

Mirzayev A.N., Abduraxmanova Yu. M.

IQTISODIY MATEMATIK USULLAR VA MODELLAR

(nazariy asoslar va amaliy tavsiyalar)

O'quv qo'llanma

TOSHKENT - 2014

Mualliflar:

A.N. Mirzayev- TATU, “Algoritmash va matematik
modellashtirish” kafedrası dotsenti, f.- m.f.n.;

Yu. M. Abduraxmanova- TATU, “Algoritmash va matematik
modellashtirish” kafedrası mudiri, t.f.n.,dotsent;

Taqrizchilar:

A.X. Raxmatullayev- TDIU “Oliy matematika” kafedrası dotsenti

Sh.Sh.To’rayev- AKT sohasida iqtisod va boshqaruv fakulteti
dekani, dotsent

Ushbu qo’llanma texnika oliy o’quv yurtlarining barcha yo’nalishlari
bakalavrlari uchun mo’ljallangan.

KIRISH

Amaliy masalalarni yechishda, aksariyat hollarda, o'rganilayotgan jarayonni yoki muammoni matematik modelini tuzish, hamda bu matematik masala yechimi asosida tabiiy jarayonni tahlil qilish usulidan foydalaniladi. Matematik model deganda, o'rganilayotgan jarayon yoki biror texnik tizimning parametrlari orasidagi miqdoriy bog'lanishlarni aks ettiruvchi tenglama, tengsizlik, ayniyat kabi munosabatlar tushuniladi. Bu munosabatlar asosida jarayonning ma'lum parametrlari orqali noma'lum parametrlarini topish usullari izlanadi. Natijada matematik model yordamida jarayonni tahlil qilish, parametrlarining jarayonga ta'sirini baholash imkoniyati paydo bo'ladi. Boshqacha qilib aytganda tabiiy jarayonning qanday kechishi matematik model asosida qog'ozda, murakkab bo'lsa kompyuterda tahlil qilinishi mumkin bo'lib qoladi. Bu tahlil natijalarining qanchalik ishonchli ekanligini baholash uchun matematik modelning tabiiy modelga yaqinlik darajasini ifodalovchi mezonlar va qoidalar kerak bo'ladi. "Iqtisodiy matematik usullar va modellar" fani yuqorida keltirilgan savollarni o'z ichiga oladi, hamda uning aksariyati, aynan iqtisodiyot va menejment yo'nalishida ta'lim olayotgan talabalarga mo'ljallangan. Bu erda ko'proq muammoning iqtisodiy taraflariga, hamda iqtisodiy samaradorligiga e'tibor qaratilgan.

Ushbu qo'llanma "Iqtisodiy matematik usullar va modellar" fanini bo'yicha mualliflarning so'nggi yillarda TATU talabalari uchun o'qigan ma'ruzalari asosida yaratildi. Bunda matematik model, uning asosiy belgilari unga qo'yiladigan talablar amaliy masalalar yordamida tahlil qilinadi. Shuningdek amaliy masalalarni yechish jarayonida doimo uchrashi mumkin bo'lgan xatoliklar va ularni baholash usullari haqida to'xtalinadi. Biror reja yoki loyihaning samaradorligini ifodalovchi maqsad funksiyasi va uning asosida optimal (eng samarador) variantni tanlash usullari amaliy masalalar asosida tahlil qilinadi. Optimizatsiya masalalarini yechish usullari haqida ma'lumotlar ham keltiriladi.

Matematik model tuzish usullaridan bo'lgan approksimatsiya masalasi haqida ham ma'lumotlar, hamda amaliy formulalar va ulardan foydalanish bo'yicha tavsiyalar keltirilgan. Bunda asosiy maqsad, murakkab jarayonlardagi miqdoriy bog'lanish qonuniyatlarini kuzatuvlar asosida olingan jadval ma'lumotlar bo'yicha tuzish usullari haqida to'xtalgan. Bu masala yechimini interpolyatsion ko'phadlar, eng kichik kvadratlar usuli, hamda ortogonal ko'phadlar yordamida yechish usullari ko'rsatilgan.

Xususan, iqtisodiy jarayonlarni matematik modeli sifatida XX asr o'rtalarida G.B.Dantzig, L.V.Kantorovichlar tomonidan amaliyotga kiritilgan "chiziqli programmalash masalalari" ChPM yo'nalishini keltirish mumkin. Yuzaki qaraganda, bozorda o'tirgan oddiy sotuvchi (tadbirkor) o'z tajribasiga suyanan holda, narx-navo dinamikasini tahlil qilib, har kuni o'zi bilmagan holda qandaydir optimizatsiya masalalarini yechib boradi. Uning tanlagan yechimi omadli yoki omadsiz bo'lishiga qarab uning daromadi shakllanadi. Bu yerda yechimni " omadli " yoki " omadsiz " sifatlari bilan bog'ladik. Sababi, iqtisodiyot bilan bog'liq masalalar haddan tashqari ko'p variantli bo'lib ularni to'la tahlil qilish va optimal variantni tanlash zamonaviy kompyuterlar uchun ham mushkul masalalardan hisoblanar ekan. Masalan ChPM ning tanlash masalasi deb ataladigan masalasida n - tartibli kvadrat matritsa hosil bo'ladi. Shu matritsaning har bir satri va har bir ustunidan bittadan elementni shunday tanlash kerakki, tanlangan elementlar yig'indisi maksimal bo'lsin. Bu masalani yechish uchun $n!$ variantni hisoblash va taqqoslash kerak bo'lar ekan. Hattoki oddiy $n=20$ bo'lgan holda ham $n! > 2 \cdot 10^{18}$ bo'lib, bu masalani yechish uchun sekundiga 1 milliard amal bajaradigan kompyuter ham 500 yil tinimsiz ishlashi kerak ekan.

Demak, bu yerda mavjud variantlarning barchasini emas, ma'lum ma'noda optimallikka da'vogar bo'lishi mumkin bo'lgan variantlarnigina tahlil qilish va ular orasidan optimalini ajratish yo'lini tutish talab qilinadi. ChPM fani aynan shu yo'nalishda shakllangan bo'lib, uning matematik asoslarini, hamda amaliy tadbir

bosqichlarini bilish har bir iqtisodchi, umuman har bir izlanuvchan ijodkor uchun zaruriy bo'g'inlardan biriga aylanib bormoqda.

Mazkur qo'llanmada, yuqorida keltirilgan mulohazalar hisobga olinib, ChPM matematik asoslari va amaliyoti iloji boricha sodda masalalar asosida talqin qilingan. Maqsad, vaqti kelib kompyuter matematik ta'minotida mavjud bo'lgan ChPM larni yechish dasturlaridan foydalanish zarurati paydo bo'lsa, u haqida to'la tasavvurga ega bo'lsin. Har bir paragraf so'ngida mustaqil ishlash uchun berilgan masalalar fanni to'la o'zlashtirishni ta'minlash uchun mo'ljallangan.

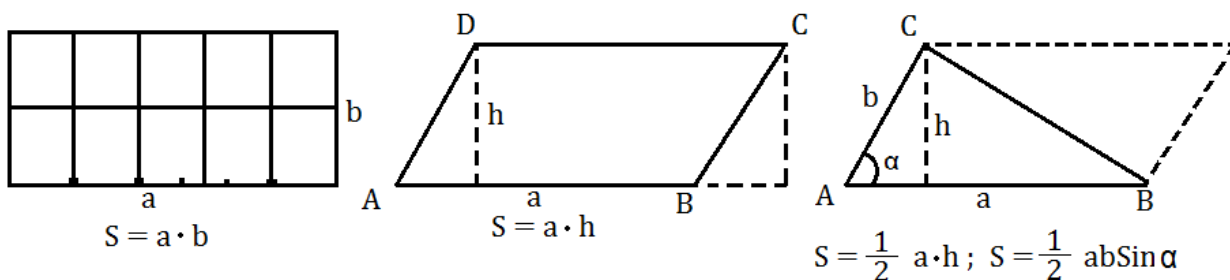
Har bir mavzu amaliy masalalar yordamida izohlangan va tahlil qilingan. Ma'ruzalar matni oxirida foydalanilgan adabiyotlar ro'yhati berilgan. Ma'ruzalar matnidan nafaqat iqtisodiyot va menejment yo'nalishidagi, balki boshqa yo'nalishdagi talabalar ham samarali foydalanishi mumkin. Chunki matematik model yordamida jarayonni tahlil qilish – eng qulay, arzon, tezkor va samarali usuldir.

I. Matematik modellash nazariy va amaliy asoslari

§ 1. Matematik model tushunchasi va uning asosiy belgilari

Matematik model va uning tabiiy model bilan muvofiqlik shartlari. Amaliyotda uchraydigan ko'plab masala va muammolar ma'lum hisob – kitoblar asosida yechiladi. Buning uchun ko'rilayotgan masala yoki o'rganilayotgan jarayonning parametrlari orasidagi miqdoriy bog'lanishlarni ifodalovchi qonun va qoidalardan foydalaniladi. Ilmiy va amaliy adabiyotlarda urf bo'lgan “matematik model” atamasining ta'rifini soddaroq holda quyidagicha ifodalash mumkin. O'rganilayotgan jarayonning ma'lum va aniqlanishi kerak bo'lgan parametrlari orasidagi miqdoriy bog'lanishlarni ifodalovchi munosabatlar (tenglama, tengsizlik,...) tabiiy masalaning matematik modeli deyiladi.

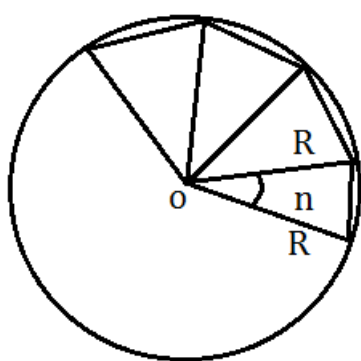
Matematik model o'rganilayotgan jarayonga mutanosib(ilmiy adabiyotlarda “adekvat” atamasi bilan ifodalanadi) bo'lishi kerak. Shuningdek tuzilgan matematik model “korrekt” bo'lishi kerak, ya'ni ifodalangan matematik modelga mos masala yechimi mavjud, yagona va boshlang'ich ma'lumotlarga uzluksiz bog'langan bo'lishi kerak. Matematik modellarga eng sodda misollar sifatida quyidagi masalalarni keltiramiz. Maqsad, matematik modellar bilan har qadamda duch kelishimizni eslatib o'tish. Yuzalarni hisoblash bilan bog'liq formulalarni yodga olamiz.



1 - pacm

Keltirilgan misollarda yuza ta'rifi, o'lchov birligi, hisoblash formulalari ifodalangan. Hususan tomonlari $a = 5\text{m}$ va $b = 2\text{m}$ bo'lgan to'g'ri to'rtburchakning tomonlari 1m dan qilib bo'linsa, unga tomonlari 1m dan bo'lgan 10ta kvadrat joylashar ekan. Tomonlari 1m bo'lgan kvadrat yuzasini 1m^2 deb belgilasak (o'lchov

birliqi) berilgan to'g'ri to'rtburchak yuzasi $S = a \cdot b$ formula bo'yicha hisoblanishi mantiqan to'g'ri ekanligi ko'rinadi. Buning asosida parallelogramm, uchburchak yuzalari formulalari kelib chiqishi chizmadan ko'rinib turibdi. Bu formulalarni ham matematik model deb atashimiz mumkin. Matematik modelni murakkab, mavhum tushuncha sifatida emas, muammoni hal qilish yo'lidagi bir ish quroli sifatida tasavvur qilish kerak. Fikrimizning isboti sifatida doira yuzasini hisoblash formulasini keltirib chiqaramiz. Buning uchun uchburchak yuzasini hisoblash formulasidan foydalanamiz.



2 - rasmi

Radiusi R bo'lgan aylanani n ta teng bo'lakka bo'lamiz (chizmadagidek 2– rasmi). Bo'linish nuqtalarini markaz bilan tutashtirib n ta bir xil sektor hosil qilamiz. Har bir sektorda yoyni vatar bilan almashtirsak uchburchaklar hosil bo'ladi. Bu uchburchaklar yuzasi $S_{\Delta} = \frac{1}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{n}$, jami ko'pburchak yuzasi esa

$$S_n = n \cdot S_{\Delta} = \frac{n}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{n}$$

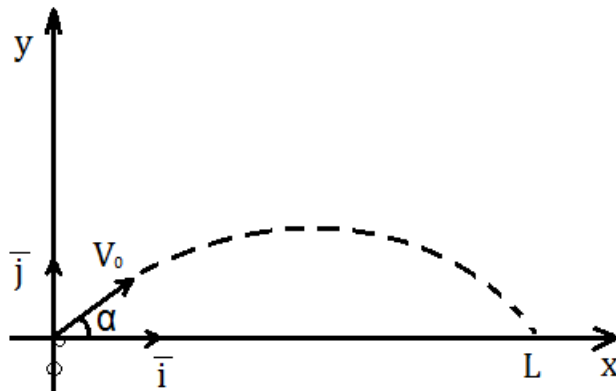
$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

doira ekanligi ko'rinib turibdi.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} \cdot \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{n}{2} R^2 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\pi R^2 \cdot \frac{\sin x}{x} \right) = \pi R^2$$

doira yuzasi formulasi kelib chiqadi. Bu yerda $x = \frac{2\pi}{n}$ belgilash kiritilgan va $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ajoyib limitdan foydalanilgan.

Navbatdagi masala quyidagicha bo'lsin. Gorizantal tekislikka nisbatan α burchak ostida otilgan moddiy jism (tosh, artilleriya snaryadi, raketa) boshlang'ich tezlik V_0 bo'lsa, borib tushadigan maksimal masofa topilsin.



3 - rasmi

Bu jarayonda ishtirok etayotgan moddiy jismni moddiy nuqta deb qaralsa masala osonlashadi, chunki nuqtaning o'lchamlari yo'q, demak havo qarshiligi ham yo'q deyish mumkin. U holda Nyuton qonuniga ko'ra harakat qonuni

$$m\bar{a} = -mg \quad (1.1)$$

deb ifodalash mumkin. Chunki jismga faqat og'irlik kuchi ta'sir qiladi. Jism tezligini vector $\bar{V} = V_x\bar{i} + V_y\bar{j}$ ko'rinishda ifodalasak va $\frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{a}$ ekanligini e'tiborga olsak, harakat qonuni (1.1) koordinat o'qlari bo'yicha quyidagicha ifodalanadi.

$$\begin{cases} \frac{dV_x}{dt} = 0 ; V_x(0) = V_0 \cdot \cos \alpha \\ \frac{dV_y}{dt} = -g ; V_y(0) = V_0 \sin \alpha \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = V_x; x(0) = 0 \\ \frac{dy}{dt} = V_y; y(0) = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

(1.2), (1.3) differensial tenglamalar jarayonning matematik modelini ifodalaydi.

(1.2) sistemadan

$$V_x = V_0 \cos \alpha; V_y = V_0 \sin \alpha - gt$$

yechimlarni topamiz. Ularni (1.3) ga qo'yilsa

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = V_0 \cos \alpha & ; x(0) = 0 \\ \frac{dy}{dt} = V_0 \sin \alpha - gt & ; y(0) = 0 \end{cases}$$

ko'rinishni oladi. Bu sistemadan jism trayektoriyasi tenglamasini topamiz.

$$x = V_0 \cdot \cos \alpha \cdot t \quad ; \quad y = V_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

Jism yerga tushganda $y = 0$ bo'lishi kerak. Bu shartga

ko'ra $0 = V_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$ tenglikdan yerga tushish vaqti

$$T = \frac{2V_0 \sin \alpha}{g}$$

topiladi. Bu qiymatni $x(t)$ formulasiga qo'yib

$$L = V_0 \cdot \cos \alpha \cdot \frac{2V_0 \sin \alpha}{g} = \frac{V_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}$$

masofa formulasini hosil qilamiz. Bu formula qo'yilgan masalaning matematik modeli sifatida qaralishi mumkin. Ixtiyoriy boshlang'ich V_0, α qiymatlar uchun L ni topish mumkin.

Shuningdek zambarak (raketa) imkoniyatiga ko'ra $V_0 = \text{Const}$ ma'lum bo'lsa, α - burchakni tanlash hisobiga L ni o'zgartirish, berilgan L - nishon o'rniga qarab α - ni tanlash mumkin.

$$\sin 2\alpha = \frac{L \cdot g}{V_0^2}$$

tenglikka ko'ra burchak topiladi. Xususan, formulaga

ko'ra $\alpha = 45^\circ$ bo'lganda $L_{max} = \frac{V_0^2}{g}$, qurolning ta'sir masofasini ham aniqlash mumkin.

Yuqorida ta'kidlanganidek, bu modelni tabiiy modelga to'la mutanosib deb bo'lmaydi. Chunki bu yerda havoning qarshiligi, balandlik bilan g qiymati o'zgarishi ham hisobga olinmadi. Shuningdek, havo qarshiligi havoning hamda snaryadning temperaturasi ham bog'liq bo'lishi mumkin. Balandlik o'zgarishi bilan havo zichligi, demak havo qarshiligi ham o'zgarib boradi. Bu faktorlar (omillar) ni barchasini hisobga olsak matematik model murakkablashib, uning yechimini topish ham mushkullashib ketadi. Sanab o'tilgan omillar uchun $g = g(Y)$; $(K = K(Y, T, S))$ bog'lanish modellarini to'g'ri ifodalash ham o'ziga yarasha jiddiy muammolardan hisoblanadi. Bu yerda h – jism balandligi, T – temperaturasi; S – ko'ndalang kesimi yuzasi $K(Y, T, S)$ – havo qarshilik proporsionallik koeffitsiyenti. Havo qarshiligi tezlikka proporsional va qarama – qarshi yo'nalganligini hisobga olsak, harakat qonuni quyidagicha ifodalanadi

$$m\bar{a} = -mg - K \cdot a\bar{V}$$

yoki koordinat ko'rinishida

$$m \cdot \left(\frac{dV_x}{dt} \bar{i} + \frac{dV_y}{dt} \bar{j} \right) = -mg\bar{j} - K(V_x \bar{i} + V_y \bar{j})$$

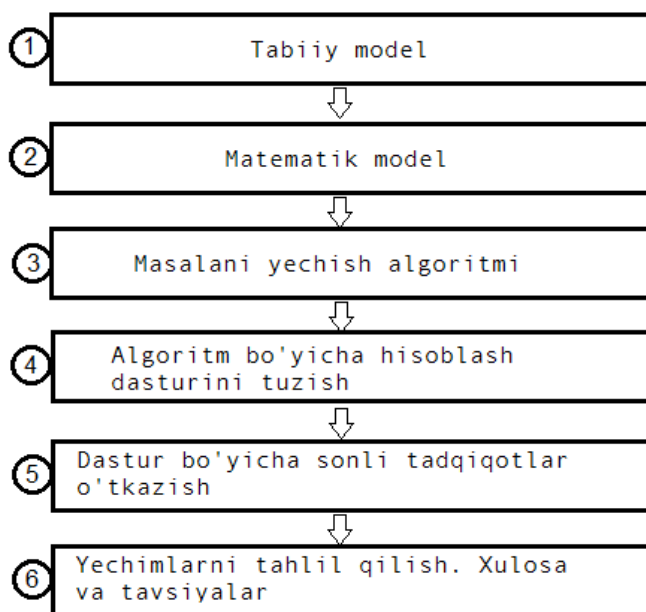
tarzda ifodalanadi.

Amaliy masalalarni yechishda uchraydigan asosiy muammolardan biri tanlangan matematik modelning amaliy masalaga mutanosibligini baholash. Agar xatolik talab darajasidan ortib ketmasa nisbatan soddaroq modellardan foydalanish bo'yicha tavsiyalar ishlab chiqishdan iborat. Xususan, yuqorida ko'rilgan masala uchun topilgan dastlabki yechim qaysi hollarda ishonarli deb hisoblanishi mumkin?

§ 2. Matematik modellarga misollar. Fizik, mexanik, ommaviy va iqtisodiy masalalar asosida.

Matematik model ta'rifida ta'kidlanganidek, unda o'rganilayotgan jarayonning asosiy parametrlarini bog'lovchi munosabatlar ifodalangan bo'lishi kerak. Bu munosabatlardan ma'lum parametrlar orqali noma'lum parametrlarni bir qiymatli aniqlash imkoniyati kelib chiqishi kerak.

O'rni kelganda amaliy masalalarni yechish bosqichlarini ifodalaymiz. (4 – rasm).



4 - rasm

Tabiiy modelni buyurtmachi ifodalaydi. Buyurtmachi sifatida davlat (muhim loyihalar), korxona (shartnomaviy loyihalar), yuridik yoki jismoniy shaxslar (institut, ilmiy rahbar) kabilarni ko'rsatishimiz mumkin. Masalaning mavqe va miqyosiga qarab har bir bosqichda (4–rasm) yolg'iz shaxs yoki jamoa ishtirok etishi mumkin. Har bir bo'g'inning o'z bilimdon mutaxassislari bo'lishi mumkin. Shuning uchun bunday hollarda mehnat taqsimotini tashkil qilgan ma'qul.

Vaqt kelib oddiy masalalar orqali har bir bosqichning umumiy jarayondagi o'rnini ifodalashga harakat qilamiz. 3, 4, 5–bo'g'inlar murakkab, katta hajmdagi hisoblashlar bilan bog'liq masalalarda yuzaga chiqadi. Hozircha matematik model tuzishga namunalar keltirish bilan cheklanamiz.

1 – masala. H balandlikdan tashlangan, massasi m bo'lgan jism yerga qanday tezlik bilan tushadi? Bu yerda ham dastavval jismni moddiy nuqta deb qarab matematik model tuzamiz. Energiyaning saqlanish qonunidan foydalanamiz. Boshlang'ich $t = 0$ momentda jismda faqat potensial energiya bo'lib $E = mgh$ bo'ladi. Harakat boshlangach h – balandlik kamayib boradi, tezlik esa ortib boradi. Potensial energiya kinetik energiyaga aylanib boradi. $P = mgh$ - potensial $K = \frac{mv^2}{2}$ – kinetik energiyalar yig'indisi o'zgarmas.

$$E = P + K = mgh + \frac{mv^2}{2} = mgh$$

bo'lishi kerak. Yerga tushganda $h = 0$ bo'lib, potensial energiya tugaydi va $\frac{mv^2}{2} = mgh$ tenglik hosil bo'ladi. Undan $V = \sqrt{2gH}$ hisoblash formulasi hosil bo'ladi. Masalan $H = 100\text{m}$ bo'lsa

$$V = \sqrt{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{sek}^2} \cdot 100\text{m}} = 44,3 \frac{\text{m}}{\text{sek}} \approx 159,5 \frac{\text{km}}{\text{soat}}$$

kelib chiqadi. Shunday qilib istalgan balandlikdan yerga tushish tezligini aniqlash formulasi topildi. Bu yerda ham formula tabiiy modelga qanchalik mutanosib, natija qanchalik to'g'ri ekanligini baholash zarurati qoladi. Dastlabki tuzatish sifatida harakatga qarama – qarshi yo'nalgan va tezlikka proporsional bo'lgan havoning qarshilik kuchini ham hisobga olsak harakat qonuni $ma = mg - K \cdot V$ ko'rinishda ifodalanadi.

$$m \frac{dv}{dt} = mg - KV ; V(0) = 0$$

differensial tenglamadan umumiy yechim

$$V = ce^{-\frac{K}{m}t} + \frac{mg}{K}$$

ko'rinishda ifodalanadi. $v(0) = 0$ shartga ko'ra $c = -\frac{mg}{K}$ topiladi va yechim

$$V = \frac{mg}{K} \left(1 - e^{-\frac{K}{m}t} \right) \quad (2.1)$$

ko'rinishda ifodalanadi. Bu tenglikdan masofa $S(t)$ uchun

$$\frac{ds}{dt} = \frac{mg}{K} \left(1 - e^{-\frac{K}{m}t} \right) ; s(0) = 0$$

Koshi masalasini hosil qilamiz. Uning yechimi

$$S = \frac{mg}{K} \left(t + \frac{m}{k} e^{-\frac{K}{m}t} \right) + C$$

Ko'rinishda bo'lib, $S(0) = 0$ shartga ko'ra $C = -\frac{m^2 g}{k^2}$ topiladi va

$$S(t) = \frac{mg}{K} t + \frac{m^2 g}{k^2} \left(e^{-\frac{K}{m}t} - 1 \right)$$

formulani hosil qilamiz. Yerga tushganda o'tilgan masofa H bo'lganligi uchun

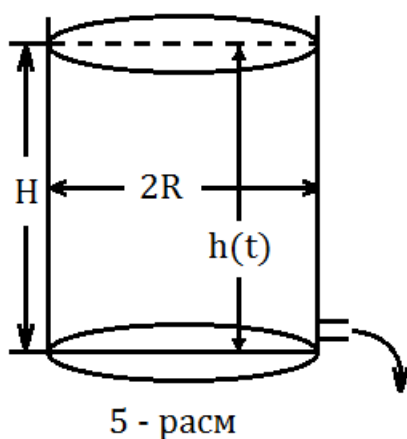
$$\frac{mg}{k} t + \frac{m^2 g}{k^2} \left(e^{-\frac{k}{m}t} - 1 \right) = H \quad (2.2)$$

tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglamani t ga nisbatan yechib yerga tushish vaqti T topiladi uni (2.1) formulaga qo'yib yerga tushgan paytdagi tezlik

$$V = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{K}{m}T} \right)$$

topiladi. Bu yerda K – proporsionallik koeffitsiyenti jism shakli, hajmiga bog'liq bo'lib tajribalardan topiladi. (2.2) tenglamani yechishda esa turli taqribiy usullardan foydalanishga to'g'ri keladi.

Ikkinchi masala: Vertikal holatdagi silindrik idishga (radiusi R , balanligi H , 5 – rasm) suv to'ldirilgan bo'lib, uning pastki qismida radiusi r bo'lgan kranli truba o'rnatilgan bo'lsin.



$t = 0$ vaqtdan boshlab quyidagi kran ochilsa idishdagi suv qancha vaqtda oqib tushadi? Torichelli qonuniga ko'ra quyidagi trubadan chiqayotgan suv tezligi idishdagi suv sathi balandligi $h(t)$ ga bog'liq bo'ladi va $v = \sqrt{2gh(t)}$ formula bilan ifodalanadi. Idishdagi suvning kamayish hajmi $\Delta V = (h(t) - h(t + \Delta t)) \cdot \pi R^2$ formula bo'yicha, oqib chiqqan suv hajmi esa $\pi r^2 \cdot v(t) \cdot \Delta t$ formula bo'yicha hisoblanadi. Moddiy balans (saqlanish) qonuniga ko'ra

$$(h(t) - h(t + \Delta t)) \cdot \pi R^2 \approx \pi r^2 v(t) \cdot \Delta t$$

bo'lishi kerak. Bu tenglikdan

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h(t) - h(t + \Delta t)}{\Delta t} \pi R^2 = \pi r^2 v(t)$$

$$-\pi R^2 \frac{dh}{dt} = \pi r^2 \cdot \sqrt{2gh} ; \quad h(0) = H$$

Koshi masalasini hosil qilamiz. Undan

$$-\frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{r^2}{R^2} \sqrt{2g} dt$$

hosil bo'ladi. Ikki tarafini integrallab

$$+2\sqrt{h} = -\frac{r^2}{R^2} \sqrt{2g} t + c$$

$H(0)=H$ shartga ko'ra $C = 2\sqrt{H} \text{ va } 2\sqrt{h} = -\frac{r^2}{R^2}\sqrt{2g}t + 2\sqrt{H}$ tenglikni hosil qilamiz. Suv tugaganda $h = 0$ bo'lganligi uchun, bu tenglikdan

$$0 = -\frac{r^2}{R^2}\sqrt{2g}t + 2\sqrt{H}$$

kelib chiqadi. Undan esa $t = \frac{R^2}{r^2}\sqrt{\frac{2H}{g}}$ formulani hosil qilamiz.

Hususan $H = 1.8m; R = 1m; r = 0.01m$ bo'lsa $g \approx 10 \frac{m}{sek^2}$ deb hisoblasak, $t=6000 \text{ sek} = 100 \text{ minut}$ kelib chiqar ekan. Bu yerda ham suvning qayishqoqlik koeffitsiyenti hisobga olinmadi. Aks holda model murakkablashgan bo'lar edi.

Keltirilgan masalalar barchasi ma'lum masalalar bo'lib, bu yerdagi asosiy maqsad – bu masalalarga matematik modellashtirish nuqtai nazaridan yondoshish va bunda uchraydigan muammolarni ifodalash, hamda tabiiy model bilan mutanosibligini baholash kabi tushunchalarni yoritishdan iborat edi.

§ 3. Optimizatsiya masalalari, maqsad funksiyasi

Inson o'z mehnat faoliyati davomida amalga oshiradigan barcha ishlarida biror maqsadni ko'zda tutadi. Agar qilinayotgan ish daromad bilan bog'liq bo'lsa, daromadni ko'paytirish, harajat bilan bog'liq bo'lsa, harajatlarni kamaytirish yo'lini izlaydi. Mumkin bo'lgan variantlar orasidan eng ma'qulini tanlashga harakat qiladi. Optimizatsiya, optimal variant so'zlarining lug'aviy ma'nosi ham aynan eng yaxshisi, eng maqbuli kabi tushuniladi.

Fikrimizni oydinlashtirish uchun quyidagi amaliy masalani qaraymiz. Kichik korxona metall silindrik bankalar (kraskalar, konservalar jamlanadigan) tayyorlashga ixtisoslashgan bo'lsin. Korxona hajmi V ga teng bo'lgan bankalardan N ta tayyorlab berishga buyurtma olgan, narxlari kelishilgan. Korxona buyurtmadan tushadigan daromadni ko'paytirish uchun unga sarflanadigan xomashyo miqdorini kamaytirish variantlarini izlashi kerak bo'ladi. Buning uchun hajmi V bo'lgan silindrlar orasidan to'la sirti eng kichik bo'ladiganini tanlashi kerak. Chunki har bir bankadan tejalgan metall sarfini butun partiya N ta bankaga ko'paytirilsa sezilarli tejamkorlik bo'lishi mumkin. Ifodalangan ishlab chiqarish masalasining matematik modelini tuzamiz.

