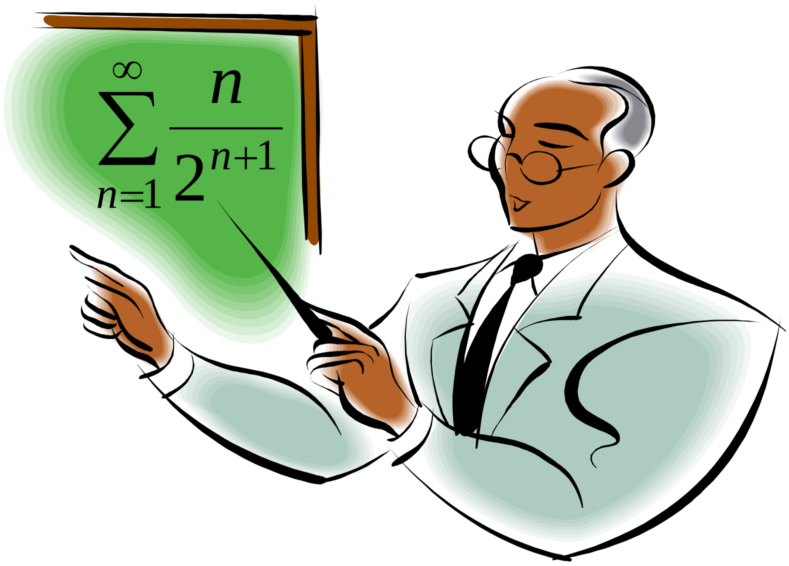
ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА
МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ТОШКЕНТ АВТОМОБИЛ-ЙЎЛЛАР ИНСТИТУТИ
«ОЛИЙ МАТЕМАТИКА» КАФЕДРАСИ

ОЛИЙ МАТЕМАТИКАДАН МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР ТЎПЛАМИ

(2-қисм)

ТЕХНИКА ОЛИЙ ЎҚУВ ЮРТЛАРИ ИККИНЧИ КУРСЛАРИ УЧУН УСЛУБИЙ ҚЎЛЛАНМА



ТОШКЕНТ – 2007

АННОТАТЦИЯ

Ушбу услбий қўлланма олий математика фани барча мутахассисликларининг бакалавриати II-курс, III ва VI-семестрга мўлжаллаб тузилган.

Ишлатилаётган янги ишчи дастурларнинг ҳали тажрибадан тўла ўтмаганлиги сабабли, кейинчалик мумкин бўлган ўзгаричларни ҳам иложи борича эътиборга олган ҳолда мавзуларни мисол ва масалалар билан ёритишни афзал кўрдик.

Китоблар танқислиги ҳисобга олинганда ушбу тўплам амалиёт дарсларида талабаларнинг дарсда шуғулланичи ва ўқитувчиларнинг дарс ўтиши самарадорлигини оширади ва дарс ўтказиш учун кетадиган вақтни фойдалироқ сарфлашга ёрдам беради.

Услубий қўлланма Олий математика кафедраси мажлисида муҳокама қилинган ва маъқулланган (Баённома №10. 07.11.06).

ТАЙИ Табиий-илмий ва касбий таълим фанлари кафедралари (ТИКТФК) илмий-услубий Кенгаши (ИУК) мажилисида тасдиқланган (баённома №4 22.11.06).

Муаллифлар: проф. Ғафуров М.Ў.
доцент. Валижонов Х.
катта ўқ. Рўзматова Н.
катта ўқ. Юлдашев С.

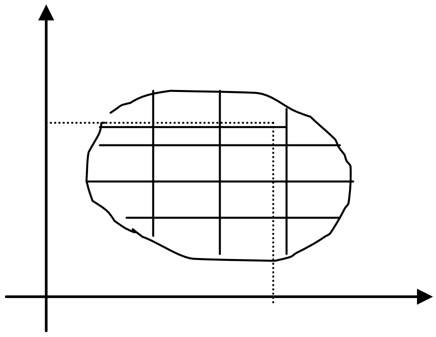
Такризчи: доц. Ғанихўжаев Р. (ТАЙИ)

I-БОБ. ИНТЕГРАЛЛАР

1-§. Икки ўлчовли интеграл.

Таъриф: Фараз қилайлик ХОУ текислигидаги бирор ёпиқ D сохада Z = f (x,y) функция аниқланган ва чегараланган бўлсин.

D соҳани ихтиёрий n та $D_1, D_2 \ldots D_n$ та бўлакчаларга бўлиб, бу бўлакчаларнинг юзаларини мос равишда $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots \Delta S_n$ деб ва ҳар бир бўлакчалардан ихтиёрий $M_i(\xi_I, \eta_i)$ $(i = 1,2,3,\ldots n)$ нуқта олиб қуйидаги йиғиндини тузайлик $V = \sum_{i-1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i$ (1)



Энг катта диаметрли D_i ни λ дейлик, яъни $\lambda = \max\{D_i\}$

Агар (1) интеграл йиғиндининг $\lambda \to 0$ да D ни $\forall\, D_i$ бўлакчаларга ажратиш усулига ва ҳар бир D_i да $\forall M_i(\xi_i, \eta_i)$ нуқтани танлаб олиш усулига боцлиқ бўлмаган лимити мавжуд бўлса, бу лимитга f (x,y) функ**ц**иядан D соҳа бўйича олинган икки ўлчовли интеграл дейилади ва

$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ ёки $\iint\limits_D f(x,y)ds$ кўринишларда белгиланади.

Икки улчовли интегралнинг хоссалари.

1. $\iint\limits_D kf(x,y)dxdy = k\iint\limits_D f(x,y)dxdy.$ (k-∀ ўзгармас)

2. $\iint\limits_D [f_1(x,y) \pm f_2(x,y)]\,dxdy = \iint\limits_D f_1(x,y)dxdy \pm \iint\limits_D f_2(x,y)\,dxdy$

3. Агар $D = D_1 + D_2$ бўлса

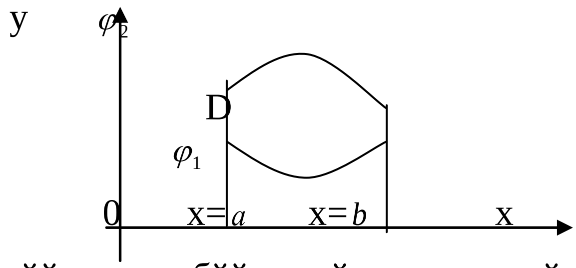
$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy$$

4. Агар f (x,y) функ**ц**ия D да узлуксиз бўлса бу соҳада шундай бир $M(\xi_i \eta_i)$ нуқта топиладики, унда $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = f(\xi_i, \eta_i)\,S$ муносабат ўринли бўлади. S-эса D соҳанинг юзаси.

Икки улчовли интегрални хисоблаш.

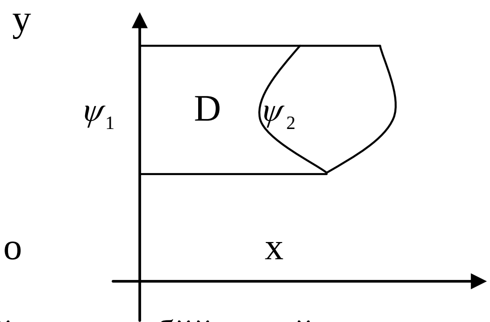
XOY текисликдаги ёпиқ D соҳамиз

$y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ чизиқлар билан чегараланган бўлиб, уни x=a , x=b (2) координата ўқларига паралел тўцри чизиқлар $\varphi_1(x)<\varphi_2(x)$, $a<b$ икки нуқтадан ортиқ нуқтада кесмасин.



Бу соҳага ОХ ўқи йўналиши бўйича тўцри соҳа дейилади.
Худди шунингдек D сохамиз қуйидаги чизиқлар билан чегараланган бўлса

$$\left.\begin{array}{l} x=\psi_1 (y) \\ x=\psi_2 (y) \\ y=c \\ y=d \\ \psi_1 (y)<\psi_2 (y) \\ c<d \end{array}\right\} \quad (3)$$



бу соҳага ОУ ўқи йўналиши бўйича тўцри соҳа дейилади.
У ҳолда икки каррали интегрални оддий интеграл каби ички интегралдан бошлаб интегралланади.

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \quad \text{ёки}$$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_c^d \left(\int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx\right)dy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx.$$

Мисол. $\int\limits_0^1 \int\limits_0^{ч^2} xydxdy=\int\limits_0^1 xdx\int\limits_0^{ч^2} ydy,$ бу ерда $\int\limits_0^{ч^2} ydy=\frac{y^2}{2}\Big|_0^{x^2}=\frac{x^4}{2}$;

бўлгани учун, $\int\limits_0^1 xdx\int\limits_0^{ч^2} ydy=\int\limits_0^1 x\frac{x^4}{2}dx=\int\limits_0^1 \frac{x^5}{2}dx=\frac{1}{2}\,\frac{x^6}{6}=\frac{1}{12}$.

Эслатма. Агар D ни координат ўқларига параллел тўцри чизиқлар икки нуктадан ортик нуктада кесса у холда D ни мураккаб соха дейилади. Агар D мураккаб соха бўлса уни бир неча тўцри сохаларга ажратиб олиниб, шу тўцри сохалар бўйича олинган интегралларнинг йиғиндиси шу D соҳа бўйича олинган интегрални беради.

Мисол. $\boldsymbol{I=\int\limits_0^{1/2}dx\int\limits_0^{\sqrt{1-4x}}(x+y)dy}$ каррали интеграл хисоблансин.

Ечиш: Интеграллаш сохаси $\boldsymbol{\sigma : x=0, x=1/2, y=0}$ тўцри чизиклар ва $\boldsymbol{y=\sqrt{1-4x^2}}$ эгри чизиқ (ярим эллипс) билан чегараланган ОУ ўқига нисбатан стандарт соҳадир.

$$I=\int_0^{1/2}dx\int_0^{\sqrt{1-4x}}(x+y)dy=\int_0^{1/2}(xy+\frac{y^2}{2})\Big|_0^{\sqrt{1-4x}}dx=\int_0^{1/2}(x\sqrt{1-4x^2}+\frac{1}{2}-2x^2)dx=\frac{1}{4};$$

Мисол. $I=\int_1^e dx\int_0^{\ln x}f(x,y)dy$ каррали интегралларни интеграллаш тартиби ўзгартирилсин.

Ечиш. Аввал шаклида интеграллаш сохаси σ -ни тасвирлаймиз. Берилган каррали интеграл чегараларидан кўриниб турибдики, σ-соха x=1, x=e, y=0 ва y=lnx чизиқлар билан чегараланган стандарт соха экан.

σ -соханинг энг пастки чет чизици (ОХ) ва y=0 энг юқори чет нуқтаси y=1. ОУ-ўкининг ихтиерий $\forall$ y $\in$ $]0,1[$ нуқтасига ўтказилган горизонталнинг «кириш» нуқта абциссаси $x_1=e^y$ (уни y= lnx тенгламадан топдик) «чиқиш» нуқта абциссаси эса $x_2=e$

Демак $I=\int_0^1 dy\int_{e^y}^{e}f(x,y)dx$, яъни: $\int_1^e dx\int_0^{\ln x}f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{e^y}^{e}f(x,y)dx$.

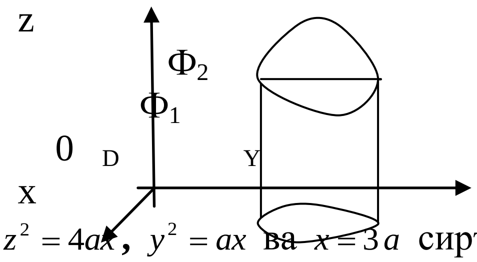
Икки ўлчовли интеграл ёрдамида хажм ва юзаларни хисоблаш.

Икки ўлчовли интегралнинг геометрик маъноси юкоридан z=f(x,y) сирт билан ён томонларидан ясовчилари oz ўқига параллел бўлган **ц**илиндрик сирт билан пастдан D соха билан чегараланган жисмнинг хажми эди:

$$V=\iint_D f(x,y)dxdy$$

Агар жисмимиз юқоридан z =Φ_2 (x,y) пастдан z= Φ_1 (x,y) сиртлар билан чегараланган бўлиб, бу сиртларнинг XOY даги проек**ц**ияси D бўлса бу жисмнинг хажми қуйидаги формула билан хисобланади.

$$V=\iint_D[\Phi_2(x,y)-\Phi_1(x,y)]dxdy=\iint_D\Phi_2(x,y)dxdy-\iint_D\Phi_1(x,y)dxdy$$



Мисол. $y^2+z^2=4ax$, $y^2=ax$ ва $x=3a$ сиртлар билан чегараланган жисмнинг хажми топилсин(**ц**илиндрдан ташқарида).

Ечиш: 1) $y^2+z^2=4ax$ симметрия ўки ОХ бўлган айланма парабалоид; 2) $y^2=ax$ ясовчиси OZ ўкига параллел бўлиб, йўналтирувчиси ХОУ текислигида $y^2=ax$ параболадан иборат бўлган параболик **ц**илиндр 3) $x=3a$, ОХ-ўкидан $3a$-га тенг кесма ажратиб, УОZ текислигига параллел бўлган текисликлар билан чегараланган экан.,

Жисм XOZ текислигига нисбатан симметрик жойлашганлиги учун унинг 1-октантадаги қисмининг хажмини хисоблаб натижани 2 га купайтирамиз. Жисм ХОУ текислигида $y^2=4ax$, $y^2=ax$ параболалар ва

$x = 3a$ тўгри чизиқ билан чегараланган ОХ ўкига нисбатан симметрик жойлашган (Д) сохани ажратади.

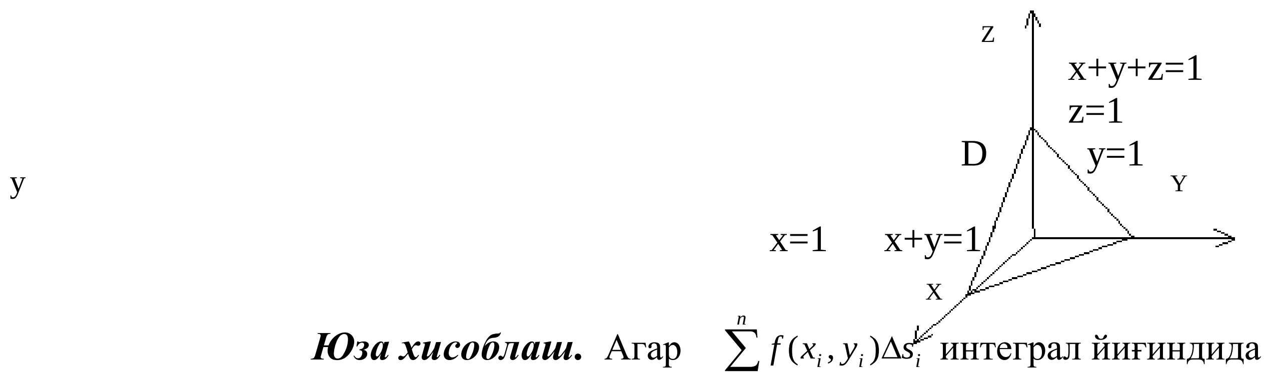
Изланаётган хажм куйидагича хисобланади:

$$V = \iint_{Д} \sqrt{4ax - y^2}\, dxdy = 2\int_0^{3a} dx \int_{\sqrt{ax}}^{2\sqrt{ax}} \sqrt{4ax - y^2}\, dy = 3a^3 (4\Pi - 3\sqrt{3})$$

Мисол. x=0, y=0, x+y+z=1   z=0

сиртлар билан чегараланган жисмни ҳажмини топинг.

$$V = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)dy = \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} dx = \frac{1}{2}\frac{(1-x)^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{6} \text{ куб бирлик.}$$



Юза хисоблаш. Агар $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i$ интеграл йиғиндида f(x,y) ни бир десак яъни f(x,y)=1 деб , $\lambda \to 0$ да лимитга ўтсак

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta s_i = s$$

иккинчи томондан

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta s_i = \iint_D dxdy$$

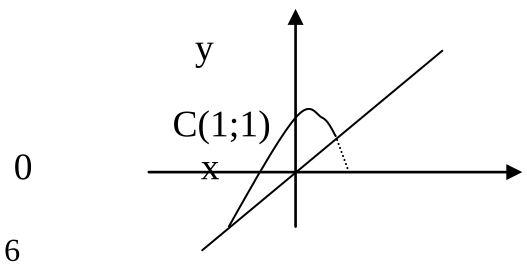
демак $s = \iint_D dxdy$ ёки соҳа (2) кўринишда бўлса

$$\iint f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy = \int_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]dx = s_2 - s_1 = s$$ бўлади.

Мисол. $y=2-x^2$ ва y=x чизиқлар билан чегараланган юзани топинг.

$y=2-x^2$ ва y=x дан $x^2+x-2=0$ бундан x=1 , x=-2

$$s = \int_{-2}^{1} dx \int_{x}^{2-x^2} dy = 4{,}5$$ кв.бир.



(-2;-2)

Мисол. x=0, x=2, y=0 тўгри чизиқлар ва $y=e^x$ эгри чизици билан чегараланган соҳанинг юзаси топилсин.

