

**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС
ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ**

ТОШКЕНТ МОЛИЯ ИНСТИТУТИ



ОЛИЙ ВА АМАЛИЙ МАТЕМАТИКА КАФЕДРАСИ

**ИҚТИСОДЧИЛАР УЧУН МАТЕМАТИКА
фани**

“Лагранж кўпайтувчилар методи” мавзусидан ўқув-методик қўлланма

А.Р.Хашимов

Тошкент-2018

Кириш

Иқтисод йўналишидаги илмий тадқиқотчилар ва талабалар учун актуал муаммолардан бири “Иқтисодиётда математик методлар” курсида ўрганиладиган оптималлаштириш методларини амалий татбиқларидан биридир. Ушбу қўлланмада чекли ўлчовли фазоларда оптималлаштириш масалаларида, яъни $\mathbb{R}^n$ фазонинг қисм тўплamlарида берилган функциянинг экстремал қийматларини топишда Лагранж кўпайтувчилари методидан фойдаланиш ёритиб берилади.

1. ОПТИМАЛЛАШТИРИШ МАСАЛАЛАРИ

Ω – тўпламда $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ функция берилган бўлсин.

1-таъриф. Агар $a \in \Omega$ нуктада ихтиёрий $x \in \Omega$ нукта учун $f(x) \leq f(a)$ ($f(x) \geq f(a)$) тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда a нукта f функциянинг *максимум (минимум)* нуктаси дейилади.

Агарда тенгсизлик $f(x) < f(a)$ ($f(x) > f(a)$) $a \neq 0$ кўринишда бўлса, у ҳолда a нукта f функциянинг *қатъий максимум (қатъий минимум)* нуктаси дейилади.

f функциянинг максимум (минимум) нуктадаги қиймати унинг *максимуми (минимуми)* деб аталади. Функциянинг максимум ёки минимумлари унинг экстремумлари максимум ёки минимум нуталари эса унинг экстремум нукталари деб аталади.

Функция экстремумини ва у экстремумга эришадиган экстремум нукталарни топиш оптималлаштириш масаласи деб аталади ва у қуйидаги кўринишларда ёзилади:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \rightarrow \text{extr} \\ x \in \Omega \end{array} \right., \left\{ \begin{array}{l} f(x) \rightarrow \max, \\ x \in \Omega \end{array} \right., \left\{ \begin{array}{l} f(x) \rightarrow \max, \\ x \in \Omega \end{array} \right. .$$

Бу ерда $f(x)$ мақсад функцияси, Ω аниқланиш соҳаси деб аталади.

Қуйидаги теорема функциянинг экстремуми мавжуд бўлиши учун етарлилик шарти деб аталади.

1-теорема (Вейерштрасс). Агар Ω – компакт бўлиб, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ – узлуксиз функция бўлса, у ҳолда функция ўзининг максимуми ва минимумига Ω тўпламда эришади.

Бу теорема функция экстремумини топиш методини бермайди. Шу сабабли

$$\begin{cases} f(x) \rightarrow \text{extr} \\ x \in \Omega, \Omega \subset \mathbb{R}^n \end{cases}.$$

масалани ўрганиш орқали функция экстремумини топиш методлари билан танишиб чиқамиз.

Агар Ω – масалада аниқланиш соҳаси, $\mathbb{R}^n$ фазо билан устма-уст тушса, у ҳолда бу масала шартсиз оптималлаштириш масаласи деб аталади.

Акс ҳолда, яъни масалада Ω – аниқланиш соҳаси, $\mathbb{R}^n$ фазо билан устма-уст тушмаса, у ҳолда бу масала шартли оптималлаштириш масаласи деб аталади.

Чизиқли оптималлаштириш масаласини шартли оптималлаштириш масаласи сифатида қараш мумкин.

Оптималлаштириш масаласида зарур бўладиган қуйидаги тушунчаларни киритиб оламиз.