$V = \pi R^2 \cdot H$ berilgan bo'lsa, $S_{to'la} = 2\pi R^2 + 2\pi RH \rightarrow \min$ bo'ladigan variant topilsin. Bu masalani bir o'zgaruvchili optimizatsiya masalasiga keltirish mumkin. Birinchi shartdan $H = V/(\pi R^2)$ ni aniqlab ikkinchi shartga qo'yilsa

$$S = 2\pi R^2 + 2\pi \cdot R/(\pi R^2) \rightarrow \min$$

$$S(R) = 2\pi R^2 + \frac{2V}{R} \rightarrow \min$$

shart kelib chiqadi. Bu yerda $S(R)$ – maqsad funksiyasi deyiladi. R – esa optimallashtirish parametri bo'lib qoladi. Optimal variantni topish uchun an'anaviy usullardan foydalanish mumkin. Funksiya ekstremumlari birinchi tartibli hosilasi nolga teng bo'lgan nuqtalarda bo'ladi. Shunga ko'ra ish tutsak

$$S' = 4\pi R - \frac{2V}{R^2} = 0 \Rightarrow R^3 = \frac{V}{2\pi} \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

yagona yechimni aniqlaymiz. Bu nuqtada $S'' = 4\pi + \frac{4V}{R^3} > 0$ bo'lgani uchun, funksiya minimumga erishadi. Xususan $V = 54\pi$ bo'lsa $R=3$ optimal variant ekanligi kelib chiqadi. Bunda $H = V/(\pi R^2) = 54\pi/(\pi \cdot 3^2) = 6$ optimal tsilindr o'q kesimi kvadrat bo'lishi kerak ekan. Bunda to'la sirt $S = 54\pi$ bo'lar ekan.

Xulosamiz yanada ishonarli bo'lishi uchun teskari masalani ham qarab ko'ramiz. To'la sirti $S_T = 54\pi$ bo'lgan silindrlar orasida hajmi eng katta bo'ladiganining o'lchamlari topilsin. Bu masala matematik modeli $S_{to'la} = 2\pi R^2 + 2\pi RH$ ma'lum bo'lsa $V = \pi R^2 H \rightarrow \max$ topilsin.

Bevosita maqsad funksiyasini aniqlashva uning maksimumini topishga o'tamiz.

$$H = \frac{S - 2\pi R^2}{2\pi R}$$

$$V = \pi R^2 \cdot \frac{S - 2\pi R^2}{2\pi R} = \frac{S \cdot R - 2\pi R^3}{2} \rightarrow \max$$

$$V'(R) = \frac{S}{2} - \frac{6\pi R^2}{2} = 0$$

$$6\pi R^2 = S \Rightarrow R = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$$

formula kelib chiqadi. Bu yerda ham ekstremum yagona va $V'' = -6\pi R < 0$ bo'lgani uchun bu nuqtada funksiya maksimal qiymatga erishadi. Xususan $S = 54\pi$ bo'lsa $R = 3$ kelib chiqadi. Bu holda

$H = \frac{S - 2\pi R^2}{2\pi R} = 6$ aniqlanadi. Bu yerda ham optimal variant o'q kesimi kvadrat bo'ladigan silindr bo'lishi kelib chiqadi. Hususiy masalani ishlash jarayonida

umumiy xulosa kelib chiqadi, ya'ni berilgan hajmga ega silindrlar ichida to'la sirti eng kichigi ham, berilgan to'la sirtga ega silindrlar ichida hajmi eng kattasi ham o'q kesimi kvadrat bo'ladigani bo'lar ekan. Bu xulosa barcha hollarda ham o'rinli bo'lavermas ekan. Hususan, juqorida ko'rilgan masalada buyurtmada qopqoqsiz silindrik idish aytilgan bo'lsa matematik model vayechimning qanday o'zgarishini tahlil qilib ko'ramiz.

$$V = \pi R^2 H = \text{const} \quad S = \pi R^2 + 2\pi RH \rightarrow \min$$

$$H = \frac{V}{\pi R^2} \quad ; \quad S = \pi R^2 + 2\pi R \cdot \frac{V}{\pi R^2} = \pi R^2 + \frac{2V}{R}$$

$$S' = 2\pi R - \frac{2V}{R^2} = 0 \Rightarrow R^3 = \frac{V}{\pi} \quad ; \quad R = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$$

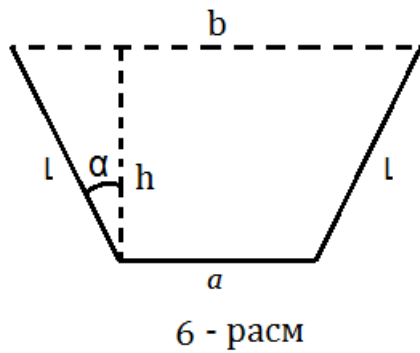
Hususan, $V = 27\pi$ bo'lgan bo'lsa

$$R = 3 \quad ; \quad H = \frac{V}{\pi R^2} = \frac{27\pi}{\pi \cdot 9} = 3$$

kelib chiqadi.

Bundan ko'rinadiki, silindr o'q kesimi bu holda kvadrat bo'lmas ekan. Ko'rilgan masalalardan kelib chiqadigan dastlabki, asosiy xulosamiz: optimizatsiya masalalarida matematik jihatdan birorta maqsad funksiya hosil qilinar va uning ekstremumini topish kerak bo'lar ekan.

Optimizatsiya masalalari boshqariladigan parametrlari soniga qarab bir o'lchovli, ikki o'lchovli va umumiy holda n – o'lchovli bo'lishi mumkin. Parametrlari soni ortgani sari masala murakkablashib boraveradi. Bu yerda biz yana bir amaliy masala asosida 2 o'lchovli optimizatsiya masalasiga namuna keltiramiz. Odatda sug'oriladigan yer maydonlarini ko'paytirish uchun birinchi navbatda kanallar qurish kerak bo'ladi. Bunda kanaldan suv shimilib ketmasligi uchun beton qoplamadan foydalaniladi. Kanalning ko'ndalang kesimi trapetsiya shaklida bo'lib (6 – rasm)



Uning perimetri $L = 2l + a$ o'zgarmas bo'lgan holda yuzasi eng katta bo'lishi uchun a , l , α qanday tanlash kerak degan masala yuzaga chiqadi. Bu yerda harajatlar beton qoplama bilan, yesa aynan qoplama perimetri L bilan bog'liq. Kanalning suv o'tkazish quvvati esa ko'ndalang kesimni yuzasi bilan bog'liq. Keltirilgan mulohazalar asosida masalaning matematik modelini tuzamiz.

$$\begin{cases} L = 2l + a = \text{const} \\ S = \frac{a + b}{2} \cdot h \rightarrow \max \end{cases}$$

$$a = L - 2l; b = a + 2l \cdot \sin \alpha; h = l \cdot \cos \alpha$$

$$S = \frac{L - 2l + L - 2l + 2l \sin \alpha}{2} \cdot l \cdot \cos \alpha$$

$$S(l, \alpha) = (L - 2l + l \sin \alpha) \cdot l \cos \alpha$$

Bu yerda ikki o'lchovli optimizatsiya masalasi hosil bo'ladi. $S(l, \alpha)$ funksiyaning minimumini topish uchun l, α bo'yicha birinchi tartibli hususiy hosilalarini nolga tenglab l, α larning optimal qiymatlariga nisbatan tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial l} = \cos \alpha (L - 4l + 2l \sin \alpha) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial \alpha} = l^2 \cos^2 \alpha - l \sin \alpha (L - 2l + l \sin \alpha) = 0 \end{cases}$$

Birinchi tenglamasidan kelib chiqadigan

$$\sin \alpha = \frac{4l - L}{2l}$$

ifodani ikkinchi tenglamasiga qo'yilsa

$$l^2(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - l(L - 2l)\sin \alpha = 0$$

$$-6l^2 + 2lL = 0 \Rightarrow 2l(l - L) = 0$$

tenglama kelib chiqadi. Undan esa

$$l = \frac{L}{3} ; \quad \alpha = \frac{L}{3} ; \quad \sin \alpha = \frac{1}{2} ; \quad \alpha = 30^\circ$$

kelib chiqadi. Demak kanal optimal o'lchamlari shunday tartibda olinishi kerak ekan. Shunday qilib optimizatsiya masalalari matematikaning bir, ikki argumentli funksiyalarning ekstremumlarini topish masalasiga aylanar ekan. Argumentlari soni ortgani sari bu masala murakkablashib, uni yechish uchun ham mahsus usullar yaratishga to'g'ri kelar ekan. Hattoki argumentli funksiyalar uchun ham bu masalaning aniq yechimini doimo chekli qadamlarda topish mumkin bo'lmaydi.

§ 4. Optimizatsiya masalalarini yechishda taqribiy usullar

Yuqorida ko'rilganidek optimizatsiya masalalari funksiya ekstremumini topishga kelar ekan. $x \in X$ to'plamda aniqlangan $y = f(x)$ funksiyaning shu to'plamdagi ekstremumini topish masalasini qaraymiz. Biz bu yerda bir o'lchamli optimizatsiya masalasi bilan cheklanamiz. Yanada aniqlik uchun $y = f(x)$ funksiyaning minimumini topish masalasinigina qaraymiz. Chunki $f(x)$ funksiya maksimumini topish masalasini $y = -f(x)$ funksiya uchun minimum topish masalasiga almashtirish mumkin. Umumiy holda masalan $X = [a; b]$ oraliq deb qarasak,

$$\min_{x \in [a; b]} f(x) = ?$$

masalani yechish talab qilinsin.

hisoblash texnikasi rivojlangan hozirgi davrda, ba'zi hollarda, hisobni ko'p talab qiladigan eng sodda usullardan ham foydalanish mumkin. Ulardan biri ketma- ket taqqoslash usuli. Agar funksiya minimumga erishadigan nuqtasi $\delta > 0$ aniqlikda topilishi talab qilinayotgan bo'lsa $[a, b]$ oraliqni $h = \frac{b-a}{n} < \delta$ qadam bilan n ta bo'lakka bo'lamiz

$$x_i = a + i \cdot h ; i = 0, 1, 2, \dots, n$$

Bu nuqtalardagi $f(x_i)$ qiymatlari orasidan eng kichigini tanlasak, uni noma'lum qiymat sifatida qabul qilish mumkin, ya'ni

$$\min_{a \leq x \leq b} f(x) \approx \min_{a \leq i \leq n} f(x_i)$$

Ko'rilgan bu usul ko'p hisoblashlarni talab qiladi va passiv usullardan hisoblanadi. Hisoblangan hech qaysi qiymat strategiyaning o'zgarishiga sabab bo'lolmaydi. Funksiya qiymatlarini hisoblash soni $n > \frac{b-a}{\delta}$ tengsizlik bo'yicha aniqlanadi.

Oraliqni teng ikkiga bo'lish usuli. Bu usulda berilgan oraliqda funksiya unimodal bo'lishi talab qilinadi. Agar $[a, b]$ oraliqda funksiya uzluksiz bo'lib shu oraliqda yagona minimumi bo'lsa, $y = f(x)$ $[a, b]$ oraliqda unimodal deyiladi. Minimumga erishish nuqtasi x ni $\varepsilon > 0$ aniqlikda aniqlash talab qilingan bo'lsin. Usul mohiyati quyidagicha $\delta \in (0; 2\varepsilon)$ qiymat aniqlanib $[a, b]$ oraliqdan

$$x_1 = \frac{a+b}{2} - \frac{\delta}{2}; x_2 = \frac{a+b}{2} + \frac{\delta}{2}$$

nuqtalarni olib bu nuqtalardagi funksiya qiymatlari olinadi. Agar $f(x_1) \leq f(x_2)$ bo'lsa $(x_1; x_2)$ oraliqda funksiya o'sishni boshlagan, ya'ni minimumdan o'tib ketgan bo'ladi va $b = x_2$ deb oraliqning chap tarafi olib qolinadi. Agar $f(x_1) > f(x_2)$ bo'lsa, funksiya $(x_1; x_2)$ oraliqda kamayayotgan bo'lib, minimumga hali yetmagan bo'ladi va $a = x_1$ deb oraliqning o'ng yarmini olib qolamiz. Bu jarayon $b - a < \varepsilon$ bo'lguncha davom ettiriladi. Qadamlar soni

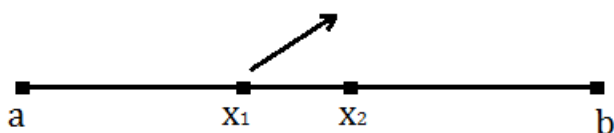
$$\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon \Rightarrow 2^n > \frac{b-a}{\varepsilon} \Rightarrow n > \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}$$

tengsizlikka ko'ra aniqlanadi.

Oltin qirqimlar usuli. Bu usullar funksiyalar ko'rinishi murakkab, qiymatlarini hisoblash ko'plab arifmetik amallar orqali amalga oshiriladigan hollarga mo'ljallangan, hamda hisoblash texnikalari rivojlanmagan davrlarda yaratilgan. Shuning uchun usul funksiya qiymatlarini qanchalik kam hisoblashni talab qilsa shunchalik yaxshi hisoblangan. Oraliqni teng ikkiga bo'lish usulida har qadamda funksiya qiymatini yangi x_1, x_2 nuqtalarda hisoblash kerak bo'ladi va ulardan keyinchalik foydalanilmaydi. Oltin qirqimlar usuli bu kamchilikdan holi bo'lib, har qadamda faqat bitta yangi nuqta qo'shiladi. Buning uchun $[a; b]$ oraliq

$$x_1 = a + \frac{3 - \sqrt{5}}{2} (b - a); x_2 = a + \frac{\sqrt{5} - 1}{2} (b - a)$$

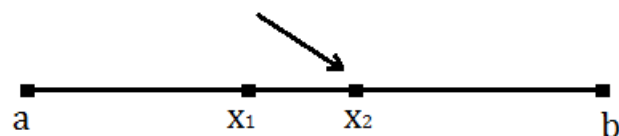
nuqtalar yordamida 3 ta bo'lakka bo'linadi.



Agar $f(x_1) < f(x_2)$ bo'lsa keyingi qadam uchun

$$a = a; \quad b = x_2; \quad x_2 = x_1; \quad x_1 = a + \frac{3 - \sqrt{5}}{2} (b - a)$$

olinadi.



Agar $f(x_1) > f(x_2)$ bo'lsa keyingi qadam uchun

$$a = x_1; \quad b = b; \quad x_1 = x_2; \quad x_2 = a + \frac{\sqrt{5} - 1}{2} (b - a)$$

olinadi.

Bu jarayon $b - a < \varepsilon$ bo'lguncha davom ettiriladi. Keltirilgan algoritmgaga ko'ra har qadamda faqat bitta yangi nuqta x_1 ёки x_2 da funktsiyani hisoblash kerak bo'ladi. Bu usul o'z davri uchun juda samarali bo'lgani uchun ham oltin qirqimlar usuli deb ataladi.

Ko'rilgan usullarning uchchalasi ham dasturlanishi mumkin va barcha hisoblarni kompyuterda avtomatik rejimda bajarilishi mumkin. Bu dasturlar kompyuterlarning dasturiy ta'minotida, ko'plab o'quv dasturiy tizimlar tarkibiga kiritilgan. Optimizatsiya masalalarini yechishda ulardan samarali foydalanish mumkin. Masala va uni yechish usullarining murakkablashish jarayonini namoyish qilish uchun ikki argumentli funktsiyalarning ekstremumlarini topish usullaridan biri haqida ma'lumot keltiramiz.

$$z = f(x_1, x_2) \quad (x_1, x_2) \in D$$

funktsiya D sohada botiq bo'lsa uning minimumi mavjud (D sohada) bo'ladi.

Funktsiya botiq bo'lishi uchun funktsiya 2 – tartibli hosilalaridan tuziladigan vagessian deb ataladigan matritsasi

$$G = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1,2,\dots,n}$$

musbat aniqlangan bo'lishi kerak. Bu yerda n o'zgaruvchilari soni. Hususan, $n = 2$, ikki argumentli funktsiyalar uchun bu shart

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} > 0$$

ko'rinishni oladi.

Funksiya minimumini topishda keng tarqalgan usullardan biri bu gradient bo'yicha pasayish usulidir. Bu usulda hisoblashlar tartibi quyidagicha bo'ladi. Minimum mavjud bo'lgan D sohadan $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \in D$ tanlanadi.

Navbatdagi yaqinlashishlar

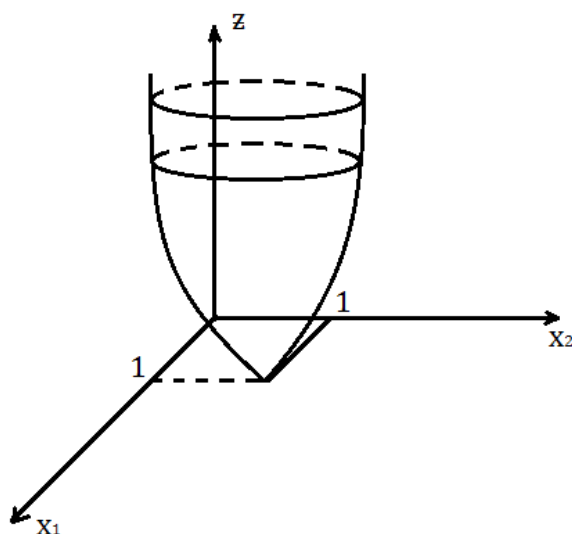
$$x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \alpha \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}; \quad x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - \alpha \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

formulalar bilan hisoblanadi. Bu yerda α kichik son bo'lib uning qiymati

$$f(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}) < f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$$

shartga ko'ra tanlanadi. Misol

$Z = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2$ funksiya uchun $\min Z = f(1; 1) = 0$ ekanligi ko'rinish turibdi (7 – rasm)



7 - rasmi

Hisoblash jarayoni

$$x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - 2\alpha \cdot (x_1^{(k)} - 1)$$

$$x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - 2\alpha \cdot (x_2^{(k)} - 1)$$

formulalar bilan ifodalanadi. Hususan

$$x_1^{(0)} = 0 \quad x_2^{(0)} = 0; \quad \alpha = 0.1 \text{ deb olsak}$$

$$x_1^{(1)} = 0.2; \quad x_2^{(1)} = 0.2$$

$$x_1^{(2)} = 0.36; \quad x_2^{(2)} = 0.36$$

Bo'lishini ko'ramiz.

§ 5. Xatoliklar turlari va ularning manba'lari. Absolyut va nisbiy xatoliklar

Amaliy masalalarni yechish jarayonining har bosqichida imkoniyat va vaziyatga bog'liq tarzda xatoliklar paydo bo'lishi mumkin. Ulardan birinchisi matematik model tuzish jarayonida tabiiy modelning ba'zi omillarini hisobga olinmasligi tufayli vujudga keladi. Bu xatolikni modellashtirish xatoligi deyiladi. Bunday hollar bilan avvalgi ma'ruzalarda keltirilgan masalalarda qisman tanishgan edik. Bu asosan matematik model juda murakkablashib ketmasligi uchun, yoki ba'zi omillarni hisobga olish uchun yetarli qonuniyatlar bo'lmaganligi uchun kelib chiqadi. Ikkinchi tur xatolik, bu o'rganilayotgan jarayonga taalluqli parametrlar qiymatlarida uchraydigan xatoliklar, ular asosan parametrlarni aniqlash uchun ishlatiladigan vositalar (priborlar) imkoniyatidan kelib chiqadi. Bu xatoliklarni asosan bartaraf qilib bo'lmas xatolik deyiladi. Chunki parametrlar tarkibidagi bu xatolik hisoblashlar qanchalik aniq bajarilmasin natijani aniq olishga imkoniyat bermaydi. Bu xatoliklar natijani olishgacha bajariladigan amallar ko'paygani sari ortib borishi mumkin. Aksariyat hollarda matematik model murakkab masalaga aylanib, uni yechish uchun taqribiy usullardan foydalanishga to'g'ri keladi. Bunda vujudga keladigan xatolik usul xatoligi deyiladi. Hozirgi kunda amaliy masalalar asosan kompyuterlarda bajariladi. Bunda ham kompyuterlarda sonlarning ifodalanish imkoniyatiga qarab yaxlitlash xatoligi kelib chiqadi. Bu xatolik ham amallar bajarilish jarayonida ko'payib borishi mumkin. Kompyuterlarda sonlarni o'nlik sanoq sistemasida ifodalaganimizda davriy kasrlar yaxlitlanadi. Masalan $\frac{1}{3} = 0,333\dots$ kompyuter imkoniyatlariga qarab raqamlar soni chekli bo'lganligi uchun $\frac{1}{3} = 0,333\dots 3$ to'plamini belgilab chekli kasrga almashtiriladi. Bunda yo'l qo'yilgan xatolik yaxlitlash xatoligi deyiladi. Bunday xatolik hisoblash algoritmining har bir amalida vujudga kelishi mumkin.

Shunday qilib amaliy masala (tabiiy model) yechimini topilgach uning qanchalik to'g'ri va ishonchli ekanligini baholash ham o'ziga yarasha jiddiy va masuliyatli masala ekanligini ko'ramiz. Modellashtirish xatoligi dastlabki bosqichda muttaxislar tomonidan aniqlanish kerak.

Biz bu yerda bartaraf qilib bo'lmas xatolik va uning hisoblash jarayonida natijaga tasiri haqida fikr yuritamiz. Tahlilni oddiy masalalardan boshlaymiz. Faraz qilaylik biror xona yuzasini hisoblash talab qilinsin (uni qoplash uchun zarur parket miqdori, yoki uni bo'yash uchun kerak bo'ladigan bo'yoq miqdorini aniqlash uchun). Bunda xona to'g'ri to'rtburchak shaklida deb faraz qilib (xonalar asosan shunday loyihalanadi) $S = a \cdot b$ formuladan foydalanamiz. Bu yerda a va b xonaning bo'yi va eni bo'lsin. Ularni aniqlash uchun o'lchov vositasidan (taxta chizg'ich yoki metall lentali o'lchov vositasi) foydalaniladi. Bunda aniqlangan $a = 12$, $b = 8\text{m}$ chiqdi deylik. Hatto shu oddiy masalada ham chiqqan $S = 12 \cdot 8 = 96\text{m}^2$ qiymatni aniq deb bo'lmaydi. Chunki o'lchash jarayonida chizg'ichni qayta-qayta qo'yishga to'g'ri kelishi mumkin, bunda chizg'ichning bir to'g'ri chiziq bo'ylab qo'yilishi, avvalgi va keyingi qo'yilishlari aynan bir nuqta

orqali ulanib ketishini taminlashga kafolat yo'q. Shuningdek chizg'ich shkalalari ham faqat mm bo'linishiga ega. Undan tashqari bunday hollarda shkala ko'rsatkichi santimetr gacha yaxlitlab o'qilishi odat bo'lib qolgan. Shuning uchun odatda avvaldan $a = 12m \pm 5sm$ $b = 8m \pm 5sm$ ko'rinishida xatolik bo'lishi mumkin degan ogohlantirish keltiriladi. Demak, bunda yuza ham aniq bo'lmaydi. Yuza uchun ham quyidagicha chegaralarnigina ko'rsatish mumkin.

$$(12 - 0,05)(8 - 0,05) < S < (12 + 0,05)(8 + 0,05) \Rightarrow 95,0025 < S < 97,0025$$

Demak aniqlangan yuza, qiymati shu intervalda joylashgan aniq qiymat uchun, taqribiy baho sifatida xizmat qilishi mumkin ekan. Agar xona shakli to'g'ri to'rtburchakdan oz bo'lsada farq qilsa yana qo'shimcha xatolik paydo bo'ladi.

Bunday holat bilan amaliy masalalarning deyarli barchasida duch kelishimizni tasavvur qilish qiyin emas. Shuning uchun biz bu yerda masalalar parametrlarida mavjud bo'lgan bartaraf qilib bo'lmas xatolikning masala yechimiga ta'sirini aniqlash qoidalari bilan shug'ullanamiz. Qulaylik uchun, amaliyotdan holi, matematik masala sifatida o'rganamiz. Aniq miqdor X va uning taqribiy qiymati X^* taqribiy miqdor belgisini kiritamiz. Odatda aniq miqdor X ma'lum bo'lmaydi, faqat uning taqribiy qiymati X^* ma'lum bo'ladi. Ular orasidagi farqning absolyut qiymati $|X^* - X|$ absolyut xatolik deyiladi. Bu xatolikni esa faqat baholashimiz mumkin, ya'ni bu xatolik ko'pi bilan shuncha bo'lishi mumkin qabiladagi gaplar. Ta'rifga ko'ra

$$|X^* - X| < \Delta X \quad (5.1)$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi Δx sonlar orasidagi eng kichigini X^* - taqribiy miqdorning absolyut xatoligi deyiladi va aynan Δx ko'rinishida belgilanadi. (5.1)

tengsizlikdan aniq miqdor X uchun

$$X^* - \Delta X < X < X^* + \Delta X \quad (5.2)$$

kelib chiqadi. Xususan $X^* = 12, \Delta x = 0.07$ bo'lsa aniq miqdor uchun $X \in (11,93; 12,07)$ fikrni aytilishimiz mumkin ekan. (5.2) tengsizlik asosida arifmetik amallar xatoligini keltirib chiqarishi mumkin.

$x_1^*, \Delta x_1, x_2^*, \Delta x_2$ ma'lum bo'lsa

$Z = x_1^* + x_2^*$ absolyut xatoligi topilsin.

$$x_1^* - \Delta x_1 < x_1 < x_1^* + \Delta x_1 \quad (5.3)$$

$$x_2^* - \Delta x_2 < x_2 < x_2^* + \Delta x_2 \quad (5.4)$$

tengsizliklarni qo'shsak

$$(x_1^* + x_2^*) - (\Delta X_1 + \Delta X_2) < x_1 + x_2 < (x_1^* + x_2^*) + (\Delta X_1 + \Delta X_2)$$

kelib chiqadi $\Delta Z = \Delta X_1 + \Delta X_2$ belgilash kiritsak.

$$Z - \Delta Z < Z < Z + \Delta Z$$

(5.2) ko'rinishdagi tengsizlik, ya'ni $\Delta Z = \Delta X_1 + \Delta X_2$ kelib chiqar ekan.

Shuningdek $Z = x_1^* \cdot x_2^*$ bo'lsa (5.3) va (5.4) tengsizliklarni ko'paytiramiz

$$(x_1^* - \Delta X_1)(x_2^* - \Delta X_2) < x_1 \cdot x_2 < (x_1^* + \Delta X_1)(x_2^* + \Delta X_2)$$

$$x_1^* x_2^* - (x_1^* \Delta X_2 + x_2^* \Delta X_1) < x_1 x_2 < x_1^* \cdot x_2^* + (x_1^* \Delta X_2 + x_2^* \Delta X_1)$$

hosil bo'ladi. Buyurda $\Delta X_1 \cdot \Delta X_2$ ko'paytirmayuqoritari blikichikmiqdor bo'lgani uchun tashlab yuboriladi. Demak ko'paytmaning absolyut xatoligi uchun $\Delta Z = x_1^* \Delta X_2 + x_2^* \Delta X_1$ formula kelib chiqadi. Shuningdek bo'linma uchun ham

$$Z = \frac{x_1^*}{x_2^*}; \Delta Z = \frac{x_2^* \cdot \Delta X_1 + x_1^* \cdot \Delta X_2}{x_2^{*2}}$$

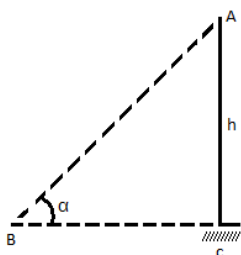
formula kelib chiqadi. E'tibor berilsa absolyut xatolik formulasi differensial formulasiga o'xshash. Shuning uchun n – parametrli taqribiy ifoda

$Z = f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ uchun absolyut xatolik

$$\Delta Z = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta x_i \quad (5.5)$$

formula bo'yicha hisoblanar ekan.

Keltirilgan formulalar asosida quyidagi masalani tahlil qilamiz. Minora balandligini yerdan turib hisoblash mumkinmi?



Buning uchun yerda turib $a=BC$ masofani hisoblash mumkin. Shuningdek α burchakni ham hisoblash mumkin. U holda noma'lum balandlik h uchun $h = a \cdot \operatorname{tg} \alpha$ formula o'rinli. a va α qiymatlarini hisoblashda xatolikka yo'l qo'yilgan bo'lsin, ya'ni

$a^* = 100m, \Delta a = 0,2m, \alpha^* = \frac{\pi}{4}; \Delta \alpha = 0,05$ bo'lsin. U holda

$$\Delta h = \frac{\partial f}{\partial a} \cdot \Delta a + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \cdot \Delta \alpha = \operatorname{tg} \alpha^* \Delta a + a^* \frac{1}{\cos^2 \alpha^*} \cdot \Delta \alpha$$

Demak $\Delta h = 1 \cdot 0,2 + 100 \cdot 2 \cdot 0,05 = 10,2m$ kelib chiqadi. $h^* = 100 \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 100m, \Delta h = 10,2m$ bo'lib xatolikni asosiy hissasi burchak hisoblashdagi xatolik tufayli kelib chiqar ekan. Demak burchakni aniqroq hisoblash kerak degan tavsiyani berishimiz mumkin.

Odatda amaliy masalalarda nisbiy xatolik tushunchasi muhimroq rol o'ynaydi. Tasavvur qilaylik dehqon bir qop kartoshka vaznini $X^* = 50$ kg hisoblab $\Delta X = 0,5$ kg xatolikka yo'l qo'ygan, qassob $y^* = 1$ kg go'shtni tortishda $\Delta y = 100g$ xatolikka yo'l qo'ygan. Absolyut xatolik 2 – sida kamroq. Mantiqan o'ylaganda esa 1 – sining xatoligi ahamiyatsiz ekanligi ko'rinib turibdi. Nisbiy xatolik ta'rifga ko'ra $\delta x = \Delta x / x^*$ formula bo'yicha hisoblanadi. Bu formulaga ko'ra

$$\delta x = \frac{\Delta x}{X^*} = \frac{0,5}{50} = 0,01; \delta y = \frac{0,1}{1} = 0,1$$

ekanligini kelib chiqadi va mantiqiy xulosamiz o'rinli ekanini ko'ramiz. Shuning uchun amaliyotda aynan nisbiy xatolikka ko'proq e'tibor beriladi. Nisbiy xatolik

xatolikning foiz miqdorini ham ifodalash imkoniyatini beradi. Xatolik foizi $\delta x \cdot 100\%$ oddiygina formula bilan hisoblanadi. Xususan yuqoridagi misollarda x^* ning xatoligi 1%, y^* xatoligi 10% ekanligini ko'rinadi va xulosamiz yanada ishonarli chiqadi.