Берилган сохани ОХ-ўкига проекциялаб, х-нинг ўзгариш соҳаси 0;2 кесмани хосил киламиз. Соха пастдан y=0 ва юқоридан $y=e^x$ чизиқлар билан чегараланган. Бу холда изланаётган юза куйидагича хисобланади:

$$s=\iint_D dxdy = \int_0^2 dx\int_0^{e^x} dy=\int_1^2 y \Big|_0^{e^x} dx=\int_1^2 e^x dx=e^x \Big|_1^2=e^2-e=e(e-1)$$

Мисол. x=0, y=1, y=3 тўгри чизиқлар ва $y=\frac{1}{x}$ гипербола билан чегараланган шаклнинг юзаси топилсин. Бу соҳани ОУ ўкига проекциялаймиз, чунки ОХ-ўкига проекцияласак, 2 та икки карали интегрални хисоблашга тўгри келади. Бу ерда ҳам формуладан, фойдаланиб, ундан каррали интегралга ўтсак,

$$S=\int_1^3 dy\int_0^{\frac{1}{y}} dx=\int_1^3 \frac{1}{y}dy=\ln y\Big|_1^3=\ln 3-\ln 1=\ln 3$$ бўлади.

Мисол. $y^2=9+x$ ва $y^2=9-3x$ параболлар билан чегараланган соҳанинг юзаси тоилсин. Соҳа ОХ –ўкига нисбатан симметрик жойлашгани учун, унинг юқори ярмининг юзасини топиб, 2 га кўпайтирамиз.

$$S=2\int_0^3 dy\int_{y^2-9}^{3-\frac{1}{3}y^2} dx=2\int_0^3 x\Big|_{y^2-9}^{3-\frac{1}{3}y^2} dy=2\int_0^3 (3-\frac{1}{3}y^2-y^2+9)dy=2\int_0^3 (12-\frac{4y^2}{3})dy=$$

$$\frac{2}{3}\int_0^3 36-4y^2\,)dy=\frac{8}{3}(9y-\frac{y^3}{3})\Big|_0^3=48$$ кв.бирлик

Мисол $y=e^x$, $y=e^{2x}$ эгри чизиқлар ва x=1 тўгри чизиқ билан чегараланган соҳанинг юзаси топилсин.

Ечиш:

$$S=\int_0^1 dx\int_{e^x}^{e^{2x}} dy=\int_0^3 (e^{2x}-e^x)dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x}-e^x\right]\Big|_0^1=\frac{1}{2}e^2-e-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}e^2-e+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(e-1)^2 \text{ кв.бир.}$$

Икки улчовли интегралда узгарувчиларни алмаштириш.

Икки ўлчовли интегралда ўзгарувчиларни алмаштириш формуласи

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D'} f[\varphi(u,v);\psi(u,v)]\,|\,I(u,v)\,|\,dudv \qquad (4)$$

$$I(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$$

Масалан z=f(x,y) функ**ц**иядан D соха бўйича декарт системасида олинган интегрални қутб координаталар системасида ҳисоблайлик

Қутб координатаси билан декарт координатаси орасидаги боцланиш бизга маълум. $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ x = \rho\sin\varphi & 0 \le \rho < \infty \end{cases}$

1) Кутб соҳадан ташқарида бўлса

$$\iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\varphi d\rho = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho$$

формула билан ҳисобланади

2) Агар қутб соханинг чегарасида бўлса

$$\iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) d\varphi d\rho = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{0}^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho$$

формула билан ҳисобланади

3) Агар қутб соханинг ичида бўлса, у холда қуйидаги формула билан ҳисобланади.

$$\iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) d\varphi d\rho = \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho$$

Мисол. $\boldsymbol{I = \iint\limits_{S} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}}}$ интеграл хисоблансин

Икки ўлчовли интеграл қутб координаталари $\boldsymbol{\varphi}$ ва r ларга ўтиб хисоблансин, бу ерда S-радиуси R=1 бўлиб, маркази O(0,0) нуқтада бўлган айлананинг биринчи чораги .

Ечиш. $\boldsymbol{\sqrt{x^2 + y^2} = r}$ фомулани кўллаб $\boldsymbol{I = \iint\limits_{S} \frac{rdrd\varphi}{r} = \iint\limits_{S} d\varphi dr}$ ни чиқарамиз. S–соҳа $0 \le \boldsymbol{\varphi} \le \boldsymbol{\frac{\Pi}{2}}$, $0 \le r \le \boldsymbol{1}$.тенгликлар билан аниқланади.

Шунинг учун формулага асосан $\boldsymbol{I = \int\limits_{0}^{\frac{\Pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{1} dr = \frac{\Pi}{2}.1 = \frac{\Pi}{2}}$

Мисол. $\boldsymbol{I = \iint\limits_{S} (x^2 + y^2 + 1)dxdy}$ интеграл қутб кординаталарига ўтиб ҳисоблансин. Интеграллаш соҳаси S марказлари координаталар бошида, радиуслари эса R=1 ва R =2 бўлган кон**ц**ентрик айланалар ва y=0 , y=x тўцри чизиқлар билан чегараланиб, биринчи чоракда ётган соха.

Ечиш. $x^2 + y^2 = r^2$, dxdy=rdrd$\boldsymbol{\varphi}$ формулага асосан,

$\boldsymbol{I = \iint\limits_{S} (r^2 + 1)rdrd\varphi}$.

Бу ерда S соҳа $0 \le \varphi \le \frac{\Pi}{4}$, $1 \le r \le 2$ тенгсизликлар билан аникланади. Демак формулага асосан

$$I = \int_0^{\frac{\Pi}{4}} d\varphi \int_1^2 (r^3 + r)dr = \int_0^{\frac{\Pi}{4}} (\frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{2}) \Big|_1^2 d\varphi = \int_0^{\frac{\Pi}{4}} \frac{21}{4} d\varphi = \frac{21}{16}$$

Мисол. $I = \iint_S f(x, y)dxdy$ интегралда кутб координаталари φ ва r ларга ўтиб, уларнинг чегаралари куйилсин, бу ерда S лемниската $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$

Ечиш. $x = r\cos\varphi, y = \sin\varphi$

формуладан фойдалансак бу холда лемниската тенгламаси $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ кўринишга келади. $dxdy = rdrd\varphi$ ни хисобга олсак, $I = \iint_S f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi$ бу ерда $S = S_1 + S_2$ бўлиб, S_1 соҳа $\frac{3\Pi}{4} \le \varphi \le \frac{5\Pi}{4}, \quad 0 \le r \le a\sqrt{\cos 2\varphi}$, S_2 соҳа $-\frac{\Pi}{4} \le \varphi \le \frac{\Pi}{4}, \quad 0 \le r \le a\sqrt{\cos 2\varphi}$

тенгсизликлар билан аникланади.

Демак, $I = \iint_{S_1} F(r,\varphi)rdrd\varphi$ - $I = \iint_{S_2} F(r,\varphi)rdrd\varphi$ =

$$I = \int_{\frac{3\Pi}{4}}^{\frac{5\Pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} F(r,\varphi)rdr + I = \int_{-\frac{\Pi}{4}}^{\frac{\Pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} F(r,\varphi)rdr$$

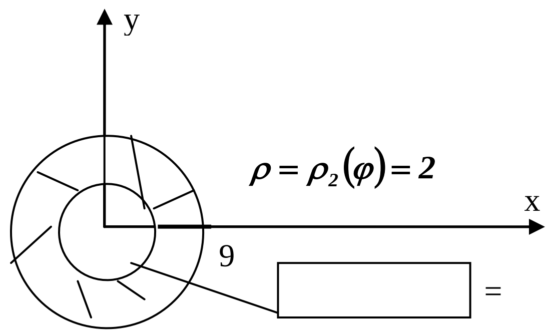
Бу ерда, f (r $\cos\varphi, r\sin\varphi) = F(r,\varphi)$ деб белгиланади.

Мисол. $\iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}dxdy \quad , \quad D: x^2 + y^2 = 4$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ x = \rho\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \rho^2 = x^2 + y^2 \quad , \rho = 2 \\ 0 \le \rho \le 2 \quad ,0 \le \varphi \le 2\pi \end{matrix}$$

$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{4 - \rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi}\rho d\rho d\varphi = \int_0^2 \rho d\rho \int_1^{2\pi} \sqrt{4 - \rho^2}d\varphi = 2\pi \int_1^2 \sqrt{4 - \rho^2}\rho d\rho =$$

$$= \begin{vmatrix} 4 - \rho^2 = t^2 \\ -2\rho d\rho = 2tdt \\ \rho = 0 \partial at = 2 \\ \rho = 2, \partial at = 0 \end{vmatrix} = 2\pi \int_2^0 t^2 dt = -2\pi \frac{t^3}{2} \Big|_2^0 = \frac{16}{3}\pi.$$



1. Ушбу икки ўлчовли интеграллар ҳисоблансин.

1. $\int_0^1 dx \int_0^1 (x^2+y^2)dy$

2. $\int_0^1 dx \int_x^1 (x+y)dy$

3. $\int_0^2 x^2 dx \int_0^{\frac{x}{2}} y dy$

4. $\int_0^1 dy \int_0^1 (x^2+2y)dx$

5. $\int_3^4 dx \int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}$

6. $\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{x}} dy$

7. $\int_2^4 dx \int_x^{2x} \frac{y}{x} dy$

8. $\iint_D x^3 y^2 dxdy, \quad D-$айлана $\quad x^2+y^2 \le R^2$

9. $\iint_D xydxdy, \quad D-$соха $\quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 2$

10. $\iint_D e^{x+y} dxdy, \quad D-$соха $\quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1$

2. Ушбу икки ўлчовли интегралларнинг интеграллаш тартибини ўзгартиринг.

11. $\int_0^3 dx \int_x^{3x} f(x,y)dy$

12. $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

13. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{2x^2} f(x,y)dy$

14. $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{x}^{2x} f(x,y)dy$

15. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{2x}^{6-x} f(x,y)dy$

16. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{4-x^2} f(x,y)dy$

17. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$

18. $\int\limits_{0}^{\pi} dx \int\limits_{0}^{\sin x} f(x,y)dy$

19. $\int\limits_{1}^{10} dx \int\limits_{-\lg x}^{\lg x} f(x,y)dy$

20. $\int\limits_{-4}^{0} dy \int\limits_{-2}^{y+2} f(x,y)dx + \int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} f(x,y)dx$

3. Ушбу икки ўлчовли интегралларда ўзгарувчиларни алмаштириб интегралланг.

21. $\iint\limits_{(P)} xydxdy,$ бунда (P) соха $x^2 = y,\ x^2 = 2y,\ y^2 = x,\ \ y^2 = 2x$ чизиқлар билан чегараланган.

22. $\iint\limits_{(P)} dxdy,$ бунда (P) соха $xy=1,\ xy=4,\ x-2y=2,$

$x-2y+1=0,\ x>0,\ y>0.$

23. $\iint\limits_{(P)} (x-2y)dxdy,$ бунда (P) соха $xy=1,\ xy=4,\ x-2y=2,$

$x-2y+1=0, x>0, y>0.$

24. $\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy,$ бунда (P) соха $x^2+y^2 \le R^2.$

25. $\iint\limits_{(P)} (x^2+y^2)dxdy,$ бунда (P) соха $x^2+y^2=2ax.$

26. $\iint\limits_{(P)} (x^2+y^2)dxdy,$ бунда (P) соха $x^4+y^4 \le 1.$

27. $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}dy$

28. $\iint\limits_{(P)} xdxdy,$ бунда (P) соха $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{a}.$

29. $\iint\limits_{(P)} x^2dxdy,$ бунда (P) соха $\sqrt[3]{\mathrm{x}}+\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{a}.$

30. $\iint\limits_{(P)} \sqrt{x^2+y^2}dxdy,$ бунда (P) соха $0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le x$

4. Ушбу чизиқлар билан чегараланган юза ҳисоблансин.

31. $S=\iint\limits_{(P)} dp,$ бунда (P) соха $y=\dfrac{a^2}{x}, \quad y=\dfrac{2a^2}{x},$

$x>0, \quad x=1, \quad x=2$

32. $S=\iint\limits_{(P)} dp,$ бунда (P) соха $x=0, \quad y=0, \quad x=2, \quad y=e^x$

33. $S=\iint\limits_{(P)} dp,$ бунда (P) соха $y=0, \quad y=x, \quad x^2+y^2=2x$

34. $S=\iint\limits_{(P)} dp,$ бунда (P) соха $y=\dfrac{1}{3}x^3, \quad y=4-\dfrac{2}{3}x^2$

35. $S=\iint\limits_{(P)} dp,$ бунда (P) соха $y=x^2+4x, \quad y=x+4$

36. $S=\iint\limits_{(P)} dp,$ бунда (P) соха $x^2+y^2=16, \quad x^2=12(y-1)$

37. $S=\iint\limits_{(P)} dp,$ бунда (P) соха $xy=1, \quad xy=4, \quad y^2=x, \quad y^2=3x$

38. $S=\iint\limits_{(P)} dp,$ бунда (P) соха $y^2=10x+25$ *ва* $y^2=-6x+9$

39. $S=\iint\limits_{(P)} dp,$ бунда (P) соха $x^2+y^2=2x,\ \ x^2+y^2=4x,\ \ y=x,\ \ y=0$

40. $S=\iint\limits_{(P)} dp,$ бунда (P) соха $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}\right)^2=x^2+y^2$

5. Ушбу сиртлар билан чегараланган ҳажмлар топилсин.

41. $z=9-y^2$ цилиндрва $3x+4y=12,\quad y\geq 0$ текислик

42. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{a^2}=1,\quad y=\dfrac{b}{a}x,\quad y=0,\quad z=0,\quad x>0$

43. $z=5xy,\quad y^2=2x,\quad y^2=3x,\quad x^2=y,\quad x^2=2y,\quad z=0$

44. $z=\dfrac{x^2+y^2}{4},\quad x^2+y^2=8y,\quad z=0$

45. $z=x^2+y^2+1,\quad z=0,\quad x=0,\quad y=0,\quad x=4,\quad y=4$

46. $z+y=2,\quad z=0,\quad y=x^2$

47. $y=\sqrt{x},\quad y=2\sqrt{x},\quad x+z=6,\quad z=0$

48. $3z=y^2,\quad x^2+y^2=4,\quad z=0$

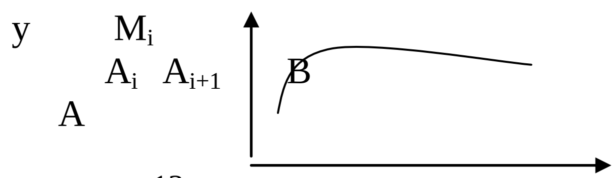
49. $x^2+y^2=3z,\quad x+z=6$

50. $z=3x,\quad y=2x-x^2,\quad y=-x,\quad z=0$

2-§. Биринчи ва иккинчи тур эгри чизикли интеграллар.

Биринчи тип эгри чизиқли интеграл.

Текисликда бирор силлиқ АВ эгри чизиқ берилган бўлиб, унда f(x,y) функция аниқланган бўлсин.



0 x

Энди АВ эгри чизиқни $A=A_0, A_1, A_2, ..., A_n=B$ нуқталар билан $A_i A_{i+1}$ (i=0,...,n-1) ёйларга ажратамиз, ҳар бир ёйчада ихтиёрий $M_i(\xi_i, \eta_i)$ нуқта олиб бу нуқтадаги f(x,y) функцияни қийматини $f(\xi_i, \eta_i)$ деб белгилаб қуйидаги йиғиндини тузамиз.

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i \qquad (1)$$

$\max\{\Delta s_i\}=\lambda$ деб белгилайлик.

Таъриф: Агар АВ эгри чизиқда аниқланган f(x,y) функция учун тузилган (1) йиғинди $\lambda \to 0$ да АВ эгри чизиқни A_i, A_{i+1} ёйларга бўлиш усулига ва ҳар бир A_i, A_{i+1} ёйчада $M_i(\xi_i, \eta_i)$ нуқтани танлаб олиш усулиига боцлиқ бўлмаган лимитга эга бўлса , бу лимитга f(x,y) функциядан АВ эгри чизиқ бўйича олинган биринчи тип эгри чизиқли интеграл дейилади ва $\int\limits_{(AB)} f(x,y)ds$ деб белгиланади. Демак. $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i = \int\limits_{(AB)} f(x,y)ds$

Биринчи тип эгри чизиқли интегралнинг асосий хоссалари:

1. $\int\limits_{(AB)} f(x,y)ds = \int\limits_{(BA)} f(x,y)ds$
2. $\int\limits_{(AB)} Cf(x,y)ds = C\int\limits_{AB} f(x,y)ds$
3. $\int\limits_{(k)} [f_1(x,y) \pm f_2(x,y)]ds = \int\limits_{(k)} f_1(x,y)ds \pm \int\limits_{(k)} f_2(x,y)ds$
4. Агар $k=k_1+k_2$ бўлса,
   $\int\limits_{(k)} f(x,y)ds = \int\limits_{(k_1)} f(x,y)ds + \int\limits_{(k_2)} f(x,y)ds$ бўлади.

Агар биринчи тип эгри чизиқли интегралда f(x,y)=1 десак , у холда $\int\limits_{(k)} f(x,y)ds = \int\limits_{(k)} \mathrm{ds} = \mathrm{S}$ -эгри чизиқнинг узунлигини беради. Агар f(x,y) функцияни мусбат ва ўзгарувчан чизиқли зичлик $\gamma = f(x,y)$ деб қарасак, $\int\limits_{(k)} f(x,y)ds$ - интеграл k-эгри чизиқнинг массасини ифодалайди.

Теорема. Агар f(x,y) функция, параметрик тенгламаси $\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \varphi_2(t) \end{aligned}\right\} \text{булган}(\alpha \le t \le \beta)$ (к) эгри чизиқда аниқланган ва узлуксиз бўлса, у холда $\int\limits_{(k)} f(x,y)ds$ интеграл мавжуд бўлиб

$$\int\limits_{(k)} f(x,y)ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t), \psi,(t)]\sqrt{\varphi^{1^2}(t), + \psi^{1^2}(t)}dt$$ формула билан ҳисобланади.