2-таъриф. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ функция ва $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ тўплам берилган бўлсин. Агар $a \in \Omega$ нуктанинг қандайдир $U_\delta(a) = \{x \in \Omega : |x - a| < \delta\}$ атрофи мавжуд бўлиб, барча $x \in U_\delta(a) \cap \Omega$ нукталар учун $f(x) \leq f(a)$ ($f(x) \geq f(a)$) ўринли бўлса, у ҳолда a нукта f функциянинг Ω тўпламдаги *локал максимуми* (*минимуми*) деб аталади.

f функциянинг локал максимум (минимум) нуктадаги қийматлари унинг *локал максимуми* (*минимуми*) деб аталади. Функциянинг локал максимум ёки локал минимумлари унинг локал экстремумлари локал максимум ёки локал минимум нуталари эса унинг локал экстремум нукталари деб аталади.

2. БИР ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯНИНГ ЭКСТРЕМУМЛАРИ

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функция берилган бўлсин.

Лемма (Ферма). $a - f$ функциянинг локал экстремум нуқтаси бўлиб, $f'(a)$ мавжуд бўлсин. У ҳолда $f'(a) = 0$.

Функциянинг ҳосиласини нолга айлантирадиган нуқталар стационар нуқталар деб аталади.

Вейерштрасс теоремасидан келиб чиқадиган қуйидаги натижа функциянинг тўпламдаги глобал экстремуми мавжудлиги ҳақидаги масалани ҳал қилишга ёрдам беради.

1-натижа. Агар $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ узлуксиз бўлиб $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ ($\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$) шартларни қаноатлантирса, у ҳолда у ўзининг глобал минимумига (максимумига) $\mathbb{R}$ фазонинг ихтиёрий ёпиқ қисм тўпламида эришади.

3-таъриф. Агар a нуқтанинг шундай $U_\delta(a)$ атрофи мавжуд бўлсаки, бунда a нуқтадан чапда жойлашган барча $x \in U_\delta(a)$ нуқталар учун $f(x) > 0$, a нуқтадан ўнгда жойлашган барча $x \in U_\delta(a)$ нуқталар учун $f(x) < 0$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ функциянинг ишораси a нуқтада плюстан минусга ўзгаради дейилади.

Худди шундай, агар a нуқтанинг шундай $U_\delta(a)$ атрофи мавжуд бўлсаки, бунда a нуқтадан чапда жойлашган барча $x \in U_\delta(a)$ нуқталар учун $f(x) < 0$, a нуқтадан ўнгда жойлашган барча $x \in U_\delta(a)$ нуқталар учун $f(x) > 0$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ функциянинг ишораси a нуқтада минусдан плюсга ўзгаради дейилади.

Юқорида келтирилган тушунчалар ёрдамида функция экстремумга эга бўлиши учун етарлилик шартини ифодаловчи теоремаларни келтирамиз.

2-теорема (экстремум учун етарлилик шarti). $f(x)$ функция a нуқтада узлуксиз ва унинг $U_\delta(a)$ атрофида дифференциалланувчи бўлсин. Агар функция ҳосиласининг ишораси a нуқтада минусдан плюсга ўзгарса, у

ҳолда a нукта функциянинг локал минимуми, агар функция ҳосиласининг ишораси a нуктада плюстан минусга ўзгарса, у ҳолда a нукта функциянинг локал максимуми деб аталади.

3-теорема (экстремум учун етарлилик шарти). $f(x)$ функция икки марта дифференциалланувчи бўлиб, $f'(a) = 0$ бўлсин. У ҳолда

- 1) Агар $f''(a) > 0$ бўлса, у ҳолда a – функциянинг локал минимум нуктаси;
- 2) Агар $f''(a) < 0$ бўлса, у ҳолда a – функциянинг локал максимум нуктаси бўлади.

4-теорема (экстремум учун етарлилик шарти). $f(x)$ функция n марта дифференциалланувчи бўлиб, бунда $f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$, $f^{(n)}(a) \neq 0$ бўлсин. У ҳолда

- 1) Агар n жуфт сон бўлиб, $f^{(n)}(a) > 0$ бўлса, у ҳолда a – функциянинг локал минимум нуктаси;
- 2) Агар n жуфт сон бўлиб, $f^{(n)}(a) < 0$ бўлса, у ҳолда a – функциянинг локал максимум нуктаси;
- 3) Агар n тоқ сон бўлса, у ҳолда a нуктада экстремум мавжуд эмас.

1-мисол. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 6$ функцияни экстремумга текширинг.