Amaliy masalalardan olingan natijalar taqribiy chiqishiga izoh berildi. Shuning uchun bu natijalarni ifodalashda ham bu holni aks ettirish uchun taqribiy miqdorning ishonchli raqamlari degan tushuncha kiritiladi. Masalan natija $x^* = 234,105749, \Delta x = 0,007$ ekanligi kelib chiqqan bo'lsin. Hisoblar kompyuterda bajarilgan raqamlar soni kompyuter imkoniyatlariga bog'liq tarzda kelib chiqadi. Biz x^* qiymatidagi qaysi raqamlar ishonchli, qaysilarini bekorga yozib o'tirmasa ham bo'ladi degan savolni hal qilishimiz kerak. Bunda quyidagi qoidaga rioya qilinadi. Umumiyat uchun o'nlik sistemadan son ifodasidagi raqamlarni quyidagicha ifodalaymiz.

$$x^* = \alpha_k \alpha_{k-1} \dots \alpha_1, \alpha_0, \alpha_{-1}, \alpha_{-2}, \dots \alpha_{-m}$$

Bu yerda indeks raqamga mos o'nlik darajasi bilan bir xil. Agar

$$\Delta x < 0,56 \cdot 10^i$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa son tarkibidagi α_i raqam ishonchli, aks holda ishonchsiz

hisoblanadi. Bu yerda i – musbat ham, manfiy ham bo'lishi mumkin. Bizning

misolimizda x^* raqamlari $9 = \alpha_{-6}$, uning uchun $0,007 < 0,56 \cdot 10^{-6}$

bajarilmaydi. Demak 9 raqam ishonchsiz. Shuningdek 4,7,5 lar ham ishonchsiz

bo'lar ekan. 0 raqami uchun $i = -2$, $0,007 < 0,56 \cdot 10^{-2}$ bajarilmaydi. Demak 0

ham ishonchsiz. 1 raqam uchun $i = -1$, $0,007 < 0,56 \cdot 10^{-1}$ bajariladi, demak 1

ishonchli. Shunday qilib x^* qiymati ishonchli raqamlar bilan ifodalanganda

$x^* = 234,1$ bo'lar ekan; $\Delta x = 0,007 + 0,006 = 0,013$. Bu yerda umumiy

xatolik boshlang'ich va yaxlitlash xatoliklari yig'indisiga teng bo'ladi.

§ 6. Hisoblash jarayonlarining turg'unligi haqida turg'un bo'lmagan jarayonlarga misollar

Amaliy yoki matematik masalalar haqida so'z boshlaganimizda masala korrekt bo'lishi kerak deb o'tildi. Korrektlikning asosiy shartlaridan biri natijaning boshlang'ich qiymatlarga uzluksiz bog'liqligi deb ko'rsatiladi. Bu paragrafida biz aynan shu mavzuga to'xtalamiz. Buning uchun oddiy misollarni ko'rib o'taylik

$x^* = 10, \Delta x = 0,05, y^* = 1000, \Delta y = 0,05$ bo'lsa $Z = x \cdot y; \Delta Z$ topilsin

$$Z = 10 \cdot 1000 = 10000; \Delta Z = x^* \cdot \Delta y + y^* \cdot \Delta x = 10 \cdot 0,05 + 1000 \cdot 0,05 = 50,5$$

Natija xatoligi boshlang'ich xatolar (0,05) dan 1000 barovar ko'payib ketdi. Oddiy bir amalli jarayonning o'zida shunday holni kuzatayotibmiz. Hisoblash jarayonida minglab, millionlab amallar bajarilishini hisobga olsak, shuningdek boshlang'ich parametrlardagi bartaraf qilib bo'lmas xatoliklarning mavjudligini e'tiborga olsak natijaga deyarli ishonch yo'qoladigandek tuyuladi. Shuning uchun hisoblash jarayonining turg'unligini ta'minlovchi omillar va ularga rioya qilish shartlarini esda tutishimiz kerak. Avvalgi ma'ruzada keltirilgan formula (5.5) ga ko'ra

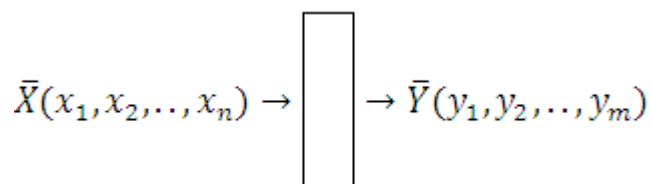
$$\Delta Z = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$$

Turg'unlikning sodda ifodasi shundan iboratki, boshlang'ich xatolar kamaygan sari natija xatoligi ham kamayishi kerak. Xususan shunday K topilsaki

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| < K; i = 1, 2, \dots, n \text{ bo'lsa } \Delta Z < K \cdot \sum_{i=1}^n \Delta x_i \text{ kelib chiqadi.}$$

$\Delta x_i \rightarrow 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$ bo'lsa $\Delta Z \rightarrow 0$ ekanligi ko'rinadi. Shuningdek talab qilingan ΔZ aniqlikni ta'minlash uchun boshlang'ich parametrlar $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ qanday aniqlikda hisoblanishi kerakligi ham kelib chiqadi.

Albatta (5.5) ko'rinishdagi formulani umumiy hisoblash jarayoni uchun keltirib chiqarish qiyin. Ko'p bosqichli, murakkab hisoblash jarayonlari uchun bunday formula chiqarish mumkin ham emas. Bunda faqat har bir bosqichning o'zida turg'unlikni ta'minlash shartlariga rioya qilishga harakat qilinadi. Umumiy tavsiyani esa quyidagicha ifodalash mumkin. Hisoblash jarayonini bir qora quti (kompyuter) desak unga $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymatlar beriladi.



Ma'lum amallar bajarilgach $y_1, y_2, \dots, y_m$ natijalar chiqadi. Bu apparat, to'g'rirog'i hisoblash dasturi sozlangan bo'lsin. Turg'unlikni tekshirish uchun sonli tadqiqotlar yordamida boshlang'ich qiymatlarni tebratib ko'riladi $x_1 \pm \Delta x_1, x_2 \pm \Delta x_2, \dots, x_n \pm \Delta x_n$ va bu holda hosil bo'ladigan natijalar $y_1 \pm \Delta y_1, y_2 \pm \Delta y_2, \dots, y_m \pm \Delta y_m$ qiymatlariga qarab hisoblash jarayonining turg'unligini baholash mumkin. Bu yerda keltirilgan mulohazalar bu soha haqida tasavvur berishi mumkin. Aslida bu soha amaliy matematikaning mustaqil yo'nalishi bo'lib unga bag'ishlangan ko'plab adabiyotlar mavjud.

Fikrimizni yanada tushunarli, ishonarli bo'lishi uchun quyidagi misollarni keltiramiz.

$$x^* = 100; \Delta x = 0,01; y^* = 0,01; \Delta y = 0,001$$

$$Z^* = \frac{x^*}{y^*} = \frac{100}{0,01} = 10000$$

$$\Delta Z = \frac{y^* \cdot \Delta x + x^* \cdot \Delta y}{y^{*2}} = \frac{0,01 \cdot 0,01 + 100 \cdot 0,001}{(0,01)^2} \approx \frac{0,1}{10^{-4}} = 0,1 \cdot 10^4 = 1000$$

Natija xatoligi boshlang'ich xatolardan 10^5 marta ortib ketdi. Ikkinchi misol sifatida

$$\begin{cases} 0,01x_1 + 100x_2 = 100,01 \\ 0,01x_2 = 0,01 \end{cases}$$

sistemani olaylik. Uning yechimi $x_1 = 1, x_2 = 1$ ekanligi ko'rinib turibdi. Sistemaning o'ng tarafini tebratib ko'ramiz, ya'ni 2 – tenglama o'ng tarafi 0,01 emas 0,011 bo'lsin. Bor yo'g'i 0,001 ga o'zgartirdik. Hosil bo'lgan sistema

$$\begin{cases} 0,01x_1 + 100x_2 = 100,01 \\ 0,01x_2 = 0,011 \end{cases} \text{ yechimi } x_2 = 1,1$$

$$x_1 = \frac{100,01 - 100 \cdot 1,1}{0,01} = 999$$

kelib chiqadi. Bu yechim avvalgi yechimdan 999 baravar katta foizda hisoblasak 99900% hatolik hosil bo'lyapti. Hammasi arziyas 0,001 xatolik tufayli yuzaga kelgan nosozlik. Demak bu yerdan hisoblash jarayonini aslo turg'un deb bo'lmas ekan. Bu yerda keltirilgan chiziqli algebraik tenglamalar sistemalari uchun maxsus turg'unlik nazariyasi mavjud. Shuningdek nokorrekt qo'yilgan masalalarni yechish uchun ham maxsus qo'llanma, tavsiyalar yaratilgan.

§ 7. Approksimatsiya masalasi. Bazis funksiyalar. Norma tushunchasi.

Amaliy masalalar va matematik tahlilda murakkab funksiyalarni sodda, elementar funksiyalar orqali ifodalash zarurati paydo bo'ladi. Funksiya qiymatlarini hisoblash, grafiklarini chizish, umuman tahlil qilish masalalarini soddalashtirish maqsadida turli usullardan foydalaniladi. Bunda approksimatsiya masalasi, ya'ni bir funktsiyani boshqa funksiya bilan almashtirish masalasi paydo bo'ladi. Tabiiy, bunday almashtirish ma'lum mezonlar asosida bajarilishi kerak. $y = f(x)$ funksiya o'rniga $y = g(x)$ funksiya olinadigan bo'lsa $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning qandaydir bir – biriga yaqinlik sharti, belgisi bo'lishi kerak. Bu almashtirishga qanchalik haqli ekanligimizni baholay olishimiz kerak.

Buning uchun o'lchov birligi sifatida funksiya normasidan foydalaniladi. Funksiya normasini turli usullarda kiritish mumkin. Odatda quyidagi normalardan foydalaniladi.

$$\|f(x)\|_0 = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

$$\|f(x)\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$$

$$\|f(x)\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}$$

Kiritilgan normalar asosida $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning yaqinlik darajasini

$$\|f(x) - g(x)\|_k < \varepsilon$$

ko'rinishda ifodalash mumkin. Bu yerda ε talab qilinayotgan aniqlik chegarasi $K = 0, 1, 2$ lardan biri masala mohiyatiga qarab tanlanadi. Ko'rinib turibdiki, agar $f(x) \equiv g(x)$ bo'lsa, barcha K lar uchun

$\|f(x) - g(x)\|_k = 0$ bo'ladi. Bu tabiiy eng ideal holat deb hisoblanadi. Ayirma normasi qanchalik kichik bo'lsa, $f(x)$ ni $g(x)$ bilan almashtirishga shunchalik haqlimiz deb hisoblashimiz mumkin. $g(x)$ funksiya sifatida esa, yuqorida ta'kidlanganidek, sodda funksiyalar tanlangani ma'qul.

Odatda approksimatsiya masalasini yechishda, bazis funksiyalar tushunchasi kiritiladi. Har qanday funksiyaning aynan shu bazis funksiyalar orqali ifodalash mumkinligi va yo'llari ko'rsatiladi. Biz bu yerda ayrim namunalarni keltiramiz.

Bazis funksiyalar sifatida darajali funksiyalar, ya'ni $x^0 = 1, x, x^2, x^3, \dots, x^n$ lar olinsa $f(x)$ funksiyaning shu funksiyalar orqali yoyilmasini

$$f(x) \approx a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = g_n(x)$$

ko'rinishda olinadi. Bu yerda $a_0, a_1, \dots, a_n$ ko'effitsiyentlarni o'zgartirish hisobiga turli-tuman $g(x)$ funksiyalarni hosil qilish mumkin. Ular orasidan shundayini tanlash kerakki, $\|f(x) - g_n(x)\|_k$ iloji boricha kichik bo'lsin. Veyershtrass teoremasiga ko'ra agar $f(x)$ yetarli darajada differensiallanuvchi funksiya bo'lsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(x) - g_n(x)\| = 0$$

ekanligi isbotlangan. Bunga dalil sifatida Makloren, Teylor qatorlarini keltirish mumkin.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad (7.1)$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (7.2)$$

Makloren qatori (7.1) $x_0 = 0$ nuqta atrofida, Teylor qatori (7.2) esa $x = x_0$ nuqta atrofida $f(x)$ funksiya qiymatlari va xususiyatlarini o'rganishga xizmat qilishi mumkin.

Shuningdek bazis funksiyalar sifatida

$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \sin 3x, \cos 3x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ funksiyalar olinsa $f(x)$ funksiya uchun Furiye qatoridan foydalanish mumkin.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (7.3)$$

Furiye koeffitsiyentlari

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos nx dx, b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

formula bo'yicha hisoblanadi. (7.3) qator uchun ham Vetershtass teoremasi o'rinli ekan. Furiye qatorlari to'liqinli, davriy jarayonlar uchun qulay va samarali bo'lar ekan.

Bu yerda asosiy masala (7.1), (7.2), (7.3) cheksiz qatorlarning nechta hadi bilan cheklanish mumkin va qanday xatolik bo'ladi degan savollardan iborat bo'lib qoladi. Bu savollarning ham yechim, javoblari mavjud. Amaliyotda keltirilgan bazis funksiyalardan farqli boshqa turli bazis funksiyalardan ham foydalaniladi. O'z o'rnida ularning afzalliklari haqida ham fikr yuritiladi. Bazis funksiyalarning ba'zilar hisoblashlar uchun, ba'zilar esa nazariy tahlil uchun ma'qul bo'lar ekan. Amaliy jihatdan barcha hollar bir – biriga o'xshash bo'lib, tanlangan bazis funksiyalar $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ lar uchun

$$\left\| f(x) - \sum_{k=0}^n C_k \varphi_k(x) \right\|_{\alpha} = F(C_0, C_1, \dots, C_n) \rightarrow \min$$

masalani yechishga keltirilar ekan. Bu yerda $\alpha=0,1,2$ lardan tanlangan birortasi.

**§ 8. Jadval ko'rinishda berilgan funksiyalar uchun interpolyatsiya masalasi.
Lagranj interpolyatsion ko'phadi**

Amaliyotda jarayonning qandaydir parametrlari bog'liq ekanligi ma'lum, lekin ular orasidagi bog'lanish qonuniyati noma'lum bo'lgan hollar ko'p uchraydi. Bunday hollarda tajriba yoki kuzatuvlar asosida ular haqidagi jadval ma'lumotini hosil qilish mumkin.

x_i	x_0	x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n
y_i	y_0	y_1	y_2	...	y_{n-1}	y_n

Berilgan jadval ma'lumot asosida X va Y orasidagi funktsional bog'lanishni topish masalasi interpolyatsiya masalasi deyiladi. Xususan bazis funksiyalar sifatida darajali funksiyalar $x^0, x, x^2, \dots, x^n$ lar olinsa bog'lanish

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \quad (8.1)$$

ko'rinishda izlanadi. Bu yerda $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ noma'lum ko'effitsiyentlarni shunday aniqlash kerakki, tuzilgan (8.1) n – darajali ko'phad jadval qiymatlarga to'la mos kelsin. Bu shartlarga ko'ra $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ larni aniqlash uchun quyidagi $n+1$ noma'lumli $n+1$ ta chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

[illegible]

Bu sistemani yechib, aniqlangan $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ qiymatlarini (8.1)ga qo'yilganda hosil bo'lgan ko'phad interpolyatsion ko'phad deyiladi. interpolyatsion ko'phadga qo'yiladigan yagona va asosiy talab, uning jadval qiymatlarga to'la mosligi.

Bu shart $P_n(x_i) = y_i; i = 0, 1, 2, \dots, n$ ko'rinishida ifodalanadi. Shuning uchun interpolyatsion ko'phad tuzishda (8.2) murakkab sistemani yechishdan

soddaroq yo'l yo'qmikan degan yo'nalishlarda tadqiqotlar olib borilgan. Haqiqatdan ham n – ortgan sari (8.2) sistema murakkablashib boraveradi va uni yechishning o'zi katta hisoblash jarayoniga aylanadi. Interpolyatsiya masalasini yechishning original (o'ziga xos) usuli fransuz matematigi Lagranj tomonidan yaratilgan.

Lagranj g'oyasiga ko'ra berilgan interpolyatsiyalash tugunlari $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ nuqtalar bilan bo'g'liq bo'lgan ko'phadlar tuzishdan iborat. Har bir x_i nuqta uchun shunday n – darajali ko'phad tuzamizki, y aynan shu x_i nuqtada birga teng bo'lsin, qolgan interpolyatsiyalash tugunlari $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ nuqtalarda esa nolga teng bo'lsin. Bu ko'phadni $\phi_i(x)$ deb ifodalasak uning n ta ildizi $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ ma'lum bo'lganligi uchun ko'phadlarni ko'paytuvchilarga ajratish qoidasiga ko'ra

$$\phi_i(x) = A(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n) \quad (8.3)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin. $\phi_i(x_i) = 1$ shartdan esa A – ko'rinishi topiladi va $\phi_i(x)$ quyidagi

$$\phi_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

ko'rinishda ifodalanadi. Bu ko'rinishdan

$$\phi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \text{ bo'lsa} \\ 0 & i \neq j \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

ekanligi ko'rinib turibdi. (8.3) ko'phadlarning har biri n – darajali ko'phad bo'ladi va ular asosida tuzilgan

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} \quad (8.4)$$

ko'phad Lagranj interpolyatsion ko'phadi deyiladi.

$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ funksiyani kiritib (8.4) ko'phadni soddaroq ko'rinishda ifodalash mumkin.

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_i)}$$

Lagranj interpolyatsion ko'phadi haqiqatdan ham g'oyaning sodda, originalligi bilan ajralib turadi.

Misol

x_i	-1	0	1	2
y_i	-1	-2	1	14

Bu yerda $n=3$. Berilgan qiymatlar asosida Lagranj interpolyatsion ko'phadini tuzamiz

$$\begin{aligned} L_3(x) &= (-1) \cdot \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} + (-2) \cdot \frac{(x+0)(x+1)(x+2)}{(0+1)(0-1)(0-2)} + 1 \\ &\quad \cdot \frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(1+1)(1-0)(1-2)} + 14 \cdot \frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{(2+1)(2-0)(2-1)} = \\ &= \frac{1}{6}(x^3 - 3x^2 + 2x) - (x^3 - 2x^2 - x + 2) - \frac{1}{2}(x^3 - x^2 - 2x) \\ &\quad + \frac{7}{3}(x^3 - x) = x^3 + 2x^2 - 2 \end{aligned}$$

$$L_3(x) = x^3 + 2x^2 - 2$$

ko'phad berilgan jadval qiymatlarga to'la mos ekanligi ko'rinishda turibdi.

Lagranj interpolyatsion ko'phadining xatoligi.

Agar $y = f(x)$ funksiya ko'rinishi ma'lum, lekin murakkab bo'lsa, ko'rsatilgan tarzda uning qiymatlar jadvalini tuzib, bu jadval asosida

interpolyatsion ko'phad tuzish mumkin. Bu ko'phad funksiya qiymatlarini hisoblash uchun ishchi formula bolib xizmat qilishi mumkin. Faqat bu yerda (8.4) ko'phad qiymatlari $y = f(x)$ funksiya qiymatlariga qanchalik yaqin ekanligini baholash zarurati paydo bo'ladi. Nazariy tadqiqotlar asosida bu xatolik

$$R_n(x) = |f(x) - L_n(x)|$$

ayirma uchun

$$R_n(x) < \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} h^{n+1} \quad (8.5)$$

tengsizlik o'rinli bo'lishi isbotlangan. Bu yerda

$$h = \max |x_{i+1} - x_i|, i = 0, 1, 2, \dots, n-1; |f^{(n+1)}(\xi)| = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|$$

$[a; b]$ interpolyatsiyalash oralig'I. (8.5) formuladan esa

$$\lim_{h \rightarrow 0} R_n(x) = 0$$

ekanligi kelib chiqadi, ya'ni interpolyatsiyalash tugunlari soni ortib, oraliq qadamlar kichiklashgan sari xatolik ham kichiklashib borar ekan. (8.4) formulani tuzish oson bo'lgani bilan uni soddalashtirish yoki bevosita y bo'yicha hisoblash ancha sermashaqqatli ekanligi ko'rinib turibdi. n ortgan sari bu ish yanada murakkablashib boraveradi. Agar interpolyatsiyalash tugunlari teng oraliqlarda joylashgan bo'lsa, ya'ni

$$x_{i+1} - x_i = h; h = \frac{b-a}{n}; x_0 = a; x_n = b \text{ bo'lsa } x - x_0 = th \quad \text{almashtirish}$$

yordamida (8.4) formulani soddalashtirish mumkin. Bunda

$$x - x_i = x - (x_0 + ih) = x - x_0 - ih = th - ih = (t - i)h$$

$$x_i - x_j = x_0 + ih - (x_0 + jh) = (i - j)h$$

ko'rinishni oladi. U holda (8.4) formula ham soddalashib

$$L_n(t) = \sum_{i=0}^n f_i \frac{t(t-1) \dots (t-i+1)(t-i-1) \dots (t-n)}{i! \cdot (n-i)! \cdot (-1)^{n-i}} \quad (8.6)$$

ko'rinishini oladi.

(8.6) formula teng oraliqlar uchun Lagranj interpolatsion ko'phadi deyiladi. Bu ko'phad asosida funksiya qiymatlarini hisoblash quyidagi tarzda amalga oshiriladi. $x - x_0 = th$ formuladan $t = \frac{x-x_0}{h}$ kelib chiqadi. Berilgan x qiymatiga ko'ra t ni aniqlaymiz. Bu qiymatga ko'ra (8.6) formula bo'yicha $L_n(t)$ hisoblanadi. Yuqorida keltirilgan jadval ham (misoldagi) teng oraliqlar bo'lganligi va unda $h=1$ ekanligidan $t = x+1$ kelib chiqadi. Bu holda avvalo (8.6) bo'yicha ko'phadni aniqlaymiz.

$$L_n(t) = (-1) \cdot (-1)^{3-0} \cdot \frac{(t-1)(t-2)(t-3)}{3!} + (-2) \cdot (-1)^2 \frac{t(t-2)(t-3)}{1! \cdot 2!} \\ + 1 \cdot (-1)^1 \cdot \frac{t(t-1)(t-3)}{2! \cdot 1!} + 14 \cdot (-1)^0 \cdot \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}$$

formulanii hosil qilamiz. Masalan $x = 0,5$ dagi qiymati kerak bo'lsa $t = 0,5+1 = 1,5$ bo'lib uni ko'phadga qo'yamiz

$$L_n(1,5) = \frac{0,5 \cdot (-0,5) \cdot (-1,5)}{6} - 1,5 \cdot (-0,50) \cdot (-1,5) - \frac{1}{2} 1,5 \cdot 0,5 \cdot (-1,5) \\ + \frac{16}{6} 1,5 \cdot 0,5 \cdot (-0,6) = 1,375$$

qiymatni hosil qilamiz. Demak $f(0,5) \approx -1,375$ deyish mumkin ekan.

§ 9. Jadval ko'paytmalardagi bartaraf qilib bo'lmas xatolik tartibiga ko'ra ko'phad darajasini va jadval qismini aniqlash

Interpolyatsion ko'phadlar xatoligi (8.5) formulaga ko'ra asosan xatolik tartibi $O(h^{n+1})$ ekanligini baholash mumkin. Chunki $f^{(n+1)}(x)$ qiymatini murakkab funksiyalar uchun aniqlash qiyin, jadval funksiyalar uchun esa aniqlash mumkin ham emas. Lekin tabiiy jarayonlar uchun uning chegaralangan bo'lishiga ishonch bor. Demak h ni kichiklashtirish, n – ni orttirish (baravar ketadi $h = (b-a)/n$) hisobiga istalgan aniqlikka erishish mumkin. Faqat bu yerda $f(x_i)$ qiymatlar aniq bo'lsagina xulosamiz o'rinli bo'ladi. Aslida esa $f(x_i)$ lar tajribadan, yoki o'lchashlardan kelib chiqadi va uning aniqligiga kafolat berib bo'lmaydi. Shuning uchun ko'phad darajasini orttirib mehnatni ko'paytirganimiz bilan natijani yaxshilab bo'lmasligi ko'rinib turibdi. Undan tashqari tabiat va texnikadagi ma'lum qonunlar (Nyuton, Om, Geyl Lyussak, Guk qonunlari) barchasi sodda ko'rinishda ekanligi ham $n = 10$, $n = 100$ ya'ni 10 – yoki 100 – darajali ko'phad tuzish mantiqan noo'rin ekanligi ham ko'rinib turibdi. Shunga ko'ra amaliyotda quyidagi qoidaga rioya qilish mumkin. Berilgan $h, n, \Delta f$ qiymatlariga ko'ra

$$h^{K+1} \leq 0,1 \cdot \Delta f$$

formuladan K ni aniqlaymiz. Odatda $k < n$ bo'ladi. Interpolyatsion ko'phad darajasi K bo'lishi ham yetarli bo'lar ekan. Bunda butun jadvalni tarkibida $K+1$ tadan qiymat bo'lgan qismlarga ajratib har bir qism uchun alohida K – darajali interpolyatsion ko'phad tuzish va $f(x)$ funksiya qiymatini aniqlash uchun x tushgan oraliqqa mos ko'phaddan foydalanish mumkin. Bu yerda yana bir amaliy ko'rsatmani ta'kidlab o'tish kerakki, interpolyatsion ko'phad xatoligi interpolyatsiyalash jadvali o'rtasida kichikroq, chetlarida nisbatan kattaroq bo'lar ekan.

Keltirilgan mulohazalarni quyidagi misolda tadbiq qilib sinab ko'ramiz. Funksiya qiymatlar jadvali berilgan bo'lsin.

x_i	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
$f(x_i)$	1	1,05	1,1	1,14	1,18	1,22	1,26	1,3	1,34
$f_2(x_i)$	3,16	3,32	3,46	3,61	3,74	3,87	4,0	4,12	4,24

Bu jadvaldagi $f(x_i)$ qiymatlaridagi xatolik tartibi $\Delta f = 0,01$ bo'lsin. U holda $h = 0,1$ bo'lganligi uchun $0,1^{K+1} \leq 0,1 \cdot 0,01$ formulaga ko'ra $K + 1 \geq 3$ yoki $K \geq 2$ kelib chiqadi. Demak bu masalada $n = 2$ deb olsa ham bo'ladi. U holda butun jadvalni 3 bo'lakka bo'lib uchta interpolatsion ko'phad tuzish mumkin. Bu qismlarning har biri uchun $h = 0,1$ o'zgarmas. Faqat 1 – qismda $x_0 = 1$; 2 – qismda $x_0 = 1,1$; 3 – qismda $x_0 = 1,2$ bo'ladi.

Jadvaldagi 2 ta funksiya uchun alohida – alohida interpolatsion ko'phadlarni ko'ramiz.

1 – funksiya uchun

$$L_2^{(1)}(t) = f_0 \frac{(t-1)(t-2)}{2!} - f_1 \frac{t(t-2)}{1!} + f_2 \frac{t(t-1)}{2!} \quad (9.1)$$

formulaga ko'ra 1 – oraliqda

$$L_2^{(1)}(t) = 0,5(t^2 - 3 + 2) - 1,05(t^2 - 2t) + 0,55(t^2 - t) = 1 + 0,05t$$

Bu yerda $x_0 = 1$; $h = 1$ bo'lganligi uchun $t = 0; 1; 2$ larda jadval qiymatlar 1; 1,05; 1,1 kelib chiqadi. 2 – oraliqda esa faqat funksiya qiymatlari o'zgaradi va (9.1) formulaga ko'ra

$$L_2^{(2)}(t) = 0,57(t^2 - 3 + 2) - 1,18(t^2 - 2t) + 0,61(t^2 - t) = 1,14 + 0,04t$$

hosil bo'ladi. Xuddi shuningdek 3 –oraliqda yana (9.1) formulaga ko'ra

$$L_2^{(3)}(t) = 0,63(t^2 - 3 + 2) - 1,3(t^2 - 2t) + 0,67(t^2 - t) = 1,26 + 0,04t$$

kelib chiqadi. Shunday qilib berilgan jadval funksiya uchun uchta oraliq $[1; 1,2]$, $[1,3; 1,5]$, $[1,6; 1,8]$ oraliqlarda uchuta

$$L_1^{(1)}(t) = 1 + 0,05t; L_2^{(2)}(t) = 1,14 + 0,04t; L_2^{(3)}(t) = 1,26 + 0,04t$$

ko'phadlarni hosil qilamiz. Bu yerda 1 - , 2 - , 3 - formulalar uchun mos ravishda

$$x_0 = 1; t = 10(x - 1)$$

$x_0 = 1,3$ $t = 10 \cdot (x - 1,3)$; $x_0 = 1,6$; $t = 10(x - 1,6)$ formulalar o'rinli bo'ladi. Xususan $f(x)$ qiymatini $a_1 = 1,15$; $a_2 = 1,38$; $a_3 = 1,72$; nuqtalarda hisoblash talab qilingan bo'lsa $a_1 - 1$ – oraliqda demak $t = 10 \cdot (1,15 - 1) = 1,5$ qiymatni $L_2^{(1)}(t)$ ga qo'yib

$$f(1,15) \approx L_2^{(1)}(1,5) = 1,075$$

$$a_2 \text{ uchun } 2 - \text{oraliqda } t = 10 \cdot (1,38 - 1,3) = 0,8$$

$$f(1,38) \approx L_2^{(2)}(0,8) = 1,172$$

$$a_3 \text{ uchun } 3 - \text{oraliqda } t = 10 \cdot (1,72 - 1,6) = 1,2$$

$$f(1,72) \approx L_2^{(3)}(1,2) = 1,308$$

kelib chiqadi.