Агар фазодаги (k) эгри чизиқнинг тенгламаси
$x=\varphi_1(t), y=\varphi_2(t), z=\varphi_3(t) \qquad (t_1\le t\le t_2)$ бўлса,

$$\int\limits_{(k)} f(x,y,z)ds=\int\limits_{t_1}^{t_2} f[\varphi_1(t),\varphi_2(t),\varphi_3(t)]\sqrt{\varphi_1'^2(t)+\varphi_2'^2(t)+\varphi_3'^2(t)}dt \qquad \text{бўлади.}$$

Мисол. Зичлиги $p=f(x,y,z)=\sqrt{2y}$ қонун билан ўзгарадиган ва фазодаги параметрик тенгламаси $x=t, y=\frac{1}{2}t^2, t=\frac{1}{3}t^3 \quad (0\le t\le 1)$ лар билан берилган эгри чизиқнинг массасини топинг.

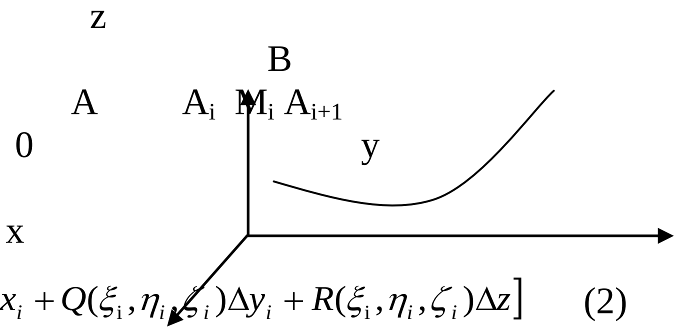
$$M=\int\limits_{(k)} f(x,y,z)ds=\int\limits_{k} pds=\int\limits_{k}\sqrt{2y}ds=\int\limits_0^1\sqrt{2\cdot\frac{1}{2}\cdot t^2}\sqrt{x^{1^2}+y^{1^2}+z^{1^2}}dt=\int\limits_0^1 t\sqrt{1+t^2+t^4}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\sqrt{\left(t^2+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}d\left(t^2+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{t^2+\frac{1}{2}}{2}\cdot\sqrt{t^4+t^2+1}+\frac{3}{8}en(t^2+\frac{1}{2}+\sqrt{t^4+t^2+1})\right]^1=$$

$$=\frac{1}{8}\left(3\sqrt{3}-1+\frac{3}{2}en\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right)$$

Иккинчи тип эгри чизикли интеграл.

Фазода аниқ йўналишли силлиқ (гладкой) АВ эгри чизиқ берилган бўлиб, унда P (x,y,z), Q (x,y,z) ва R (x,y,z) функциялар аниқланган бўлсин одатдагича бу эгри чизиқни $A=A_0, A_1, ..., A_{n-1}, \quad A_n=B$ нуқталар билан $A_i A_{i+1}$ ёйларга ажратиб ҳар бир $A_i A_{i+1}$ ёйчада ихтиёрий М(ξ_i,η_i,ζ_i) нуқта олиб қуйидагича йиғинди тузамиз.



$$\sum_{i=0}^{n-1}[(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z] \qquad (2)$$

$\Delta x_i, \Delta y_i$ ва Δz_i лар $A_i A_{i+1}$ ёйнинг мос равишда ох,оу, ва oz ўқларига бўлган проекцияси $\max\{\Delta x_i\}=\lambda_1, \max\{\Delta y_i\}=\lambda_2, \max\{\Delta z_i\}=\lambda_3$, дейлик

Таъриф. Агар АВ да аниқланган P (x,y,z), Q (x,y,z) ва R (x,y,z) функциялар учун тузилган (2) интеграл йиғинди $\lambda_1\to 0, \lambda_2\to 0, \lambda_3\to 0$ да АВ эгри чизиқни $A_i A_{i+1}$ ёйларга ва ҳар бир $A_i A_{i+1}$ ёйда ихтиёрий М(ξ_i,η_i,ζ_i),нуқтани танлаб олиш усулига боцлиқ бўлмаган лимитга эга бўлса бу лимитга P (x,y,z), Q (x,y,z) ва R (x,y,z) функциялардан АВ эгри чизиқ бўйлаб А дан В га қараб олинган иккинчи тип эгри чизиқли интеграл дейилади ва

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + \int_{AB} Q(x,y,z)dy + \int_{AB} R(x,y,z)dz$$ ёки

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$ кўринишда ёзилади.

Демак $$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \lim_{\substack{\lambda_1 \to 0 \\ \lambda_2 \to 0 \\ \lambda_{31} \to 0}} \sum_{i=1}^{n-1} \left[P\,\Delta x_i + Q\Delta y_i + R\Delta z_i \right]$$

Агар (2) интеграл йиғиндини P,Q,R функцияларнинг ихтиёрий биттаси ёки ихтиёрий иккитаси учун тузсак у холда иккинчи тип эгри чизиқли интегралимиз қуйидаги кўринишларда бўлади.

$$\int_{AB} Pdx + Qdy, \int_{AB} Qdy + Rdz, \int_{AB} Pdy + Rdz, \int_{AB} Pdy, \int_{AB} Qdy, \int_{AB} Rdz$$

Агар P (x,y,z), Q (x,y,z), R (x,y,z) функцияларни $\vec{F}$ кучнинг ox, oy, oz ўқларидаги проекцияси сифатида қарасак ва Δx, Δy, Δz ларни AB эгри чизиқнинг F куч таъсир қилаётган нуқтасининг кўчиши Δs нинг ox, oy, oz ўқларидаги проекцияси сифатида қарасак, у холда иккинчи тип эгри чизиқли интеграл $\vec{F}$ кучнинг бутун AB эгри чизиқ бўйлаб бажарган ишни беради, яъни A= $\int_{AB} Pdy + Qdy + Rdz$ бўлади.

Иккинчи тип эгри чизиқли интегралда интеграллаш йўналишини ўзгартирсак, интеграл қиймати ўз ишорасини ўзгартиради

$\int_{AB} P(x,y,z)dx = -\int_{BA} P(x,y,z)dx$ чунки Δx_1 нинг ишораси ўзгаради.

Иккинчи тип эгри чизиқли интегралнинг қолган ҳоссалари эса биринчи тип эгри чизиқли интегралнинг хоссалари каби бўлади.

Теорема. AB эгри чизиқнинг тенгламаси параметрик холда берилган бўлиб:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi_1(t) \\ y &= \varphi_2(t) \\ z &= \varphi_3(t) \\ \alpha &\le t \le \beta \end{aligned}\right\}$$ (x,y,z) нуқта A дан B га қараб ҳаракат қилсин.

Агар $\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ \varphi_3(t)$, P_1(x,y,z),Q(x,y,z), R(x,y,z) функциялар AB да узлуксиз ва узлуксиз $\varphi_1^1(t),\ \varphi_2^1(t),\ \varphi_3^1(t)$, ҳосилаларга эга бўлса, у холда $\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$ иккинчи тип эгри чизиқли интеграл мавжуд ва

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\varphi_1(t), \varphi_2(t) \varphi_3(t) \right] \varphi_1^1(t)dt$$ тенг бўлади.

Мисол. Агар AB эгри чизиқнинг параметрик тенгламаси

$$\left.\begin{array}{l} x=\sqrt{\cos t} \\ y=\sqrt{\sin t} \\ 0\le t\le \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\}$$ бўлса, $\int\limits_{AB} x^2ydy-y^2xdx$ интегрални ҳисобланг

Ечими. $dx=-\dfrac{\sin t}{2\sqrt{\cos t}}dt$, $dy=-\dfrac{\cos t}{2\sqrt{\sin t}}dt$ -буларни ва x,y ларни берилган интералга қўйсак.

$$\int\limits_{AB} x^2ydy-y^2xdx=\int\limits_0^{\pi/2}\left(\cos t\cdot\sqrt{\sin t}\cdot\frac{\cos t}{2\sqrt{\sin t}}+\sin t\cdot\sqrt{\cos t}\cdot\frac{\sin t}{2\sqrt{\cos t}}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}(\cos^2 t+\sin^2 t)dt=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}dt=\frac{\pi}{4}.$$

Мисол. Тенгламаси $\left.\begin{array}{l} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{array}\right\}$ параметрик кўринишда берилган эллипснинг юзи ҳисоблансин.

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_Z xdy-ydx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}[a\cos t\cdot b\cos t+b\sin t\cdot a\sin t]\quad dt=$$

$$=\frac{ab}{2}\int\limits_0^{2/\pi}(\cos^2 t+\sin^2 t)dt=ab\pi$$

51. $\int\limits_\gamma \dfrac{d\ell}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, γ-тексликдан А*(1,2)* ва В*(3,6)* нуқталарни туташтирувчи тўцри чизиқ кесмаси.

52. $\int\limits_\gamma xyd\ell,$ γ-тексликда $3|x|+4|y|=12$ тенглама билан берилган контур.

53. $\int\limits_\gamma yd\ell,$ γ-чизиқ $y^2=4x$ пабоnанинг $y^2=4y$ парабола билан ажратган қисмидир.

54. $\int\limits_\gamma xyd\ell,$ γ-учлари А(-2,-2), В(6,1), С(2,5) учбурчак контури.

55. $\int\limits_\gamma \sqrt{2y}d\ell,$ γ-текислик $x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t),\quad 0\le t\le 2\pi$

56. $\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} xydx+(y-x)dy$ интеграл $y=x^2$ йўл бўйича ҳисоблансин.

57. $\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} xydx + (y-x)dy$ интеграл $y^2 = x$ йўл бўйича ҳисоблансин.

58. $\int\limits_{\gamma} (2a-y)dx - (a-y)dy,$ γ-текислик

$$x = a(t - \sin t), \;\; y = a(1-\cos t), \;\; 0 \le t \le 2\pi$$

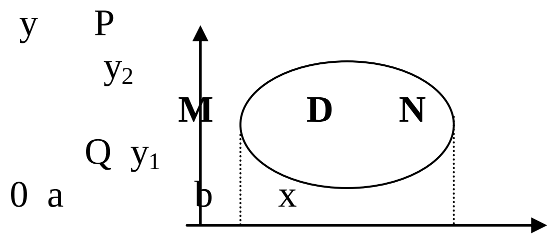
59. $\int\limits_{\gamma} y^2 dx + x^2 dy,$ γ-текислик A(-a,0)дан B(a,0)гача бўлган ярим эллипс ёй

$x = a\cos t, \;\; y = b\sin t, \;\; 0 \le t \le 2\pi$

60. $\int\limits_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy$ ҳисоблансин.

3-§. Грин формуласи.

Фараз қилайлик тенгламаси пастдан $y=y_1(x)$ юқоридан $y=y_2(x)$ бўлган L контур билан чегараланган тўцри D соҳада X(x,y) У (x,y) функ**ц**иялар аниқланган узлуксиз ва узлуксиз ҳосилаларга эга бўлсин.



у ҳолда $\iint\limits_{D} \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} dxdy = \int\limits_{Z} Xdx + Ydy$ формулага

Грин формуласи дейилади.

Ушбу интегралларни Грин формуласидан фойдаланиб ҳисобланг.

61. $\oint\limits_{L} 2(x^2 + y^2)dx + (x+y)^2 dy$ L-ABC учбурчак контури A(1,1), B(2,2), C(1,3).

62. Ушбу $(x+y)^2 = ax, \;\; a > 0$ парабола билан OX ўқи орасидаги юза топилсин.

63. $\oint\limits_{L} (1-x^2)dx + x(1+y)^2 dy$ L- контур $x^2 + y^2 = R^2$ иборат.

64. $\oint\limits_L \frac{xdy - ydx}{9x^2 + y^2}$, L- координата боши O(0,0)дан ўтмайдиган ёпиқ контур, O(0,0) нуқта контур ташқарисида.

65. $\oint\limits_L -x^2dx + xy^2dy$ L- контур $x^2 + y^2 = R^2$ айлана соат стрелкасига қарши йўналтирилган.

4-§. Сирт интеграллари.

66. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ сферанинг тўлиқ сирти топилсин.

67. $x^2 + y^2 = 2az$ параболоиднинг $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$ цилиндрик сирт ичидаги қисми юзи топилсин.

68. $x^2 + y^2 = 2x$ цилиндр ичида жойлашган $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ конус сиртқи қисмининг юзи топилсин.

69. $\iint\limits_{(S)} (x + y + z)ds$ бунда (S) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z = 0$ текисликнинг юқори қисми.

70. $\iint\limits_{(S)} (x^2 + y^2 + z^2)ds$ бунда (S) сфера $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$дан иборат.

II-боб. Каторлар

1-§. Сонли каторлар.

Агар $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ чексиз ҳақиқий сонлар кетма-кетлиги берилган бўлса, улардан тузилган ушбу

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... \qquad (1)$$

ифодага чексиз қатор (қисқача-қатор) дейилади.

Қатор қисқача $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ кўринишда ҳам ёзилади.

Масалан, агар $a_n = \frac{1}{2^n}$ бўлса, у ҳолда қатор $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n} + ...$ кўринишда бўлади.

Энди қуйидаги йиғиндиларни тузайлик:

$$s_1 = a_1, \;\; s_2 = a_1 + a_2, \;\; s_3 = a_1 + a_2 + a_3, ..., \;\; s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n, ... \qquad (2)$$

(2) йиғиндиларга қаторнинг хусусий (ёки қисмий) йиғиндилари дейилади.

Таъриф. Агар (1) қаторнинг $n-$хусусий йиғиндиси s_n , $n \to \infty$ да $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ чекли лимитга эга бўлса, у ҳолда (1) қаторга яқинлашувчи қатор дейилиб s га эса унинг йиғиндиси дейилади ва s $= a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ кўринишда ёзилади.

Таъриф. Агар $n \to \infty$ да (1) қаторнинг $n-$хусусий йиғиндиси s_n нинг лимити чексиз бўлса ёки мавжуд бўлмаса, у ҳолда (1) қатор узоқлашувчи дейилади.

$\boldsymbol{a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ...}$ (3) геометрик прогрессия фақат $|q| < 1$ бўлганда яқинлашувчи бўлиб, $|q| \geq 1$ бўлганда узоқлашувчи бўлади.

Қатор яқинлашувининг зарурий шарти:

Теорема. Агар $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ қатор яқинлашувчи бўлса, унинг n-ҳади n чексизликка интилганда нолга интилади яъни $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Эслатма. Агар қатор яқинлашувчи бўлса, албатта $n \to \infty$ да унинг n-ҳади нолга интилади яъни $a_n \to 0$ бўлади. Агар $n \to \infty$ да қаторнинг n-ҳади нолга интилмаса қатор албатта узоқлашувчи бўлади. Агар $n \to \infty$ да қаторнинг n-ҳади нолга интилса яъни $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ бўлса, бу қаторнинг яқинлашишининг муқаррарлиги келиб чиқмайди.

Масалан. $\boldsymbol{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n} + ...}$

гармоник қатор деб аталувчи қаторнинг $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ бўлгани билан бу қатор узоқлашувчи. Бунинг узоқлашувчи эканлигини кейинроқ Кошининг интеграл аломати ёрдамида исботланади.

Агар $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$

қаторнинг ҳамма ҳадлари манфий бўлмаган сонлардан иборат бўлса, бундай қаторга мусбат ҳадли қатор дейилади.

Мусбат ҳадли қаторларнинг яқинлашишининг етарли шартларини кўриб ўтайлик.

1-теорема. (Биринчи таққослаш аломати).

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... \qquad (1)$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n + ... \qquad (4)$$

мусбат ҳадли қаторлар берилган бўлиб бирор $n > N$ номердан бошлаб $a_n \le b_n$ (*)

тенгсизлик бажариладиган бўлса , (4) қаторнинг яқинлашувчи бўлишлигидан (1) қаторнинг яқинлашувчилиги ёки (1) қаторнинг узоқлашувчи бўлишлигидан (4) қаторнинг ҳам узоқлашувчи бўлишлиги келиб чиқади.

Мисол. $\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3 + ... + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n + ...$ ва

$\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + ... + \left(\frac{2}{3}\right)^n + ...$ қаторлар берилган бўлсин.

Равшанки

$a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n \le \left(\frac{2}{3}\right)^n = b_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ қатор яқинлашувчи, демак

1-теоремага кўра биринчи қатор ҳам яқинлашувчи бўлади.

2-теорема (Иккинчи таққослаш аломати)

Агар $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k < \infty$ лимит мавжуд бўлса, у ҳолда (1) ва (4) қаторлар бир вақтда яқинлашади ёки узоқлашади.

Мисол. $\sin 1 + \sin\frac{1}{2} + ... + \sin\frac{1}{n} + ...$ қаторни $1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n} + ...$ қатор билан таққослаймиз.

$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$ нисбатни кўрамиз. Маълумки, $\lim\limits_{n\to\infty} = \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1.$ Демак,

берилган қатор узоқлашувчи.

3-Теорема. (Даламбер аломати). Агар $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ (1)

қаторнинг $\boldsymbol{(n+1)}$-ҳадининг $\boldsymbol{n}$-ҳадига нисбатан $\boldsymbol{n \to \infty}$ да чекли лимитга эга бўлса, яъни $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ бўлса, у ҳолда

1) $l < 1$ да қатор яқинлашади;
2) $l > 1$ да қатор узоқлашади.

Мисол. Қаторни яқинлашувчилигини текширинг:

$$\frac{2}{1^2}+\frac{2^2}{2^2}+\frac{2^3}{3^2}+...+\frac{2^n}{n^2}+...$$

Ечиш. Маълумки , $a_n = \dfrac{2^n}{n^2}$, $a_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)^2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\dfrac{2^n}{n^2}} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = 2 > 1$$

Мисол. Берилган қаторни яқинлашувчилигини текширинг:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\left(\sqrt{2}\right)^2}+\frac{5}{\left(\sqrt{2}\right)^3}+...+\frac{2n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^n}+...$$

Ечиш. $a_n = \dfrac{2n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$, $a_{n+1} = \dfrac{2n+1}{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2n+1}{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}}}{\dfrac{2n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

Демак , қатор яқинлашувчи.