Ечим. Стационар нукталарни топамиз:

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = 2.$$

Бу нукталарнинг ўнг ва чап томонларида функция ҳосиласининг ишораларини аниқлаймиз:

$$x \in (-\infty; 1) \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 12 > 0;$$

$$x \in (1; 2) \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow f'\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2} < 0;$$

$$x \in (2; \infty) \Rightarrow x = 3 \Rightarrow f(3) = 96 > 0.$$

Демак, $x = 1$ функциянинг локал максимум, $x = 2$ локал минимум нуктасидир.

2-мисол. $f(x) = e^x + e^{-x}$ функцияни экстремумга текширинг.

Ечим. Стационар нуқталарни топамиз:

$$f'(x) = e^x - e^{-x} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f''(0) = 2 > 0.$$

Демак, $x = 0$ функциянинг локал минимум нуқтаси.

3-мисол. $f(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x$ функцияни экстремумга текширинг.

Ечим. Стационар нуқталарни топамиз:

$$f'(x) = e^x - e^{-x} - 2\sin x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f''(0) = f'''(0) = 0, \quad f^{(4)}(0) = 4 > 0.$$

Демак, $x = 0$ функциянинг локал минимум нуқтаси.

3. КЎП ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯНИНГ ЭКСТРЕМУМЛАРИ

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ функция берилган бўлсин.

4-таъриф. Агар $f(x_1, \dots, x_n)$ функция $X(x_1, \dots, x_n)$ нуқта атрофида $(k-1)$ марта дифференциалланувчи бўлиб, $X(x_1, \dots, x_n)$ нуқтада унинг $(k-1)$ -тартибли хусусий ҳосиласи мавжуд бўлса, у ҳолда $f(x_1, \dots, x_n)$ функция $X(x_1, \dots, x_n)$ нуқтада k марта дифференциалланувчи бўлади.

Маълумки, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ функция дифференциалини ҳисоблаш қуйидагича амалга оширилади:

$$df(X) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(X)}{\partial x_i} dx_i, \quad (1)$$

$$d^2 f(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j, \quad (2)$$

$$d^k f(X) = \sum_{i=1}^n \dots \sum_{j=1}^n \frac{\partial^k f(X)}{\partial x_i \dots \partial x_{i_k}} dx_i \dots dx_{i_k}. \quad (3)$$

Шундай қилиб, $f(x_1, \dots, x_n)$ функциянинг $X(x_1, \dots, x_n)$ нуқтадаги иккинчи тартибли дифференциали (2) квадратик форма билан аниқланади.

5-теорема (экстремум учун етарлилик шarti). a нуқтада $f(x)$ функция икки марта дифференциалланувчи бўлиб, $f'(a) = 0$ бўлсин. У ҳолда

$f''(a) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j}$ квадратик форма учун қуйидаги тасдиқлар ўринли:

- 1) Агар a – функциянинг локал минимум нуқтаси бўлса, у ҳолда $f''(a) \geq 0$;
- 2) Агар a – функциянинг локал максимум нуқтаси бўлса, у ҳолда $f''(a) \leq 0$;
- 3) Агар $f''(a)$ ишораси алмашинувчи квадратик форма бўлса, у ҳолда a – функциянинг экстремум нуқтаси бўлмайди.

Юқорида кўрганимиздек $f''(a)$ нинг ишораси

$f''(a)dx^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$ квадратик форманинг ишораси билан боғлиқ.

Шу сабабли бу квадратик форманинг ишорасини аниқлаш мақсадида унинг матрицасини ёзиб оламиз:

$$A(f''(a)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Бу ерда ишорани аниқлашда Сильвестр шартидан фойдаланиш мақсадга мувофиқ:

6-теорема (Сильвестр критерийси). 1) Агар

$f''(a)dx^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$ квадратик форманинг $A(f''(a))$ матрицаси бош

минорларидан иборат $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ кетма-кетликда $\Delta_k > 0$, $k = 1, 2, 3, \dots, n$ бўлса, у ҳолда квадратик форма мусбат аниқланган бўлади;

3) Агар $f''(a)dx^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$ квадратик форманинг $A(f''(a))$

матрицаси бош минорларидан иборат $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ кетма-кетликда

$(-1)^k \Delta_k > 0, k = 1, 2, 3, \dots, n$ бўлса, у ҳолда квадратик форма манфий аниқланган бўлади.