Keltirilgan misolda jadvalda $y = \sqrt{x}$ funksiya qiymatlaridan foydalanilganligini hisobga olsak va topilgan qiymatlar bilan funksiyaning aniq qiymatlarini taqqoslasak

$$f(1,15) = 1,0724; L_2^{(1)}(1,15) = 1,075; \Delta f = 0,0026$$

$$f(1,38) = 1,1747; L_2^{(2)}(1,38) = 1,172; \Delta f = 0,0027$$

$$f(1,72) = 1,3115; L_2^{(3)}(1,72) = 1,308; \Delta f = 0,0035$$

ekanligini, ya'ni xatolik dastlabki bartaraf qilib bo'lmas xatolik tartibidan ortmaganligini ko'ramiz. Yana bir karra ta'kidlash joizki, butun jadval bo'yicha 8 – darajali ko'phad tuzishga umuman zarurat yo'q ekan. Bu esa ishimizni osonlashtirishi yuqoridagi misoldan ko'rinib turibdi. Keyinchalik bu muloxazalarga yana bir karra qaytamiz va uning samaraligiga ishonch hosil qilamiz.

§ 10. Tengmas oraliqlar uchun Nyuton interpolatsion ko'phadi

Lagranj interpolatsion ko'phadi universal, qulay bo'lganligi bilan undan foydalanish ko'p mehnat talab qiladi. Shuningdek funksiya haqidagi yangi axborot, ya'ni yana bir nuqtadagi qiymati ma'lum bo'lsa Lagranj interpolatsion ko'phadini aniqlash uchun butun mehnatni qaytadan bajarishimiz kerak bo'ladi. Avvalgi hisob – kitoblar butunlay foydalanilmay qolib ketadi. Bu kamchiliklardan xoli interpolatsion ko'phad tuzish bo'yicha izlanishlar samarasi Nyuton interpolatsion ko'phadidir. Biz bu yerda ko'phadning kashf qilinishi tarixi va keltirib chiqarish tartibiga to'xtalib o'tirmaymiz. Bevosita uning amaliy tatbiq tarafiga e'tiborni qaratamiz.

Funksiya qiymatlari $y_i = f(x_i)$ $i = 0, 1, 2, \dots, n$ tartibda berilgan bo'lsin. Avvalo bo'lingan ayirmalar tushunchasi ta'rifini kiritamiz. Birinchi tartibli bo'lingan ayirmadeb funksiya qiymatlar jadvalidagi yonma-yon qiymatlari ayirmasining argument qiymatlari ayirmasiga nisbatiga aytiladi va quyidagicha belgilanadi.

$$\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = f(x_i; x_{i+1}) \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (10.1)$$

(10.1) formulaga ko'ra

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f(x_0; x_1), \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f(x_1; x_2), \dots$$

$$\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} = f(x_{n-1}; x_n)$$

n ta 1 – tartibli bo'lingan ayirma qiymati topiladi, ya'ni 1 – tartibli bo'lingan ayirmalar soni funksiya qiymatlar jadvalidan bitta kamroq bo'ladi. Ikkinchi tartibli bo'lingan ayirmalar ta'rifi vahisoblash tartibi 1 – tartibli bo'lingan ayirmalarga o'xshash. Faqat bu yerda funksiya qiymatlari o'rnida 1 – tartibli bo'lingan ayirma qiymatlaridan foydalaniladi. Ular quyidagicha ifodalanadi

$$\frac{f(x_{i+1}; x_{i+2}) - f(x_i; x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i} = f(x_i, x_{i+1}; x_{i+2}) \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-2 \quad (10.2)$$

2 – tartibli bo'lingan ayirmalar soni n-1 ta bo'ladi. Xuddi shunday tarzda (K-1) tartibli bo'lingan ayirmalar asosida K – tartibli bo'lingan ayirmalarni aniqlash formulasi kiritiladi.

$$\frac{f(x_{i+1}; x_{i+2}, \dots, x_{i+k}) - f(x_i; x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_i} = f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-k \quad (10.3)$$

Ular soni n – k + 1 ta bo'ladi. Shunday tarzda n – tartibli bo'lingan ayirmagacha hisoblab boramiz. Hisoblashlarni quyidagi jadval ko'rinishida tashkil etamiz.

x_i	$f(x_i)$	1 – tartibli bo'lingan ayirmalar	2 – tartibli bo'lingan ayirmalar	3 – tartibli bo'lingan ayirmalar	4 – tartibli bo'lingan ayirmalar	5 – tartibli bo'lingan ayirmalar
x_0	$f(x_0)$					
x_1	$f(x_1)$	$\frac{f(x_0; x_1)}{x_1 - x_0}$				
x_2	$f(x_2)$	$\frac{f(x_1; x_2)}{x_2 - x_1}$	$\frac{f(x_0; x_1; x_2)}{x_2 - x_0}$			
x_3	$f(x_3)$	$\frac{f(x_2; x_3)}{x_3 - x_2}$	$\frac{f(x_1; x_2; x_3)}{x_3 - x_1}$	$\frac{f(x_0, x_1, x_2, x_3)}{x_3 - x_0}$		
x_4	$f(x_4)$	$\frac{f(x_3; x_4)}{x_4 - x_3}$	$\frac{f(x_2; x_3; x_4)}{x_4 - x_2}$	$\frac{f(x_1, x_2, x_3, x_4)}{x_4 - x_1}$	$\frac{f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)}{x_4 - x_0}$	
x_5	$f(x_5)$	$\frac{f(x_4; x_5)}{x_5 - x_4}$	$\frac{f(x_3; x_4; x_5)}{x_5 - x_3}$			
x_6	$f(x_6)$	$\frac{f(x_5; x_6)}{x_6 - x_5}$	$\frac{f(x_4; x_5; x_6)}{x_6 - x_4}$			
x_7	$f(x_7)$	$\frac{f(x_6; x_7)}{x_7 - x_6}$	$\frac{f(x_5; x_6; x_7)}{x_7 - x_5}$			
x_8	$f(x_8)$	$\frac{f(x_7; x_8)}{x_8 - x_7}$	$\frac{f(x_6; x_7; x_8)}{x_8 - x_6}$			
x_9	$f(x_9)$	$\frac{f(x_8; x_9)}{x_9 - x_8}$	$\frac{f(x_7; x_8; x_9)}{x_9 - x_7}$	$\frac{f(x_8, x_9, x_{10}, x_{11})}{x_{11} - x_8}$	$\frac{f(x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12})}{x_{12} - x_8}$	
x_{10}	$f(x_{10})$	$\frac{f(x_9; x_{10})}{x_{10} - x_9}$	$\frac{f(x_8; x_9; x_{10})}{x_{10} - x_8}$	$\frac{f(x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12})}{x_{12} - x_9}$		
x_{11}	$f(x_{11})$	$\frac{f(x_{10}; x_{11})}{x_{11} - x_{10}}$	$\frac{f(x_9; x_{10}; x_{11})}{x_{11} - x_9}$			
x_{12}	$f(x_{12})$	$\frac{f(x_{11}; x_{12})}{x_{12} - x_{11}}$	$\frac{f(x_{10}; x_{11}; x_{12})}{x_{12} - x_{10}}$			

10.1 - jadval

Jadval qiymatlari asosida ko'rsatilgan tartibdan – tartibgacha barcha bo'lingan ayirmalar hisoblab bo'lingach interpolatsion ko'phad quyidagicha ifodalanar ekan.

$$H_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0; x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0, x_1, x_2) + \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_K) \cdot f(x_0; x_1; x_2; \dots; x_{K+1}) + \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})f(x_0; x_1; x_2; \dots; x_n) \quad (10.4)$$

(10.4) formula tengmas oraliqlar uchun Nyuton interpolatsion ko'phadi deyiladi. (10.4) formulada ishlatiladigan bo'lingan ayirmalar jadvalining yuqori diagonali bo'ylab joylashar ekan.

Bu jarayonni quyidagi misolda namoyish qilamiz

x_i	$f(x_i)$	1 – tartibli bo'lingan ayirmalar	2 – tartibli bo'lingan ayirmalar	3 – tartibli bo'lingan ayirmalar	4 – tartibli bo'lingan ayirmalar
0	1	$\frac{1,02 - 1}{0,2 - 0} = 0,1$	$\frac{0,3 - 0,1}{0,4 - 0} = 0,5$	$\frac{0,375 - 0,5}{0,6 - 0} = -0,21$	
0,2	1,02	$\frac{1,08 - 1,02}{0,4 - 0,2} = 0,3$			
0,4	1,08		$\frac{0,45 - 0,3}{0,64 - 0,2} = 0,375$		$\frac{-0,21 - (-0,21)}{0,8 - 0} = 0$
0,6	1,17	$\frac{1,17 - 1,08}{0,6 - 0,5} = 0,45$		$\frac{0,25 - 0,375}{0,8 - 0,2} = -0,21$	
0,8	1,28	$\frac{1,28 - 1,17}{0,8 - 0,6} = 0,55$	$\frac{0,55 - 0,45}{0,8 - 0,4} = 0,25$		$\frac{0 + 0,21}{1 - 0,2} = 0,26$
--	--			$\frac{0,25 - 0,25}{1 - 0,4} = 0$	
--	--	-----	-----		$\frac{0 - 0}{1,2 - 0,4} = 0$
1,0	1,41	--	--	$\frac{0,25 - 0,25}{1,2 - 0,6} = 0$	
1,2	1,56	$\frac{1,48 - 1,28}{1 - 0,8} = 0,65$	$\frac{0,65 - 0,55}{1 - 0,6} = 0,25$		
		$\frac{1,56 - 1,41}{1,2 - 1,0} = 0,75$	$\frac{0,75 - 0,65}{1,2 - 0,8} = 0,25$		

davomi		5 – tartibli bo'lingan ayirmalar	6 – tartibli bo'lingan ayirmalar
		$\frac{0,26 - 0}{1 - 0} = \underline{0,26}$ $\frac{0 - 0,26}{1,2 - 0,2} = -0,26$	$\frac{-0,26 - 0,26}{1,2 - 0} = \underline{-0,43}$

Bo'lingan ayirmalar jadvali asosida Nyuton interpolatsion ko'phadini tuzamiz. Ikki holatni bitta jadval orqali ifodalash uchun avvaliga funksiyaning faqat $x = 0,8$ gacha qiymatlari ma'lum bo'lgan holni ko'ramiz. Jadvalni bu qismi punktir chiziq bilan ajratilgan. Bu holda

$$H_4(x) = 1 + (x - 0) \cdot 0,1 + (x - 0)(x - 0,1) \cdot 0,5 + x(x - 0,1)(x - 0,2) \cdot (-0,21)$$

interpolatsion ko'phadini hosil qilamiz.

Xususan $x = 0,5$ dagi qiymatni hisoblamogchi bo'lsak. $H_4(x)$ formulasini soddalashtirib

$$H_4(x) = -0,21x^3 + 0,563x^2 + 0,0458x + 1$$

formula bo'yicha $H_4(0,5) = 1,13415$ kelib chiqadi. Jadval qiymatlarga asos bo'lgan $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ qiymati $f(0,5) = 1,118$ bilan solishtirilganda xatolik $\Delta f = 0,016$ ekanligini ko'ramiz. Bu xatolik jadval qiymatidagi bartaraf qilib bo'lmas xatolik tartibi 0,01 bilan bir xil tartibda bo'ladi. Umuman olganda Nyuton interpolatsion ko'phadi Lagranj interpolatsion ko'phadi bilan bir xil, faqat ifodalanish tartibi bilangina farq qilganligi uchun uning xatolik tartibi ham $O(h^{n+1})$ tartibida bo'ladi. Albatta agar jadvaldagi funksiya qiymatlari aniq bo'lsa.

Ikkinchi holatga o'tamiz, ya'ni funksiya qiymatlar jadvalida yana ikkita qiymat, ya'ni $x = 1,0$ va $x = 1,2$ dagi qiymatlari ham ma'lum bo'lib qolsa, Nyuton

interpolyatsion ko'phadi avvalgi topilgan ko'phadga qo'shimcha hadlar qo'shish bilan amalga oshirilgan ekan. Bizning misolimizda

$$H_6(x) = H_4(x) + (x - 0)(x - 0,2)(x - 0,4)(x - 0,6)(x - 0,8) \cdot 0,26 + \\ + x(x - 0,2)(x - 0,4)(x - 0,6)(x - 0,8)(x - 1) \cdot (-0,43)$$

bo'ladi. Bu yerda $H_4(x) = -0,21x^3 + 0,563x^2 + 0,0458x + 1$ avvalgi jadvalning bor qismi bo'yicha topilgan ko'phad bo'lib, to'liq saqlanadi. Faqat yangi olingan qiymatlar asosida bo'lingan ayirmalar jadvali to'ldirilib ko'phadga ham qo'shimcha hadlar qo'shilar ekan.

9 – ma'ruzada qayd etilgandek bu yerda ham jadvaldagi bartaraf qilib bo'lmas xatolik tartibiga ko'ra interpolyatsion ko'phad darajasini va zaruriy $x = a$ qiymatga ko'ra $f(a)$ ning qiymatini aniqlash uchun jadval qismini tanlash mumkin. Tanlangan qism Nyuton interpolyatsion ko'phadini tuzamiz. Xususan yuqoridagi jadvalda bartaraf qilib bo'lmas xatolik Δf tartibi 0,01 bo'lsa $n = 2$ bo'ladi. Agar $x = 0,5$ dagi qiymat kerak bo'lsa, jadvaldan $x = 0,2; 0,4; 0,6$ ga mos qiymatlar va ularga mos bo'lingan ayirmalar qiymatlarini olamiz. Jadvalda bu qism ajratilgan. Bunda $x_0 = 0,2$ deb olinadi va interpolyatsion ko'phad

$$H_2(x) = 1,02 + (x - 0,2) \cdot 0,3 + (x - 0,2)(x - 0,4) \cdot 0,375$$

ko'rinishda topiladi. Bundan esa

$$f(0,5) \approx H_2(0,5) = 1,02 + 0,3 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,1 \cdot 0,375 = 1,12125$$

kelib chiqadi. Bu esa funksiyani aniq qiymati $f(0,5) = 1,118$ qiymatiga yaqin ekanligi va $\Delta f = 0,00325$ ekanligini ko'ramiz. Bu yerda yana bir karra interpolyatsion ko'phad darajasini orttirish doimo ham kutilgan yaxshi natija beravermasligiga ishonch hosil qilamiz. Chunki 4 – darajali interpolyatsion ko'phad $H_4(x)$ da xatolik $\Delta f = 0,016$ chiqqan edi.

§ 11. Teng oraliqlar uchun Nyuton interpolyatsion ko'phadi

Agar interpolyatsiyalash tugunlari teng oraliqlarda joylashgan bo'lsa, ya'ni $x_i = x_0 + i \cdot h; i = 0, 1, 2, \dots, n$ bo'lsa $x - x_0 = t \cdot h$ almashtirish bilan bo'lingan ayirmalar va (10.4) formulalar birgalikda almashtirilsa ko'phad ko'rinishi ancha soddalashar ekan. Buning uchun bo'lingan ayirmalar o'rniga chekli ayirmalar jadvali tuziladi. Birinchi tartibli chekli ayirmalar quyidagicha hisoblanadi.

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) = f^1_{i+\frac{1}{2}} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Birinchi tartibli chekli ayirmalar asosida ikkinchi tartibli chekli ayirmalar quyidagicha hisoblanadi.

$$f^1_{i+\frac{1}{2}} - f^1_{i-\frac{1}{2}} = f^2_i \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

Ikkinchi tartibli chekli ayirmalar ayirmasi orqali uchinchi tartibli chekli ayirmalar aniqlanadi.

$$f^2_{i+1} - f^2_i = f^3_{i+\frac{1}{2}} \quad i = 1, 2, \dots, n-2$$

Bu formulalarga ko'ra bo'lingan ayirmalardan chekli ayirmalarga o'tish formulani keltirib chiqarish mumkin.

$$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+1}, \dots, x_{i+K}) = \frac{f^K_{i+\frac{K}{2}}}{K! h^K} \quad (11.1)$$

(11.1) formulalarni, hamda $(x - x_i) = (t - i)h$ ifodalarni tengmas oraliqlar uchun Nyuton interpolyatsion ko'phadi (10.4) formulaga qo'ysak u quyidagi ko'rinishni oladi.

$$\begin{aligned}
H_n(t) = f_0 + t \cdot f_{\frac{1}{2}}^1 + \frac{t(t-1)}{2!} f_1^2 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} f_{\frac{3}{2}}^3 + \dots \\
+ \frac{t(t-1) \dots (t-K+1)}{K!} f_{\frac{K}{2}}^K + \dots \\
+ \frac{t(t-1) \dots (t-n+1)}{n!} f_{\frac{n}{2}}^n \quad (11.2)
\end{aligned}$$

Bu formula (11.2) teng oraliqlar uchun Nyuton interpolatsion ko'phadi deyiladi. Y bo'yicha hisoblash uchun berilgan X qiymatga mos t qiymatini $t = \frac{x-x_0}{h}$ formula bo'yicha aniqlanadi. So'ngra (11.2) formula bo'yicha funksiya taqribiy qiymati topiladi.

Misol sifatida avvalgi ma'ruzada ko'rilgan jadvaldan foydalanamiz.

x_i	$f(x_i)$	$f_{i+\frac{1}{2}}^1$	f_{i+1}^2	$f_{i+\frac{3}{2}}^3$	f_{i+2}^4	$f_{i+\frac{5}{2}}^5$	f_{i+3}^6
0	<u>1</u>	<u>0,02</u>					
0,2	1,02		<u>0,04</u>				
		0,06		<u>-0,01</u>			
0,4	1,08		0,03		<u>0</u>		
		0,09		-0,01		<u>0,01</u>	
0,6	1,17		0,02		0,01		<u>-0,02</u>
		0,11		0		-0,01	
0,8	1,28		0,02		0		
		0,13		0			
1,0	1,41		0,02				
		0,15					
1,2	1,56						

Bu jadvalga ko'ra tuzilgan (11.2) Nyuton interpolatsion ko'phadi quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$H_6(t) = 1 + t \cdot 0,02 + \frac{t(t-1)}{2!} \cdot 0,04 - \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} 0,01 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)}{5!} \cdot 0,01 - \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)(t-5)}{6!} 0,02$$

Bu misolda $x_0 = 0; h = 0,2$ bo'lgani uchun $t = 2,5$ kelib chiqadi. Bu qiymatda yuqoridagi ko'phad qiymati $H_6(2,5) \approx f(0,5) = 1,118$ $H_6(2,5) = 1,222$ ekanligi kelib chiqadi.

Nyuton interpolatsion ko'phadi (11,2) yordamida jadvaldagi funksiya qiymatlaridagi bartaraf qilib bo'lmas xatolikning interpolatsion ko'phad va hisoblangan funksiya qiymatiga ta'sirini o'rganish uchun qulay bo'lar ekan. Namuna sifatida sxematik jadval keltiramiz. Bunda funksiyaning faqat bir qiymatida δ tartibidagi xatolik mavjud bo'lsin. Jadvaldagi barcha hisoblar ham sxematik tarzda ifodalangan.

x_i	$f(x_i)$	1 – tartibli chekli ayirmalar	2 – tartib	3 – tartib	4 – tartib	5 – tartib
x_0	$\underline{f_0}$	$\frac{f_1^1 + \delta}{2}$	$\frac{f_1^2 - 2\delta}{2}$			
x_1	$f_1 + \delta$	$\frac{f_2^1 - \delta}{2}$	$f_2^2 + \delta$	$\frac{f_3^3 + 3\delta}{2}$	$\frac{f_2^4 - 4\delta}{2}$	
x_2	f_2	$\frac{f_3^1}{2}$	f_3^2	$\frac{f_4^3 - \delta}{2}$	$f_3^4 + \delta$	$\frac{f_5^5 + 5\delta}{2}$
x_3	f_3	$\frac{f_4^1}{2}$	f_4^2	$\frac{f_5^3}{2}$		
x_4	f_4	$\frac{f_5^1}{2}$				
x_5	f_5	$\frac{f_6^1}{2}$				

Bu jadvaldagi funksiya qiymatidagi boshlang'ich bartaraf qilib bo'lmas xatolikning chekli ayirmalar jadvali bo'ylab yoyilish va o'sish qonuniyati aks ettirilgan. Shuningdek bu xatolikning interpolyatsion ko'phad qiymatiga qo'shadigan qo'shimcha xatoligini ham tasavvur qilish va hisoblash mumkin ekanligi ko'rinib turibdi. Xususan bu jadval bo'yicha tuzilgan 5 – darajali Nyuton interpolyatsion ko'phadining bartaraf qilib bo'lmas xatoligi.

$$R_5(t) = t \cdot \delta - \frac{t(t-1)}{2!} 2\delta + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} 3\delta - \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!} 4\delta + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)}{5!} \cdot 5\delta$$

Formula bo'yicha hisoblanishini ko'rishimiz mumkin.

§ 12. Katta jadvallar uchun approksimatsiya masalasini yechishda eng kichik kvadratlar usuli. Chiziqli bog'lanish usuli

Approksimatsiya masalasining asosiy vazifasi jadval ko'rinishda berilgan axborot asosida o'rganilayotgan jarayonning qandaydir x va y parametrlari orasidagi funktsional bog'lanishni topishdan iborat. Interpolyatsion usul bu masalani yechish uchun xizmat qilishi mumkin. Lekin yuqorida ta'kidlanganidek, jadval qiymatlari ortgan sari yechim murakkablashib boraveradi. Undan tashqari jadval qiymatlaridagi mavjud bo'lgan bartaraf qilib bo'lmas xatoliklar ham interpolyatsion ko'phad darajasi ortgan sari ko'payib boraveradi. Undan tashqari tabiat va texnikadan ma'lum bo'lgan barcha bog'lanish qonuniyatlari juda sodda ko'rinishga ega (Nyuton qonuni, Om qonuni, Guk qonuni). Interpolyatsion ko'phad darajasini kamaytirish esa jadval qiymatlar faqat bir qismidan foydalanishga olib keladi. Bunda axborotni bir qismi e'tibordan chetda qoladi. Yoki jadvalni qismlarga ajratib har bir qismi uchun alohida interpolyatsion ko'phad, ya'ni bog'lanish modelini tuzish kerak bo'ladi. Aslida esa bitta, butun jadval asosida yagona bog'lanish modelini tuzish mantiqan to'g'ridek tuyuladi.

Biz bu yerda aynan shu yo'l bilan, ya'ni butun jadval bo'yicha yagona bog'lanish modelini aniqlash yo'li bilan ketamiz. Bu yerda ham, avvalo, bazis funksiyalarni tanlash kerak. Aksariyat hollarda bazis sifatida $x^0, x, x^2, x^3, \dots$ darajali funksiyalar olinadi. Biz ham bu yerda shu variantda to'xtalamiz. Ikkinchi masala ko'phad darajasini tanlash - jarayonning xususiyatiga ko'ra va tajribaga suyanan holda tanlanadi. Ba'zi hollarda ko'phad darajasini tanlash jarayonini ham avtomatlashtirish mumkin bo'lar ekan (Fisher tanlash kriteriyasi).

Masalani quyidagicha ifodalaymiz. Jadval ko'rinishda berilgan $(x_i, f(x_i)) \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$ bog'lanish asosida $y = Q_m(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m$ funktsional bog'lanish modeli tuzilsin. Bu yerda $m < n$ ekanligi oldindan ma'lum. Chunki $m = n$ bo'lsa interpolyatsiya masalasiga qaytamiz. Tuzilgan $Q_m(x)$ ko'phadga qo'yiladigan

talab, jadval qiymatlariga iloji boricha yaqin bo'lsin. Bu talabni matematik tarzda quyidagicha ifodalash mumkin.

$$\sum_{i=0}^n (Q_m(x_i) - f(x_i))^2 \rightarrow \min \quad (12.1)$$

(12.1) ifoda $Q_m(x)$ ko'phadi koeffitsiyentlarini tanlash hisobigagina mukamallashtirilishi mumkin.

$$\begin{aligned} \Phi(a_0, a_1, \dots, a_m) \\ = \sum_{i=0}^n (a_0 x_i^m + a_1 x_i^{m-1} + \dots + a_{m-1} x_i + a_m - f(x_i))^2 \end{aligned} \quad (12.2)$$

tarzda ifodalangan $\Phi(a_0, a_1, \dots, a_m)$ funksiyaning minimumini esa an'anaviy usulda aniqlash mumkin, ya'ni barcha argumentlari bo'yicha birinchi tartibli xususiy hosilalari nolga teng bo'lgan nuqtadan izlanadi. (12.2) formulaga ko'ra $\partial\Phi/\partial a_j$ xususiy hosilalarni hisoblab nolga tenglaymiz.

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a_j} = 2 \sum_{i=0}^n (a_0 x_i^m + a_1 x_i^{m-1} + \dots + a_{m-1} x_i + a_m - f(x_i)) \cdot x_i^{m-1} = 0 \quad (12.3)$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, m$$

(12.3) tenglamalarda hadma – had ko'paytirib yig'indi indeksiga bog'liq bo'lmagan ko'paytiruvchilarni yig'indi ishorasidan tashqariga chiqarsak quyidagi sistemani hosil qilamiz.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 \cdot \sum_{i=0}^n x_i^{2m} + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^{2m-1} + \dots + a_m \sum_{i=0}^n x_i^m = \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot x_i^m \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i^{2m-1} + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^{2m-2} + \dots + a_m \sum_{i=0}^n x_i^{m-1} = \sum_{i=0}^n f(x_i) x_i^{m-1} \\ \vdots \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i^m + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^{m-1} + \dots + a_m \cdot (n+1) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \end{array} \right. \quad (12.4)$$

(12.4) $m+1$ ta noma'lumli $m+1$ ta chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi bo'lib, undan $a_0, a_1, \dots, a_m$ koefitsiyentlarni topilsa approksimatsiyalovchi ko'phad $Q_m(x)$ va bog'lanish modeli

$Q_m(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x - a_m$ topiladi. Bu usul o'z qurilish tartibiga qarab, funksiya jadval qiymati va tuzilgan ko'phad qiymatlarining ayirmalari kvadratlarining barcha jadval nuqtalari bo'yicha yig'indisi minimal bo'lishiga asoslangan bo'lganligi uchun eng kichik kvadratlar usuli deyiladi. Bu usulning eng keng yoyilgan variantlari chiziqli va kvadratik bog'lanishga alohida to'xtalamiz.

Chiziqli bog'lanish modelini tuzish.

Bu holda $m = 1$ bo'lib, $Q_m(x) = a_0x + a_1$ ko'phad koeffitsiyentlar uchun (12.4) sistemadan

$$\begin{cases} a_0 \sum_{i=0}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=0}^n x_i = \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot x_i \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i + (n+1)a_1 = \sum_{i=0}^n f(x_i) \end{cases} \quad (12.5)$$

sistema kelib chiqadi.

Kvadratik bog'lanish modeli uchun $m = 2$ bo'lib

$Q_2(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$ ko'phad koeffitsiyentlari uchun (12.4) sistemadan

$$\begin{cases} a_0 \sum_{i=0}^n x_i^4 + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^3 + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^2 = \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot x_i^2 \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i^3 + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=0}^n x_i = \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot x_i \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=0}^n x_i + a_2(n+1) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \end{cases} \quad (12.6)$$

kelib chiqadi.

Bu usulni ikkala variantda (12.5), (12,6) bir misolda sinab ko'ramiz. Funktsiya qiymatlari quyidagi jadval bilan berilgan bo'lsin.

x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4
$f(x_i)$	1	1,302	1,608	1,954	2,328

Chiziqli bog'lanish modelini topish uchun hisoblashlar quyidagi jadval tarzda tashkil qilinadi.

x_i	f_i	x_i^2	$x_i f_i$	
0	1	0	0	
0,1	1,302	0,01	0,1302	
0,2	1,608	0,04	0,3216	
0,3	1,954	0,09	0,5862	
0,4	2,328	0,16	0,9312	
Σ	1	8,192	0,3	1,9692

Bu jadval asosida chiziqli model koeffitsiyentlari uchun

$$\begin{cases} 0,3 \cdot a_0 + a_1 = 1,9692 \\ a_0 + 5a_1 = 8,192 \end{cases}$$

sistemahosil bo'ladi. Bu sistemadan

$$a_0 = 3,308; \quad a_1 = 0,9768; \quad y = 3,308x + 0,9768$$

bog'lanish modeli topiladi.