4-Теорема. (Коши аломати). Агар мусбат ҳадли $a_1+a_2+a_3+...+a_n+...$ қатор учун $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = l$ чекли лимит мавжуд бўлиб

1) $l<1$ бўлса қатор яқинлашади;
2) $l>1$ бўлса қатор узоқлашади.

Мисол. Берилган қаторни яқинлашувчилигини текширинг:

$$\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln^2 3}+...+\frac{1}{\ln^n(n+1)}+...$$

Ечиш. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{\ln^n(n+1)}} = \dfrac{1}{\ln(n+1)} = 0 < 1$

Демак , қатор яқинлашувчи.

Мисол. $\frac{2}{1}+\left(\frac{3}{2}\right)^4+\left(\frac{4}{3}\right)^9+...+\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}+...$ қаторни яқинлашувчилигини текширинг.

Ечиш. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=e>1$

қатор узоқлашувчи.

5-Теорема (Кошининг интеграл аломати). Бизга ҳадлари ўсмайдиган

$(a_n\ge a_{n+1})\qquad a_1+a_2+a_3+...+a_n+...\qquad (1)$

мусбат ҳадли қатор ва узлуксиз ўсмайдиган ($\boldsymbol{x\to\infty}$ ***да*** $\boldsymbol{f(x)\to 0}$) монотон камаювчи $f(x)$ функция берилган бўлиб

$f(1)=a_1, f(2)=a_2,..., f(n)=a_n,...$ бўлса, у ҳолда (1) қаторнинг ёки

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ қаторнинг яқинлашувчи бўлиши учун $\int\limits_1^{\infty}f(x)dx$

хосмас интегралнинг яқинлашувчи бўлиши зарур ва кифоя.

Мисол. Умумлашган гармоник қатор деб аталувчи

$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+...+\frac{1}{n^p}+...$ қаторни яқинлашувчанликка текширинг.

Ечиш $.a_1=f(1)=1, a_2=f(2)=\frac{1}{2^p},..., a_n=f(n)=\frac{1}{n^p},...$ ва $f(x)=\frac{1}{x^p}$

эканлиги равшан , бу ерда р-ҳақиқий сон.

Ушбу $\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{x^p}dx=\left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^{\infty}=\frac{1}{1-p}\lim\limits_{n\to\infty}x^{-p+1}\Big|_1^{\infty}=\frac{1}{1-p}\lim\limits_{n\to\infty}(n^{1-p}-1)\quad (p\ne 1)$

хосмас интегрални ҳисоблаймиз.

Агар p>1 бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{n\to\infty}n^{1-p}=0$ ва $\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{x^p}dx=\frac{1}{1-p}$ яқинлашувчи;

Агар p<1 бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{n\to\infty}n^{1-p}=\infty$ ва $\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{x^p}dx$ узоқлашувчи;

Агар p=1 бўлса, у ҳолда $\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_1^{\infty}=\infty$ узоқлашувчи.

Шу сабабли умумлашган гармоник қатор

p>1 бўлса яқинлашувчи,

p<1 бўлса узоқлашувчи ва

p=1 бўлса узоқлашувчи бўлади.

Ишоралари навбат билан алмашинувчи қаторлар:

$$\boldsymbol{u_1-u_2+u_3-u_4+...+(-1)^{n-1}u_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n}\qquad (5)$$

кўринишдаги қаторга ишоралари навбат билан алмашиб келадиган қаторлар дейилади. Бу ерда $u_1, u_2, u_3,..., u_n,...$ мусбат сонлар.

Теорема (Лейбниц теоремаси). Агар ишораси алмашиниб келувчи $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + (-1)^{n-1} u_n + ...$ қаторда

1) Қатор ҳадларининг абсолют қийматлари камаювчи, яъни $u_1 > u_2 > u_3 > u_4 > ... > u_n > ...$ бўлса,

2) Қатор умумий ҳади $\boldsymbol{u_n}$ $\boldsymbol{n \to \infty}$ да нолга интилса: $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

у ҳолда (5) қатор яқинлашувчи бўлади.

Мисол. $\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - ... + (-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)^2} + ...$ қаторнинг яқинлашувчанлигини текширинг.

Ечиш**.** $\frac{1}{2^2} > \frac{1}{3^2} > \frac{1}{4^2} > ... > \frac{1}{(n+1)^2} > ...$ ва $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = 0$.

Демак, қатор яқинлашувчи.

Ихтиёрий ҳадли қаторлар:

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + ... + u_n + ... \qquad (6)$$

Қаторнинг чексиз кўп мусбат ва чексиз кўп манфий ҳадлари бўлса, у ҳолда бу қаторга ўзгарувчан ишорали қатор ёки ихтиёрий ҳадли қатор дейилади.

(6) қатор ҳадларининг абсолют қийматларидан

$|u_1| + |u_2| + |u_3| + |u_4| + ... + |u_n| + ...$ (7) қаторни тузайлик.

Теорема. Агар (7) қатор яқинлашувчи бўлса, (6) қатор ҳам яқинлашувчи бўлади.

Таъриф. (6) ва (7) қаторлар бир пайтда яқинлашувчи бўлса, (6) қаторга абсолют яқинлашувчи қатор дейилади.

Таъриф. Агар (6) қатор яқинлашувчи бўлиб (7) қатор узоқлашувчи бўлса, у ҳолда берилган (6) қаторга шартли яқинлашувчи дейилади.

Мисол. Қуйидаги қаторни кўрайлик:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + (-1)^n\frac{1}{n} + ...$$

Лейбниц аломатига кўра бу қатор яқинлашувчи, лекин қатор ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган қатор эса узоқлашувчи. Демак, қатор шартли яқинлашувчи.

Мисол. Қуйидаги қаторни кўрамиз:

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + ... + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + ...$$

Ечиш**.** Бу қатор абсолют яқинлашувчидир, чунки унинг ҳадлари абсолют қийматларидан тузилган қатор яқинлашувчидир (p=2>1).

Мисол. Ўзгарувчан ишорали

$$\frac{\sin\alpha}{1^2} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + ... + \frac{\sin n\alpha}{n^2} + ...$$

Қаторнинг яқинлашишини текширинг, буерда α -ихтиёрий ҳақиқий сон.

Ечиш. Берилган қатор билан бирга

$$\left|\frac{\sin\alpha}{1^2}\right|+\left|\frac{\sin 2\alpha}{2^2}\right|+\ldots+\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|+\ldots$$

қаторни қараймиз. Бу қаторни яқинлашувчи

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$ қатор билан таққослаймиз.

Равшанки, $\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$ n=1,2,...

Шу сабабли таққослаш аломатига кўра абсолют ҳадли қаторлар яқинлашувчи. У ҳолда юқорида исботланган теоремага кўра берилган қатор яқинлашувчи.

1. Ушбу ҳадлардан фойдаланиб қаторнинг n-ҳаднинг формуласи ёзинг.

1. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$

2. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots$

3. $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\cdots$

4. $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots$

5. $\frac{3}{4}+\frac{4}{9}+\frac{5}{16}+\frac{6}{25}+\cdots$

6. $\frac{2}{5}+\frac{4}{8}+\frac{6}{11}+\frac{8}{14}+\cdots$

7. $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\cdots$

8. $1+\frac{1\cdot 3}{1\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 4\cdot 7}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10}+\cdots$

9. $1-1+1-1+1-1+\cdots$

2. a_n-қаторнинг умумий ҳадининг формуласидан фойдаланиб 4-5 та ҳадини ёзинг.

10. $a_n=\frac{3n-2}{n^2+1}$

11. $a_n = \frac{(-1)^n n}{2^n}$

12. $a_n = \frac{2+(-1)^n}{n^2}$

13. $a_n = \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$

14. $a_n = \frac{(2+\sin\frac{n\pi}{2})\cos n\pi}{n!}$

3. Ушбу қаторларни солиштириш ва зарурий шартдан фойдаланиб яқинлашишга текширинг.

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-2}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n^3-1}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{4n^3+5n}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n+1]{10}}$

4. Ушбу қаторларни Даламбер аломатидан фойдаланиб яқинлашишга текширинг.

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{2^n}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

27. $\frac{3}{1}+\frac{3\cdot 5}{1\cdot 4}+\cdots+\frac{3\cdot 5\cdots\cdot(2n+1)}{1\cdot 4\cdots\cdot(3n-2)}+\cdots$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n+1}}{n!}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin in}{3^n}$

30. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2\sqrt{2}}+\cdots+\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}+\cdots$

31. $\frac{2}{1}+\frac{2\cdot 5}{1\cdot 5}+\frac{2\cdot 5\cdot 8}{1\cdot 5\cdot 9}+\cdots+\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)}+\cdots$

5. Ушбу қаторларни Коши аломатидан фойдаланиб яқинлашишга текширинг.

32. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

34. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, бунда $u_{2k-1}=\left(\frac{k}{2k+1}\right)^k$, $u_{2k}=\left(\frac{k}{3k-1}\right)^{k/2}$

35. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2i}{(1+i)n+3}\right)^n$

36. $\frac{2}{1}+\left(\frac{3}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n+\cdots$

37. $\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{5}\right)^3+\left(\frac{3}{8}\right)^5+\cdots+\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}+\cdots$

6. Мусбат ҳадли қаторларни яқинлашишга текширинг.

38. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$

39. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2-1}$

40. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2-1}$

41. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n^2+1}$

42. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$

43. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$

44. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n$

45. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$

46. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

47. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$

7. Ушбу қаторларни абсалют ва шартли яқинлашишга текширинг.

48. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3n-1}$

49. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$

50. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{5n-2}$

51. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n$

52. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$

53. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$

54. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$

55. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

56. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{6n-5}$

2-§. Функционал каторлар.

Таъриф. Ҳадлари x ўзгарувчининг функциялардан иборат бўлган

$$u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+... \qquad (1)$$

кўринишдаги қаторга функционал қатор дейилади.

Таъриф. Агар ихтиёрий ε мусбат сон учун ε га боцлиқ, шундай $N(\varepsilon)>0$ сон топилиб, барча $n \geq N$ да кўрсатилган соҳага тегишли х лар учун $r_n(x)=|S(x)-S_n(x)|<\varepsilon$ тенгсизлик бажарилса , (1) қатор кўрсатилган соҳада текис яқинлашувчи қатор дейилади.
Вейерштрасс аломати.

Агар $u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...$

функционал қаторнинг ҳадлари бирор $[a,b]$ соҳада абсолют қиймати бўйича бирор яқинлашувчи мусбат ишорали $c_1+c_2+...+c_n+...$

қаторнинг мос ҳадларидан катта бўлмаса , яъни

$|u_n(x)| \leq c_n$ $(n=1,2,3,...)$ бўлса, у ҳолда берилган функционал қатор кўрсатилган $[a,b]$ соҳада текис яқинлашади.

Мисол. Ушбу

$$\frac{\sin^2 x}{1^3}+\frac{\sin^2 2x}{2^3}+...+\frac{\sin^2 nx}{n^3}+...$$

функционал қатор х нинг барча ҳақиқий қийматлари учун текис яқинлашади, чунки барча х ва n-ларда $\left|\dfrac{\sin^2 nx}{n^3}\right| \leq \dfrac{1}{n^3}$

$\dfrac{1}{1^3}+\dfrac{1}{2^3}+...+\dfrac{1}{n^3}+...$ қатор эса яқинлашувчидир.

Мисол. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+x}$ қаторни текширинг.

Вейерштрасс аломати бу қатор учун бажарилмайди, чунки берилган қатор шартли яқинлашувчи ва $x \geq 0$ лар учун $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+x}$ қатор узоқлашувчи.
Берилган қаторни текис яқинлашувчилигини кўрсатиш учун Лейбниц теоремасидан фойдаланамиз. Берилган қатор ўзгарувчи ишорали ва $x \geq 0$ да абсолют қийматлари бўйича монотон камаювчи ва n-ҳади $n \to \infty$ да нолга интилади. Шу сабабли, қатор $[0,\infty)$ ярим ўқда яқинлашувчи ва қатор қолдици учун $|r_n(x)|<\dfrac{1}{n+1+x}$ $x \geq 0$ да $|r_n(x)| \leq \dfrac{1}{n+1}$ га эга бўламиз ва $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$ бўлгани учун, қатор текис яқинлашувчи.

Таъриф. $a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n+...$ (2)

кўринишдаги функционал қаторга даражали қатор дейилади.
Хусусий ҳолда , агар $x_0=0$ бўлса, у ҳолда қуйидаги

$a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+...$ (3)

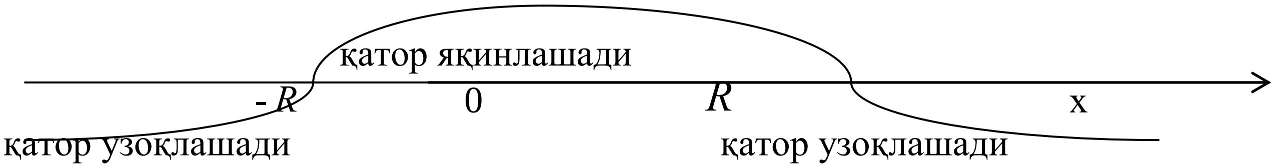
даражали қаторга эга бўламиз.

Абелқ теоремаси. Агар $a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+...$ (3)

даражали қатор $x_0 \neq 0$ нуқтада яқинлашса, у ҳолда бу қатор x нинг $|x| < |x_0|$ тенгсизликни қаноатлантирадиган барча қийматларида абсолют яқинлашади, яъни $(-|x_0|, |x|)$ да яқинлашади.

Таъриф. $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...$ даражали қаторнинг яқинлашиш соҳаси деб шундай $(-R, R)$ интервалга айтиладики, бу интервалнинг ичидаги ҳар бир x нуқтада қатор яқинлашади, ундан ташқарида ётувчи x нуқталарда қатор узоқлашади. R - даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси дейилади.

Интервалнинг четки нуқталарида яъни x=R ва x=-R нуқталарда берилган қаторнинг яқинлашиши ёки узоқлашиши масаласи қатор учун алоҳида ҳал қилинади.



Баъзи қаторлар учун яқинлашиш интервали нуқтага айланиб ҳолади, у ҳолда R =0;
баъзилари учун бутун OX ўқини қамраб олади, яъни $R = \infty$ бўлади.

Яқинлашиш радиуси қуйидаги формулалар билан ҳисобланади:

$$R = \frac{1}{l} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \qquad R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} \qquad (4)$$

Мисол. Даражали қаторнинг яқинлашиш интервалини топинг:

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + \frac{x^n}{n} + ...$$

Ечиш**.**

$$u_n = (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}, \quad u_{n+1} = (-1)^{n+2}\frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \quad a_n = (-1)^{n+2}\frac{1}{n+1}$$

Бу ердан $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$

Демак, (-1,1) интервал яқинлашиш интервали бўлади.

x=1 да $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... + \frac{(-1)^n}{n} + ...$ қаторга эга бўламиз, бу қатор Лейбниц аломатига кўра яқинлашувчи.

x=-1 да эса $-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - ...$ қаторга эга бўламиз, бу қатор Лейбниц аломатига кўра узоқлашувчи.

Мисол. $\frac{x-1}{1\cdot 2} + \frac{(x-1)^2}{2\cdot 2^2} + \frac{(x-1)^3}{3\cdot 2^3} + ... + \frac{(x-1)^n}{n\cdot 2^n} + ...$ қаторнинг яқинлашиш интервалини топинг.

Ечиш. Маълумки, $a_n = \dfrac{1}{n \cdot 2^n}$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^{n+1}}{n\cdot 2^n} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 2$$

Яқинлашиш интервалининг маркази x=1 нуқтада, шу сабабли (-1,3) интервал қаторнинг яқинлашиш интервали бўлади. x=-1 да $-1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}-...$ қатор Лейбниц аломатига кўра яқинлашувчи ва x=3 да $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-...$ қатор узоқлашувчи.

8. Ушбу қаторларнинг яқинлашиш оралицини топинг.

57. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}$

58. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n^x}$

59. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n^{\ln x}}$

60. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}$

61. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n\sin\dfrac{x}{3^n}$

62. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}e^{-n\sin x}$

63. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{x^n}$

64. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!\,x^n}$

65. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)x^n}$

66. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}$

9. Ушбу даражали қаторларнинг яқинлашиш оралицини топинг.

67. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

68. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$

69. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

70. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} x^{2n-1}}{(4n-3)^2}$

71. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$

72. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^5 x^{2n}}{2n+1}$

73. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^2 x^n$

74. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

75. $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$

76. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$

3-§. Тейлор каторлари.

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \ldots \quad \textbf{(1)}$$

(1) га Тейлор қатори дейилади.

Агар Тейлор қаторида $a = 0$ десак

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) \ldots \quad (2)$$

Маклорен қатори келиб чиқади.

Теорема. $f(x)$ функция $(-r, r)$ интервалда аниқланган бўлиб, унда нолдан фарқли исталган тартибли ҳосилалари мавжуд бўлсин.

Агар шундай бир М сони мавжуд бўлсаки, $(-r,r)$ интервалнинг барча нуқталарида $\left|f^{(n)}(x)\right|<M,\ (n=0,1,2,..)$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда бу интервалда

$$f(x)=f'(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f^{(n)}(0)}{2!}+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+... \quad (3)$$

тенглик ўринли бўлади.

Мисол. $f(x)=\sin x$ функцияни Маклорен қаторига ёяйлик.

$f(x)=\sin x$ функция юқоридаги теорема шартларини ҳар қандай r учун яъни ихтиёрий $(-r,r)$ интервалда қаноатлантиради.