4-мисол. $f(x, y, z) = 6x - 4y - 2z - x^2 - y^2 - z^2$ функцияни экстремумга текширинг.

Ечим. Функциянинг a – стационар нуқталарини топамиз:

$$\begin{cases} f_x = 6 - 2x = 0, \\ f_y = -4 - 2y = 0, \\ f_z = -2 - 2z = 0. \end{cases} \Rightarrow a = (3, -2, -1).$$

Бу нуқтада экстремум мавжудлиги аниқлаймиз:

$$f_{xx} = f_{yy} = f_{zz} = -2, \quad f_{xy} = f_{xz} = f_{yz} = 0.$$

У ҳолда

$$A(f''(3, -2, -1)) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

матрицанинг бош минорларидан -2, 4, -8 сонлар кетма-кетлигини ҳосил қиламиз ва $a = (3, -2, -1)$ локал минимум нуқта эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

Машқлар. Қуйдаги функцияларнинг экстремумлари топилсин.

- 1) $f(x, y) = (1 - x)^2 + 10(y - x^2)^2$;
- 2) $f(x, y, z) = -x^2 - y^2 - z^2 - x + xy + 2z$ ю
- 3) $f(x, y, z) = x^3 + 2y^2 + z^2 + ez - 3x + 6y + 2$.

4. ЧЕГАРАВИЙ ШАРТЛАРИ ТЕНГЛАМАЛАРДАН ИБОРАТ БЎЛГАН МАСАЛАЛАР

Қуйидаги шартли экстремум масаласини қараймиз:

$$\begin{cases} \varphi_0(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \text{extr}, \\ \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m. \end{cases} \quad (4)$$

(4) масаланинг аниқланиш соҳаси

$\Omega = \left\{ X(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m \right\}$ бўлиб, бу ерда

$\varphi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ узлуксиз дифференциалланувчи функциядир.

Масалани Лагранж кўпайтувчилар усули ёрдамида ечиш мақсадида Лагранж функциясини аниқлаб оламиз.

5-таъриф. $L(X, \Lambda) = \sum_{i=0}^m \lambda_i \varphi_i(X), \quad \Lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ функция (4)

масала учун Лагранж функцияси деб аталади.

Бу ерда Λ векторнинг координаталари Лагранж кўпайтувчилари деб аталади. (4) масала экстремуми учун зарурий шартни келтирамыз.

7-теорема (Лагранж принципи). Агар $a \in \Omega$ (4) масаланинг шартли экстремуми бўлса, у ҳолда шундай нолдан фарқли $\Lambda \in \mathbb{R}^{m+1}$ вектор топиладики, бунда $L_x(a, \Lambda) = 0$.

Бу ерда $L_x(a, \Lambda) = 0$ Лагранж тенгламаси деб аталади.

Лагранж функциясини геометрик нуқтаи-назардан $\begin{cases} \varphi_0(x, y) \rightarrow \text{extr}, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$

масала ёрдамида изоҳлаймиз. Фараз қиламиз, $\varphi(x, y) = 0$ тенглама S силлиқ эгри чизиқни, $f(x, y) = \text{const}$ эса қандайдир эгри чизиқлар сатҳини (оиласини) ифодалаб S эгри чизиқ $\nabla f = 0$ бўладиган нуқталардан ўтмасин. У ҳолда шартли экстремумнинг зарурий шартига асосан, (x_0, y_0) – экстремум нуқтада S ва $f(x, y) = \text{const}$ эгри чизиққа ўтказилган уринмалар устма-уст тушади. Демак, (x_0, y_0) нуқтада f, φ функцияларнинг градиентлари параллел бўлади: $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla \varphi(x_0, y_0), \quad \lambda \neq 0$. Бундан $L(x, y; \lambda) = f(x, y) - \lambda \varphi(x, y) = \text{const}$ Лагранж функциясини топамиз.

Юқоридагилардан келиб чиқиб, (4) масаланинг ечимини топиш алгоритминини ҳосил қиламиз:

1) Лагранж функцияси тузамиз: $L(X, \Lambda) = \sum_{i=0}^m \lambda_i \varphi_i(X);$

2) Экстремум учун зарурий шартни ёзиб оламиз:
$$\begin{cases} L_x(a, \Lambda) = 0, \\ \varphi_i(X) = 0. \end{cases}$$

3) Системанинг (a, Λ) ечимлари ичида экстремум нуқталари ($\Lambda \neq 0$) ётади. λ нинг қийматларини эътиборга олган ҳолда системанинг ечимини 2 гурппага ажратамиз: $\lambda_0 = 0$ нерегуляр ва $\lambda_0 \neq 0$ регуляр ечимлар. Биз регуляр ечимларни топиш билан шуғулланамиз.