§ 13. Kvadratik bog'lanish modelini tuzish, jadvaldagi tasodifiy xatolarni aniqlash usuli

Eng kichik kvadratlar usulida, yuqorida ko'rganimizdek, jadvaldagi qiymatlar sonining ahamiyati yo'q. Approksimatsiyalovchi ko'phad darajasi tanlangach, uning noma'lum koeffitsiyentlariga nisbatan sistema hosil qilinadi. Bu sistemadan $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ topilgach $Q_m(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x + a_m$ ko'phad ko'riladi. Ko'rilgan ko'phad uchun xatoliklar qiymatlari $R_m(x_i) = Q_m(x_i) - f(x_i)$ lar hisoblanadi. Bu jarayonda jadvaldagi mavjud tasodifiy xatolikni ham aniqlanishi mumkin ekan. Jadval tuzish jarayonida o'lchov vositalarning nosozligi, yoki jadval tuzuvchi hodimning e'tiborsizligi tufayli birorta qiymat xato yozilib qolishi mumkin. Eng kichik kvadratlar usulida tuzilgan ko'phad bu xatolikni ham yaqqol yuzaga chiqarar ekan. Bu jarayon va ayrim amaliy tavsiyalarni quyidagi misolda ko'ramiz. Berilgan qiymatlarni va zaruriy qiymatlarni bitta jadvalda ifodalaymiz.

x_i	$f(x_i)$	x_i^2	$x_i f_i$	x_i^3	x_i^4	$x_i^2 f_i$	$Q_2(x_i)$	$R_2(x_i)$
0	2,236	0	0	0	0	0	2,24872	0,0127
0,1	2,258	0,01	0,2258	0,001	0,0001	0,02258	2,2660	0,0008
0,2	2,261	0,04	0,4522	0,008	0,0016	0,09044	2,2863	0,0253
0,3	2,302	0,09	0,6906	0,027	0,0081	0,20718	2,30949	0,0075
0,4	2,324	0,16	0,9296	0,064	0,0256	0,37184	2,33559	0,0116
0,5	2,345	0,25	1,1725	0,125	0,0625	0,58625	2,36462	0,01962
1,5	13,726	0,55	3,4707	0,225	0,0979	1,2783		

Bu jadval bo'yicha hisoblangan qiymatlarni (12.4) sistemaga qo'yib quyidagi ko'rinishdagi sistemani hosil qilamiz.

$$0,0979 a_0 + 0,225a_1 + 0,55a_2 = 1,2783$$

$$0,225a_0 + 0,55a_1 + 1,5a_2 = 3,4707$$

$$0,55a_0 + 1,5a_1 + 6a_2 = 13,726$$

Bu sistemadan $a_0 = 0,14615$; $a_1 = 0,15872$; $a_2 = 2,24872$ ekanligi kelib chiqadi. Ko'phad esa

$Q_2(x) = 0,14615x^2 + 0,15872x + 2,24872$ ko'rinishda ifodalanadi. Bu ko'phad qiymatlari va uning jadval qiymatlaridan farqi $R_2(x_i)$ ham jadvalga kiritilgan. Xatolik tahliliga ko'ra, eng katta xatolik $x = 0,2$ nuqtada ekanligi ko'rinadi. Demak bu nuqtadagi qiymatda xato bo'lishi mumkin degan shubha paydo bo'ladi. Bu holda bu qiymatni qaytadan hisoblash, yoki jadvaldan chiqarib tashlash tavsiya qilinadi. Ba'zi hollarda ayrim nuqtadagi xatolik boshqa nuqtalardagidan bir necha baravar katta chiqib qoladi. Bunday holda bu nuqtada tasodifiy xatolik bo'lganligini aniq deyish mumkin bo'lar ekan.

Ko'rilgan misol va hisoblashlar tartibi $m = 3, 4$, hollar uchun hisoblashlarni qanday tashkil etilishini ham ko'rsatadi. Ko'phad darajasini jarayonning ma'lum xususiyatiga ko'ra yoki avtomatik tarzda tanlanadi. Bunda Fisher kriteriyasidan foydalaniladi. Har gal ko'phad topilganda uning yig'ma xatoligi hisoblab boriladi.

$$R_1 = \sum_{i=0}^n (Q_1(x_i) - f(x_i))^2$$

$$R_2 = \sum_{i=0}^n (Q_2(x_i) - f(x_i))^2$$

$$R_m = \sum_{i=0}^n (Q_m(x_i) - f(x_i))^2$$

Bunda $R_1 > R_2 > R_3$ bo'lib $R_4 > R_3$ bo'lib qolsa $Q_3(x)$ to'xtaladi.

§ 14. Ortogonal ko'phadlar. Jadval ko'rinishda berilgan funksiyalar uchun o'rta kvadratik yaqinlashish

Biz bu yerda asosan $[-1;1]$ oraliqda teng qadamli jadval bilan berilgan funksiyalarni ko'rish bilan cheklanamiz. Chunki har qanday $[a;b]$ oraliqni

$$t = -1 + \frac{2(x-a)}{b-a}$$

almashtirish bilan $[-1;1]$ oraliqqa o'tkazish mumkin.

$[-1;1]$ oraliqni $h = 2/n$ qadam bilan $x_i = -1 + ih$ nuqtalar yordamida ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) n ta bo'lakka bo'lamiz. Bu nuqtalardagi qiymatlari $f(x_i); g(x_i)$ lar bilan berilgan funksiyalar uchun skalyar ko'paytma amalini

$$(f, g) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot g(x_i) \quad (14.1)$$

formula bilan kiritamiz. (14.1) formula bilan kiritilgan skalyar ko'paytma, skalyar ko'paytma barcha xossalriga ega. Ta'rifga ko'ra agar $f(x); g(x)$ funksiyalarning skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'lsa, ular ortogonal deyiladi. Bu ta'rif asosida $[-1;1]$ oraliqdagi jadval qiymatlariga ko'ra ortogonal ko'phadlar sistemasini kiritamiz.

$Q_0(x), Q_1(x), Q_2(x), \dots, Q_m(x)$ mos ravishda $0, 1, 2, \dots, m$ – darajali ko'phadlar bo'lib, ular juft – jufti bilan o'zaro ortogonal bo'lsin, ya'ni

$$\sum_{i=0}^n Q_K(x_i) \cdot Q_L(x_i) = 0 \text{ agar } K \neq L \text{ bo'lsa} \quad (14.2)$$

Shuning bilan $Q_k(x)$ ko'phadlar o'zaro chiziqli erkli funksiyalar sistemasini tashkil etadi. Har qanday $P_n(x)$ ko'phadni $n \leq m$ bo'lgan holda $Q_k(x)$ bazis ko'phadlar chiziqli kombinatsiyasi

$$P_n(x) = C_0 \cdot Q_0(x) + C_1 \cdot Q_1(x) + \dots + C_m Q_m(x) \quad (14.3)$$

ko'rinishda bir qiymatli ifodalash mumkin.

Bazis tashkil etuvchi ortogonal ko'phadlar sistemasini $Q_0(x), Q_1(x), Q_2(x), \dots, Q_m(x)$ larni aniqlashda quyidagi rekkurent munosabatdan foydalanish mumkin.

$$x \cdot Q_K(x) = a_{K-1}Q_{K-1}(x) + a_KQ_K(x) + a_{K+1}Q_{K+1}(x) \quad (14.4)$$

Bu yerda $x \cdot Q_K(x)$ $(K+1)$ – darajali ko'phad bo'lganligi uchun uni bazis funksiyalar $Q_0, Q_1, \dots, Q_{K+1}(x)$ funksiyalar bo'yicha yoyish mumkinligidan foydalandik. Haqiqatdan ham

$$x \cdot Q_K(x) = \sum_{j=0}^{K-1} a_j \cdot Q_j(x) \quad (14.5)$$

chiziqli kombinatsiya o'rinli deb, (14.5) tenglik ikki tarafini $Q_e(x)$ ga skalyar ko'paytiramiz.

$$(xQ_K(x), Q_e(x)) = \sum_{j=0}^{K-1} a_j (Q_j(x)Q_e(x))$$

Bu tenglikdan $Q_e(x)$ funksiyalar ortogonalligidan

$$(Q_K(x), xQ_e(x)) = a_e \cdot \|Q_e(x)\|^2 \quad e = 0, 1, \dots, K-1$$

kelib chiqadi. $l < K-2$ bo'lgan hollarda $x \cdot Q_e(x)$ ko'phad darajasi $K-1$ dan ortiq bo'lmaganligi uchun bu ko'phad $Q_K(x)$ ga ortogonal bo'ladi. Demak chap tarafi nolga teng. Shuning uchun o'ng tarafi ham nolga teng bo'lishi kerak. Bundan esa $a_e = 0, e \leq K-2$ ekanligi kelib chiqadi va (14.4) ayniyat o'rinli ekanligini ko'ramiz. a_{K-1}, a_K, a_{K+1} lar uchun

$$a_{K-2} = \frac{(xQ_K(x), Q_{K-2})}{\|Q_{K-2}(x)\|^2}; \quad a_K = \frac{(xQ_K(x), Q_K(x))}{\|Q_K(x)\|^2}; \quad a_{K+1} = \frac{(xQ_K(x), Q_{K+1}(x))}{\|Q_{K+1}(x)\|^2}$$

formulalar kelib chiqadi.

Biz bu yerda amaliy masalalarda ko'p qo'llaniladigan variantlardan birida batafsil to'xtalamiz.

Approksimatsiya masalasi $[-1;1]$ oraliqda $h = \frac{2}{n}$ qadam bilan berilgan jadval funksiyasi uchun yechilayotgan bo'lsin. Har qanday $[a;b]$ oraliqni $t = \frac{2(x-a)}{b-a} - 1$

almashtirish bilan $t \in [-1; 1]$ oraliqqa keltirilishini eslatib o'tamiz. Shuning uchun keyingi mulohazalarda $x \in [-1; 1]$ deb hisoblaymiz. Natijalar yanada tushunarli, hisoblashlar tartibi ko'rinishi uchun $n = 10$ deb olsak, jadval tugunarli $x_i = -1 + 0,2 \cdot i \quad i = 0, 1, \dots, 10$ bo'lgani uchun $x = \{-1; -0,8; -0,6; -0,4; -0,2; 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1\}$ qiymatlarni qabul qiladi.

Skalyar ko'paytma avvalgidek

$$(f(x), g(x)) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot g(x_i)$$

ko'rinishda aniqlangan bo'lsin. Bu oraliq va berilgan tugun nuqtalar uchun ortogonal funksiyalar sistemasini

$$\varphi_0(x) = 1$$

$$\varphi_1(x) = x$$

$$\varphi_2(x) = x^2 + a_{22}$$

$$\varphi_3(x) = x^3 + a_{31}x$$

$$\varphi_4(x) = x^4 + a_{42}x^2 + a_{44}$$

tartibda aniqlash mumkin ekan. Bu yerda noma'lum koefitsiyentlarni aniqlashda funksiyalarning o'zaro ortogonalligidan foydalanamiz. Eslatma: oraliq va tugunlar O nuqtaga nisbatan simmetrik bo'lgani uchun

$$\sum_{i=0}^n x_i^{2K+1} = 0$$

ekanligi ko'rinib turibdi. Shuning uchun

$$(\varphi_0, \varphi_1(x)) = \sum_{i=0}^{10} x_i = 0$$

$$(\varphi_2, \varphi_1) = \sum_{i=0}^{10} (x_i^2 + a_n) x_i = 0$$

$$(\varphi_2, \varphi_0) = \sum_{i=0}^{10} (x_i^2 + a_{22}) = 0 \quad \text{shartdan esa}$$

$$a_{22} = -\frac{\sum_{i=0}^{10} x_i^2}{11} = -0,4 \Rightarrow \underline{\varphi_2(x) = x^2 - 0,4}$$

Keyingi hisoblar uchun kerak bo'ladigan yig'indilar qiymatlarini keltiramiz

$$\sum_{i=0}^{10} x_i = 0; \sum_{i=0}^{10} x_i^2 = 4,4; \sum_{i=0}^{10} x_i^3 = 0; \sum_{i=0}^{10} x_i^4 = 3,1328; \sum_{i=0}^{10} x_i^6 = 2,62592$$

$$(\varphi_3, \varphi_0) = \sum_{i=0}^{10} (x_i^3 + a_{31} x_i) \cdot 1 = 0$$

$$(\varphi_3, \varphi_1) = \sum_{i=0}^{10} (x_i^4 + a_{31} x_i^2) = 0 \Rightarrow a_{31} = -\frac{\sum_{i=0}^{10} x_i^4}{\sum_{i=0}^{10} x_i^2} = -0,712$$

$$\underline{\varphi_3(x) = x^3 - 0,712x}$$

$$\varphi_4(x) = x^4 + a_{42} x^2 + a_{44}$$

$$(\varphi_4, \varphi_0) = \sum_{i=0}^{10} (x_i^4 + a_{42} x_i^2 + a_{44}) = 0$$

$$(\varphi_4, \varphi_2) = \sum_{i=0}^n (x_i^4 + a_{42} x_i^2 + a_{44}) (x^2 - 0,4) = 0$$

shartlardan a_{42}, a_{44} koeffitsiyentlar uchun sistema hosil bo'ladi.

$$\begin{cases} a_{42} \left(\sum_{i=0}^{10} x_i^4 - 0,4 \sum_{i=0}^{10} x_i^2 \right) + a_{44} \left(\sum_{i=0}^n x_i^2 - 4,4 \right) = - \sum_{i=0}^n x_i^6 + 0,4 \sum_{i=0}^{10} x_i^2 \\ a_{42} \cdot \sum_{i=0}^{10} x_i^2 + 11 \cdot a_{44} \sum_{i=0}^{10} x_i^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{42} \cdot 1,3728 = -1,3728 \\ a_{42} \cdot 4,4 + a_{44} \cdot 11 = -3,1328 \end{cases}$$

$$a_{42} = -1; a_{44} = 0,1152$$

$$\underline{\varphi_4(x) = x^4 - x^2 + 0,1152}$$

Demak $[-1;1]$ oraliqda $h = 0,2$ qadam bilan jadval ko'rinishda berilgan funksiyalar uchun ortogonal bazis funksiyalar

$$\varphi_0(x) = 1; \varphi_1(x) = x; \varphi_2(x) = x^2 - 0,4; \varphi_3(x) = x^3 - 0,7112x; \varphi_4(x) = x^4 - x^2 + 0,1152$$

ko'rinishda olinishi mumkin ekan.

Umumiy holda, agar $[-1;1]$ oraliq $2m$ (juft) oraliqlarda bo'lingan bo'lsa $h = \frac{1}{m}; x_i = -1 + ih; x = \frac{t}{5}$ almashtirish kiritilsa t ga nisbatan ortogonal ko'phadlar sistemasi uchun quyidagi formula o'rinli.

$$P_i(t, 2m) = \sum_{K=0}^i (-1)^{i+K} \frac{(i+K)^{(2K)} \cdot (M+t)^{(K)}}{(K!)^2 \cdot (2M)^{(K)}} \quad (14.6)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, 2m$$

Bu yerda belgilashlar factorial ko'paytma

$$Z^{(K)} = Z \cdot (Z-1)(Z-2) \dots (Z-K+1)$$

$$Z^{(0)} = 1, \text{ deb olingan.}$$

(14.6) formulalardan

$$P_0(t, 2m) = 1; P_1(t, 2m) = \frac{t}{m}$$

$$P_2(t, 2m) = \frac{3t^2 - m(m+1)}{m(2m-1)}$$

$$P_3(t, 2m) = \frac{5t^2 - (3m^2 + 3m - 1)t}{m(m-1)(2m-1)}$$

hosil bo'ladi. Xususan biz ko'rgan hol $M = 5$ uchun bu formulalardan $t = 5x$ almashtirish orqali biz topgan formulalar kelib chiqadi.

II- CHIZIQLI PROGRAMMALASH MASALALARI

§ 1. Chiziqli programmalash masalalari.

Ishlab chiqarish jarayonidagi moddiy va iqtisodiy bog'lanishlarni hisobga olgan holda maqsadga muvofiq keladigan eng maqbul rejani tanlash masalasining matematik ifodasi ilmiy va o'quv adabiyotlarida **chiziqli programmalash** atamasi bilan ifodalanadi. Bunday masalalarning matematik ifodasini keltirib chiqarishda odatda ishlab chiqarish jarayoni bilan bog'liq bo'lgan barcha resurslar, narx-navolar, ishlab chiqarish normativlari hamda masala mohiyatiga ko'ra maqsad funksiyasini tuziladi. Agar muammo harajatlar bilan bog'liq bo'lsa bu harajatlarni ifodalovchi maqsad funksiyasining eng kichik qiymatini, agar maqsad funksiyasi ishlab chiqarishdan keladigan daromadni ifodalasa bu funktsiyani eng katta qiymatini topish talab qilinadi.

Aksariyat hollarda ishlab chiqarish resurslari va ishlab chiqarish kuchlari, ularning imkoniyatlarini ifodalovchi shartlar, hamda harajat yoki daromadni ifodalovchi maqsad funksiyalari chiziqli funksiyalar bilan ifodalanligi uchun bu turdagi masalalar chiziqli programmalash masalalari deb ataladi. Bu yerda programmalash so'zi dasturlash ma'nosida emas rejalashtirish ma'nosida ishlatiladi. Keyinchalik ko'riladi, masala yechimi ham optimal reja shaklida ifodalanadi.

Chiziqli programmalash usullari ishlab chiqarishning barcha sohalarida keng va samarali tatbiq qilib kelinayapti. Axborot texnologiyalarining rivojlanishi, kompyuterlarning imkoniyat va tezliklarining jadal o'sishi esa chiziqli programmalash masalalarining tatbiqini kengayishi hamda yanada mukammalashishiga yo'l ochayapti. Chiziqli programmalash masalalarining matematik ifodasi sodda bo'lsada uni yechishda funksiya maksimum, minimumlarini topishga mo'ljallangan an'anaviy usullarni tatbiq qilib bo'lmaydi. Bu yerda asosiy muammo – masala shartlariga bog'liq tarzda mumkin bo'lgan yechimlar sohasini (MBES) ni topishdan iborat bo'ladi. Optimal reja (OP) ham ana shu MBESdan izlanishi kerak.

Yuqorida keltirilgan mulohazalarni oydinlashtirish uchun oddiy bir masalani ko'rib chiqamiz. Faraz qilaylik, kichik korxona meva sharbatlarini chiqaradigan bo'lsin. Korxonada 30kg olcha, 45kg olma, 12kg shakar bor. Korxona ikki xil turdagi meva sharbatlarini chiqaradi. 1 – tur meva sharbatining bir bankasiga 0,1kg olcha, 0,5kg olma, 0,1 kg shakar solinsin. 2 – tur meva sharbatining bir bankasiga 0,3kg olcha, 0,2kg olma, 0,1kg shakar solinsin. Agar 1 banka 1 – tur sharbat narxi 1000so'm, 2 – tur meva sharbat 1400so'm tursa, korxona har bir tur meva sharbatidan qanchadan ishlab chiqarganda korxonaning meva sharbatlarini sotishdan tushgan daromadi eng katta bo'ladi?

Masalaning matematik ifodasini tuzish uchun masala shartlariga ko'ra kelib chiqadigan munosabatlarni hosil qilishimiz kerak. Avvalo masala shartiga ko'ra topilishi kerak bo'lgan 1 – va 2 – tur meva sharbatlarining noma'lum sonini x_1, x_2 deb belgilaymiz. Bu holda 1 – , 2 – va 3 – tur xomashyo (olcha, olma, shakar) sarflarini hisoblab bu sarflar korxonadagi bor bo'lgan xomashyo zaxiralaridan ortmasligini talab qilamiz. Xususan olcha sarfi bo'yicha har bir banka 1 – tur meva sharbatiga 0,1kg olcha , 2 – tur meva sharbatiga esa 0,3kg olcha solinadigan bo'lsa mos ravishda x_1 banka 1 – tur , x_2 banka 2 – tur meva sharbatlariga jami $x_1 \times 0,1 + x_2 \times 0,3$ kg olcha sarflanadi. Bu esa korxonada bor bo'lgan 30kg olchadan ortmasligi kerak. Demak olchalar bo'yicha qo'yiladigan shart

$$0,1x_1 + 0,3x_2 \leq 30$$

ko'rinishini oladi. Xuddi shunday mulohazalarga ko'ra olma va shakar sarfi bo'yicha korxona imkoniyatlaridan kelib chiqqan holda

$$0,5x_1 + 0,2x_2 \leq 45$$

$$0,1x_1 + 0,1x_2 \leq 12$$

ko'rinishdagi shartlarni hosil qilamiz. Meva sharbatlarini sotishdan tushadigan daromad esa keltirilgan narxlarga ko'ra jami

$$L(x_1, x_2) = 1000x_1 + 1400x_2$$

bo'lar ekan. Bu yerda $L(x_1, x_2)$ maqsad funksiyasi bo'lib, shunday ishlab chiqarish rejasini tanlash kerakki, bu reja avvalo resurslar bo'yicha shartlarga mos kelsin va maqsad funksiyasining eng katta qiymatini keltirib chiqarsin. Shunday qilib keltirilgan iqtisodiy masala quyidagicha ifodalanar ekan

$$\begin{cases} 0,1x_1 + 0,3x_2 \leq 30 \\ 0,5x_1 + 0,2x_2 \leq 45 \\ 0,1x_1 + 0,1x_2 \leq 12 \end{cases} \quad (1.1)$$

$$L(x_1, x_2) = 1000x_1 + 1400x_2 \rightarrow \max \quad (1.2)$$

Keltirilgan (1.1) cheklashlar (shartlar)ga ko'ra (2) maqsad funksiyasining maksimumini toping. Bu masala **chiziqli programmalash masalasining** (ChPM) tipik namunasi sifatida qaralishi mumkin. Ko'rinib turibdiki, (1.1) shartlarda ham (1.2) maqsad funksiyasida ham x_1, x_2 noma'lumlar birinchi darajalari bilan qatnashadi. Bu hol ChPM atamasining kelib chiqishiga sabab bo'lgan. Avval qayd etib o'tganimizdek, (1.1) – (1.2) masalani yechishda an'anaviy ekstremumlarni topish usullarini tatbiq qilib bo'lmaydi. Haqiqatdan ham ekstremumlarning mavjud.

bo'lish zaruriy sharti

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0; \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$$

bu yerda bajarilmaydi. Buning asosiy sababi bu masalada an'anaviy optimizatsiya masalalaridan farqli funksiyaning lokal ekstremumlari emas global ekstremumi, ya'ni eng katta yoki eng kichik qiymatlarini topish talab qilinadi. Bu qiymatlar, ya'ni $\sup L(x_1, x_2)$ va $\inf L(x_1, x_2)$ lar esa, agar mavjud bo'lsa faqat MBES chegaralarida bo'lar ekan. Buni keltirilgan masalaning geometrik tahlilidan ko'rishimiz mumkin. Keyinchalik umumiy holda ham ChPMlar uchun MBES qabariq soha bo'lishi va uning uchun optimal yechim shu qabariq soha uchlaridan birortasida bo'lishini misollarda tahlil qilamiz.

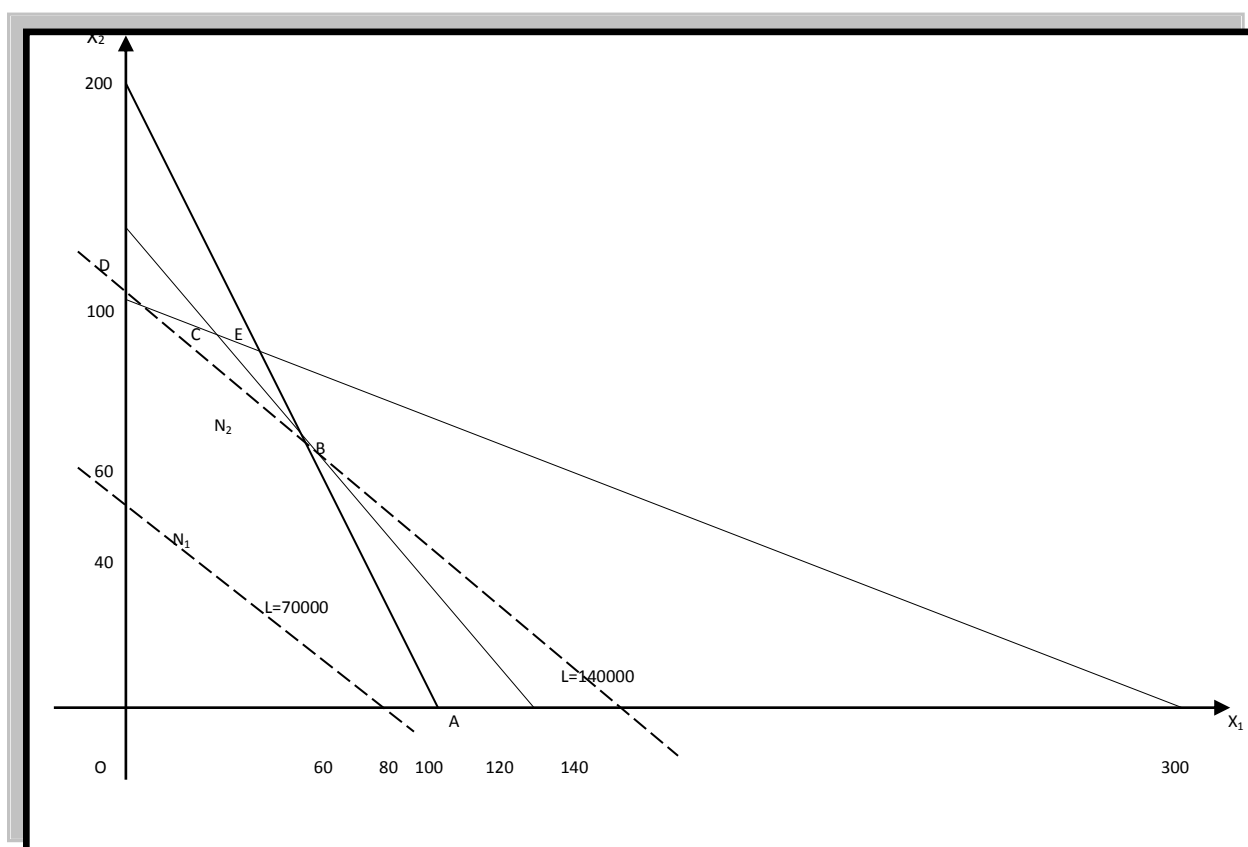
Chiziqli programmalash masalasining yechimini topishda geometrik usul.

Geometrik tahlilni (1.1) – (1.2) masala misolida olib boramiz. (1.1) shartlarning har biri OX_1X_2 koordinat tekisligini to'g'ri chiziq bo'ylab ikki bo'lish va ulardan shartga mos keladigan bittasini tanlashni ifodalaydi. Tahlilni soddalashtirish uchun

$$\begin{cases} \frac{x_1}{300} + \frac{x_2}{100} \leq 1 \\ \frac{x_1}{90} + \frac{x_2}{225} \leq 1 \\ \frac{x_1}{120} + \frac{x_2}{120} \leq 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(1.1) shartlarning hammasini mos ravishda 30;45;12ga bo'lib} \\ \text{yozamiz.} \end{array}$$

$$L(x_1, x_2) = 1000x_1 + 1400x_2 \longrightarrow \max$$

MBESni topish uchun hosil bo'lgan shartlardagi to'g'ri chiziqlarni chizamiz va ulardan pastki qismini olamiz. Natijada OABCD beshburchak shaklidagi soha hosil bo'ladi (1 – rasm).



1-rasm

Bu sohaning istalgan nuqtasining koordinatalari (1.1) – (1.2) masalaning shartlariga mos mumkin bo'lgan yechimlaridan birini ifodalaydi. Bu yerda biz

maqsad funksiyasining biror qiyamatiga mos keladigan rejalar (yechimlar)ga mos nuqtalar to'plamini ko'rib chiqamiz. Masalan $L(x_1, x_2) = 70000$ bo'ladigan nuqtalar to'plami $1000x_1 + 1400x_2 = 70000$ tenglama bilan ifodalanadi. Bu tenglamaning ikki tarafini 70000ga bo'lib yuboramiz va $\frac{x_1}{70} + \frac{x_2}{50} = 1$ ko'rinishdagi tenglamani hosil qilamiz. Bu OX_1X_2 koordinat tekisligida $M_1(70;0)$ va $M_2(0;50)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi bo'lib, 1 – rasmda uning grafigi punktir chiziq bilan ifodalangan. $L(x_1, x_2)$ funksiyaning qiymati orttirilsa, masalan $L(x_1, x_2) = 140000$ deb olinsa unga mos grafik avvalgisiga parallel bo'lib yuqoriroqdan, ya'ni $M_3(140;0)$ va $M_4(0;100)$ nuqtalardan o'tgan to'g'ri chiziq hosil bo'ladi. Bu to'g'ri chiziqlarning MBESga taaluqli har bir nuqtasining koordinatalari (1.1) – (1.2) masalaning yechimlarini ifodalaydi. Masalan, N_1 nuqtada $L(N_1) = 70000$, N_2 nuqtada esa $L(N_2) = 140000$ bo'ladi. Maqsad funksiyasining $L(x_1, x_2) = \text{const}$ tartibda olingan grafiklari o'zaro parallel to'g'ri chiziqlardan iborat bo'lar ekan. Maqsad funksiyasining qiymati ortgan sari bu to'g'ri chiziq yuqorilab boraveradi. Bora – bora MBESdan chiqib ketishi mumkin. Xususan berilgan misolda maqsad funksiyasining grafigi MBESdan oxiri C nuqtadan o'tgan holda chiqib ketadi. Ana shu holat, ya'ni C nuqta koordinatalari (1.1) – (1.2) masala yechimini, optimal rejani berar ekan deyishga asos bo'ladi. (1.1) shartlarga mos tengsizliklarni juft-jufti bilan tenglik sifatida olib sistema qilib yechib C, B nuqtalar koordinatalarini topish mumkin. Masala shartlari va 1 – rasmdan kelib chiqqan holda $A(100;0)$, $B(70;50)$, $C(30;90)$, $D(0;100)$ ekanligini ko'ramiz. Chizmada ko'rilganidek MBES qabariq sohadan iborat bo'lib, bu holat barcha ChPMLar uchun o'rinli bo'lgan holatdir. Maqsad funksiyasi grafigi ham to'g'ri chiziq bo'lganligi uchun uni oshirish parallel ko'chirishdan iborat bo'ladi va maqsad funksiyasining maksimal qiymati MBES uchlaridan birida ya'ni maqsad funksiyasining grafigi MBESdan chiqib ketish arafasida o'tgan nuqtasida bo'lar ekan. Bu esa optimal reja, ya'ni ChPMLar yechimini topish uchun umumiy qoida tavsiya qilishga imkoniyat beradi.

ChPMLarni yechishda avvalo MBESni ifodalovchi qabariq soha topiladi va uning uchlarida maqsad funksiyasini hisoblanadi. Bu qiymatlardan eng kattasiga mos keluvchi nuqta koordinatalari izlanayotgan yechim – optimal rejani beradi. Bu qoidani yuqorida ko'rilgan masalaga tatbiq qilamiz. Maqsad funksiyasi (MF) $L = (x_1, x_2) = 1000x_1 + 1400x_2$ bo'lib MBES uchlari A(100;0) B(70;50), C(30;90), D(0;100) dagi qiymatlarini L_A, L_B, L_C, L_D deb belgilasak $\text{£}_A = 100000$, $\text{£}_B = 140000$, $\text{£}_C = 156000$, $\text{£}_D = 140000$.