Ҳақиқатан, $\sin x$ функциянинг исталган тартибли ҳосиласи ёки $\pm\sin x$ га ёки $\pm\cos x$ га тенг; иккинчидан $\left|(\sin x)^n\right|\le 1,\ \left|(\cos x)^n\right|\le 1\ \ (n=0,1,2,..)$

$f(x)=\sin x,\ f'(x)=(\sin x)'=\cos x,\ f''(x)=(\sin x)''=-\sin x,$

$f'''(x)=(\sin x)```=-\cos x,\quad f^{IV}(x)=(\sin x)^{IV}=\sin x,...$

Бундан кўринадики $\left\{(\sin x)^{(n)}\right\}$ кетма-кетлик даврий бўлиб даври 4 га тенг экан.

Агар $x=0$ десак,

$\sin 0=0,\ \ \sin'(0)=1,\ \ \sin''(0)=0,\ \ \sin'''(0)=-1,...,\sin^{(2n+1)}(0)=(-1)^n\ \ (n=0,1,2,..)$

Энди буни (3) га қўйсак

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+...$$

Мисол. $f(x)=\cos x$ функцияни Маклорен қаторига ёяйлик.

$f(x)=\cos x$ функциянинг исталган тартибли ҳосиласи ёки $\pm\sin x$ га ёки $\pm\cos x$ га тенг; иккинчидан $\left|(\sin x)^n\right|\le 1,\ \left|(\cos x)^n\right|\le 1\ \ (n=0,1,2,..)$

$f(x)=\cos x,\ f'(x)=(\cos x)'=-\sin x,$

$f''(x)=(\cos x)''=-\cos x,\ f'''(x)=(\cos x)```=-\sin x,$

$f^{IV}(x)=(\cos x)^{IV}=\cos x.$

Бундан кўринадики $\left\{(\cos x)^{(n)}\right\}$ кетма-кетлик даврий бўлиб даври 4 га тенг экан.

Агар $x=0$ десак

$\cos 0=1,\cos'(0)=0,\cos''(0)=-1,\cos'''(0)=0,...,\cos^{(2n)}(0)=(-1)^n,\cos^{(2n+1)}(0)=0\ (n=0,1,2,...)$

Энди буни (3) га қўйсак

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Мисол. $f(x)=e^x$ функцияни Маклорен қаторига ёяйлик.

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+...$$

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+...+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+...$$

Мисол. $\sin x$ нинг $x=10^0$ даги қийматини ҳисобланг.

$x=10^0=\dfrac{\pi}{18}\approx 0{,}174533$ радианда

$$\sin x=\sin\frac{\pi}{18}=\frac{\pi}{18}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3-...\approx\frac{\pi}{18}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3\approx 0{,}173647$$

10. Ушбу функцияларни х-нинг бутун мусбат даражалари кўринишда қаторга ёйинг ва яқинлашишга текширинг.

77. a^x

78. $\sin(x+\frac{\pi}{4})$

79. $\cos(x+a)$

80. $\sin^2 x$

81. e^x

82. $\sin(x+\frac{\pi}{4})$

83. $\sin x$

84. $(1+x)^m$

85. $\ln(1+x)$

III-боб. Комплекс сонлар ва комплекс аргументли функциялар.

1-§. Комплекс сонлар ва улар устида амаллар.

$z=x+iy$ (1) кўринишдаги ифодага комплекс сон дейилади. Бу ерда i га мавҳум бирлик дейилади. Мавҳум бирлик $i=\sqrt{-1}$ ёки $i^2=-1$ бўлади.

$z=x+iy$ комплекс соннинг мавҳум қисми деб y га , ҳақиқий қисми деб x га айтилади ва $\operatorname{Re} z=\operatorname{Re}(x+iy)=x$; $\operatorname{Im} z=\operatorname{Im}(x+iy)=y$ кўринишда ёзилади.

Масалан. $z=-2+5i$ комплекс сонинг ҳақиқий ва мавҳум қисмлари $\operatorname{Re} z=\operatorname{Re}(-2+i5)=-2$ $\operatorname{Im} z=\operatorname{Im}(-2+i5)=5$.

Фақат мавҳум қисмининг ишораси билан фарқ қилувчи $z=x+iy$ ва $\bar{z}=x-iy$ кўринишдаги комплекс сонларга қўшма комплекс сонлар дейилади .

Масалан. $z=2+5i$ ва $\bar{z}=2-5i$ лар қўшма комплекс сонлардир.

$z_1=x_1+iy_1$ ва $z_2=x_2+iy_2$ комплекс сонлар берилган бўлсин.

1. $z=z_1+z_2=x_1+iy_1+x_2+iy_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$.
2. $z=z_1-z_2=x_1+iy_1-x_2-iy_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)$.
3. $z=z_1\cdot z_2=(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2)$.
4. $z=\dfrac{z_1}{z_2}=(z_2\neq 0)=\dfrac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\dfrac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}\cdot\dfrac{x_2-iy_2}{x_2-iy_2}=\dfrac{x_1x_2+iy_1x_2-ix_1y_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\dfrac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$

Текисликдаги XOY декарт координаталар системасининг абцисса ўқига $z=x+iy$ комплекс соннинг ҳақиқий қисми x ни , ордината ўқига эса мавҳум қисми y ни жойлаштирсак $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ бўлгани учун,

$z=x+iy=r\cos\varphi+ir\sin\varphi \;\rightarrow\; z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ (2) бўлади.

(2) га z комплекс соннинг тригонометрик кўриниши дейилади.

$r=|z|$ - z комплекс сонни тасвирлаган векторнинг узунлигини ифодалайди ва унга z комплекс соннинг модули дейилади.

$$r=|z|=|x+iy|=\sqrt{x^2+y^2}. \qquad \text{яъни} \qquad r=\sqrt{x^2+y^2} \qquad (3)$$

формула билан аниқланади. (2) даги φ – Ox ўқининг мусбат йўналиши билан векторгача бўлган бурчакни ифодалайди, унга z комплекс сонинг аргументи дейилади: $\varphi=\operatorname{Arg}z=\arg z+2k\pi$ $(k=0, \pm1, \pm2,\dots)$

$$\operatorname{tg}\varphi=y/x \rightarrow \varphi=\operatorname{arctg}(y/x) \quad (4)$$

$$0\leq r<\infty \;;\; 0\leq\varphi\leq 2\pi$$

Математик анализ курсидан Эйлернинг $e^{ix}=\cos x+i\cdot\sin x$ формуласидан фойдалансак комплекс сонни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=re^{i\varphi} \;\rightarrow\; z=re^{i\varphi} \quad (5)$$

(5) га комплекс соннинг кўрсаткичли формаси дейилади.

Мисол. $z=-1+i$ сонни тригонометрик ва кўрсаткичли кўринишда ёзинг.

$$x=-1 \;,\; y=1$$

$$r=[(-1)^2+1^2]^{1/2}=\sqrt{2} \;, \quad \operatorname{tg}\varphi=y/x=-1 \;;\; \varphi=\operatorname{arctg}(-1).$$

Берилган комплекс сонга мос келувчи вектор иккинчи чоракда ётгани учун $\varphi=3\pi/4$ бўлади: $z=-1+i=\sqrt{2}\cdot(\cos 3\pi/4+i\cdot\sin 3\pi/4)=\sqrt{2}\cdot e^{3i\pi/4}$

Тригонометрик куринишдаги комплекс сонларни купайтириш, даражага кутариш ва илдиз чикариш.

$z_1=r_1$ $(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$, $z_2=r_2$ $(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$, … , $z_n=r_n(\cos\varphi_n+i\sin\varphi_n)$
комплекс сонлар берилган бўлсин.

Кўпайтириш.

$$z_1\cdot z_2= r_1r_2\,[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\,\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$$

ҳудди шунингдек,

$$z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_n= z_1\cdot z_2\ldots r_n[\cos(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n) + i\cdot\sin(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)] \quad (6)$$

Даражага кўтариш.

$$z^n=[r\,(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=r^n\,(\cos n\varphi +i\,\sin n\varphi) \quad (7)$$

бўлади. Ҳусусий ҳолда r=1 десак (7) дан

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin\varphi \qquad (8)$$

Муавр формуласи келиб чиқади.

Илдиздан чиқариш.

$$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^{1/n} = r^{1/n}\cdot[\cos\,[(\varphi+2k\pi)/n] +i\sin[(\varphi+2k\pi)/n]] \quad (9)$$

бунда $k=0,1,2,...,(n-1)$.

Мисол. $(i)^{1/3}$ ҳисоблансин $i=0+i\cdot 1$, $x=0$, $y=1$

$r=1$, $\varphi=\pi/2$ бўлгани учун $i=\cos\pi/2+i\sin\pi/2$

$$(i)^{1/3}=(\cos\pi/2+i\sin\pi/2)^{1/3} = \cos\,[(\pi/2+2k\pi)/3]+i\sin[(\pi/2+2k\pi)/3] \quad , \quad k=0,1,2.$$

$$z_0=\cos\pi/6+i\,\sin\pi/6=1/2\cdot(\sqrt{3}+i)$$

$$z_1=\cos5\pi/6 + i\sin5\pi/6=-1/2\cdot(\sqrt{3}-i)$$

$$z_2=\cos3\pi/2+i\sin3\pi/2=-i\,.$$

Ушбу мисоллардаги комплекс сонларни ҳақиқий ва мавҳум қисмларини аниқланг.

1. $(2+3i)(1-2i)$

2. $\dfrac{a+bi}{a-bi}$

3. $\dfrac{(1-2i)^2-4}{(2+i)^2}$

4. $\dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$

5. $(\sqrt{2}+\sqrt{3}i)^2$

6. $\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

7. $\frac{(1-i)^4}{(-1+i)^3}+3i-1$

8. X ва Y нинг $(3-2i)x+(1+3i)y=-1+i$ тенгламани қаноатлантирувчи қийматларини топинг.
9. X ва Y нинг $(-1+3i)x-(2-4i)y=4-2i$ тенгламани қаноатлантирувчи қийматларини топинг.
10. Ушбу чизиқли тенгламалар системасини ечинг.

$$\begin{cases}(1+i)x+(3-2i)y=1+i\\(1-i)x+(4+2i)y=2+2i\end{cases}$$

11.Ушбу чизиқли тенгламалар системасини ечинг.

$$\begin{cases}(2+i)x-(3+i)y=i\\(3+i)x+(2-i)y=i\end{cases}$$

12. Ушбу квадрат тенгламани ечинг.

$$(1+i)x^2-(2-i)x-i=0$$

13. Ушбу квадрат тенгламани ечинг.

$$x^2-(4+3i)x+(1+5i)=0$$

Ушбу мисоллардаги комплекс сонларни тригонометрик кўринишга келтиринг.
14. -1

15. i

16. $1-i$

17. $1+i\sqrt{3}$

18. $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

19. $-\cos\varphi-i\sin\varphi$

20. $1+\cos\varphi+i\sin\varphi$

Ушбу мисоллардаги ифодаларни ҳисобланг.
21. $(1+i)^{12}$

21. $(\sqrt{3}-i)^{10}$

22. $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$

23. $\left(\dfrac{-i}{\sqrt{3}-i}\right)^{9}$

24. $\dfrac{(1-i\sqrt{3})^6}{(1+i\sqrt{3})^4}+(1+i)(3-i)$

25. $\dfrac{(1+i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{10}}$

27. Ушбу тенгликнинг тўцрилигини исботланг.

$$(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}(\cos\frac{n\pi}{2}+i\sin\frac{n\pi}{2})$$

Ушбу мисоллардаги комплекс сонлардан илдиз чиқаринг.

28. $\sqrt[3]{-1}$

29. $\sqrt[6]{1}$

30. $\sqrt[9]{-1}$

31. $\sqrt[5]{-1-i}$

32. $\sqrt[3]{\dfrac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i}}$

33. $\sqrt[5]{\dfrac{2-i}{-1-i}-2i}$

34. $\sqrt[10]{\dfrac{(3\sqrt{3}+4)-i(4\sqrt{3}-3)}{3-4i}}$

35. $\sqrt[8]{\dfrac{1+7i}{(4-3\sqrt{3})+i(4\sqrt{3}+3)}}$

Ушбу мисоллардаги комплекс сонларининг логарифларини топинг.

36. 10

37. $15i$

38. $-i$

39. $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$

40. $3+4i$

41. $-1-i$

42. $\frac{3-i}{1-i}+(3-2i)^2$

Ушбу мисоллардаги даражаларни ҳисобланг.

43. $(-1)^i$

44. $(-i)^i$

45. 1^{-i}

46. $(-i)^{1-i}$

47. $(1+i)^i$

48. $(1-i)^{1-i}$

49. $(\sqrt{3}+i)^{-i}$

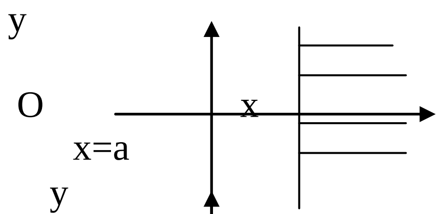
50. $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{-1-i}$

2-§. Комплекс аргументли функциялар.

Агар D тўплам фақат ички нуқталардангина иборат бўлиб,унинг ҳар қандай иккита нуқтасини синиқ чизиқ билан бирлаштирганда бу синиқ чизиқнинг ҳамма нуқталари D тўпламга тегишли бўлса,бу ҳолда текисликдаги D нуқталар тўплами соҳа дейилади.

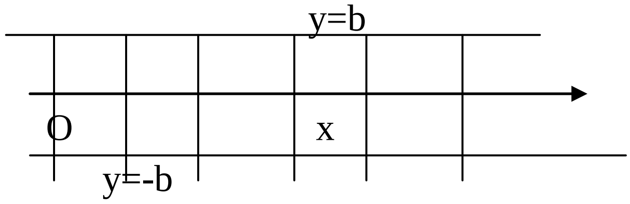
Мисол. Re z ≥ a тенгсизлик қандай соҳани ифодалайди.

Re z = Re (x+iy)=x , демак x ≥ a



Мисол.$-b<\mathrm{Im}\, z<b$

y



Ҳақиқий ўзгарувчили t нинг комплекс функцияси ёки комплекс қийматли функцияси деб $f(t)=f_1(t)+if_2(t)$ кўринишдаги функцияга айтилади, бу ерда $f_1(t),f_2(t)$ лар ҳақиқий функциялар, агар $f_2(t)=0$ бўлса, f(t) ҳакикий функциядан иборат бўлади.

Комплекс ўзгарувчили комплекс функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ бўлиб, бу ерда $u(x,y),v(x,y)$ икки аргументли ҳақиқий ўзгарувчили функциялардир.

Таъриф. Бизга бирор D саҳо берилган бўлиб, $z=x+iy$ комплекс сонни D саҳонинг нуқталари орқали ифодалаш мумкин бўлса, у ҳолда D саҳони $z=x+iy$ комплекс ўзгарувчининг ўзгариш (аниқланиш) саҳоси дейилади.

Таъриф. Агар z комплекс ўзгарувчининг аниқланиш саҳосидага ҳар бир қийматига бирор қонун бўйича $w=u+iv$ комплекс ўзгарувчининг маълум бир аниқ қиймати мос келса, у ҳолда комплекс ўзгарувчи w ни комплекс ўзгарувчи z нинг функцияси дейилади ва $w=f(z)$ кўринишда ёзилади.

Мисол. $w=z^2$ функция берилган бўлсин.

$$w=u+iv,\ z=x+iy \text{ десак } u+iv=(x+iy)^2=x^2-y^2+2ixy \to$$
$$u=x^2+y^2 \text{ ва } v=2xy.$$

Бундан кўринадики, функциянинг аниқланиш соҳаси бутун комплекс текисликдан иборат.

Мисол. $w=1/z$ бўлса, $u+vi=1/(x+iy)=(x-iy)/(x^2+y^2) \to u=x/(x^2+y^2)$, $v=-y/(x^2+y^2)$

аниқланиш соҳаси $z=0$ нуқтадан бошқа текисликниг барча нуқталари.

Мисол. Агар L чизиқ текисликда

$$\begin{cases} x=R\cos t, \\ y=R\sin t, \\ 0\le t\le \pi \end{cases}$$

параметрик тенглама билан берилган бўлсин.

Бу эгри чизиқнинг $w=z^2$ акслантириш орқали тасвирини топинг.

Ечиш.

$w=z^2$;$z=x+iy=R(\cos t+i\sin t)=Re^{it}$,

$w=z^2 = R^2(\cos t+\sin t)^2=R^2(\cos 2t+i\sin 2t)=R^2e^{2it}$; $w=R^2e^{2it}$.

радиус R^2 бўлди, аргумент $0 \le t \le 2\pi$ да ўзгарди.

Фараз қилайлик f(z) функция $z_0=x_0+iy_0$ нуқта ва унинг етарли кичик атрофида аниқланган ва бир қийматли бўлсин.

Таъриф. Агар $\lim\limits_{\Delta z\to 0} u(x,y)=u_0$ ва $\lim\limits_{\Delta z\to 0} v(x,y)=v_0$

чекли лимитлар мавжуд бўлса, f(z) функциянинг z нинг z_0 га қандай интилишига боцлиқ бўлмаган $\lim\limits_{z\to я_0} f(z)=w_0=u_0+iv_0$ лимит мавжуд бўлади.

Таъриф. Агар f(z) функция $z=z_0$ нуқта ва унинг атрофида аниқланган бўлиб, $\lim\limits_{z\to я_0} f(z)=f(z_0)$ чекли лимит мавжуд бўлса, f(z) функцияни z_0 нуқтада узлуксиз дейилади.