4) Топилган экстремум нуқталарни текширишда компактда узлуксиз функциялар учун Вейерштрасс теоремаси ва унинг натижаларидан фойдаланиш мумкин. Агар (4) масалада қатнашаётган барча функциялар икки марта узлуксиз дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда экстремум учун етарли шартни ифодаловчи қуйидаги теорема ҳам ўринли бўлади:

8-теорема (экстремум учун етарли шарт). $a \in \Omega$ ва λ вектор ($\lambda_0 > 0$) мавжуд бўлиб, $L_x(a, \Lambda) = 0$ бўлсин. Агар $\varphi'_i(a)dx = 0$, $dx \neq 0$, $i = 1, 2, 3, \dots, m$ учун

1) $L_{xx}(a, \Lambda)dx^2 > 0$ бўлса, у ҳолда a нуқтада $\varphi_0(X)$ функция локал минимумга эришади;

2) $L_{xx}(a, \Lambda)dx^2 < 0$ бўлса, у ҳолда a нуқтада $\varphi_0(X)$ функция локал максимумга эришади.

5-мисол.
$$\begin{cases} 4x + 3y \rightarrow extr, \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$
 масаланинг ечимини топинг.

Ечим. Лагранж функциясини тузиб оламиз:

$$L(x, y; \Lambda) = \lambda_0(4x + 3y) + \lambda_1(x^2 + y^2 - 1).$$

Бу функциядан 1-тартибли хусусий ҳосилалар олиб қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} 4\lambda_0 + 2\lambda_1 x = 0, \\ 3\lambda_0 + 2\lambda_1 y = 0, \\ x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Биз регуляр ечимни қидираяпмиз шу сабабли $\lambda_0 \neq 0$. У ҳолда биз $\lambda_0 = 1$ деб олишимиз мумкин. Демак,

$$\begin{cases} 4 + 2\lambda_1 x = 0, \\ 3 + 2\lambda_1 y = 0, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{\lambda_1}, \\ y = -\frac{3}{2\lambda_1}. \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{\lambda_1^2} + \frac{9}{4\lambda_1^2} = 1 \Rightarrow \lambda_1 = \pm \frac{5}{2} \Rightarrow \begin{cases} (x, y) = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right), \\ (x, y) = \left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right). \end{cases}$$

Масалада аниқланиш соҳаси айлана, яъни компакт ҳамда мақсад функцияси узлуксиз бўлганлиги сабабли Вейерштрасс теоремасига асосан, мақсад функцияси ўзининг максимум ва минимум қийматларига аниқланиш соҳасида эришади. У ҳолда $f_{\max} = 5$, $f_{\min} = -5$.

6-мисол. $\begin{cases} e^{xy} \rightarrow \text{extr}, \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$ масаланинг ечимини топинг.

Ечим. Лагранж функциясини тузиб оламиз:

$$L(x, y; \Lambda) = \lambda_0 e^{xy} + \lambda_1 (x + y - 1).$$

Бу функциядан 1-тартибли хусусий ҳосилалар олиб қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} \lambda_0 y e^{xy} + \lambda_1 = 0, \\ \lambda_0 x e^{xy} + \lambda_1 = 0, \\ x + y - 1 = 0. \end{cases}$$

Биз регуляр ечимни қидираяпмиз шу сабабли $\lambda_0 \neq 0$. У ҳолда биз $\lambda_0 = 1$ деб олишимиз мумкин. Демак,

$$\begin{cases} y e^{xy} + \lambda_1 = 0, \\ x e^{xy} + \lambda_1 = 0, \\ x + y - 1 = 0. \end{cases} \Rightarrow x = y = \frac{1}{2} \Rightarrow (x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Бу ерда аниқланиш соҳаси $x + y = 1$ – тўғри чизиқ, яъни компакт бўлмаганлиги сабабли бу масалага Вейерштрасс теоремасини қўллаш мумкин эмас. Шу сабабли, 8-теоремадан фойдаланамиз. Бунда $(dx, dy) \neq 0$ векторга нисбатан $d(x + y - 1) = dx + dy = 0$ шарт ўринли бўлиши керак.