Bu qiymatlarni taqqoslash natijasida optimal reja C(30;90) nuqtada ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Bu natija 1 – rasmdagi chizmaga ham mos keladi, ya'ni MF grafigini parallel ko'chirishda bu grafik MBESdan C nuqta orqali chiqib ketishi ko'rinib turibdi. Bu keltirilgan grafik usul ikki noma'lumli masalalarda juda qulay bo'lish bilan birga ko'plab umumiy qoida va tavsiyalar ham ishlab chiqishga imkoniyat beradi.

Optimal rejaning iqtisodiy tahlili

Yuqorida keltirilgan (1.1) – (1.2) masalaning topilgan yechimini tahlil qilamiz. Optimal reja C(30;90) nuqtada bo'lib, bu nuqtada $x_1 = 30$; $x_2 = 90$ va $\text{£}_C = 156000$ ekanligini ko'rdik. Chizmadan (1 – rasm) ko'rinadiki, C nuqtada 1,3-homashyo to'liq sarflanadi, 2-homashyo esa ortib qolar ekan, chunki 2-homashyoga mos to'g'ri chiziq C nuqtadan o'tmaydi. Optimal reja qiymatlarini homashyo sarfi funksiyalariga qo'yib ham bunga ishonch hosil qilamiz.

$$f_1(x_1x_2) = (0,1x_1 + 0,3x_2) \begin{vmatrix} x_1 = 30 \\ x_2 = 90 \end{vmatrix} = 0,1 \times 30 + 0,3 \times 90 = 30$$

$$f_2(x_1x_2) = (0,5x_1 + 0,2x_2) \begin{vmatrix} x_1 = 30 \\ x_2 = 90 \end{vmatrix} = 0,5 \times 30 + 0,2 \times 90 = 33 < 45$$

$$f_3(x_1x_2) = (0,1x_1 + 0,1x_2) \begin{vmatrix} x_1 = 30 \\ x_2 = 90 \end{vmatrix} = 0,1 \times 30 + 0,1 \times 90 = 12$$

Bu holatdan kelib chiqib quyidagi mulohaza va tavsiyalarni keltirish mumkin. Ikkinchi tur homashyo 45 birlik bo'lib, undan 33 birlik ishlatiladi. Demak, 12 birlik

2 – tur homashyo ortib qoladi. Bu ortiqchasini homashyo sifatida sotib yuborish mumkin. Ikkinchi yo'li esa chizmadan ko'rinayapti, ishlab chiqarish rejasini oshirishga to'sqinlik qilayotgan kamyob (taxchil) homashyoni ko'paytirish kerak. Bunda barcha homashyolarni to'la jalb qilish, hamda daromadni oshirish imkoniyatiga ega bo'lamiz. Bizning masalada, chizmadan ko'rinadiki (1 – rasm) , 3 – tur homashyo, ya'ni shakar rejani oshirishga imkoniyat bermayapti. Agar shakarga mos to'g'ri chiziqli grafigini paralell ko'chirib E nuqtachacha olib borilsa barcha homashyolar to'la ishlatilishiga erishiladi. Grafikni paralell ko'chirish esa shakar zaxirasini ko'paytirish hisobiga erishiladi. Hususan bizning masalada $f_3(x_1, x_2) = (0,1x_1 + 0,1x_2) = C_3$ deb, grafik E nuqtadan o'tishi shartidan C_3 qiymat tanlanadi. E nuqta 1-,2- to'g'ri chiziqlar kesishgan nuqtasi bo'lib, uning koordinatalari

$$\begin{cases} 0,1x_1 + 0,3x_2 = 30 \\ 0,5x_1 + 0,2x_2 = 45 \end{cases} \text{ sistemadan topiladi.}$$

Bu sistemadan $x_1 = \frac{75}{1,3}; x_2 = \frac{105}{1,3}$ ekanligini topamiz. 3-xomashyo chizig'i bu nuqtadan o'tishi uchun $f_3(x_1, x_2) = 0,1 \times \left(\frac{75}{1,3} + \frac{105}{1,3} \right) = \frac{180}{13} = 13,8$ bo'lishi kerak ekan. Demak, shakar zaxirasini 13,8 birlikka yetkazsak, ya'ni 1,8 birlikka oshirsak optimal planni $E\left(\frac{75}{1,3}; \frac{105}{1,3}\right)$ nuqtaga ko'chirish mumkin. Bunda maqsad funksiyasi

$$f_E = 1000 \times \frac{75}{1,3} + 1400 \times \frac{105}{1,3} = \frac{75000 + 147000}{1,3} = \frac{222000}{1,3} \approx 170770 \text{ qiymatga erishadi.}$$

Bunda daromad C nuqtadalgiga qaraganda 14770 pul birligiga ortadi. Shunday qilib qo'yilgan iqtisodiy masalaning matematik modelini tuzish, matematik model yordamida masala yechimini topish va topilgan yechimning iqtisodiy tahlilini to'liq o'tkazish mumkin ekan.

Geometrik usulning samarali ekanligini namoyish qilish uchun uch noma'lumli ChPM na'munasini ko'ramiz. Maqsad masala mohiyati va uni yechimini topish jarayonini aks ettirish bo'lgani uchun masalaning birato'la matematik ifodasidan

boshlaymiz. Vaqtincha iqtisodiy mulohazalardan holi bo'lgan holda quyidagi matematik masalani ko'ramiz.

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 8x_3 \leq 24 \\ 10x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 30 \\ 4x_1 + 8x_2 + 4x_3 \leq 24 \end{cases} \quad (1.3) \quad x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3$$

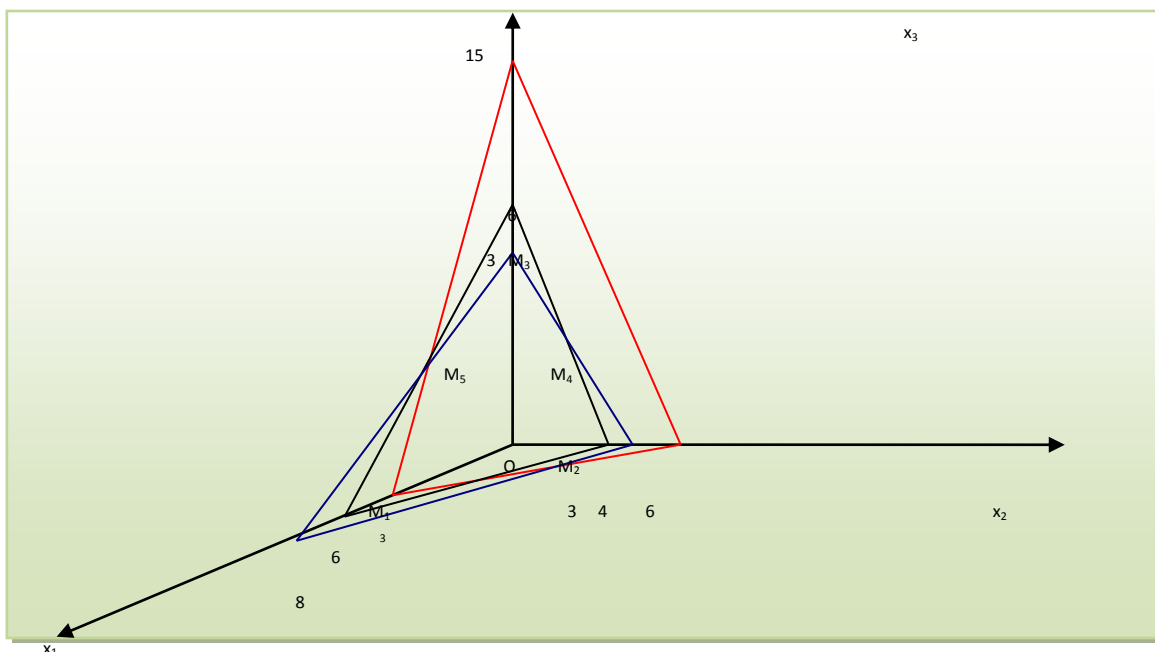
$$L(x_1, x_2, x_3) = 25x_1 + 30x_2 + 20x_3 \rightarrow \max \quad (1.4)$$

Bu yerda (1.3) shartlarni qanoatlantiruvchi barcha nuqtalar orasidan shundayini topishni talab qilinadiki, bu nuqta koordinatalari (1.4) maqsad funksiyasining eng katta qiymatini ta'minlasin. Dastlab (1.3) shartlarni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami, ya'ni ChPM uchun MBESni topish kerak bo'ladi. Bu yerda ikki o'lchovli masaladagiga o'xshash geometrik usuldan foydalanamiz. Avvalo (1.3) shartlarni kanonik ko'rinishiga keltiramiz

$$\begin{cases} \frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{3} \leq 1 \\ \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{6} + \frac{x_3}{15} \leq 1 \\ \frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{6} \leq 1 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0$$

Bu shartlarning har biri tenglik sifatida olinganda tekislik kanonik tenglamasi bo'lib, shartga ko'ra shu tekislikdan pastki qismini olish kerakligini ifodalaydi. $x_i \geq 0$ shartlar esa fazoviy koordinat sistemasiga nisbatan birinchi oktantni olish kerakligini ifodalaydi.



2 – rasm

Yuqorida keltirilgan shartlar va mulohazalarga ko'ra (1.3) – (1.4) masala uchun MBESini 2 – rasmda sxematik ifodalangan. Bir-biridan farqlash va MBESni ajratish qulay bo'lishi uchun har bir tekislik uchun boshqa – boshqa rang olingan. Chizmada 1 – tekislik havo rang , 2 – tekislik qizil, 3 – tekislik qora rangda aks ettirilgan. Birinchi oktant tepasidan qaraganda MBES ostki chegarasi shtrixlangan sohadan iborat bo'ladi. Chizmadan ko'rinadiki M_1 2 – tekislikning OX_1 o'qi bilan , M_2 3 – tekislikning OX_2 o'qi bilan, M_3 esa 1 – tekislikning OX_3 o'qi bilan kesishgan nuqtasi bo'ladi. Shunga ko'ra koordinatalar orqali $M_1(3;0;0)$, $M_2(0;3;0)$, $M_3(0;0;3)$ ekanligini ko'ramiz. M_4 nuqta esa $OX_2 X_3$ koordinata tekisligida 1-, 3-tekisliklar kesishgan nuqtasi ekanligini ko'ramiz. Uning koordinatalarini topish uchun 1-,3-tekislik tenglamalarida $x_1 = 0$ deb sistema hosil qilamiz. Undan esa

$$\begin{cases} 6x_2 + 8x_3 = 24 \\ 8x_2 + 4x_3 = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x_2 + 8x_3 = 24 \\ 16x_2 + 8x_3 = 48 \end{cases} \Rightarrow 10x_2 = 24$$

$x_2 = 2,4$; $x_3 = 1,2$ topiladi. Demak $M_4(0;2,4;1,2)$

Xuddi shuningdek M_5 nuqta uchun $x_2=0$ deb 1-,2-tekisliklar kesishgan nuqtasini, M_6 uchun esa $x_3=0$ deb 2-,3-tekisliklar kesishgan nuqtasini topiladi. Bunda $M_5(2,6 ; 0 ; 2,03)$ va $M_6(2 ; 2 ; 0)$ ekanligi topiladi. MBES tepasida esa uchchala tekislikning kesishgan nuqtasi sifatida topiladigan M_7 nuqta bo'ladi. (1.3) tengsizliklari tenglik qilib sistema sifatida yechilsa $M_7(2,08 ; 1,36 ; 1,2)$ ekanligi topiladi. Natijada MBES qavariq soha $OM_1 M_2 M_3 M_4 M_5 M_6 M_7$ ning barcha uchlari topiladi. Maqsad funksiyasi (MF) qiymatining o'zgarmas qiymatida $25x_1 + 30x_2 + 20x_3 = C = \text{const}$ tekislik tenglamasi bo'lib, unga mos nuqtalar shu tekislikda yotadi. Bu yerda ham MF tekislikni parallel ko'chirish $C=\text{const}$ qiymatining ortishi yoki kamayishi bilan bog'liq bo'ladi. Shuning uchun optimal reja uning MBES uchlariidan eng katta qiymatga erishadiganiga mos keladi. Agar $L(M_i) = L_i$ belgilash kiritsak, bevosita hisoblashlardan $L_1 = 75; L_2 = 90; L_3 = 60; L_4 = 96; L_5 = 105,6; L_6 = 110; L_7 = 116,8$ ekanligini ko'ramiz. Demak optimal reja M_7 nuqtada bo'lib, bunda $x_1 = 2,08 ; x_2 = 1,36 ; x_3 = 1,2$ bo'lar ekan, maqsad funksiyasi esa bu nuqtada o'zining eng katta qiymatiga erishar ekan.

1.CHPM geometrik usulda yechilsin.

Misollar

$$1.1 \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ 6x_1 - 4x_2 \geq 12 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$L = 300x_1 + 200x_2 \rightarrow \max$$

$$1.3 \begin{cases} 3x_1 + 7x_2 \leq 21 \\ 8x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$L = 300x_1 + 200x_2 \rightarrow \max$$

$$1.2 \begin{cases} 10x_1 - 5x_2 \geq 20 \\ 3x_1 + 6x_2 \geq 18 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$L = 300x_1 + 500x_2 \rightarrow \max$$

$$1.4 \begin{cases} 6x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ 3x_1 + 7x_2 \leq 21 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$L = 300x_1 + 500x_2 \rightarrow \max$$

$$1.5 \begin{cases} 8x_1 + 7x_2 \leq 56 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$1.6 \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 \leq 18 \\ 2x_1 - 4x_2 \geq 8 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$L = 800x_1 + 400x_2 \rightarrow \max$$

$$L = 1000x_1 + 1000x_2 \rightarrow \max$$

2. Berilgan CHPM uchun geometrik usulda optimal plan topilsin.

$$2.1 L(x_1, x_2, x_3) = 10x_1 + 5x_2 + 8x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 \leq 30 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 24 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$2.2 L(x_1, x_2, x_3) = 8x_1 + 4x_2 + 6x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 \leq 18 \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 24 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$2.3 L(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 6x_2 + 8x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 20 \\ 8x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 24 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$2.4 L(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 + 10x_2 + 8x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 + 3x_3 \leq 24 \\ 6x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 30 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$2.5 L(x_1, x_2, x_3) = 6x_1 + 10x_2 + 8x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 + 4x_3 \leq 24 \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 30 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

§ 2 . Chiziqli programmalash masalasining matematik asoslari

Umumiy holda, biror ishlab chiqarish korxonasida n xil mahsulot ishlab chiqarilayotgan bo'lib, buning uchun m xil xomashyo (ishlab chiqarish resurslari)dan foydalanilayotgan bo'lsin. Har bir ishlab chiqarilayotgan j – mahsulot uchun i – xomashyodan a_{ij} birlik ishlatilayotgan bo'lsin. Korxonada i – xomashyodan b_i birlik bor bo'lsin. Agar j – mahsulotning bir birligining narxi C_j pul birligiga teng bo'lsa korxona har bir mahsulotdan necha donadan (birlikdan) ishlab chiqarganda ularni sotishdan keladigan daromad maksimal bo'ladi? Iqtisodiy nuqtai nazardan masala ana shunday ifodalanadi. Agar j – mahsulotning ishlab chiqarilishi kerak bo'lgan miqdorini X_j deb belgilasak va keltirilgan shartlarning barchasini matematik tarzda ifodalasak u quyidagi ko'rinishini oladi.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.1)$$

$$x_j \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n C_j X_j \rightarrow \max \quad (2.2)$$

Chiziqli programmalash masalasi (ChPM)ning matematik ifodasi (2.1) – (2.2) bo'lib, unga ko'ra n o'lchovli fazoning (2.1) shartlarni qanoatlantiruvchi $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nuqtalari orasidan shundayini topish kerakki, (2.2) maqsad funksiyasining maksimal (eng katta) qiymatini ta'minlasin. Avvalo masalaning (2.1) shartlari va ularni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami haqida to'xtalamiz. Bu shartlarning geometrik ma'nosini $n=2$ va $n=3$ bo'lgan hollarda batafsil ko'rib chiqildi (§1). Umumiy holda (2.1) shartlarning har biri n - o'lchovli fazodagi gipertekislik tenglamasi yordamida fazoni ikkiga bo'lish va undan bir tarafini olishni aks ettiradi. $x_j \geq 0$ shartlar ham n - o'lchovli fazoda $x_j = 0$ tenglamaga mos gipertekislikdan bir tarafini olishni ifodalaydi. n - o'lchovli fazoda ham qabariq soha ta'rifi va xususiyati odatdagi 2 va 3 o'lchovli real fazolardagidek bo'ladi. Chiziqli fazo amallari n o'lchovli fazo elementlari $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ lar uchun quyidagicha aniqlangan bo'lsin

$$X(x_1, x_2, \dots, x_n) + Y(y_1, y_2, \dots, y_n) = Z(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \quad (2.3)$$

$$\alpha \times X(x_1, x_2, \dots, x_n) = T(\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

U holda n o'lchovli fazodagi biror D sohaning ixtiyoriy ikkita $X, Y \in D$ elementlari uchun va ixtiyoriy $\alpha \in (0;1)$ sonlar uchun $\alpha \times X + (1-\alpha) Y \in D$ bo'lsa D soha qabariq soha deyiladi. Bu shart real fazolardagi qabariq soha ta'rifi (agar sohaning ixtiyoriy ikki nuqtasini tutashtiruvchi kesma ham shu sohaga tegishli bo'lsa soha qabariq soha deyiladi)ga to'la mos keladi. ChPM yechimini izlash odatda mumkin bo'lgan yechimlar sohasi (MBES)ni topishdan boshlanadi. MBESdan esa (2.2) maqsad funksiyasining maksimumi izlanadi. Avvalo ChPM uchun MBES doimo qabariq soha bo'lishligini ta'kidlab o'tishimiz kerak. Haqiqatdan, agar (2.1) shartlarni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamini D deb belgilasak va ixtiyoriy $X, Y \in D$ elementlarini olsak hamda $Z = \alpha X + (1-\alpha)Y$ elementini olsak $Z(z_1, z_2, \dots, z_n)$ uning uchun

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} z_j = \sum_{j=1}^n a_{ij} (\alpha x_j + (1-\alpha)y_j) = \alpha \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + (1-\alpha) \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \leq \alpha \times b_i + (1-\alpha)b_i = b_i$$

kelib chiqadi, ya'ni $Z(z_1, z_2, \dots, z_n)$ uchun ham $\sum_{j=1}^n a_{ij} z_j \leq b_j \quad i = 1, 2, \dots, n$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi, demak $Z \in D$ bo'ladi. Aksariyat hollarda n o'lchovli ChPMning MBESi n o'lchovli qabariq soha bo'ladi. Bu holda ham masala yechimi, ya'ni optimal rejani shu qabariq sohaning uchlaridan izlanishi kerak. (2.1) shartlarga ko'ra aniqlanadigan D sohaning uchlarini topish uchun $m+n$ ta (2.1) shartlardan n ta chiziqli erklisini tanlaymiz va ularni tenglik sifatida ifodalasak n ta noma'lumli n ta chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi. Bu sistemaning yechimini topib uni (2.1) shartlarning qolganlariga muvofiqligi tekshiriladi. Agar shunday bo'lsa, bu yechimga mos $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nuqta MBESning tayanch nuqtasi, uning koordinatalari esa ChPMning tayanch yechimi deyiladi.

Shunday usulda hosil qilish mumkin bo'lgan sistemalar soni umumiy holda C_{n+m}^n formula bo'yicha hisoblanadi. Bu sistemalardan ChPMning tayanch

yechimlari topiladi. Tayanch yechimlar orasidan maqsad funksiyasining eng katta qiymatini beruvchi optimal reja ham topiladi. Faqat n , m ortgan sari tayanch yechimlar soni ham ortib boradi. Masalan $n=5$, $m=4$ bo'lgan, umuman olganda oddiygina holda ham tayanch yechimlar soni $C_9^5 = \frac{9!}{5 \times 4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126$ bo'lishi mumkin ekan. Shuncha yechimning har birini topishda 5 noma'lumli sistemalarni ishlash kerak bo'ladi. Tabiiy savol tug'iladi, optimal rejani topish uchun ana shu 126 nuqtalarning barchasini topish, hamda shu nuqtalarda maqsad funksiyasini hisoblash shartmikan? Bu ishni osonlashtirish

ya'ni optimal rejaga yetish yo'lini qisqartirish imkoniyati yo'qmikan? Bu sohadagi izlanishlar o'z samarasini bergan va rejani bosqichma – bosqich yaxshilash degan usullar yaratilgan. Usulning g'oyasi asosan quyidagi mulohazaga asoslangan. Avvalo ixtiyoriy birorta tayanch yechim topamiz. Bu yechim MBES deb ataganimiz qabariq ko'pyoqlining birorta uchiga mos keladi. Ikki o'lchovli holda bu qabariq ko'pburchak, uch o'lchovli holda qabariq ko'pyoqli (prizma, piramida ...). Bu uchidan bir qancha qirralar o'tgan bo'ladi, go'yoki chorrahada uchrashadigan yo'llardek. Har bir qirra berilgan uchini boshqa bir qo'shni uch bilan tutashtiradi. Shu yo'llardan qaysi birini tanlagan ma'qul, qay biri maqsadga tezroq olib boradi? Go'yo ertak qahramonlari oldida uchraydigan yo'llarda yozib qo'yiladigan yo'l ta'rifiga o'xshash bu yo'llar hislatlarini aniqlash mezonini yo'qmikan? Umuman maqsadga eltuvchi yo'lning o'zi bormikan? Ertaksifat bu mulohazalarning barchasiga javob beruvchi usul dastlab 1947 yil Dansig tomonidan kashf qilingan. Bu usul keyinchalik ilmiy va o'quv adabiyotlarida **simpleks usul** nomi bilan muomalaga kirib ketgan. Usulning matematik hamda amaliy tafsilotlariga o'tamiz.

3. Berilgan CHPM uchun ko'rsatilgan bazisga mos tayanch yechim topilsin. Tayanch yechimlar ko'pi bilan nechta bo'lishi mumkin.

$$3.1 \ L(x_1, x_2, x_3) = 10x_1 + 5x_2 + 8x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 \leq 30 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 24 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$A_1 A_2$ bazisda

$$3.2 \ L(x_1, x_2, x_3) = 8x_1 + 4x_2 + 6x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 \leq 18 \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 24 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$A_1 A_3$ bazisda

$$3.3 \ L(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 6x_2 + 8x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 20 \\ 8x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 24 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$A_2 A_3$ bazisda

$$3.4 \ L(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 + 10x_2 + 8x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 + 3x_3 \leq 24 \\ 6x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 30 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$A_1 A_3$ bazisda

$$3.5 \ L(x_1, x_2, x_3) = 6x_1 + 10x_2 + 8x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 + 4x_3 \leq 24 \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 30 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$A_2 A_3$ bazisda

§ 3. Rejani bosqichma – bosqich yaxshilash usuli.

Biz bu yerda asosan usulning amaliy taraflari, hamda hisoblash algoritmlariga ko'proq to'xtalamiz. Usul asosan ikkita bosqichni o'z ichiga oladi. To'g'rirog'i har bosqichda ikkita savol hal qilinishi kerak bo'ladi. Avvalo, tanlangan tayanch yechim optimal reja bo'ladimi? Optimal bo'lsa, tabiiy, muammo hal bo'lgan, yechim topilgan deb hisob qilinadi. Optimal bo'lmasa, navbatdagi, bu yechimga qaraganda yaxshiroq yechimni qanday topish mumkin?

ChPMni umumiy ko'rinishini olamiz

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.1)$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n C_j x_j \rightarrow \max \quad (3.2)$$

(3.1) shartlarni qanoatlantiruvchi barcha $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ lar orasidan (3.2) maqsad funksiyasining eng katta qiymatini beruvchi nuqta koordinatalari, ya'ni optimal rejani topish kerak.

Simpleks usul kanonik ko'rinishdagi ChPMlar uchun mo'ljallangan. Bunda ChPM barcha shartlari tenglik ko'rinishida berilgan bo'lishi kerak. Kanonik ko'rinishdagi ChPM matematik ifodasi

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.3)$$

$$\sum_{j=1}^n C_j x_j \rightarrow \max \quad (3.4)$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu yerda ham $x_j \geq 0$ o'z o'rnida qoladi. Alohida zarurat bo'lmasa bu shartlarni oshkora ifodalab o'tirilmaydi. Umumiy ko'rinishdagi (3.1) – (3.2) ChPMni kanonik (3.3) – (3.4) ko'rinishiga keltirishimiz mumkin. Buning uchun (3.1) shartlarning har birining chap tarafiga (u kichik bo'lganligi uchun) yangi x_{n+i} o'zgaruvchini qo'shish yordamida tenglikka aylantirish mumkin. Bunda x_{n+i} o'zgaruvchilar ham noma'lum bo'ladi. Natijada (3.1) – (3.2) masala

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.5)$$

$$\sum_{j=1}^{n+m} c_j x_j \rightarrow \max \quad (3.6)$$

ko'rinishini oladi, bu yerda noma'lumlar $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ $n+m$ ta bo'ladi. Maqsad funksiyasining ko'rinishini o'zgartirmaslik uchun (3.6) ifoda $C_{n+1} = C_{n+2} = \dots = C_{n+m} = 0$ deb hisoblangan. Bundan ko'rinadiki, yangi kiritilgan $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ o'zgaruvchilar qanday bo'lishidan qat'iy nazar maqsad funksiyasining qiymatlariga mutlaqo ta'sir qilmaydi. Natijada hosil bo'lgan (3.5) – (3.6) masala (3.3) – (3.4) masala bilan aynan bir xil ko'rinishini olar ekan. Shunday qilib umumiy ko'rinishdagi ChPMni kanonik ko'rinishga keltirish mumkinligi asoslandi. Demak, kanonik ko'rinishdagi ChPMLar uchun yaratilgan usullarni umumiy ko'rinishdagi ChPMLarga ham tatbiq qilish mumkin ekan. Simpleks usul tafsilotlariga o'tamiz. Buning uchun (3.3) shartlar matritsasi $A = (a_{ij})$ $i = 1, 2, \dots, m$ $j = 1, 2, \dots, n$ ustunlarini m o'lchovli chiziqli fazo vektorlari deb, faqat uning koordinatalari yordamida tuzilgan vektorlarni $\bar{A}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})^T$

ko'rinishida ifodalaymiz. Shunga o'xshash, narxlarga mos C_j qiymatlar yordamida $\bar{C} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ vektorni satr matritsa sifatida ifodalaymiz. Zaxiralarga mos b_j qiymatlar yordamida $\bar{B} = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$ ustun matritsani tuzsak (3.3) – (3.4) masalani kompakt (ixcham) ko'rinishda, matritsalar orqali

$$A \times \bar{X} = \bar{B} \quad (3.7)$$

$$\bar{C} \times \bar{X} \rightarrow \max \quad (3.8)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin. Bu yerda $\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ noma'lumlarga mos ustun matritsa.

$\bar{A}_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$) vektorlar m o'lchovli chiziqli fazo vektorlari bo'lib, ularning soni n aksariyat hollarda m dan ancha katta bo'ladi. Shuning uchun (3.7) sistema

yechimlari cheksiz ko'p bo'ladi. Ular orasida (3.8) shartni qanoatlantiradiganini topishimiz kerak.

Buning uchun $\bar{A}_j$ vektorlar orasidan $\bar{X}$ musbat koordinatalariga mos keluvchi mta chiziqli erklisini ajratishimiz kerak. Fazo m o'lchovli bo'lganligi uchun $\bar{A}_j$ lar orasida chiziqli erklisi m tadan ortiq bo'lmaydi. Bu vektorlar bazis vektorlar deb belgilanadi. Masala shartlari shu bazisga moslanadi. Bazis vektorlardan qolgan barcha $\bar{A}_k$ vektorlarga mos X_k lar nol deb olinadi. Shundan keyin berilgan bazisga mos tayanch yechim topiladi va u optimallikka tekshiriladi.