Таъриф. Агар $\Delta z\to 0$ да $\Delta w/\Delta z$ нисбат Δz нинг қандай усулда нолга интилишига боцлик бўлмаган, аник битта лимитга эга бўлса, бу лимит f(z) функциянинг z_0 нуқтадаги ҳосиласи дейилади ва w', $f'(z_0)$, $\frac{dw}{dz}$, $\frac{df}{dz}$ кўринишларда ёзилади.

Демак таърифга кўра:

$$w'=f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x+i\Delta y}.$$

Теорема. Бирор D соҳада аниқланган ва бир қийматли $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ функцияни D соҳанинг иҳтиёрий z нуқтасида дифференциалланувчи бўлиши учун , ҳақиқий ўзгарувчили u(x,y) ва v(x,y) функцияларнинг шу z нуқтада дифференциалланувчи бўлиши ва

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\quad ;\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\qquad (1)$$

Коши-Риман шартларини бажарилишлари зарур ва кифоя.

Коши-Риман шартларидан фойдаланиб функцияларнинг ҳосилаларини ҳисоблаш формулаларини қуйидагича ёзишимиз мумкин.

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

Коши-Риман шарти қутб координаталар системасида қуйидагича бўлади.

$u=u(r,\varphi)$ ва $v=v(r,\varphi)$ десак,

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial \varphi}\quad ,\quad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

Тариф. Агар w=f(z) функция бирор z_0 нуқтада ва унинг бирор атрофида дифференциалланувчи бўлса, бу функция шу нуқтада аналатик дейилади.

Мисол.

$f(z)=z^2$;$w=f(z)=z^2 \to u+iv=z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2ixy \to$

$u=x^2-y^2$; $v=2xy$

$du/dx=dv/dy=2x$; $du/dy=-dv/dx=-2y$

Демак $f(z)=z^2$ функция аналитик экан.

Таъриф. Ҳақиқий ўзгарувчили u(x,y) функция бирор D соҳада биринчи ва иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларга эга бўлиб, шу соҳада

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\qquad (2)$$

Лаплас тенгламасини қаноатлантирса, u(x,y) функция шу D соҳада гармоник функция дейилади.

Мисол. $v(x,y)= x^4-8x^3y-6x^2y^2+8xy^3+y^4$ $f(0)=0$ бўлсин

$$\frac{\partial v}{\partial x}=4x^3-24x^2y-12xy^2+8y^3 \;;\; \frac{\partial v}{\partial y}=-8x^3-12x^2y+24xy^2+4y^3$$

$$M(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad N(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$ бўлгани учун

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y) \quad \Rightarrow \int M(x,y)dx+\varphi(y)=$$

$$=-\int(8x^3+12x^2y-24xy^2-4y^3)dx+\varphi(y)=-(2x^4+4x^3y-12x^2y^2-4xy^3)+\varphi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y) \quad \Rightarrow \quad -4x^3+24x^2y+12xy^2+\varphi'(y)=-4x^3+24x^2y+12xy^2-8y^3$$

$$\varphi'(y)=-8y^3 \Rightarrow \; d\varphi(y)=-8y^3dy \Rightarrow \; \varphi(y)=-2y^4+C$$

Демак

$$u(x,y)=-(2x^4+4x^3y-12x^2y^2-4xy^3)-2y^4+C$$

$$f(z)=u+iv=-2(x^4+2x^3y-6x^2y^2-2xy^3+y^4)+i(x^4-8x^3y-6x^2y^2+8xy^3+y^4)+C$$

$$f(0)=0 \quad \Rightarrow \quad f(x=0;y=0)=0$$

$$f(0)=0 \quad \Rightarrow \quad 0=C \quad \boxed{C=0}\,.$$

51. $f(z)=z^2+1$ функция берилган. Ушбу хусусий қийматларини топи $f(1+i), \quad f(\sqrt{3}-i), \quad f(-i)$

52. $f(z)=i\bar{z}$ функция берилган. Ушбу хусусий қийматларини топинг.

$$f(i), \quad f(-1-i), \quad f(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i).$$

Ушбу мисоллардаги функцияларнинг ҳақиқий ва мавхум қисмларини топинг.

53. $W=z^2+\bar{z}$

54. $W=\dfrac{z}{\bar{z}}$

55. $W=\dfrac{iz}{1-i}$

56. $W=\dfrac{z+\bar{z}}{z-\bar{z}}$

57. $W=e^z$

Ушбу мисоллардаги тенгсизликларни қаноатлантирувчи нуқталар тўпламини аниқланг.

58. $\operatorname{Re} z\le 0$

59. $\operatorname{Im} z>-1$

60. $-1\le \operatorname{Re} iz\le 1$

61. $\operatorname{Im}\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) > -1$

62. $|z - z_0| < R$

63. $|z| \leq \operatorname{Re} z + 1$

64. $|z - i| \geq |z + 1|$

65. $|z| < |1 + z|$

Ушбу мисоллардаги тенгламалар қандай чизиқларни ифодалашини аниқланг.

66. $|z - z_0| = 2$

67. $\operatorname{Re}\frac{1}{z} = 1$

68. $\operatorname{Im} z^2 = 2$

69. $\operatorname{Re}(z^2 - \bar{z}) = 4 - \operatorname{Re} z$

70. $\operatorname{Im}\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = 1$

71. $|z - i| - |z + 2| = 2$

72. $|z + 1| = \operatorname{Im}(zi)$

73. $z = t + \frac{i}{t}$

74. Ҳисобланг: $a)\ e^{-\frac{\pi}{3}i}, \quad b)\ e^{1-\pi i}, \quad c)\ e^{\sqrt{3}+i}, \quad d)\ e^{2-5i}$

75. $\cos(1 - i)$ нинг қийматини топинг.

76. $\sin(-2i)$ нинг қийматини топинг.

77. $W = \cos iz$ нинг ҳақиқий ва мавҳум қисмларини топинг.

78. $W = i \sin z$ нинг ҳақиқий ва мавҳум қисмларини топинг.

79. $W = e^{iz^2}$ нинг ҳақиқий ва мавҳум қисмларини топинг.

80. $W = \cos(z - \bar{z})$ нинг ҳақиқий ва мавҳум қисмларини топинг.

81. $\cos z = 1$ тенгламани ечинг.

82. $\sin(z-i)=2$ тенгламани ечинг.

83. $\sin iz=3$ тенгламани ечинг.

84. $\cos(2-2i)$нинг қийматини ҳисобланг.

85. $\sin(1+i\sqrt{3})$нинг қийматини ҳисобланг.

86. $ch\pi i$нинг қийматини ҳисобланг.

87. $sh\frac{3\pi}{2}i$нинг қийматини ҳисобланг.

88. $sh(\ell n2+\frac{\pi}{6}i)$нинг қийматини ҳисобланг.

89. $ch(\ell n4-\frac{\pi}{3}i)$нинг қийматини ҳисобланг.

Ушбу мисоллардаги комплекс аргументли функцияларнинг ҳосилаларини топинг.

90. e^{-z^2}

91. $\frac{e^{-z}}{z}$

92. $\cos 3e^{3z}$

93. $e^{\sin z}$

94. $(e^z-e^{-z})^{-2}$

95. $\frac{1}{tgz+ctgz}$

96. $w=2x^2-y+2xyi$

97. $w=xy+6y+i(x^2-y)$

98. $f(z)=(z-\bar{z})\operatorname{Re} z$

99. $f(z)=e^{\operatorname{Im} z}z$

100. Аналитик функциянинг ҳақиқий қисми $u=2xy$ ва $f(0)=0$ берилган бўлса, функциянинг ўзини топинг.

101. Аналитик функциянинг ҳақиқий қисми $u = y\cos x$ ва $f(\frac{\pi}{2}) = -i$ берилган бўлса, функциянинг мавҳум қисмини топинг.

102. Аналитик функциянинг ҳақиқий қисми $u = \frac{e^x}{y^2}$ ва $f(-i) = 1 + i$ берилган бўлса, функциянинг мавҳум қисмини топинг.

103. Аналитик функциянинг мавҳум қисми $\vartheta = \ln(x + y)$ ва $f(1+i) = i\ln 2$ берилган бўлса, функциянинг ҳақиқий қисмини топинг.

104. Аналитик функциянинг мавҳум қисми $\vartheta = 2(chx\sin y - xy)$ ва $f(0) = 0$ берилган бўлса, функциянинг ўзини топинг.

105. Аналитик функциянинг мавҳум қисми $\vartheta = -2\sin 2x\, sh2y + y$ ва $f(0) = 2$ берилган бўлса, функциянинг ўзини топинг.

3-§. Комплекс ўзгарувчили интеграллар.

Фараз қилайлик z комплекс текислигида C силлиқ (ёки бўлакли силлиқ) чизиқ берилган бўлиб, бу чизиқ устида аниқланган ва узлуксиз w=f(z) комплекс ўзгарувчили функция берилган бўлсин.
f(z) функциядан C чизик бўйича олинган интеграл

$\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy$ (1) формула билан ҳисобланади.

Агар C чизиқ тенгламаси параметрик кўринишда берилган бўлиб, x=x(t) , y=y(t) , $\alpha \le \beta \le 0$ бўлсин. C чизиқ тенгламасини комплекс кўринишда ёзсак

$$z=z(t)=x(t)+iy(t)\quad , z'=z'(t)=x'(t)+iy'(t)\quad (2)$$

буларга асосан (1) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta \{u[x(t),y(t)]+iv[x(t),y(t)]\}[x'(t)+iy'(t)]dt \quad \text{ёки}$$

$$w=f(z) \rightarrow u[x(t),y(t)]+iv[x(t),y(t)]=f[z(t)] \quad (3)$$

бўлгани учун (3) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\int_C f(z)dz=\int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt \qquad (4)$$

Мисол. C -маркази a нуқтада ва радиуси бир бўлган бирлик айлана бўлганда $\int_C (z-a)^n dz$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. $|z-a|=1$ ёки $z-a=e^{i\varphi}$ айлана тенгламалари, $dz=ie^{i\varphi}d\varphi$
агар $0\le\varphi\le2\pi$ оралицида ўзгарса, z нуқта айлана чизицини беради.

$$\int_C (z-a)^n dz=\int_0^{2\pi} (e^{i\varphi})^n ie^{i\varphi}d\varphi=i\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\varphi}d\varphi=i\int_0^{2\pi} [\cos(n+1)\varphi+i\sin(n+1)\varphi]d\varphi$$

Агар $n \neq -1$, $n= 0, 1, \pm 2, \ldots$ бўлса,

$$\int_0^{2\pi} \cos(n+1)\varphi d\varphi=\frac{1}{n+1}\sin(n+1)\varphi\Big|_0^{2\pi} =0$$

$\int_0^{2\pi} \sin(n+1)\varphi d\varphi=-1/(n+1)\cdot\cos(n+1)\varphi\Big|_0^{2\pi} =0$, бўлгани учун

$\int_C (z-a)^n dz=0$ энди $n=-1$ бўлганда:

$$\int_C (1/(z-a))dz = |\ z-a=e^{i\varphi}, dz=ie^{i\varphi}d\varphi,\ 0\leq\varphi\leq 2\pi\ |=\int_0^{2\pi} ie^{i\varphi}d\varphi/e^{i\varphi}=i\int_0^{2\pi} d\varphi=2\pi i$$

ҳусусий ҳолда a=0 бўлса, ҳам $\int_C dz/z =2\pi i$.

Шундай килиб:

$$\int_C (z-a)^n dz =0 \text{ агар } n \neq -1, \qquad \int_C (z-a)^n dz =2\pi i \text{ агар } n=-1.$$

Интегралнинг хоссалари.

1.Ўзгармас кўпайтувчини инеграл белгисидан ташқарига чиқариш мумкин:

$\int_C kf(z)dz=k\cdot\int_C f(z)dz.$

2.Интеграллаш йўналиши ўзгартирилса, интеграл қиймати ўз ишорасини ўзгартиради.

3. $\int_C [f_1(z)+f_2(z)+...+f_n(z)]dz=\int_C f_1(z)dz+\int_C f_2(z)dz+...+\int_C f_n(z)dz.$

4. $|\int_C f(z)dz|\leq\int_C |f(z)|dz$

Ушбу мисоллардаги интегралларни ҳисобланг (106-113).

106. $I=\int\limits_{\Gamma}(z-\bar{z})\operatorname{Re} z\,dz$, бу ерда Г чизиқ $z_0=0$ ва $z=1-i$ нуқталарни туташтирувчи $y=-x$ тўцри чизиқ кесмасидан иборат.

107. $I=\int\limits_{\Gamma}|z|\,\bar{z}\,dz$, бу ерда Г чизиқ $z_0=0$ ва $z=1+i$ нуқталарни туташтирувчи тўцри чизиқ кесмасидан иборат.

108. $I=\int\limits_{\Gamma}e^{\operatorname{Im} z^2}z\,dz$, бу ерда Г чизиқ $z_0=1-i$ ва $z=0$ нуқталарни туташтирувчи тўцри чизиқ кесмасидан иборат.

109. $I=\int\limits_{\Gamma}z(\bar{z}+1)dz$, бу ерда Г чизиқ $|z|=1$ айлананинг юқори ярмидан иборат.

110. $I=\oint\limits_{\Gamma}(z\cdot\bar{z})dz$, бу ерда Г чизиқ $|z|=1$ айланадан иборат.

111. $I=\oint\limits_{\Gamma}\frac{dz}{z}$, бу ерда Г чизиқ $x=\cos t,\quad y=\sin t$ айланадан иборат.

112. $I=\int\limits_{1+t}^{-1-t}(2z+1)dz$ 113. $I=\int\limits_{-i}^{i}ze^{z^2}dz$

IV- боб. Операцион хисоб.

1-§. Лаплас тасвири ва унинг баъзи хоссалари.

Фараз қилайлик ҳақиқий ўзгарувчили f (t) функцияга чизиқли интеграл алмаштириш воситасида бирор комплекс ўзгарувчили функция F(p) мос келтирилган бўлсин. Бу холда f (t) функцияни F(p) функциянинг оригинали ёки асл образи дейилади. F(p) функцияни эса f (t) нинг тасвири ёки образи ёки копияси дейилади.

Таъриф: Оригинал деб қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи ҳақиқий ўзгарувчили t нинг f (t) комплекс функцияга айтилади.

1. Ҳақиқий ўзгарувчили t нинг (t>0) функцияси бўлган f (t) узлуксиз ва исталган тартибли узлуксиз ҳосилаларга эга ёки узилишга эга бўлса, узилиш нуқталари чекли ёки узилиш нуқталари бўлган оралиқлари ҳам чекли бўлиши керак.
2. t<0 бўлса, f(t)≡0 бўлади.
3. f (t) функциянинг ўсиши, кўрсаткичли функциянинг ўсишидан тез бўлмайди, чунки t га боцлиқ бўлмаган шундай мусбат M >0, S_o >0 сонлар мавжудки, ∀ катта t учун

$|f(t)| < Me^{S_o t}$ бўлади.

Бу ерда S_o оригиналнинг ўсиши тартибини кўрсатувчи сон. Агар S_o =0 бўлса, оригинал ўзгармас бўлади.

Оригинал f(t) функция юқоридаги 3 та шартни қаноатлантирганда, комплекс ўзгарувчи p=s+iσ нинг функцияси бўлган $\int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}$ dt итегралга оригинал f(t) функциянинг тасвири ёки Лаплас алмаштириши ёки Лаплас функцияси дейилади ва F(p) билан белгиланади

$$F(p)=\int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt \qquad (1)$$

Оригинал тасвир кўпинча қуйидагича белгиланади

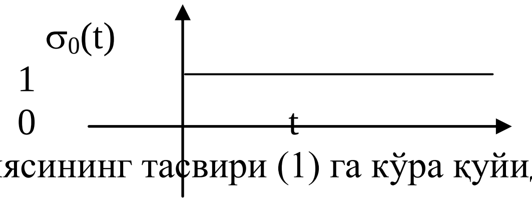
$$F(p) \longrightarrow\!\!\!\!\!\div\; f(t) \text{ ёки } f(t) \longleftarrow\!\!\!\!\!\div\; F(p).$$

Баъзи содда функцияларнинг тасвирлари.

1. Қуйидагича аниқланган $\sigma_0(t)$

$$\sigma_0(t) = \begin{cases} 1, \text{ агар } t \ge 0 \text{ булса}, \\ 0, \text{ агар } t < 0 \text{ булса} \end{cases}$$

функцияга бирлик функция ёки Хевисайда функцияси дейилади.
Бу функциянинг графиги қуйидагича



Хевисайда функциясининг тасвири (1) га кўра қуйидагича аниқланади:

$$F(p)=\int\limits_0^\infty e^{-pt}f(t)dt=\int\limits_0^\infty e^{-pt}\sigma_0(t)dt=\int\limits_0^\infty e^{-pt}\cdot 1\cdot dt=-e^{-pt}\frac{1}{p}\Big|_0^\infty=-0+\frac{1}{p}=\frac{1}{p}.$$

Шундай қилиб

$$\sigma_0(t) \longleftarrow\!\!\!\!\!\div\; 1/p \quad \text{ёки} \quad 1 \longleftarrow\!\!\!\!\!\div\; 1/p \qquad (2)$$

2. f(t)=sint функция тасвири ҳам (1) га кўра аниқланади:

$$F(p)=\int\limits_0^\infty e^{-pt}\cdot f(t)dt=\int\limits_0^\infty \sin t\cdot e^{-pt}dt=\left| e^{-pt}=u;\ \sin tdt=dv;\ du=-pe^{-pt}dt;\ v=-\cos t\right|=$$

$$=-e^{-pt}\cdot\cos t\Big|_0^\infty-p\int\limits_0^\infty e^{-pt}\cdot\cos tdt=\left| e^{-pt}=u;\ \cos tdt=dv;\ du=-pe^{-pt}dt;\ v=\sin t\right|=$$

$$=1-p\Big[e^{-pt}\cdot\sin t\Big|_0^\infty+p\int\limits_0^\infty e^{-pt}\cdot\sin tdt\Big]=1-p^2\int\limits_0^\infty e^{-pt}\cdot\sin tdt$$

$$\int\limits_0^\infty e^{-pt}\cdot\sin tdt=1-p^2\int\limits_0^\infty e^{-pt}\cdot\sin tdt \Rightarrow (1+p^2)\int\limits_0^\infty e^{-pt}\cdot\sin tdt=1 \Rightarrow \int\limits_0^\infty e^{-pt}\cdot\sin tdt=\frac{1}{1+p^2}$$

Шундай қилиб

$$\sin t \leftarrow\div- \frac{1}{1+p^2} \quad (3)$$

3. f(t)=cost функция тасвирини топамиз:

$$F(p)=\int_0^{\infty} \cos t\cdot e^{-pt}dt = |\ e^{-pt}=u;\ \cos t dt=dv;\ du=-pe^{-pt}dt;\ v=\sin t\ |=$$

$$=e^{-pt}\sin t\Big|_0^{\infty} + p\int_0^{\infty} \sin t\cdot e^{-pt}dt=\frac{p}{1+p^2}$$

Демак cost функцияни тасвири

$$\frac{p}{1+p^2} \quad \text{ёки} \quad \cos t \leftarrow\div- \frac{p}{1+p^2} \quad (4)$$

Лаплас тасвирининг баъзи хоссалари.