Иккинчи тартибли дифференциални ҳисоблаймиз:

$$\begin{cases} L_{xx} = y^2 e^{xy}, \\ L_{yy} = x^2 e^{xy}, \\ L_{xy} = e^{xy}(xy + 1) \end{cases} \Rightarrow d^2 L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Lambda\right) = \frac{1}{4} e^{\frac{1}{4}} dx^2 + 2 \cdot \frac{5}{4} e^{\frac{1}{4}} dx dy + \frac{1}{4} e^{\frac{1}{4}} dy^2.$$

У ҳолда $dx + dy = 0 \Rightarrow dx = -dy$ бўлгани учун $d^2 L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Lambda\right) = -2e^{\frac{1}{4}} dx^2 < 0$.

Демак, $a\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ нукта локал максимум.

Энди бу нуктани глобал экстремумликка текшираимиз.

$$x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x \Rightarrow f(x, y) = e^{x(1-x)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{x(1-x)} \rightarrow 0.$$

Демак, $x + y = 1$ тўғри чизикда $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ нуктани ўзи чига олувчи шундай $[AB]$

кесма ажратиб олиш мумкинки, бу кесмадан ташқарида $f(x, y) = e^{xy}$

функцияниг қиймати $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{4}}$ дан кичик бўлади. Шу сабабли, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

нукта глобал максимум нукта бўлади.

Машқлар. Қуйидаги шартли экстремум масаласини ечинг.

$$1) \begin{cases} f(x, y) = x^2 + y^2 \rightarrow extr, \\ 3x + 4y - 1 = 0. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} f(x, y) = 5x^2 + 4xy + y^2 \rightarrow extr, \\ 3x + y - 1 = 0. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} f(x, y) = 3x^2 + 4xy + 2y^2 \rightarrow extr, \\ 3x + 5y - 1 = 0. \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} f(x, y) = xyz \rightarrow extr, \\ x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} f(x, y) = xy^2z \rightarrow extr, \\ x + y + z - 1 = 0. \end{cases}$$

5. ЧЕГАРАВИЙ ШАРТЛАРИ ТЕНГЛАМАЛАР ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАРДАН ИБОРАТ БЎЛГАН МАСАЛАЛАР

Қуйидаги шартли экстремум масаласини қараймиз:

$$\begin{cases} \varphi_0(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \text{extr}, \\ \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m, \\ \varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, \quad j = m + 1, \dots, m + k \end{cases} \quad (5)$$

(5) масаланинг аниқланиш соҳаси

$$\Omega = \left\{ X(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \varphi_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \varphi_j(x_1, \dots, x_n) \leq 0, \quad j = \overline{m+1, m+k} \right\}$$

бўлиб, бу ерда $\varphi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = \overline{0, m+k}$ узлуксиз дифференциалланувчи функциядир.

Масалани Лагранж кўпайтувчилар усули ёрдамида ечиш мақсадида Лагранж функциясини аниқлаб оламиз. Бу каби масалаларда

$$L(X, \Lambda) = \sum_{i=0}^{m+k} \lambda_i \varphi_i(X), \quad \Lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{m+k}) \in \mathbb{R}^{m+k+1} \quad \text{функция (5) масала учун}$$

Лагранж функцияси деб аталади.

9-теорема (Лагранж принципи). Агар $a \in \Omega$ (5) масаланинг шартли минимуми бўлса, у ҳолда шундай нолдан фарқли $\Lambda \in \mathbb{R}^{m+k+1}$ вектор топиладики, бунда қуйидаги шартлар ўринли бўлади:

- 1) $L_x(a, \Lambda) = 0$;
- 2) $\lambda_{m+j} \varphi_{m+j}(a) = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, k$;
- 3) $\lambda_0 \geq 0, \quad \lambda_{m+j} \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, k$.

Агар $a \in \Omega$ (5) масаланинг шартли максимуми бўлса, у ҳолда 3) шарт $\lambda_0 \geq 0, \quad \lambda_{m+j} \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, k$ кўринишда бўлади.

