\left\{X^{s,x}(t) < R\right\} < R^q \cdot M\left|X^{s,x}(t)\right|^q$$

Teórema 3.3.3 Eksponensial q-ornıqsızlıqtan (3.3.1) sistemanıń $X(t)\equiv 0$ sheshimi $t\geq 0$ de $V(t,x)$ funksıyasınıń bar bolıwı jetkilikli, $C_2^0(E)$ klassqa derek hám mına teńsizliklerdi qanaatlandırıwshı

$$k_1|x|^{-q}\leq V(t,x)\leq k_2|x|^{-q};\ LV(t,x)\leq -k_2|x|^{-q} \quad (3.3.12)$$

Teórema 3.3.4. Egerde b hám σ_r koeffitsientleri ekinshi tártipli x boyınsha úzliksiz tuwındılarǵa iye bólsa, al (3.3.1) sistemanıń $X(t)\equiv 0$ sheshimi eksponensial q-ornıqsız, onda $V(t,x)$ funksıyası bar boladı (3.3.12) teńsizlikleridi hám mına teńsizliklerdi qanaatlandırıwshı

$$\left|\frac{\partial V}{\partial x_i}\right|\leq k_4|x|^{-q-1};\quad \left|\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\right|< k_4|x|^{-q-2};$$

Teórema 3.3.5 Egerde 3.3.1 Teóremanıń shártleri orınlansa, onda sonday bir $\gamma>0$ turaqlısı bar boladı, yaǵnıy qálegen $x\in E_\ell$, $s\geq s$ bólsa birge teń itimallıq penen mına qatnas $\left|X^{s,x}(t)\right|<K_{s,x}\cdot \ell^{-\gamma t}$ orınlı. Sonlıqtan $K_{s,x}$ tosınanlı sháma shekli derlik.

Dálillew. Mına

$$W(t,x)=V(t,x)\exp\left\{\frac{k_3 t}{k_2 t}\right\}$$

Funksıyası ushın (3.3.3) hám (3.3.4) shártten $x\neq 0$ de mına teńsizlik kelip shıǵadı

$$LW=\frac{k_3}{k_2}\exp\left\{\frac{k_3 t}{k_2 t}\right\}V+\exp\left\{\frac{k_3 t}{k_2 t}\right\}LV\leq 0$$

Bunnan kelip shıǵadı, $W\left(t,X^{s,x}(t)\right)$ protsessi supermortingal. Ol oń, barlıq s,x ler ushın onda shekli shek bar boladı $W(t,X^{s,x}(t))$ yaǵnıy $t\to\infty$. Bunnan

$$\sup_t W(t,X^{s,x}(t))=A_{s,x}<\infty$$

Birge teń itimallıq penen. Sonlıqtan

$$V\left(t,X^{s,x}(t)\right)\leq A_{s,x}e^{\gamma t}$$

Bunnan, (3.3.3) shártti esapqa alsaq, Teóremanıń nátiyjesine iye bolamız

.

Juwmaq

Bul pitkeriu kanigelik jumısında tomendegı tiykarǵı nátiyjeler alınadı.

1. Turaqlı koeffitsientli sızıqlı stoxastikalıq differensial teńlemesi qaraladı. Lyapunov funksıyasın kvadratlı kóriniste alıp sızıqlı stoxastikalıq sistema ushın baha alınadı. Baslanǵısh qozdırıwdı bahalaw qaraladı. Waqıt boyınsha ótiw protsessii kórsetiledi

2. Sızıqlı stoxastikalıq sistemanıń ornıqlılıǵın izertlew máselesi matritsalıq Lyapunov-Silvestr teńlemesin sheshiwge alıp kelinetuǵın kórsetiledi.

3. Sızıqlı stoxastikalıq sistemanıń baslanǵısh qozdırıw oblastın bahalaw kórsetiledi.

4. Optimal Lyapunov funksıyasınıń algoritmin tabıw qaraladı. Tuwındını parametrizatsiyalaw algoritmi hám funksıyanı parametrizatsiyalaw algoritmi.

5. Sızıqlı stoxastikalıq sistemada waqıt boyınsha protsessin optimallastırıw máselesi qaraladı. Optimallastırıw máselesi qaraladı. Optimallastırıw máselesiniń sheshiminiń sistemasınıń túrine baylansılılıǵı kórsetiledi.

6. Optimizatsiyalaw algoritmleri keltiriledi. Nur boyınsha sozıw algoritmi hám menshikli vektor boyınsha sozıw algoritmi.

7. Sızıqlı stoxastikalıq sistemanıń sheshiminiń ornıqlılıq máselesinde Silvestr-Lyapunov matritsalıq teńlemesi qollanılatuǵını kórsetiledi.