1. Чизиқлилик хоссаси. Агар $F_k(p) -\div\rightarrow f_k(p)$ $(k=1,2,3,...,n)$ бўлиб, c_k лар ўзгармаслар бўлса , у ҳолда

$\sum_{k=1}^{n} c_kF_k(p) -\div\rightarrow \sum_{k=1}^{n} c_kf_k(t)$ муносабат ўринли бўлади.

2. Ўхшашлик теоремаси. Агар a>0 ва $F(p) -\div\rightarrow f(t)$ бўлса , у ҳолда $\frac{1}{a}F(\frac{p}{a})$ $-\div\rightarrow f(at)$ бўлади.

3. Оригиналнинг кечикиш теоремаси. Агар $\lambda>0$ бўлса, у ҳолда $F(p) -\div\rightarrow f(t)$ дан $f(t-\lambda) -\div\rightarrow e^{-\lambda p}F(p)$ келиб чиқади.

4. Тасвирнинг силиш теоремаси. Агар $F(p) -\div\rightarrow f(t)$ бўлса, у ҳолда исталган λ учун $e^{-\lambda t}f(t) -\div\rightarrow F(p+\lambda)$ келиб чиқа.

5. Оригинални дифференциаллаш. Агар f(t) функция $[0,\infty]$ да узлуксиз, дифференциалланувчи ва $f'(t)$ ҳосила тасвир мавжудлигининг 1,2,3 шартларини қаноатлантириб, $F(p) -\div\rightarrow f(t)$ бўлса, қуйидагилар ўринли бўлади.

a) $pF(p)-f(0) -\div\rightarrow f'(t)$

Хусусий ҳолда $f(0)=0$ бўлса $pF(p) -\div\rightarrow f'(t)$ бўлади.

b) Агар $f^n(t)$ мавжуд бўлса ва тасвир мавжудлигининг шартларини қаноатлантирса

$f^{(n)}(t) -\div\rightarrow p^nF(p)-[\ p^{n-1}f(0)+ p^{n-2}f'(0)+ p^{n-3}f''(0) +...+ pf^{(n-2)}(0)+f^{(n-1)}(0)\ ]$,

агар $f(0)=f'(0)=...=f^{(n-1)}(0)=0$ бўлса, $f^{(n)}(t) -\div\rightarrow p^nF(p)$ бўлади.

6. Оригинални интеграллаш. Агар $F(p) -\div\rightarrow f(t)$ бўлса,

$\int_0^t f(t)dt$ нинг тасвири $\int_0^t f(t)dt -\div\rightarrow \frac{F(p)}{p}$ бўлади.

7. Тасвирни интеграллаш.

Агар $F(p) \xrightarrow{\div} f(t)$ бўлса, $\int_0^\infty F(p)dp \xrightarrow{\div} \frac{f(t)}{t}$ бўлади.

8. Тасвирни дифференциаллаш. Агар $F(p) \xrightarrow{\div} f(t)$ бўлса , у ҳолда

а) $F'(p) \xrightarrow{\div} -tf(t)$; б) $F^{(n)}(p) \xrightarrow{\div} (-1)^n t^n f(t)$ бўлади.

Мисол. $f(t)=\sin at$ функция тасвирини топамиз:

$$F(p)=\int_0^\infty \sin at\cdot e^{-pt}dt=1/a\cdot 1/[(p/a)^2+1] =a/(p^2+a^2)$$

Демак $\sin at \xleftarrow{\div} a/(p^2+a^2)$ (5)

Шунга ўхшаш $f(t)=\cos at$ функцияни тасвири куйидагича бўлади:

$$\cos at \xleftarrow{\div} p/(p^2+a^2) \qquad (6)$$

Мисол. $f(t)=3\sin 4t-2\cos 5t$ функция тасвири топилсин.

Ечиш: (5) ва (6) дан

$$L\{f(t)\}=3\cdot 4/(p^2+16)-2\cdot p/(p^2+25)=12/(p^2+16)-2p/(p^2+25).$$

Мисол. $F(p)=5/(p^2+4)+20p/(p^2+9)$ тасвир функция берилганда бошлангич функцияни топинг.

Ечиш: $F(p)=5/2\cdot 2/(p^2+4)+20\cdot p/(p^2+9) \xrightarrow{\div} 5/2\cdot\sin 2t+20\cos 3t=f(t)$

Демак $f(t)=5/2\cdot\sin 2t+20\cdot\cos 3t$.

Мисол. $f(t)=e^{-at}$ функцияни тасвири топилсин.

$$F(p) =\int_0^\infty e^{-pt}e^{-at}dt ==\int_0^\infty e^{-(p+a)t}dt=1/(p+a) \qquad (7)$$

Мисол. $f(t)=e^{at}$ функцияни тасвири топилсин.

$$F(p) =\int_0^\infty e^{-pt}e^{at}dt ==\int_0^\infty e^{-(p-a)t}dt=1/(p-a) \qquad (8)$$

Мисол. $f(t)=\operatorname{sh} at=1/2\cdot(e^{at}-e^{-at})$ функцияни тасвири топилсин.

(7) ва (8) дан $1/2\cdot(e^{at}-e^{-at}) \xleftarrow{\div} 1/2\cdot[1/(1-p)-1/(p+a)]=a/(p^2-a^2)$

Демак $F(p)=a/(p^2-a^2)$ ёки $F(p) \xrightarrow{\div} f(t)$ яъни

$$\operatorname{sh} at \xleftarrow{\div} a/(p^2-a^2) \qquad (9)$$

Шунга ўхшаш $\operatorname{ch} at=(e^{at}+e^{-at})/2$ функция тасвири

$$\operatorname{ch} at \xleftarrow{\div} p/(p^2-a^2) \qquad (10)$$

Мисол. $F(p)= 7/(p^2+10p+41)$ тасвир функциядан бошлангич функция топилсин.

Ечиш: $F(p)= 7/(p^2+10p+41)= 7\cdot 4/[4\cdot((p+5)^2+4^2)]$ Демак

$$7\cdot 4/[4\cdot((p+5)^2+4^2) \xrightarrow{\div} 7/4\cdot e^{-5t}\sin 4t. \quad \text{ёки}$$

$$F(p) \xrightarrow{\div} 7/4\cdot e^{-5t}\sin 4t=f(t)$$

Мисол. $F(p)=(p+3)/(p^2+2p+10)$ тасвир функциядан бошлангич функция топилсин.

$$F(p)=(p+3)/(p^2+2p+10)=[(p+1)+2]/[(p+1)^2+9]=$$

$$=(p+1)/[(p+1)^2+3^2]+2/[(p+1)^2+3^2]=$$

$$=(p+1)/[(p+1)^2+3^2]+2/3\cdot 3/[(p+1)^2+3^2] \quad \text{Демак}$$

$$F(p) \xrightarrow{\div} e^{-t}\cos 3t+2/3\cdot e^{-t}\sin 3t$$

$$f(t)= e^{-t}\cos 3t+2/3\cdot e^{-t}\sin 3t.$$

Мисол. Ушбу $a/(p^2+a^2)=\int_0^\infty e^{-pt}\sin at\,dt$ формуладан фойдаланиб

$\int_0^\infty e^{-pt}t\sin at\,dt$ хосмас интегални ҳисобланг.

Ечиш: $a/(p^2+a^2)=\int_0^\infty e^{-pt}\sin at\,dt$

берилган бу хосмас интегрални p бўйича дифференциаллаймиз:

$a/(p^2+a^2)^2=\int_0^\infty e^{-pt}t\sin at\,dt$. Демак $a/(p^2+a^2) \xrightarrow{\div} t\sin at$.

ОРИГИНАЛ - ТАСВИР ЖАДВАЛИ.

f(t)	$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt$

1. 1	1. $1/p$
2. sinat	2. $a/(p^2+a^2)$
3. cosat	3. $p/(p^2+a^2)$
4. $\cos a(t-t_0)$	4. $pe^{-pto}/(p^2+a^2)$
5. e^{-at}	5. $1/p+a$
6. shat	6. $a/(p^2-a^2)$
7. chat	7. $p/(p^2-a^2)$
8. $e^{-\lambda t}\sin at$	8. $a/[(p+\lambda)^2+a^2]$
9. $e^{-\lambda t}\cos at$	9. $(p+\lambda)/[(p+\lambda)^2+a^2]$
10. t^n	10. $n!/p^{n+1}$
11. tsinat	11. $2pa/(p^2+a^2)^2$
12. tcosat	12. $-(a^2-p^2)/(p^2+a^2)^2$
13. $te^{-\lambda t}$	13. $1/(p+\lambda)^2$
14. (sinat-atcosat)/$2a^3$	14. $1/(p^2+a^2)^2$
15. $t^n f(t)$	15. $(-1)^n d^n F(p)/dp^n$
16. $\int_0^t f(t)dt$	16. $F(p)/p$
17. $\frac{f(t)}{t}$	17. $\int_0^\infty F(p)dp$
18. $f(t-t_0)$	18. $e^{-pto}F(p)$
19. $f'(t)$	19. $pF(p)-f(0)$
20. $f''(t)$	20. $p^2F(p)-[pf(0)+f'(0)]$
21. $f'''(t)$	21. $p^3F(p)-[p^2f(0)+pf'(0)+f''(0)]$
22. $f^{(n)}(t)$	22. $p^nF(p)-[p^{n-1}f(0)+p^{n-2}f'(0)+...+$ $+p\,f^{(n-2)}(0)+f^{(n-1)}(0)]$

Қуйидаги функцияларнинг F(p) тасвирни топинг.

1. $f(t)=2+\sin 3t$ 2. $f(t)=\mathrm{Sin}t\cdot\cos t$

3. $f(t)=3e^{2t}$ 4. $f(t)=te^{3t}$

5. $f(t)=\mathrm{ch}4t-\mathrm{sh}t$ 6. $f(t)=2t\cos 3t$

7. $f(t)=\sin^2 4t$ 8. $f(t)=\cos^2 2t$

9. $f(t)=2t^5+3$ 10. $f(t)=4t-\cos 2t$

Қуйидаги F(p) тасвир функциялардан f(t) оригинал функцияларни топинг.

11. $F(p)=\frac{1}{2p+3}$ 12. $F(p)=\frac{2}{(p+3)(p+4)}$

13. $F(p)=\frac{1}{p^2+5p+6}$ 14. $F(p)=\frac{1}{p^2+2p+10}$

15. $F(p)=\frac{p}{(p^2+1)(p+2)}$ 16. $F(p)=\frac{p}{(p^2+5)^2}$

17. $F(p)=\dfrac{3p}{p^4+4p^2+4}$ 18. $F(p)=\dfrac{1}{(p+2)^2+16}$

19. $F(p)=\dfrac{1}{(p+2)^2-16}$ 20. $F(p)=\dfrac{2}{(p^2+4)p}$

2- §. Операцион хисобнинг дифференциал тенгламаларни ечишга тадбики.

Ўзгармас коэффициентли чизиқли дифференциал тенглама берилган бўлсин:

$$x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+...+a_{n-1}x'(t)+a_nx(t)=f(t) \quad (1)$$

бу тенгламанинг $x(0)=x_0,\ x'(0)=x_0',\ ...,\ x^{(n-1)}(0)=x_0^{(n-1)}$ (2)

бошланцич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимни топиш талаб қилинсин. (1) нинг ҳар иккала томонидаги ифодалардан тасвирларга ўтсак,натижада

$$\varphi(p)X(p)-\psi(p)=F(p) \quad (3) \quad \text{ёки}$$

$$\mathbf{x(p)\cdot[\,a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}+...+a_1p+a_0]=}$$

$$\mathbf{=a_n[p^{n-1}x_0+p^{n-2}x_0'+...+x_0^{(n-1)}]+a_{n-1}[p^{n-2}x_0+p^{n-3}x_0'+...+x_0^{(n-2)}]+...}$$

$$\mathbf{...+a_2[px_0+x_0']+a_1x_0+F(p)} \quad \mathbf{(3^*)}$$

тенглама ҳосил бўлади. (3) ва (3*) ларга ёрдамчи ёки тасвирловчи ёки оператор тенглама дейилади.

(3)ни X(p) тасвирга нисбатан ечиб сўнгра оригиналга ўтсак (1) тенгламанинг (2) шартларни қаноатлантирувчи ечими келиб чиқади.

Мисоллар ечганда қўйидаги формулалардан фойдаланамиз.

$$(*)\quad \left\{\begin{array}{l} x'(t) \leftarrow\div\ pF(p)-x(0)\ ; \\ x''(t) \leftarrow\div\ p^2F(p)-[px(0)+x'(0)] \\ x'''(t) \leftarrow\div\ p^3F(p)-[p^2x(0)+px'(0)+x''(0)] \\ x^{1V}(t) \leftarrow\div\ p^4F(p)-[p^3x(0)+p^2x'(0)+px''(0)+x'''(0)] \end{array}\right.$$

Мисол. $x(0)=0$ бошлангич шартни каноатлантирувчи
$dx/dt+x=1$ дифференциал тенгламани ечими топилсин.
Ечиш: $x'(t)+x(t)=1$
тенгламани икки томонини e^{-pt} га кўпайтириб, $[0;\infty)$ ораликда t бўйича интеграллаб. Лаплас интегралига олиб келамиз ва тасвир функция F(p) ни топамиз:

$$\int_0^\infty e^{-pt}[x'(t)+x(t)]dt=\int_0^\infty e^{-pt}dt\ ,$$

$$\int_0^\infty e^{-pt}x'(t)dt+\int_0^\infty e^{-pt}x(t)dt=1/p$$

$$pF(p)-x(0)+F(p)=1/p \quad \text{бу ерда } x(0)=0.$$

$$F(p)(p+1)=1/p \quad ; \quad F(p)=1/[p(p+1)]=1/p-1/(p+1)$$

Тасвир жадвалидан $F(p) \doteq 1-e^{-t}$ ёки

$$x(t)=1-e^{-t}.$$

Мисол. $y(0)=y'(0)=0$ бошлангич шартни қаноатлантирувчи

$$y''+9y=1 \qquad (y=f(t))$$

дифференциал тенгламани ечинг.

Ечиш: $y''+9y=1$ тенгламани икки томонини e^{-pt} га кўпайтириб, $[0;\infty)$ ораликда t бўйича интеграллаб Лаплас интегралига олиб келамиз ва тасвир функция $F(p)$ ни топамиз:

$$\int_0^\infty e^{-px}y''dx+9\int_0^\infty e^{-px}ydx=\int_0^\infty e^{-px}dx$$

$$p^2F(p)+py(0)-y'(0)+9F(p)=1/p \quad \text{бу ерда } y(0)=0,\ y'(0)=0.$$

$$p^2F(p)+9F(p)=1/p \quad ; \quad F(p)=1/p(p^2+9)=1/9p-p/9(p^2+3^2)$$

Тасвир жадвалидан

$$1/p \doteq 1 \quad , \qquad p/(p^2+3^2) \doteq \cos 3t$$

Демак

$$F(p)=1/9\cdot 1/p-1/9\cdot p/(p^2+3^2) \doteq 1/9-1/9\cdot\cos 3t$$

ёки

$$y=1/9-1/9\cdot\cos 3t.$$

Бу берилган дифференциал тенгламани ечими.

Мисол. $x'''(t)-x'(t)=0$ (4) тенгламанинг

$$x(0)=3\ ;\ x'(0)=2\ ;\ x''(0)=1 \qquad (5)$$

бошланцич шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

Аввал оператор тенгламасини тузамиз. Бунинг учун (4) нинг чап томонидан (*) га кўра тасвирга ўтамиз:

$$[p^3F(p)-(3p^2+2p+1)]-[pF(p)-3]=0 \Rightarrow (p^3-p)F(p)=3p^2+2p+1-3$$

$$(p^3-p)F(p)=3p^2+2p-2 \Rightarrow F(p)=\frac{3p^2+2p-2}{p^3-p} \Rightarrow \frac{3p^2+2p-2}{p^3-p}$$

ни энг содда касрларга ажратайлик :

$$\frac{3p^2+2p-2}{p^3-p}=\frac{3p^2+2p-2}{p(p-1)(p+1)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-1}+\frac{C}{p+1} \Rightarrow$$

$$3p^2+2p-2=A(p^2-1)+Bp(p+1)+Cp(p-1)$$

$$3p^2+2p-2=Ap^2-A+Bp^2+Bp+Cp^2-Cp.$$

p^2 : $A+B+C=3$

p : $B-C=2$ $\Rightarrow$ $A=2$; $B=3/2$; $C=-1/2$

p^0 : $-A=-2$

Шундай қилиб $F(p)= 2/p+3/2 \cdot 1/(p-1) - 1/2 \cdot 1/(p+1)$

Энди жадвалга кура оригиналларга ўтсак, дифференциал тенгламанинг жавоби келиб чиқади:

$$x(t)=2\cdot 1+3/2\cdot e^{t}-1/2\cdot e^{-t}=2+3/2\cdot e^{t}-1/2\cdot e^{-t} .$$

Мисол. $y''(t)-2y'(t)-3y(t)=e^{3t}$ яъни $y''-2y'-3y=e^{3t}$ дифференциал тенгламанинг $y(0)=0$; $y'(0)=0$ бошланцич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топинг.