Юқоридагилардан келиб чиқиб, (5) масаланинг ечимини топиш алгоритминини ҳосил қиламиз:

- 1) Лагранж функцияси тузамиз: $L(X, \Lambda) = \sum_{i=0}^{m+k} \lambda_i \varphi_i(X)$;

2) Экстремум учун зарурий шартни ёзиб оламиз:
$$\begin{cases} L_x(a, \Lambda) = 0, \\ \varphi_i(X) = 0, \quad i = 1, \dots, m \\ \lambda_{m+j} \varphi_{m+j}(X) = 0, \quad j = 1, \dots, k. \end{cases}$$

3) Системанинг (a, Λ) ечимлари ичида экстремум нуқталари $(\Lambda \neq 0)$ ётади. λ нинг қийматларини эътиборга олган ҳолда системанинг ечимини 2 гурппага ажратамиз: $\lambda_0 = 0$ нерегуляр ва $\lambda_0 \neq 0$ регуляр ечимлар. Биз регуляр ечимларни топиш билан шуғулланамиз.

4) Топилган экстремум нуқталарни текширишда компактда узлуксиз функциялар учун Вейерштрасс теоремаси ва унинг натижаларидан фойдаланиш мумкин. Агар (5) масалада қатнашаётган барча функциялар икки марта узлуксиз дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда экстремум учун етарли шартни ифодаловчи қуйидаги теорема ҳам ўринли бўлади:

10-теорема (экстремум учун етарли шарт). $a \in \Omega$ ва λ вектор $(\lambda_0 > 0)$ мавжуд бўлиб,

$$\begin{cases} L_x(a, \Lambda) = 0, \\ \lambda_{m+j} \varphi_{m+j}(a) = 0, \quad j = 1, \dots, k, \\ \lambda_0 \geq 0, \quad \lambda_{m+j} \geq 0, \quad j = 1, \dots, k. \end{cases}$$

бўлсин. Агар $\varphi'_i(a)dx = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad \lambda_{m+j} \varphi'_{m+j}(a)dx = 0, \quad dx \neq 0, \quad j = 1, \dots, k$ учун $L_{xx}(a, \Lambda)dx^2 > 0$ бўлса, у ҳолда a нуқтада $\varphi_0(X)$ функция локал минимумга эришади.

Изоҳ. a – локал максимум нуқта бўлиши учун 9-теоремадаги $\lambda_{m+j} \geq 0, \quad j = 1, \dots, k, \quad L_{xx}(a, \Lambda)dx^2 > 0$ шартларни мос равишда $\lambda_{m+j} \leq 0, \quad j = 1, \dots, k, \quad L_{xx}(a, \Lambda)dx^2 < 0$ шартлар билан алмашилиши зарур.

Қуйидаги теорема стационар нуқтада экстремум мавжуда бўлмаслигини кўрсатади.

11-теорема. $a \in \Omega$ нуқта учун 9-теореманинг барча шартлари ўринли ва $I = \{i = \overline{1, m+k} \mid \varphi_i(a) = 0\}$ бўлсин. Агар $\varphi'_i(a), \quad i \in I$ функция чизиқли эркли бўлиб, dx вектор учун

$$\varphi'_i(a)dx = 0, i \in I, L_{xx}(a, \Lambda)dx^2 < 0 (> 0)$$

бўлса, у ҳолда a нуқтада локал экстремум мавжуд эмас.

$$\text{7-мисол. } \begin{cases} f(x, y, z) = xyz \rightarrow \text{extr}, \\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1. \end{cases} \quad \text{масаланинг ечимини топинг.}$$

Ечим. Лагранж функциясини тузиб стационар нуқталарни топамиз.

$$\begin{aligned} L(x, y, z; \Lambda) &= \lambda_0 xyz + \lambda_1 (x^2 + y^2 + z^2 - 1), \\ \begin{cases} L_x(x, y, z; \Lambda) = \lambda_0 yz + 2\lambda_1 x = 0, \\ L_y(x, y, z; \Lambda) = \lambda_0 xz + 2\lambda_1 y = 0, \\ L_z(x, y, z; \Lambda) = \lambda_0 xy + 2\lambda_1 z = 0, \\ \lambda_1 (x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Биз регуляр ечимни қидираяпмиз шу сабабли $\lambda_0 \neq 0$. Бу системада қулайлик учун $\lambda_0 = 2$ деб оламиз. У ҳолда қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{cases} yz + \lambda_1 x = 0, \\ xz + \lambda_1 y = 0, \\ xy + \lambda_1 z = 0, \\ \lambda_1 (x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \lambda_1 x^2 = \lambda_1 y^2 = \lambda_1 z^2 = -xyz \Rightarrow x^2 = y^2 = z^2 = \frac{1}{3}.$$

Демак, масаланинг ечими $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ нуқталардан иборат бўлади.