Biz bu yerda usulning faqat amaliy taraflariga to'xtalamiz. Usulning nazariy asoslariga qiziqqanlar maxsus adabiyotlarga murojaat qilishi mumkin. Usul mohiyati va tartibini amaliy misolni ishlash jarayonida izohlab boramiz. Quyidagi ChPM berilgan bo'lsin.

$$\begin{cases} 7x_1 + 8x_2 + 5x_3 \leq 56 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 10 \\ x_1 + x_3 \leq 6 \end{cases}$$

$$L(x_1; x_2; x_3) = 10x_1 + 12x_2 + 25x_3 \rightarrow \max$$

Bu masalani kanonik ko'rinishga keltiramiz

$$\begin{cases} 7x_1 + 8x_2 + 5x_3 + x_4 = 56 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 10 \\ x_1 + x_3 + x_6 = 6 \end{cases}$$

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 10x_1 + 12x_2 + 25x_3 + 0 \times x_4 + 0 \times x_5 + 0 \times x_6 \rightarrow \max$$

Berilgan masala shartlaridan $\bar{A}_1 = (7; 2; 1)^T$, $\bar{A}_2 = (8; 1; 0)$, $\bar{A}_3 = (5; 1; 1)^T$, $\bar{A}_4 = (1; 0; 0)^T$, $\bar{A}_5 = (1; 0; 0)^T$, $\bar{A}_6 = (0; 0; 1)^T$ ekanligini ko'ramiz. Bu yerda yangi kiritilgan o'zgaruvchilarga mos $\bar{A}_4, \bar{A}_5, \bar{A}_6$ vektorlar bazis ekanligi ko'rinib turibdi, haqiqatdan ham $\bar{A}_1 = 7 \times \bar{A}_4 + 2 \times \bar{A}_5 + 1 \times \bar{A}_6$

ekanligini ko'rishimiz mumkin. Qolgan vektorlar, shuningdek cheklash vektori $\bar{B} = (56; 10; 6)^T$ ni ham ular orqali ifodalash mumkin. Masala shartlariga ko'ra shu bazisga mos tayanch yechimni topish uchun bazisga kirmagan x_1, x_2, x_3 o'zgaruvchilarni nol deb olishimiz kerak. U holda $x_4 = 56, x_5 = 10; x_6 = 6$ ekanligi kelib chiqadi. Keltririlgan shartlarni ifodalovchi barcha sonlarni quyidagi jadval ko'rinishda ifodalaymiz.

i	$\begin{matrix} C_j \\ C_i \end{matrix}$			10	12	25	0	0	0	
		Baz	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	Θ_i
1	0	A_4	56	7	8	5	1	0	0	11,2
2	0	A_5	10	2	1	1	0	1	0	10
3	0	A_6	6	1	0	1	0	0	1	6
	Δ_j			-10	-12	-25	0	0	0	

1 – jadval

1 – jadvalda A_0 ustun shartlardagi o'ng taraf qiymatlari (resurslar miqdori) $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ ustunlar shartlardagi $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ larning koeffitsiyentlaridan tuzilgan. Shartlarda koeffitsiyentlari birlik ustunni ifodalayotgan vektorlar bazis vektorlar deb belgilanib, ularning 1 elementlari joylashgan qator boshida bazis deb atalgan ustunda shu vektor belgisi A_K deb qo'yiladi. C_{Ki} deb atalgan ustunga esa bazisga kirgan shu qatordagi A_k vektor tepasidagi narx qiymati C_k qo'yiladi. i -

ustunda tenglama nomeri belgilanadi. Shu bilan masala shartlariga kiruvchi barcha sonlar jadvalda o'z o'rnini egallaydi. Shundan keyin jadvalning so'nggi qator va so'nggi ustunini to'lg'azishga o'tiladi. Dastlab

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} \times C_{Ki} - C_j \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.9)$$

formula bo'yicha Δ_j lar hisoblanadi. Agar barcha Δ_j lar manfiy bo'lmasa jadvalga mos tayanch yechim optimal yechim deyiladi va hisob to'xtatiladi. Agar Δ_j lar orasida manfiylari bo'lsa jadvalga mos tayanch yechim optimal emas, uni yaxshilash kerak degan xulosa qilinadi. Buning uchun manfiy Δ_j lar orasidan eng kichigi joylashgan ustunni hal qiluvchi ustun deb belgilanadi. Agar bu ustundagi A_k elementlari $(a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{mk})^T$ lar orasida musbatlari bo'lmasa masala yechimi yo'q degan xulosaga kelamiz. Agar $a_{ik} \quad i = 1, 2, \dots, m$ lar orasida musbatlari bo'lsa

* Ular uchun $\Theta_i = a_{io} / a_{ik}$ qiymatlar hisoblanadi.

* ulardan kichigi Θ_i tanlanadi va bu Θ_i jolashgan qator hal qiluvchi qator deb e'lon qilinadi, hamda hal qiluvchi ustun va hal qiluvchi qatorlar kesishgan joydagi a_{ek} elementni esa hal qiluvchi element deb belgilanadi.

Bu jarayonni biz tahlil qilayotgan misol (1 – jadval) uchun quyidagi tartibda bajariladi. Avvalo (3.9) formulalar bo'yicha Δ_j larni hisoblaymiz.

$$\Delta_1 = \sum_{i=1}^3 a_{i1} \times C_{Ki} - C_1 = 7 \times 0 + 2 \times 0 + 1 \times 0 - 10 = -10$$

$$\Delta_2 = \sum_{i=1}^3 a_{i2} \times C_{Ki} - C_2 = 8 \times 0 + 2 \times 0 + 0 \times 0 - 12 = -12$$

$$\Delta_3 = \sum_{i=1}^3 a_{i3} \times C_{Ki} - C_3 = 5 \times 0 + 1 \times 0 + 1 \times 0 - 25 = -25$$

$$\Delta_4 = \sum_{i=1}^3 a_{i4} \times C_{Ki} - C_4 = 1 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0 - 0 = 0$$

$$\Delta_5 = \sum_{i=1}^3 a_{i5} \times C_{Ki} - C_5 = 0 \times 0 + 1 \times 0 + 0 \times 0 - 0 = 0$$

$$\Delta_6 = \sum_{i=1}^3 a_{i6} \times C_{Ki} - C_6 = 0 \times 0 + 0 \times 0 + 1 \times 0 - 0 = 0$$

Bu qiymatlar jadvalga kiritilgan Δ_j larni taqqoslash yordamida eng kichigi $\Delta_3 = -25$ ga mos kelgan 3 – ustun **hal qiluvchi ustun** deb belgilanadi. Bu ustun elementlari yordamida $\Theta_i = a_{i0} / a_{i3}$ qiymatlar hisoblanadi. $\Theta_1 = 56/5 = 11,2$; $\Theta_2 = 10/1 = 10$; $\Theta_3 = 6/1 = 6$ ular ham jadvalga kiritilgan. Θ_i lar orasida eng kichigi Θ_3 ga mos kelgan 3 – qator **hal qiluvchi qator** deb belgilanadi. Jadvalda bu ustun va qator strelka bilan belgilangan. Ular kesishgan joydagi hal qiluvchi a_{33} element ham qalin chegara bilan ajratilgan Agar hal qiluvchi element 1ga teng bo'lmasa hal qiluvchi qator barcha elementlarini hal qiluvchi elementga bo'lib yuborib bunga erishish mumkin. 3 – qator elementlarini 5ga ko'paytirib, 1 – qator elementlaridan ayiramiz, so'ngra 3 – qator elementlarini 1ga ko'paytirib, 2 – qator elementlaridan ayiramiz. Hosil bo'lgan qiymatlari 2 – jadval tarzida ifodalangan.

i	C_j									
	C_{ik}									
		Baz	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	Θ_i
1	0	A_4	26	2	8	0	1	0	-5	3,25
2	0	A_5	4	1	1	0	0	1	-1	4
3	25	A_3	6	1	0	1	0	0	1	
	Δ_j			15	-12	0	0	0	25	

←

2 – jadval

2 – jadval uchun ham (3.9) formulalar yordamida Δ_j lar hisoblanadi. Bu qiymatlar hisoblanib jadvalga kiritilgan. Δ_j lar orasida manfiysi bo'lganligi uchun bu jadvalga mos tayanch yechim ham optimal yechim emas. Shuning uchun manfiy Δ_2 ga mos 2 – ustun hal qiluvchi ustun deb belgilandi. Hal qiluvchi ustunning musbat elementlari uchun $\Theta_j = 26/8 = 13/4 = 3,25$; $\Theta_2 = 4/1=4$ lar hisoblanadi. Eslatma: Manfiy va nol bo'lgan elementlar uchun Θ_i hisoblanmaydi. Agar a_{ik} lar orasida musbatlari bo'lmasa, ChPM yechimi yo'q deb hisoblash to'xtatiladi. Bizning misolda Θ_i lardan kichigi $\Theta_1 = 3,25$ ga mos qator hal qiluvchi qator deb belgilandi. Simpleks usul algoritmiga ko'ra 3 – jadvalni to'lg'azamiz.

i	C_j									
	C_{ik}			10	12	25	0	0	0	
		Baz	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	Θ_i
1	12	A_2	3,25	0,25	1	0	0,125	0	-0,625	
2	0	A_5	0,75	0,75	0	0	-0,125	1	-0,375	
3	25	A_3	6	1	0	1	0	0	1	
		Δ_j		18	0	0	1,5	0	17,5	

3 – jadvalda barcha $\Delta_j \geq 0$ bo'lganligi uchun bu jadvalga mos tayanch yechimda bazis o'zgaruvchilar $x_2 = 3,25; x_3 = 6; x_5 = 0,75$ deb olinadi. Bazisga kirmagan o'zgaruvchilar esa nolga teng deb olinadi, ya'ni $x_1 = 0; x_4 = 0; x_6 = 0$. Bu yechim ChPM uchun optimal planni beradi. Yordamchi noma'lumlardan holi bo'lgan holda berilgan ChPM uchun optimal plan $x_1 = 0; x_2 = 3,25; x_3 = 6$ ko'rinishda belgilanadi. Bunda maqsad funksiyasi o'zining maksimal qiymatiga erishar ekan va $L = 10 \times 0 + 12 \times 3,25 + 25 \times 6 = 189$ ga teng bo'ladi. Keltirilgan misol planni bosqichma – bosqich yaxshilash, ya'ni simpleks usulning barcha amallari va ularning bajarilish tartibini o'zida aks ettirgan. Shuning bilan birga masalani ishlash tartibiga e'tibor berilsa, geometrik usuldan farqli noma'lumlar soni ortgan, ya'ni masala murakkablashgan holda ham bu usul shundayligicha tatbiq qilinaveradi.

Tabiiy bunda simpleks jadval ustun va qatorlar soni ortadi, shunga ko'ra hisoblashlar hajmi ham ortadi. Optimal planga yetib borish uchun bajariladigan qadamlar soni ham ortishi mumkin.

Simpleks usulning umumiy holdagi algoritmi (ixtiyoriy n , m lar uchun) dasturlangan va zamonaviy kompyuterlar matematik ta'minotida bu dasturlar mavjud. Ulardan foydalanish uchun iste'molchi, ya'ni tadqiqotchi, o'zi yechmoqchi bo'lgan ChPM ga taalluqli barcha qiymatlarni ko'rsatilgan tartibda kompyuter xotirasiga kiritib, shu dasturlarga murojaat qilishi yetarli.

Biz bu yerda e'tiborni qaratmoqchi bo'lgan yana bir hol, simpleks usul bo'yicha hisobni boshlashda dastlabki simpleks jadvalda bazis berilishi kerakligi. Bu bazis qanday tanlanadi, bunda nimalarga e'tiborni qaratish kerak?

§ 4. Chiziqli programmalash masalalari uchun bazis tanlash va masala shartlarini tanlangan bazisga moslashtirish.

Kanonik ko'rinishda berilgan ChPMni qaraymiz.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i=1, 2, \dots, m \quad (4.1)$$

$$x_j \geq 0 \quad j=1, 2, \dots, n$$

$$L = \sum_{j=1}^n C_j x_j \rightarrow \max \quad (4.2)$$

Bu yerda avval ta'kidlaganimizdek $m < n$ bo'ladi, ya'ni (4.1) sistemaning yechimlari cheksiz ko'p. Shu yechimlar orasidan (4.2) shartga mos keladigani, ya'ni maqsad funksiyasiga maksimal qiymat beradiganini ajratib olish kerak. Buning uchun (4.1) sistema yechimlarini ifodalash qoidasini va ular orasidan bazis o'zgaruchilarni ajratish usulini aniqlashimiz kerak. (4.1) sistema matritsasi tartibi $m \times n$ bo'lganligi va $m < n$ bo'lgani uchun $R_g A \leq m$ bo'ladi. Qulaylik uchun $R_g A = m$ deb olamiz. Aksariyat hollarda bu shart bajariladi. A matritsadan o'zaro chiziqli erkli bo'lgan m ta ustunni ajratib olamiz. Bu ustunlarni $A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_m}$ deb belgilaymiz. Ular chiziqli erkli bo'lishi uchun shu ustun elementlaridan tuzilgan

$$C = (A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_m})$$

matritsa determinanti noldan farqli bo'lishi kerak, ya'ni $\det C \neq 0$. Tanlangan bazisga mos tayanch yechimni topish uchun esa shu bazisga mos $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m}$ noma'lumlardan boshqa barcha x_j larni nolga teng deb olamiz. Natijada (4.1) sistema soddalashib

$$\sum_{k=1}^m a_{ik} x_{j_k} = b_i \quad i=1, 2, \dots, m \quad (4.3)$$

ko'rinishni oladi. Bu sistema m noma'lumli m ta chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi bo'lib qoladi. $\det C \neq 0$ bo'lganligi uchun uning yagona yechimi bo'ladi. Agar bu yechim uchun barcha $x_{j_k} \geq 0$ bo'lsa topilgan yechim tanlangan bazisdagi

tayanch yechim deyiladi. Agar x_{j_k} lar orasida manfiylari ham chiqib qolsa, tanlangan bazisda tayanch yechim yo'q deyiladi va boshqa bazisga o'tiladi. Tayanch yechimi mavjud bo'lgan bazis tanlangach esa shu bazisdagi tayanch yechim optimallikka tekshiriladi. Bu esa avvalgi paragrafda ko'rilgan usulda amalga oshiriladi. Faqat buning uchun masala shartlari tanlangan bazisga moslashtirilishi kerak. Buning uchun tanlangan bazisga mos C matritsa uchun teskari matritsa topiladi va (4.2) sistema vektor ko'rinishida C^{-1} ga ko'paytiriladi. Bunda sistema

$$C^{-1}A\bar{X} = \bar{C}^{-1}\bar{b} \quad (4.4)$$

ko'rinishini oladi. (4.4) sistema (4.2) maqsad funksiyasi bilan birgalikda dastlabki simpleks jadval uchun asos qilib olinadi. Simpleks jadvaldan tanlangan bazisdagi tayanch yechim optimal bo'lishi tekshirilishi mumkin. Keltirilgan mulohazalar va hisoblash jarayonini amaliy misolda tahlil qilamiz. Quyidagi ko'rinishdagi ChPM berilgan bo'lsin

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 7 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 9 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0$$

$$L = 20x_1 + 15x_2 + 30x_3 + 25x_4 \rightarrow \max$$

Bu yerda matritsa ustunlari 4ta bo'lib ularni A_1 , A_2 , A_3 , A_4 vektorlar deb belgilasak ular ikki o'lchovli fazo vektorlari ($m=2$) bo'lgani uchun bazis sifatida ulardan ikkitasini olish mumkin. Bunda variantlar soni $C_4^2 = 6$ ta bo'ladi. Ulardan ixtiyoriy bittasini, masalan A_1 , A_2 bazis bo'lgan holni olsak $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ bo'lib $\det C = 1 \neq 0$ ekanligini ko'ramiz. Bu bazisga mos yechimni topish uchun $x_3, x_4 = 0$ deb olinadi va sistema

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 7 \\ 4x_1 + 3x_2 = 9 \end{cases}$$

ko'rinishini oladi. Bu sistemani yechib $x_3 = 3; x_2 = -1$ ekanligini ko'ramiz. Bu yerda $x_2 < 0$ bo'lganligi uchun bu bazisdagi yechim tayanch yechim bo'la olmaydi. Boshqa bazis tanlashga to'g'ri keladi. Masalan A_2, A_3 bazisni olsak

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}; \det C = -3 \neq 0$$

Demak A_2, A_3 bazis bo'la oladi. Bu bazisdagi yechimni topish uchun sistemada $x_1 = 0; x_4 = 0$ deb olinsa u quyidagi ko'rinishni oladi

$$\begin{cases} 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 3x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases}$$

Bu sistemani yechib $x_2 = 2; x_3 = 1$ ekanligini ko'ramiz. Bu yerda $x_i \geq 0$, demak bu bazisdagi $x_1 = 0; x_2 = 2; x_3 = 1; x_4 = 0$ yechim tayanch yechim bo'lar ekan. Bu yechimning optimal bo'lish bo'lmasligini tekshirish uchun masala shartini tanlangan bazisga moslashtiramiz. Teskari matritsani hisoblash qoidasiga ko'ra

$$C^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

ekanligini ko'ramiz. Masala shartini shu teskari matritsaga ko'paytiramiz

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix} \\ -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 & -6 \\ -1 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix} \\ \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 = 2 \\ \frac{1}{3}x_1 + x_3 - \frac{2}{3}x_4 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Shartlar bazisga moslashtirildi, ya'ni bazis vektorlar A_2, A_3 ga mos ustunlar birlik vektor ko'rinishini oldi. Bu bazisga mos tayanch yechim $x_2 = 2; x_3 = 1$ optimalligini tekshirish uchun simpleks jadval tuzamiz

I	C_j			20	15	30	25	
	C_i							
		Baz	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	Θ
1	15	A_2	2	1	1	0	2	
2	30	A_3	1	1/3	0	1	$-\frac{2}{3}$	
		Δ_j		5	0	0	-15	

Bu jadvaldan ko'rinadiki, tanlangan bazisga mos tayanch yechim optimal emas ekan, chunki $\Delta_4 = -15 < 0$ bo'layapti. Rejani yaxshilash uchun bazisni almashtirish kerak. Buyog'i simpleks usul davom ettirilishi mumkin.

4. CHPM shartlari tanlangan bazisga moslashtirilsin. Shu bazisdagi tayanch yechim optimallikka tekshirilsin.

$$4.1 \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 25 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 26 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad A_1 A_4 \text{ bazis}$$

$$L = 5x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 4x_4 \rightarrow \max$$

$$4.2 \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 29 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 23 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad A_1 A_3 \text{ bazis}$$

$$L = 10x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 8x_4 \rightarrow \max$$

$$4.3 \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 28 \\ 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 36 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad A_1 A_2 \text{ bazis}$$

$$L = 8x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 \rightarrow \max$$

$$4.4 \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 40 \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 33 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad A_2 \ A_3 \text{ bazis}$$

$$L = 6x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 5x_4 \rightarrow \max$$

$$4.5 \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 22 \\ 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 33 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad A_1 \ A_3 \text{ bazisda}$$

$$L = 4x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 3x_4 \rightarrow \max$$

$$4.6 \begin{cases} 8x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 40 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 32 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad A_3 \ A_4 \text{ bazisda}$$

$$L = 8x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 5x_4 \rightarrow \max$$

§ 5. Transport masalasi

Chiziqli programmalash masalalaridan bir turi “transport masalasi” nomi bilan ma'lum bo'lgan matematik masalalarga keltiriladigan iqtisodiy masalalardan iborat bo'ladi. Ma'lumki, ishlab chiqaruvchi bilan iste'molchi orasidagi mol almashinuvi ya'ni ishlab chiqarilgan mahsulot yoki tayyorlangan homashyoni korxonalarga yetkazib berish transport vositalari va ularga sarflanadigan moliyaviy harajatlar bilan bog'liq. Bu harajatlarni minimallashtiruvchi variantlarni tanlash transport masalasining asosiy muammosi hisoblanadi.

Transport masalasining matematik modelini ifodalashda umumiyatni cheklamagan holda sxematik tarzda quyidagi muammoni tahlil qilamiz. Faraz qilaylik ma'lum homashyo turi zaxiralari saqlanuvchi yoki tayyorlanuvchi n ta punkt bo'lsin. Bu punktlardagi homashyo miqdorlari mos ravishda $b_1, b_2, \dots, b_n$ birliklardan iborat bo'lsin. Bu yerda homashyo turiga ko'ra ma'lum bir o'lchov birligi (tonna, metr, ...) tanlangan bo'ladi. Shuningdek, keltirilgan homashyo asosida ishlaydigan m ta korxona bo'lib, bu korxonalarning shu homashyoga bo'lgan extiyojlari mos ravishda $d_1, d_2, \dots, d_m$ birliklardan iborat bo'lsin. Shuningdek homashyo punktlari hamda korxonalar orasidagi yo'l sifati va masofasiga ko'ra homashyoni yetkazish uchun ketadigan yo'l harajatlari koeffisintlari ma'lum bo'lsin. Ularni $C = (C_{ij}) \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n$; matritsa ko'rinishida ifodalaymiz. Bunda matritsaning har bir elementi C_{ij} mos ravishda i -korxonaga j -punktdan bir birlik homashyo yetkazish uchun ketadigan transport harajatlarini ifodalaydi. Aksariyat hollarda ishlab chiqarish korxonalari va homashyo yetkazib beruvchi punktlar muqobil, ya'ni moslashtirilgan holda ishlaydi deb hisoblanadi. Homashyo zaxiralari va korxonalarning bu homashyoga bo'lgan ehtiyojlari bir-biriga to'la mos keladi. Matematik tarzda bu shart

$$\sum_{j=1}^n b_j = \sum_{i=1}^m d_i \quad (1)$$

ko'rinishda ifodalanadi. Ayrim juz'iy chetlashishlarni hisobga olmaganda korxonalar to'liq quvvat bilan ishlaganda homashyolar to'liq sarflanadi. Faqat bu homashyolarni korxonalarga yetkazib berish kerak.

Masalaning matematik modelini ifodalash uchun yuqorida keltirilgan barcha shartlarni matematik munosabatlar bilan ifodalaymiz. Avvalo topilishi kerak bo'lgan optimal reja komponentlari j – punktdan i – korxonaga yetkazilishi kerak bo'lgan homashyo miqdorini X_{ij} deb belgilaymiz. Shartga ko'ra i – korxonaga yetkaziladigan barcha homashyo miqdori korxona ehtiyoji b_i ga teng bo'lishi kerak. Bu shartni

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin, ya'ni barcha m ta korxona uchun bu shart bajarilishi kerak. Bunday shartni homashyo punktlari uchun ham ifodalash mumkin, ya'ni j - homashyo punktidan chiqarilgan jami homashyo miqdori d_j ga teng bo'lishi kerak.

Bu shart matematik tarzda

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = d_j \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

ko'rinishini oladi. Bu shartlar bajarilgan holda shunday x_{ij} larni topish kerakki jami yo'l harajatlari minimal bo'lsin. Keltirilgan normativlarga ko'ra i – korxonaga j – punktdan x_{ij} birlik homashyo keltiriladigan bo'lsa, yo'l xarajatlari bir birlik homashyo miqdori uchun C_{ij} ga teng ekanligi ma'lum bo'lgani uchun jami $C_{ij} \times x_{ij}$ pul birligiga teng bo'ladi. Bu xarajatlarni barcha korxonalar va homashyo bazalari bo'yicha qo'shib chiqsak jami xarajatlar kelib chiqadi va u quyidagicha ifodalanadi.

$$L(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{mn}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} \times x_{ij} \rightarrow \min \quad (4)$$

Tabiiy, barcha chiziqli programmalash masalalarida bo'lganidek, bu yerda ham $x_{ij} \geq 0$ bo'lishi kerakligi qayd etiladi.

Shunday qilib (1), (2), (3) shartlar bajarilgan holda (4) maqsad funksiyasining minimal qiymatini ta'minlovchi plan matritsasi $X=(x_{ij})$ ni topish masalasi transport masalasi deyiladi. Bu yerda $b_1, b_2, \dots, b_m, d_1, d_2, \dots, d_n$ berilgan miqdorlar ; $C=(C_{ij})$ ham ma'lum matritsa. $C(m \times n)$ to'g'ri to'rtburchakli matritsa ham ma'lum matritsa deb hisoblanadi. Aksariyat hollarda x_{ij} noma'lumlar soni $m \times n$ shartlar soni $m+n$ dan katta bo'lib, (1), (2), (3) shartlar bilan berilgan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi. Ana shu cheksiz ko'p yechimlar orasidan (4) maqsad funksiyasining minimumini ta'minlovchi variant, ya'ni optimal plan (reja)ni tanlashni talab qilinadi.

Keltirilgan transport masalasining matematik modeli (1) – (4) ko'rinishiga qarab ortiqcha tafsilotlarsiz shuni qayd etishimiz mumkinki, kommunikatsion tizimlar : ular avtomobil, poyezd yo'li bo'ladimi, gaz yoki suv yetkazuvchi quvurlar bo'ldimi, elektr quvvatini yetkazuvchi yuqori kuchlanishli elektr uzatish tizimlari bo'ladimi barchasida shartli ravishda yetkazuvchi, iste'molchi va “transport” harajatlarini kiritish mumkin. Bu holda ham aynan (1) – (4) ko'rinishdagi optimallashtirish masalasini hosil qilishimiz mumkin.

Transport masalasi ifodalanishiga ko'ra nisbatan soddadek tuyulishi mumkin. Haqiqatdan ham barcha shartlar koeffitsientlari faqat birlardan iborat tenglamalar bo'ladi. Transport masalasining murakkabligi noma'lumlarni ko'pligida bo'lib unga odatdagi oddiy simpleks usulini tatbiq qilish ham imkoniyat darajasidan ancha yuqori bo'lib ketar ekan. Masalan $n=10, m=10$ bo'lgan holda ham noma'lumlar soni $n \times m=100$, shartlar soni esa $m+n-1=19$ ta bo'lib, shartlar matritsasining rangi 19 bo'lgan holda (1) – (3) shartlar bo'yicha kelib chiqadigan tayanch yechimlar soni C_{100}^{19} ta bo'ladi. Simpleks usul esa tayanch yechimlaridan optimal yechimni ajratishga imkoniyat beradi. Bu holda simpleks usul bo'yicha necha qadam qo'yilishi kerak, buni tasavvur qilish ham qiyin. Agar transport masalasini biror

tuman (miqyosida, masshtabida) qaralganda ham yetarlicha murakkab bo'ladi. Viloyat yoki respublika (miqyosida, masshtabida) qaraladigan bo'lsa masala yanada murakkablashib ketishi aniq.

Biz bu yerda transport masalasi ham odatdagi ChPM ekanligini, hamda unga ham simpleks usulni tatbiq qilish mumkinligini namoyish qilish maqsadida oddiy bir masalani ko'rib chiqamiz va tahlil qilamiz. Faraz qilaylik 2ta g'isht zavodi bo'lib ularning ishlab chiqarish quvvatlari mos ravishda 35 mashina va 45 mashina g'ishtga teng bo'lsin. Shuningdek bu g'ishtlarga talabgor 2 ta qurilish bo'lib, ularga mos ravishda 30 mashina va 50 mashina g'isht kerak bo'lsin. Talab va taklif muvozanati saqlangan. Agar 1 – qurilishga 1 – zavoddan 1 mashina keltirish narxi (yo'l xarajati) 15ming so'm, 2 – zavoddan keltirish narxi esa 12ming so'm; shuningdek 2 – qurilishga 1-, 2-zavoddan 1 mashina g'isht keltirish narxi mos ravishda 20ming va 18 ming so'm bo'lsin. Zavodlardan qurilishlarga g'isht yetkazib berish shunday rejasini tuzingki, transport harajatlari minimal bo'lsin. Transport masalasining shartlarini jadval ko'rinishida ifodalash tahlil uchun qulay bo'lganligi uchun odatda ularni jadval ko'rinishida ifodalagan ma'qul. Xususan yuqorida keltirilgan masala shartlarini quyidagi jadval ko'rinishida ifodalash mumkin.

zav qur	1	2	Σ
1	15 x_1	12 x_2	30
2	20 x_3	18 x_4	50
Σ	35	45	80

jadvaldagi raqamlar masala mohiyatini aks ettiradi. So'nggi qatorda zavodlar quvvatlari, so'nggi ustunda esa qurilishlar ehtiyojlari aks etgan. Ichki kataklar tepa burchagida yo'l harajatlari koeffitsienti aks etgan. Bu yerda qulaylik uchun

noma'lumlarni x_1, x_2, x_3, x_4 deb belgilangan, aslida $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$ bo'lishi kerak edi. Bu yerda maqsad, masalani simpleks usulga tushirish qulay bo'lishi uchun shu yo'l tanlangan. Shartlarning matematik ifodasiga o'tamiz.

$$x_1 + x_2 = 30 \quad \langle 1 \rangle$$

$$x_3 + x_4 = 50$$

$$x_1 + x_3 = 35 \quad \langle 2 \rangle$$

$$x_2 + x_4 = 45 \quad \langle 3 \rangle$$

$$\langle 4 \rangle$$

$$L = 15x_1 + 12x_2 + 20x_3 + 18x_4 \rightarrow \min$$

$\langle 1 \rangle - \langle 4 \rangle$ shartlar orasidan chiziqli erklilari tanlanadi. Bevosita tekshirish yo'li bilan $\langle 1 \rangle - \langle 3 \rangle$ shartlardan $\langle 4 \rangle$ shart kelib chiqishini ko'rishimiz mumkin. Sxematik tarzda tengliklar ustida amallar bajarish qoidasiga ko'ra $\langle 1 \rangle + \langle 2 \rangle - \langle 3 \rangle = \langle 4 \rangle$ ekanligini ko'ramiz. Demak, bu yerda ChPMni

$$x_1 + x_2 = 30$$

$$x_3 + x_4 = 50$$

$$x_1 + x_3 = 35$$

$$L = 15x_1 + 12x_2 + 20x_3 + 18x_4 \rightarrow \min$$

ko'rinishda ifodalash mumkin. Bu masalaga simpleks usulni tatbiq qilish uchun ChPM shartlaridan bazislarni ajratish (ustunlari orasida birlik vektorlarni hosil qilish) jarayonini namoyish etamiz. Sistemadagi x_1, x_2, x_3, x_4 ga mos koeffitsientlar A_1, A_2, A_3, A_4 vektorlarni hosil qiladi. Ulardan tuzilgan matritsa ozod hadlar ustuni bilan to'ldirilsa

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 50 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 35 \end{pmatrix}_{(-1)}$$

matritsa hosil bo'ladi. Bu matritsaning 2-,4-ustunlari bazis holatida $A_2^T = (1; 0; 0; 0)$ ekanligini ko'ramiz. Agar 3 – qatorini -1 ga ko'paytirib 2 – qatorga qo'shsak 3 – ustun ham bazis ko'rinishini oladi.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 30 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 15 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 35 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{bazis}}$

Bu matritsa berilgan shartlarning shakl almashtirilib

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 30 \\ -x_1 + x_4 = 15 \\ x_1 + x_3 = 35 \end{cases}$$

ko'rinishga keltirilganligini aks ettiradi. Bu ko'rinishdan simpleks jadvalga o'tamiz va bu jadvalga mos planni optimallikka tekshiramiz.

C_j C			15	12	20	18	
	baz	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	Θ_i
12	A_2	30	1	1	0	0	
18	A_4	15	-1	0	0	1	
20	A_3	35	1	0	1	0	
	Δ_j		-1	0	0	0	

Bu yerda $\Delta_1 = C_{baz} \times A_1 - C_1 = 12 \times 1 + 18 \times (-1) + 20 \times 1 - 15 = -1$ formula bo'yicha hisoblangan. Qolganlari ham shunga o'xshash hisoblanadi. Masala minimumini topishga mo'ljallangan bo'lsa, Δ_j lar orasida musbatlari yo'q bo'lsa, jadvalga mos plan optimal plan bo'ladi. Bizda ana shunday hol kuzatilyapti. Demak bu masalada optimal plan $x_1 = 0; x_2 = 30; x_3 = 35; x_4 = 15$ bo'lar ekan. Bu holda harajatlar minimal

bo'lib, $L = 12 \times 30 + 18 \times 15 + 20 \times 35 = 1330$ ming so'm bo'lar ekan. Masala shartlari va yechimini ifodalovchi jadval

Zav qur	1	2	Σ
1	15 0	12 30	30
2	20 35	13 15	50
Σ	35	45	80

ko'rinishda bo'ladi.