Масаланинг аниқланиш соҳаси $x^2 + y^2 + z^2 - 1 \leq 0$ компакт бўлганлиги

сабабли Вейерштрасс теоремасига асосан, $f_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{9}, f_{\min} = -\frac{\sqrt{3}}{9}$.

Лагранж методидан фойдаланиш мақсад мувофиқ бўлган баъзи иқтисодий масалалар келтириб ўтамиз.

8-мисол. Фараз қиламиз, фойдалилик функцияси $U(x, y) = Cx^\alpha y^\beta, C \leq 1, \alpha + \beta \leq 1$, истеъмолчи танловини (бюджетини) чегараловчи шарт эса $p_1 x + p_2 y \leq M$ кўринишда бўлсин (p_1 – 1-маҳсулот нархи, p_2 – 2-маҳсулот нархи, M – истемолчи даромади).

Юқоридаги ифодалар ёрдамида 2 та масала қаралади: 1) истеъмолчи танланмасини оптималлаштириш масаласи; 2) истеъмолчи танловни аниқлаш масаласи.

Истеъмолчи танланмасини оптималлаштириш масаласи куйидагича ифодаланади:

$$\begin{cases} \max \{ Cx^{\alpha} y^{\beta} \}, \\ p_1 x + p_2 y = M, \\ x \geq 0, y \geq 0, \alpha + \beta \leq 1. \end{cases} \quad (6)$$

Бу каби масалаларнинг ечимини топишда Лагранж кўпайтувчилари методидан фойдаланиш мақсадга мувофиқ ҳисобланади.

Лагранж функциясидан фойдаланиб (6) масалани шартсиз максимум масаласига келтириб оламиз:

$$L(x, y, \lambda) = Cx^{\alpha} y^{\beta} + \lambda(M - p_1 x - p_2 y) \rightarrow \max \quad (7)$$

Бу масаланинг ечимини топиш учун куйидаги тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} L_x = U_x - \lambda p_1 = 0, \\ L_y = U_y - \lambda p_2 = 0, \\ L_{\lambda} = M - p_1 x - p_2 y = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_x = \lambda p_1, \\ U_y = \lambda p_2, \\ M = p_1 x + p_2 y. \end{cases} \Rightarrow \frac{U_x}{U_y} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Иккинчи томондан фойдалилик функциясидан фойдалансак

$$U_x = \alpha C \frac{y^{\beta}}{x^{1-\alpha}}, \quad U_y = \beta C \frac{x^{\alpha}}{y^{1-\beta}}. \text{ У ҳолда}$$

$$\frac{U_x}{U_y} = \frac{\alpha y}{\beta x} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow y = \frac{p_1 \beta}{p_2 \alpha} x.$$

Энди $p_1 x + p_2 y = M$ чегаравий шартдан фойдаланиб 1-ва 2-маҳсулотлар учун талаб функцияларини топамиз:

$$x^* = D_1(p_1, p_2, M) = \frac{M \alpha}{(\alpha + \beta) p_1}, \quad y^* = D_2(p_1, p_2, M) = \frac{M \beta}{(\alpha + \beta) p_2}.$$

Бу функциялар истеъмолчи даромади ва маҳсулот нархининг унинг талабига таъсирини кўрсатади.

Истеъмолчи танловни аниқлаш масаласи эса куйидагича ифодаланади:

$$\begin{cases} \max \{ p_1 x + p_2 y \}, \\ Cx^{\alpha} y^{\beta} = U, \\ x \geq 0, y \geq 0, \alpha + \beta \leq 1. \end{cases}$$

Бу масалани ҳам ечишда Лагранж кўпайтувчилари методидан фойдаланилади ва унинг ечими $t(p_1, p_2, U)$ – харажат функцияси деб аталади.