Tahlil to'laqonli ko'rinishni olishini namoyish qilish uchun yuqoridagi masalada faqat bitta narx 1 – zavoddan 2 – qurilishga 1 mashina g'isht olib borish narxi 30ming so'mga o'zgargan bo'lsin deb faraz qilamiz. Bunda faqat maqsad funksiyasi ko'rinishi o'zgaradi, ya'ni

$$L = 15x_1 + 12x_2 + 30x_3 + 18x_4 \rightarrow \min$$

ko'rinishni oladi. Simpleks jadvalda ham faqat narxlar C_i ga mos qator va ustunlarga o'zgaradi va quyidagi ko'rinishni oladi

C C			15	12	30	18	
	Baz	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	Θ_i
12	A_2	30	1	1	0	0	30
18	A_4	15	-1	0	0	1	
30	A_3	35	1	0	1	0	35
			9	0	0	0	

↑

←

Bu jadvalga mos plan $x_1 = 0; x_2 = 30; x_3 = 35; x_4 = 15$ optimal emas, chunki $\Delta_1 = 9 > 0$.

Bu planga ko'ra $L = 12 \times 30 + 18 \times 15 + 30 \times 35 = 1680$ ming. Planni yaxshilash uchun jadvaldan

$\theta_i = \frac{a_{i0}}{a_{i1}}$ larni hisoblaymiz (faqat $a_{i1} > 0$ lar uchun). $\min \theta_i$ ga mos 1 – qatorni hal

qiluvchi qator deb belgilaymiz. Uning yordamida 1 – ustunni bazis ustunga aylantiramiz. Buning uchun 1 – qatorni 2 – qatorga qo'shamiz, hamda (-1) ga ko'paytirib 3 – qatorga qo'shamiz. Natijada yangi simpleks jadvalni hosil qilamiz

C C			15	12	30	18	
	Bazis	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	Θ
15	A_1	30	1	1	0	0	
18	A_4	45	0	1	0	1	
30	A_3	5	0	-1	1	0	
			0	-17	0	0	

Bu jadvalda $\Delta_j > 0$ lari yo'q bo'lgani uchun bu jadvalga mos tayanch yechim $x_1 = 30; x_2 = 0; x_3 = 5; x_4 = 45$ optimal plan bo'ladi. Bu plan bo'yicha ketadigan transport harajatlari

$L = 15 \times 30 + 18 \times 45 + 30 \times 5 = 450 + 810 + 150 = 1410$ ming so'm bo'lib avvalgisidan 270ming so'mga kam bo'lar ekan.

Bu usul bilan ixtiyoriy transport masalasini ham odatdagi ChPM ko'rinishiga keltirish mumkin ekan. Faqat shartli ravishda n ta ishlab chiqaruvchi va ularga bog'langan m ta iste'molchi bo'lgan transport masalasini tasavvur qilsak, bu unchalik oson ish emas ekanligini to'la tasavvur qilishimiz mumkin. Transport masalasini ba'zi kichik hajmdagi hollarda mantiqiy muhokamalar asosida ham yechish mumkin ekan. Bunga misol

T n \	1	2	Σ	
1	15 x_1	20 x_2	20	
2	18 x_3	13 x_4	60	
3	14 x_5	18 x_6	40	
Σ	70	50	12	

sifatida jadvalda keltirilgan 2 ta ta'minotchi va 3ta iste'molchi bilan bog'liq transport masalasi namunasi keltirilgan. Unda bo'sh qolgan yarim kataklar aynan topilishi kerak bo'lgan ta'minot rejasini aks ettiruvchi 6 ta noma'lum $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ larga mos keladi. Mantiqan dastlab eng arzon yo'nalish tanlanishi kerak. Demak avvalo yo'l harajati 13 bo'lgan katakka iloji boricha ko'proq jo'natish miqdorini qo'ygan ma'qul. Bu qiymat 50 ekanligi ko'rinib turibdi. U holda shu qatorning birinchi katagiga 10 qo'yishimiz kerak bo'ladi. Shuningdek ikkinchi ustun qolgan ikki katagi 0 bo'lishi kerakligi ko'rinib turibdi. Qolgan kataklar ham o'z - o'zidan bir qiymatli to'ldirilishi mumkin bo'lib qoladi. Xulosa qilib aytganda $x_1 = 20; x_2 = 0; x_3 = 10; x_4 = 50; x_5 = 40; x_6 = 0$ ekanligini topamiz. Bunda transport harajatlari $L = 15 \times 20 + 20 \times 0 + 18 \times 10 + 13 \times 50 + 14 \times 40 + 18 \times 0 = 1770$

bo'lishini ko'ramiz. Natijada masala shartlari va yechimini ifodalovchi jadvalni hosil qilamiz

T n \	1	2	Σ
1	15 20	20 0	20
2	18 10	13 50	60
3	14 40	18 0	40
Σ	70	50	120

Yuqorida keltirilgan masalani planli bosqichma – bosqich yaxshilash usuli bo'yicha simpleks jadvallar asosida ishlab ko'ramiz. Unga mos ChPM quyidagicha ifodalanadi.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 20 \\ x_3 + x_4 = 60 \\ x_5 + x_6 = 40 \\ x_1 + x_3 + x_5 = 70 \\ x_2 + x_4 + x_6 = 50 \end{cases}$$

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 15x_1 + 20x_2 + 18x_3 + 13x_4 + 14x_5 + 18x_6 \rightarrow \min$$

Bu masala shartlaridan beshinchisi chiziqli bog'liq. Qolgan qismi uchun kengaytirilgan matritsasini yozamiz va bu matritsada rangi to'rt bo'lganligi uchun to'rtta bazis ustun hosil qilamiz. Masalan qulaylik uchun 1-,3-,4-,6- ustunlarni bazis ustunlarga aylantirish holini ko'ramiz.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 40 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 70 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times(-1) \\ \downarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 40 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 50 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \times(-1) \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 40 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 50 \end{pmatrix}$$

Hosil bo'lgan matritsa ko'rsatilgan tartibda 1 – qatorni (-1)ga ko'paytirib 4 – qatorga qo'shish, so'ngra 4 – qatorni (-1) ga ko'paytirib 2 – qatorga qo'shish yordamida masala shartlarini ekvivalent tarzda o'zgartirishni aks ettiradi. Matritsa ko'rinishidan yana sistema ko'rinishiga o'tilsa u

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 20 \\ x_2 + x_4 - x_5 = 10 \\ x_5 + x_6 = 40 \\ -x_2 + x_3 + x_5 = 50 \end{cases}$$

ko'rinishini oladi. Bevosita tekshirish bilan bazis o'zgaruvchilar

$x_1 = 20, x_3 = 50, x_4 = 10, x_6 = 40$ qolganlari $x_2 = 0; x_5 = 0$ ekanligini ko'rishimiz

mumkin. Masalaning bu ko'rinishidan dastlabki simpleks jadvalni tuzib, bu jadvalga mos tayanch yechimni optimallikka tekshirishimiz mumkin. Agar yechim optimal bo'lmasa, keyingi bosqichga o'tamiz, ya'ni Δ_j lar orasida manfiysi bo'lsa, hal qiluvchi qator va ustunlarini topib bazisni almashtiramiz. Bizning misol uchun simpleks jadval

C C			15	20	18	13	14	18	
	baz	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	Θ_i
15	A_1	20	1	1	0	0	0	0	
13	A_4	10	0	1	0	1	-1	0	
18	A_6	40	0	0	0	0	1	1	40 ←
18	A_3	50	0	-1	1	0	1	0	50
	Δ_j		0	-10	0	0	9	0	

ko'rinishda bo'ladi.

Bu jadvalda ChPM minimumga ishlanayotganligi uchun $\Delta_j > 0$ lar borligi plan optimal emasligini bildiradi. $\Delta_j = 9 > 0$ ga mos 5 – ustun hal qiluvchi ustun, shu

ustun elementlari yordamida hisoblangan $\Theta_3 = \frac{a_{30}}{a_{35}} = 40$ va $\Theta_4 = \frac{a_{40}}{a_{45}} = 50$ lar

orasidan kichigiga mos keluvchi 3 – qator hal qiluvchi qator deb belgilandi va bazisdagi A_6 ustun A_5 ustunga almashtirilishi kerak. Buning uchun jadvalning 3 – qatorini 2 – qatorga qo'shamiz, hamda 3 – qatorni (-1)ga ko'pytirib 4 – qatorga qo'shamiz. Shunda 5 – ustun ham bazis ustun ko'rinishini oladi va quyidagi simpleks jadval hosil bo'ladi.

C C									
	Bazis	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	Θ_i
15	A_1	20	1	1	0	0	0	0	
13	A_4	50	0	1	0	1	0	1	
14	A_5	40	0	0	0	0	1	-1	
18	A_3	10	0	-1	1	0	0	-1	
	Δ_j		0	-10	0	0	0	-9	

Bu jadvalga ko'ra Δ_j lar orasida musbatlari yo'q bo'lganligi uchun bu jadvalga mos tayanch yechim $x_1 = 20; x_2 = 0; x_3 = 10; x_4 = 50; x_5 = 40; x_6 = 0$ optimal yechim bo'ladi. Shu masala uchun mantiqiy mulohazalarga ko'ra tanlangan dastlabki yechim ham xuddi shunday bo'lgan edi. Bu natijadan ikki muhim xulosani keltirib chiqarishimiz mumkin ekan. Birinchisi – transport masalasini yechishda mantiqiy mulohazalarga asoslanishimiz mumkin ekan. Bunday usulda tanlangan yechim optimal yechim bo'lib qolishi ham mumkin, bo'lmagan taqdirda ham optimal yechimga yaqin yechim bo'lib simpleks usul yordamida yaxshilash bosqichlari soni kam bo'ladi. Ikkinchidan – transport masalasi ham odatdagi ChPMga keltirilishi mumkin bo'lib, unga ham an'anviy usullarni tatbiq qilish mumkin ekan. Bunda faqat bir narsani unutmasligimiz kerak. Yuqorida ta'kidlanganidek, ta'minotchilar

soni n va iste'molchilar soni m ortgan sari noma'lumlar soni $n \times m$ keskin ortib odatdagi usullarni tatbiq qilish mushkullashib boraveradi. Bunday hollarda masalani yechish uchun iteratsion usullardan foydalanish ma'qulroq bo'ladi.

Masalalar

1. Keltirilgan jadval qiymatlarga mos transport masalasini tuzing. Masala tayanch yechimini minimal harajatlar usuli bo'yicha aniqlang va uni optimallikka tekshiring.

5.1

j	1	2	3	Σ
1	11 x_{11}	15 x_{12}	13 x_{13}	200
2	14 x_{21}	12 x_{22}	10 x_{23}	300
Σ	150	250	100	500

5.2

j	1	2	3	Σ
1	60	45	60	400
2	55	60	58	500
Σ	200	400	300	900

5.3

<i>j</i>	1	2	3	Σ
1	30	25	35	500
2	25	35	20	300
Σ	250	350	200	800

5.4

<i>j</i>	1	2	3	Σ
1	25	20	18	400
2	15	22	24	300
Σ	250	150	300	700

5.5

<i>j</i>	1	2	3	Σ
1	40	50	30	600
2	30	40	50	400
Σ	300	500	200	

6 § Chiziqli programmalash masalalari uchun egizak masalalar

Bu yerda chiziqli programmalash masalalari nazariyasida muhim o'rin egallagan egizak masalalar tushunchasida to'xtalamiz va ularning iqtisodiy ma'nosini tahlil qilamiz. ChPM umumiy ko'rinishini esga olsak (2 §).

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m \quad (2.1)$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$$

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \quad (2.2)$$

Shartlarga ko'ra $x_1, x_2, \dots, x_n$ larni topish talab qilinadi. Masala tarkibidagi har bir koeffitsiyentga o'z vaqtida izoh berilgan edi. Aynan shu koeffitsiyentlar yordamida quyidagi masalani tuzamiz.

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} y_j \geq C_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.1)$$

$$y_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$$

$$Q(y_1, y_2, \dots, y_m) = \sum_{j=1}^m b_j \cdot y_j \rightarrow \min \quad (6.2)$$

Hosil bo'lgan (6.1) – (6.2) masala (2.1) – (2.2) ChPM ga nisbatan egizak masala deyiladi. Agar (2.1) – (2.2) masala yechimi mavjud bo'lsa (6.1) – (6.2) masala yechimi ham mavjud bo'lar ekan. Shu bilan birga bu yechimlar, yani optimal yechimlar uchun

$$\sup L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \inf Q(y_1, y_2, \dots, y_m)$$

tenglik o'rinli bo'lar ekan. Bu holat ba'zi murakkab ChPM lar uchun egizak masala yordamida tahlil o'tkazishga imkoniyat beradi. E'tibor bersak (2.1) – (2.2) va (6.1) – (6.2) masalalar aynan bir xil koeffitsiyent orqali ifodalanishi hamda

ularning yechimlari ham bir xilligi bu masalalarni “ egizak masalalar ” deb atalishiga sabab bo’lgan.

Tahlil va xulosalarni soddalashtirish uchun avvalgi paragraflarda keltirilgan masalalardan foydalanamiz. Xususan § 1 da ko’rilgan (1.1) – (1.2) masalani olsak

$$\begin{cases} 0,1x_1 + 0,3x_2 \leq 30 \\ 0,5x_1 + 0,2x_2 \leq 45 \\ 0,1x_1 + 0,1x_2 \leq 12 \end{cases} \quad (1.1)$$

$$L(x_1, x_2) = 1\,000x_1 + 1400x_2 \rightarrow \max \quad (1.2)$$

uning to’la tahlili va yechimi § 1 da keltirilgan. Unga ko’ra optimal reja c (30;90) nuqtada bo’lib, bunda $x_1 = 30; x_2 = 90$ bo’lib $\max L(x_1, x_2) = 15600$ ekanligini ko’rgan edik. Yuqorida keltirilgan tartibga ko’ra (1.1) – (1.2) masala uchun egizak masala tuzamiz.

$$\begin{cases} 0,1y_1 + 0,5y_2 + 0,1y_3 \geq 1000 \\ 0,3y_1 + 0,2y_2 + 0,1y_3 \geq 1400 \end{cases} \quad (6.3)$$

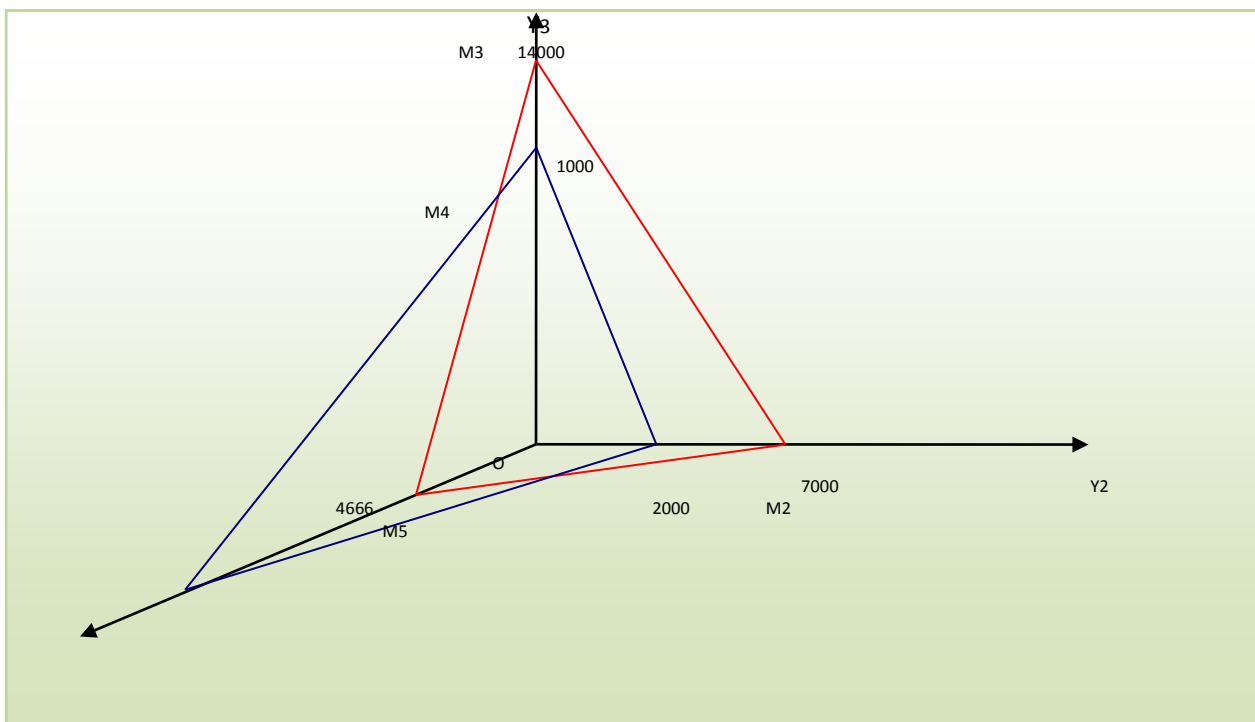
$$Q(y_1, y_2, y_3) = 30y_1 + 45y_2 + 12y_3 \rightarrow \min \quad (6.4)$$

Hosil bo’lgan (6.3) – (6.4) egizak masalani geometrik usulda yechish uchun uni kanonik ko’rinishga keltiramiz.

$$\begin{cases} \frac{y_1}{1000} + \frac{y_2}{2000} + \frac{y_3}{10000} \geq 1 \\ \frac{y_1}{4666,6} + \frac{y_2}{7000} + \frac{y_3}{14000} \geq 1 \end{cases}$$

$$Q = 30y_1 + 45y_2 + 12y_3 \rightarrow \min$$

Bu yerdagi har bir shart $OY_1 Y_2 Y_3$ koordinat fazosida tekislikni ifodalaydi. Ularni chizmada ifodallasak, egizak masala uchun ham MBES qavariq soha bo’lishini ko’ramiz. Bu holat barcha egizak masalalar uchun o’rinli bo’lar ekan. (6.3) – (6.4) masala shartlariga mos mumkin bo’lgan yechimlar sohasi MBES chizmada keltirilgan



MBES $OY_1 Y_2 Y_3$ koordinat fazosining 1 – oktantida (6.3) shartlar bilan berilgan tekisliklardan yuqoridagi soha bo'ladi. Bu qavariq sohaning chegaralaridagi uchlari M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 nuqtalarida bo'ladi. Optimal yechimni aynan shu nuqtalardan birida izlash kerak. Chizmadan ko'rinadiki M_1 (10000; 0; 0), M_2 (0; 7000; 0), M_3 (0;0;14000), M_4 (2000; 0; 8000), M_5 (1231; 3846; 0). Bu yerda M_4, M_5 nuqtalar koordinatalari (6.3) sistemadan $y_2 = 0$ va $y_3 = 0$ deb topilgan. Optimal yechimni $Q(Y_1, Y_2, Y_3)$ qiymatlarini taqqoslash orqali topamiz. $Q(M_1) = 300000$; $Q(M_2) = 315000$; $Q(M_3) = 168000$; $Q(M_4) = 156000$; $Q(M_5) = 170775$. Bu yerdan M_4 nuqtada eng kichik qiymat bo'lishini ko'ramiz. Haqiqatdan ham

$$\sup L(x_1, x_2) = \inf Q(y_1, y_2, y_3) = 156000$$

bo'lar ekan.

Egizak masala yechimini simpleks usulda asosiy masala bilan birgalikda bir yo'la topish mumkin ekan. Buni bevosita amaliy masalani yechish jarayonida namoyish qilamiz.

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 32 \\ x_1 + 5x_2 \leq 25 \\ L = 300x_1 + 480x_2 \rightarrow \max \end{cases}$$

masala uchun egizak masala

$$\begin{cases} 4y_1 + y_2 \geq 300 \\ 3y_1 + 6y_2 \geq 480 \\ Q = 32y_1 + 25y_2 \rightarrow \min \end{cases}$$

Geometrik usulda asosiy masala uchun OX_1X_2 koordinat tekisligida MBES ni chizib tayanch yechimlar $M_1(8;0)$, $M_2(0;5)$, $M_3(5;4)$ nuqtalarda bo'lib, bu nuqtalarda maqsad funksiya qiymatlari $L_1 = 2400$, $L_2 = 2400$, $L_3 = 5 \cdot 300 + 4 \cdot 480 = 3420$. Taqqoslash natijasida optimal yechim $M_3(5;4)$ nuqtada bo'lib, bu nuqtada $x_1 = 5$; $x_2 = 4$ ekanligini ko'ramiz. Shuningdek egizak masala uchun $OY_1 Y_2$ tekisligida MBES ni tuzib tayanch yechimlar $M_1(160;0)$, $M_2(0;300)$, $M_3(60;60)$ nuqtada bo'lishini ko'ramiz. Bu nuqtalardagi tayanch yechim qiymatlari $Q_1 = 5120$, $Q_2 = 7500$, $Q_3 = 3420$ larni taqqoslab $\min Q = 3420$ ekanligini va bu qiymatga $y_1 = 60$; $y_2 = 60$ bo'lgan M_3 nuqtada erishilishini ko'ramiz. Shu masalani simpleks usulda yechimini topish jarayonini keltiramiz. Sun'iy basis x_3, x_4 larni kiritib 1 – simpleks jadvalni ifodalaymiz.

$i \backslash C_j$	C_i			300	480	0	0	
		$ba\tilde{z}$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	O_i
1	0	A_3	32	4	3	1	0	$10\frac{2}{3}$
2	0	A_4	25	1	5	0	1	5
	Δ_j		0	-300	-480	0	0	

Bu jadvalga mos tayanch yechim $x_3 = 32$; $x_4 = 25$ optimal emas, chunki $\Delta_j < 0$ lar mavjud. Hal qiluvchi ustun va qatorlarni aniqlab ikkinchi simpleks jadvalni tuzamiz.

$i \backslash C_j$				300	480	0	0	
		$ba\bar{z}$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	O_i
1	0	A_3	17	3,4	0	1	-0,6	5
2	480	A_2	5	0,2	1	0	0,2	10
	Δ_j		2400	-204	0	0	96	

Bu jadvalga mos tayanch yechim ham optimal emas. Keyingi simpleks jadvalni tuzamiz.

$i \backslash C_j$				300	480	0	0	
		$ba\bar{z}$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	O_i
1	300	A_1	5	1	0	$10/34$	$-3/17$	
2	480	A_2	4	0	1	$-1/17$	$4/17$	
	Δ_j		3420	0	0	60	60	

Bu jadvalga mos barcha $\Delta_j \geq 0$. Demak, jadvaldan $x_1 = 5; x_2 = 4$ ekanligini ko'ramiz. Sun'iy bazislarga mos ustunlardan esa, Δ_j lar qatorida $y_1 = 60; y_2 = 60$ ekanligi kelib chiqadi. Bu yechimlar geometrik usulda topilgan yechimlar bilan bir xil ekanligini ko'ramiz. Egizak masalaning iqtisodiy ma'nosi. Agar asosiy masalada daromadlarni maksimal bo'lishini ta'minlaydigan reja izlangan bo'lsa, egizak masalada harajatlarni minimal bo'lishini ta'minlaydigan qiymatlar izlanar ekan. Bu yerda Y_1, Y_2 larni mos ravishda 1- va 2-homashyolarning bir birligi narxi deb tushunish mumkin. Egizak masala tushunchasi nisbiy bo'lib, agar (6.1) – (6.2), ya'ni Y_i larga nisbatan masalani asosiy desak, X_j larga nisbatan (2.1) – (2.2) masala egizak masala bo'ladi.

Mustaqil ishlash uchun masalalar.

Berilgan ChPM uchun egizak masala tuzilsin va uning yechimi geometrik usulda topilsin.

6.1

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, x_3) &= 10x_1 + 5x_2 + 8x_3 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 \leq 30 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 24 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3. \end{cases} \end{aligned}$$

6.2

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, x_3) &= 8x_1 + 4x_2 + 6x_3 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 \leq 18 \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 24 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3. \end{cases} \end{aligned}$$

6.3

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, x_3) &= 5x_1 + 6x_2 + 8x_3 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 20 \\ 8x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 24 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3. \end{cases} \end{aligned}$$

6.4

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, x_3) &= 4x_1 + 10x_2 + 8x_3 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 4x_1 + 8x_2 + 3x_3 \leq 24 \\ 6x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 30 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3. \end{cases} \end{aligned}$$

6.5

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, x_3) &= 6x_1 + 10x_2 + 8x_3 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 3x_1 + 8x_2 + 4x_3 \leq 24 \\ 6x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 24 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3. \end{cases} \end{aligned}$$

ASOSIY ADABIYOTLAR

1. Berezin I.S., Jidkov N.P. Metodi vichisleniy. T1,T2. M: “Nauka”, 1966.
2. Demidovich B.P., Maron I.A., Shuvalova E. Chislinniye metodi analiza. M. “Fizmat”, 1963.
3. Polojiy T.N. matematicheskiy praktikum. M.: 1960
4. Baxvalov N.S., Jidkov N.P., Kobelkov T.M. Chislinniye metodi. M.: “Nauka”, 1987.
5. Makarov V.L., Xlabitsov V.V. Splayn approksimatsiya funktsiy. M.: “Visshaya shkola”, 1983
6. Samarskiy A.A., Gulin A.V. Chislinniye metodi. M.: “Nauka”, 1989.
7. Yudin D.B., Goldshteyn E.T. Lineynoe programmirovaniye. M.: “Nauka”, 1969.
8. Kontorovich L.V. O metodax analiza nekotorykh eksperimentalnykh plaovo-proizvedennykh zadach. DANSSSR 115, N3 1957.
9. Juraev X.I. Otaniyozov B. va boshqalar. Matematik programmalashtirish. Toshkent OO'MTV, 2005.
10. Akulich I.I. Matematicheskoe programmirovaniye v premerax I zadachax (uchebnoe posobiye) M.: “Visshaya shkola”, 1986
11. G'ofurov M. va boshqalar. Iqtisodiy matematik usullar va modellar (o'quv qo'llanma) Toshkent, 2000.
12. Zaslavskiy Yu.I. Sbornik zadach po lineynomu programmirovaniya. M.: “Nauka”, 1969.

QO'SHIMCHA ADABIYOTLAR.

1. Tixonov A.N., Kostomarov D.P. Vvodniye lektsii po prikladnoy matematike. M.: “Nauka”, 1984.
2. Krilov V.I., Bobkov V.V., Monastirniy P.I. Vichislitelnie metodi. M.: “Nauka”, 1977.
3. Cherkasova M.P. Sbornik zadach po chislinnim metodam. Minsk, “Visshaya shkola”, 1967

4. Kalabekov B.A. Primeneniye EVM v inženernix raschetax v texniki svyazi. “Radio I svyaz”, 1981
5. Gornshteyn A.M. Chislennoe resheniye zadach radiatexniki i texniki svyazi na EVM. M.: “Svyaz”, 1972.
6. Kollate A. funktsionalniy analiz I vichislitel'naya matematika. M.: “Miz”, 1969.
7. Mirzayev A.N., Raxmatov R.R. axborot tizimlarida sonly usullar (uslubiy qo'llanma) Toshkent, TATU, “ALOQACHI”, 2014.
8. Mirzayev A.N., Abduraxmanov A.G., Xaitmetov A.A. Iqtisodiy matematik usullar va modellar fani bo'yicha ma'ruzalar matni. Toshkent, TATU, “ALOQACHI”, 2013.

MUNDARIJA

Kirish.....	3
I. Matematik modellash nazariy va amaliy asoslari.....	6
§ 1. Matematik model tushunchasi va uning asosiy belgilari.....	6
§ 2. Matematik modellarga misollar. Fizik, mexanik, ommaviy va iqtisodiy masalalar asosida.....	11
§ 3. Optimizatsiya masalalari, maqsad funksiyasi.....	16
§ 4. Optimizatsiya masalalarini yechishda taqribiy usullar.....	21
§ 5. Xatoliklar turlari va ularning manba'lari. Absolyut, nisbiy xatoliklar.....	25
§ 6. Hisoblash jarayonlarining turg'unligi haqida, turg'un bo'lmagan jarayonlarga misollar.....	30
§ 7. Approksimatsiya masalasi. Bazis funksiyalar. Norma tushunchasi.....	33
§ 8. Jadval ko'rinishida berilgan funksiyalar uchun interpolatsiya masalasi. Lagranj interpolatsion ko'phadi.....	36
§ 9. Jadval qiymatlaridagi bartaraf qilib bo'lmas atolik tartibiga ko'ra ko'phad darajasini va jadval qismini aniqlash.....	41
§ 10. Tengmas orliqlar uchun Nyuton interpolatsion ko'phadi.....	44
§ 11. Teng oraliqlar uchun Nyuton interpolatsion ko'phadi.....	49
§ 12. Katta jadvallar uchun approksimatsiya masalasini yechishda eng kichik kvadratlar usuli. Chiziqli bo'g'lanish usuli.....	53
§ 13. Kvadratik bog'lanish modelini tuzish, jadvaldagi tasodifiy xatolarni aniqlash usuli.....	57
§ 14. Orthogonal ko'phadlar. Jadval ko'rinishda berilgan funksiyalar uchun o'rta kvadratik yaqinlashish.....	59
II. Chiziqli programmalash masalalari.....	64
§ 1. Chiziqli programmalash masalalari.....	64
§ 2. Chiziqli programmalash masalalarining matematik asoslari.....	75
§ 3. Rejani bosqichma-bosqich yaxshilash usullari.....	79

§ 4. Chiziqli programmalash masalalari uchun bazis tanlash va masala shartlarini tanlangan bazisga moslashtirish.....	88
§ 5. Transport masalasi.....	93
§ 6. Chiziqli programmalash masalalari uchun egizak masala.....	108
Asosiy adabiyotlar.....	114
Mundarija.....	116

“Algoritmlash va matematik modellashtirish” kafedrasining
 majlisida (“__” ____ 20__ y., № __ bayonnoma)
 muhokama qilindi va TATU ilmiy-uslubiy
 kengashida bosmaxonada chop etish
 uchun tavsiya qilindi.