Ечиш. Оригинал-тасвир жадвалига кўра

$$p^2F(p)-[py(0)+y'(0)]-2[pF(p)-y(0)]-3F(p)=\frac{1}{p-3}$$

$$p^2F(p)- 2pF(p) -3F(p)=\frac{1}{p-3} \qquad F(p)(p^2-2p-3)=\frac{1}{p-3} \Rightarrow \qquad F(p)=$$

$$\frac{1}{(p^2-2p-3)(p-3)}=\frac{1}{(p+1)(p-3)(p-3)}=\frac{1}{(p+1)(p-3)^2}$$

$$\frac{1}{(p+1)(p-3)^2}=\frac{A}{(p-3)^2}+\frac{B}{p-3}+\frac{C}{p+1}$$

$$1=A(p+1)+B(p+1)(p-3)+C(p-3)^2$$

$$1=Ap+A+Bp^2-2pB-3B+Cp^2-6Cp+9C$$

$$\begin{cases} B+C=0 \\ A-2B-6C=0 \\ A-3B+9C=1 \end{cases} \quad \begin{cases} C=-B \\ A-2B+6B=0 \\ A-3B-9B=1 \end{cases} \quad \begin{cases} C=-B \\ A+4B=0 \\ A-12B=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 16B=-1 ;\ B=-1/16 ;\ C=1/16 , \quad A=-4B \Rightarrow A=1/4$$

$$F(p)=\frac{1}{4(p-3)^2}-\frac{1}{16(p-3)}+\frac{1}{16(p+1)} \Rightarrow \text{ оригиналга ўтсак}$$

$$y(t)=\frac{1}{4}te^{3t}-\frac{1}{16}te^{3t}+\frac{1}{16}te^{-t}$$

Операцион хисоб ёрдамида дифференциал тенгламаларни ечинг.

21. $y'+y=2$, $y(0)=4$.

22. $y''+3y'+2y=0$, $y(0)=1$, $y(0)=2$

23. $y''-9y'=2\cos 4t$, $y(0)=1, y'(0)=2$

24. $y''-3y'+2y=e^{5t}$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$

25. $y''-y'=t^2$, $y(0)=y'(0)=0$.

26. $y'''-y''=0$, $y(0)=2$; $y'(0)=0$; $y''(0)=0$.

27. $y'''+y=1$, $y(0)=y'(0)=y''(0)=0$.

28. $\left.\begin{matrix} x'+y=1 \\ y''+x=0 \end{matrix}\right\}$ $x(0)=y(0)=x'(0)=y'(0)=0$

бошлангич шартни қаноатлантирувчи системанинг хусусий ечимини топинг.

29. $\left.\begin{matrix} 3x'+2x+y'=1 \\ x'+4y'+3y=0 \end{matrix}\right\}$ системани ушбу $x(0)=y(0)=0$ бошлангич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топинг.

30. Ҳисобланг $\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt$

V- боб. Чизиқли дастурлаш.

1- §. Чизиқли дастурлаш масалаларининг математик моделлари ва уларни ечиш усуллари.

Баъзи чизиқли дастурлаш масалаларининг математик моделлари.

1-мисол. Ёқилци масаласи. Икки нав, яъни икки хил ёқилцидан иккита А ва В аралашма тайёрлаш керак. А аралашманинг 60 (фоизи) 1- нав ёқилцидан, 40 фоиз 2- нав ёқилцидан иборат бўлсин. А аралашманинг 1 кг 100 сўм, В аралашманинг 1 кг 120 сўм бўлиб, 1- нав ёқилцидан 50 тонна, 2- нав ёқилцидан 30 тонна бўлса, энг кўп фойда келтирадиган аралашманинг режасини, яъни математик моделини тузинг.

Ечиш. Қулайлик учун берилган нарсаларни қуйидаги жадвалга киритайлик:

Хом ашё турлари	Хом ашё захираси	А нинг 1 тоннаси учун	В нинг 1 тоннаси учун
1- нав	50 т	60%=0,6	80%=0,8
2-нав	30 т	40%=0,4	20%=0,2
1 тонна аралашманинг нархи		100000	120000

А аралашмадан x_1 тонна, В аралашмадан x_2 тонна тайёрлансин. А аралашманинг 1 тоннаси 100000 сўм бўлса, x_1 тоннаси $100000x_1$ сўм бўлади.

В аралашманинг 1 тоннаси 120000 сўм бўлса, x_2 тоннаси 120000 x_2 сўм бўлади.
Демак, бу ҳолда мақсад функция $f=100000x_1+120000x_2$ кўринишида бўлиб шу функциянинг энг катта (максимум) қийматини топиш керак. Ҳисоблашларни соддалаштириш мақсадида қулайлик учун мақсад функцияни 1000 га бўлсак,
ва F деб белгиласак, $F = \frac{f}{1000}$ бўлиб, мақсад функция қуйидагича бўлади:

$F=100x_1+120x_2$

Агар А аралашманинг ҳар бир тоннасига 0,6 (60%) тонна 1- нав ёқилци кетса, x_1 тоннасига 0,6 x_1 тонна 1- нав ёқилци кетади. Худди шунингдек В аралашманинг x_2 тоннасига 0,8 x_2 тонна 1- нав ёқилци кетади. Маълумки буларнинг йиғиндиси 50 тоннадан ошиб кетиши керак эмас:

$$0{,}6x_1+0{,}8x_2 \le 50$$

Худди шунингдек, 2- нав ёқилци учун мулоҳаза қилсак,

$$0{,}4x_1+0{,}2x_2 \le 30$$

келиб чиқади. Шундай қилиб,

$$F=100x_1+120x_2 \qquad (1)$$

мақсад функциянинг x_1, x_2 лар қуйидаги

$$\left.\begin{aligned} &0{,}6x_1+0{,}8x_2 \le 50\\ &0{,}4x_1+0{,}2x_2 \le 30\\ &x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(2)}$$

чекланиш тенгсизликлар системасини қаноатлантирадиган қийматларида энг катта қийматини топиш керак.
2- мисол. ***Дастгохларни юклаш масаласи***. Завод буюртма бўйича B_1 маҳсулотдан 5000 дона, B_2 маҳсулотдан 3500 дона ишлаб чиқариш керак. Бу буюртмаларни бажариш учун учта A_1, A_2, A_3 дастгоҳлардан фойдаланиш мумкин. Бу дастгоҳларнинг ҳар биридан икки хил маҳсулот тайёрлашда фойдаланиш мумкин. Бу дастгоҳларнинг биринчи 90 соат, иккинчи 70 соат, учинчиси 80 соат ишлаши мумкин. Ҳар бир дастгоҳнинг ишлаш соатлари ва ҳар бир ишлаб чиқарилган маҳсулотнинг таннархи қуйидаги жадвалда келтирилган.

Махсу-лотлар	Махсулот сони	Дастгоҳлар		
		A_1	A_2	A_3
B_1	5000	4 15	6 25	10 20

B_2	3500	8 10	5 8	7 30
ишлаб чиқариш соати		90	70	80

Бу ерда 15, 25, 20, 10, 8, 30 лар дастгоҳларнинг бир соат ишлаб чиқарадиган маҳсулотлар сони. 4, 6, 10, 8, 5, 7 лар ҳар бир маҳсулотнинг таннархи.

Биздан сўраладики, шу учта дастгоҳлардан шундай фойдаланиш режасини тузингки, натижада тайёрланадиган B_1, B_2 маҳсулотларнинг таннархи энг кичик бўлсин. Агар A_1, A_2, A_3 дастгоҳларнинг B_1 маҳсулотни тайёрлаш соатларини мос равишда x_1, x_2, x_3 десак, B_2 маҳсулот учун эса x_4, x_5, x_6 десак, қўйилган масаланинг математик модели қуйидагича бўлади:

$$\begin{cases} 15x_1 + 25x_2 + 20x_3 = 5000 \\ 10x_1 + 8x_2 + 30x_3 = 3500 \\ x_1 + x_4 \le 90 \\ x_2 + x_5 \le 70 \\ x_3 + x_6 \le 80 \\ x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,6} \end{cases}$$

тенгламалар ва тенгсизликлар системасининг шундай манфий бўлмаган ечимини топиш керакки, натижада

$$f = 60x_1 + 150x_2 + 200x_3 + 80x_4 + 40x_5 + 210x_6$$

мақсад функция энг кичик қийматга эришсин.

Қуйидаги масалаларнинг математик моделини тузинг.

1. Учта газета чиқарувчи А,Б ва В нашриётлар мавжуд бўлиб, улар 7 та минтақани газета билан таминлайди. А, Б ва В нашриётларда мос равишда 230, 160 ва 190 мингтадан нусхада газета чиқарилади. Минтақаларнинг газетага бўлган эҳтиёжлари мос равишда 70, 80, 90, 80, 90, 75 ва 95 мингтаданни ташкил қилади. Бир минг нусхадаги газетани нашриётлардан минтақаларга етказиб бериш учун қилинган транспорт харажати қуйидаги жадвалда келтирилган:

	4	5	6	7
А	1,1	1,2	1,3	3,1
Б	0,9	3,1	1,4	1,1
В	3,8	2,3	1,6	1,4

Умумий транспорт ҳаражати энг кам бўладиган режанинг математик моделини тузинг.

2. Завод истемолчига биринчи ойда 140 та, иккинчи ойда 240 та двигател етказиб бериш шартномасини тузди. 8 соатлик иш кунида завод бир ойда 160 та двигател ишлаб чиқара олади. Нормадан ташқари кунлик қўшимча иш соатларида бир ойда яна 40 та двигател ишлаб чиқарилиши мумкин, лекин ҳар бир қўшимча иш соатларида ишлаб чиқарилган двигател учун 30 сўмдан тўланади. Бир двигателни бир ой сақлаш 4 сўмга тушади. Келтирилган шартларни ҳисобга олган ҳолда кўшимча иш соатларига ва двигателларни сақлашга кетадиган харажатлар энг кам бўладиган двигател ишлаб чиқариш режасининг математик моделини тузинг.
3. Омбор ҳар бир фаслда маҳсулотларнинг нархи ўзгаришидан фойда олади. Омбор 1000 бирликдаги маҳсулотни сицдира олади ва ҳар бир бирлик маҳсулотни бир фасл сақлаш 2 сўмга тушади. Бир бирлик маҳсулотнинг нархи 1-чи фаслда 22, 2-чи фаслда 24, 3-чи фаслда 18, 4-чи фаслда 20 сўм бўлиб, омбордаги дастлабки маҳсулот миқдори эса 500 бирлик бўлса, фасллар бўйича бир йилда сотиш, сақлаш ва сотиб олишларни ҳисобга олган ҳолда энг кўп фойда олиш режасининг математик моделини тузинг.
4. 30% қўрцошин, 30% цинк ва 40% мисдан иборат қуйма тайёрлаш керак. Бунда 9 хил комбинациядан фойдаланилади. Бу комбинацияларнинг миқдори ва нархлари жадвалда келтирилган.

қуйма, %	А	В	О	Д	Е	Г	М	Н	К	Талаб қилинган аралашма
қўрцошин цинк мис	18 46 36	9 38 53	32 32 36	54 28 28	27 37 36	27 41 32	35 41 24	16 50 34	19 48 33	25 36 39
нархи (1 кг)	6	15	13	11	10	8	14	16	12	

1 кг энг арзон аралаш қуймани олиш учун ҳар қайси хиллик элементдан қанча миқдорда олиниши кераклиги аниқлансин.
5. Қурилиш бошқармаси 3 та кўринишдаги (I, II, III) 25 минг $м^3$. тенг бир хил ҳажимдали ишларни бажариши керак. Қурилиш бошқармасида А, В, С учта экскаваторлар мавжуд бўлиб, уларнинг иш нормаларини бажаришлари жадвалда келтирилган ($м^3$/ч):

иш турлари	экскаваторлар		
	А	В	С
I	110	123	71
II	91	86	51
III	91	97	59

Ҳамма ишлар энг қисқа муддатда бажарилиши мумкин бўлган, экскаваторлардан фойдаланилишининг математик модели тузилсин.

Чизиқли тенгламалар системасини номаълумларни тўла йўқотиш усули билан ечиш.

Қуйидаги n та номаълумли n та чизиқли алгебраик тенгламалар системаси берилган бўлсин:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ----------------- \\ ----------------- \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad \mathbf{(1)}$$

Номаълумларни тўла йўқотиш усулининг цояси шундан иборатки, элементлари тенгламалар системасидаги номаълумлар-нинг коэффициентларидан ва озод ҳадлардан ташкил топган кенгайтирилган матрица тузилади.

$$\left(\begin{array}{c|c} a_{11}a_{12}....a_{1n} & b_1 \\ a_{21}a_{22}....a_{2n} & b_2 \\ ------- & - \\ ------- & - \\ a_{n1}a_{n2}....a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

Сўнгра элементар алмаштиришлар ёрдамида қуйидаги кўринишдаги бирлик матрицага келтирилади.

$$\left(\begin{array}{c|c} 1\ \ 00....0 & c_1 \\ 0\ \ 10....0 & c_2 \\ ------ & - \\ ------ & - \\ 0\ \ 00....1 & c_n \end{array}\right) \qquad \mathbf{(2)}$$

Бу ҳолда системанинг ягона ечими
$x_1=c_1$, $x_2=c_2$, $x_3=c_3$-..., $x_n=c_n$ кўринишда бўлади.

Эслатма:

1. Агар элементар алмаштиришлар натижасида (2) матрица бирор йўлининг барча элементлари нол бўлса, у ҳолда бу йўлни ташлаб юбориш мумкин. Бу ҳолда берилган система чексиз кўп ечимга эга бўлади.

2. Агар элементар алмаштиришлар натижасида (2) матриcанинг бирор йўл элементлари (0 0……… 0 |c) кўринишда бўлса, системанинг ечими мавжуд бўлмайди. Яъни система биргаликда бўлмаган система бўлади.

3. Биз номаълумларни тўла йўқотиш усулини тенгламалар сони номаълумлар сонига тенг бўлган ҳолда кўрдик. Умумий

ҳолда n та номаълум m та (m≠n) чизиқли тенгламалар системаси учун ҳам кўриш мумкин.

Мисол.
$$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$$

чизиқли тенгламалар системасини номаълумларни тўла йўқотиш усули билан ечинг.

Ечиш. $a_{11}=5$ бўлгани учун уни 1 қилиш мақсадида системанинг биринчи тенгламасини 5 га бўламиз:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{8}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_3 = \frac{2}{5} \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$$

Энди элементлари номаълумларнинг олдидаги коэффициентлардан ва озод ҳадлардан тузилган кенгайтирилган матрица тузайлик.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{8}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 3 & -2 & 6 & -7 \\ 2 & 1 & -1 & -5 \end{array}\right)$$

биринчи йўл элементларини (-3) га кўпайтириб, иккинчи йўл элементларига, (-2) га кўпайтириб учинчи йўл элементларига қўшамиз:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{8}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & -\frac{34}{5} & \frac{27}{5} & -\frac{41}{5} \\ 0 & -\frac{11}{5} & -\frac{7}{5} & -\frac{29}{5} \end{array}\right)$$

иккинчи йўл элементларини $-\frac{5}{34}$ га, учинчи йўл элементларини -5 га кўпайтирсак,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{8}{5} & \cdot\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{27}{34} & \frac{41}{34} \\ 0 & 11 & 7 & 29 \end{array}\right)$$

ҳосил бўлади.

Иккинчи йўл элементларини $-\frac{8}{5}$ га кўпайтириб, биринчи йўл элементларига, -11 га кўпайтириб, учинчи йўл элементларига қўшсак:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{25}{17} & -\frac{26}{17} \\ 0 & 1 & -\frac{27}{34} & \frac{41}{34} \\ 0 & 0 & \frac{535}{34} & \frac{535}{34} \end{array}\right)$$

ҳосил бўлади. Учинчи йўлни $\frac{34}{535}$ га кўпайтирсак,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{25}{17} & -\frac{25}{17} \\ 0 & 1 & -\frac{27}{34} & \frac{41}{34} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

ҳосил бўлади.

Энди учинчи йўл элементларини $\frac{27}{34}$ га кўпайтириб, иккинчи йўл элементларига, $-\frac{25}{17}$ га кўпайтириб, биринчи йўл элементларига қўшсак,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

келиб чиқади.

Демак $x_1=-3$; $x_2=2$; $x_3=1$ экан.

Қуйидаги чизиқли тенгламалар системасини номаълумларни тўла йўқотиш усулида ечинг.

6. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$ 7. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -3 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} -2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 - 4x_3 = -2 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 - \frac{1}{3}x_3 + 2x_4 = -1 \\ 3x_1 - x_3 = -3 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 4 \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_3 - x_4 = -\frac{1}{3} \end{cases}$ 11. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - 6x_2 + x_4 = 4 \\ x_1 - 4x_3 + x_4 = 6 \end{cases}$

Қуйидаги чизиқли тенгламалар системасини манфий бўлмаган базис ечимларидан бирини топинг.

12. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -31 \\ 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 = -12 \end{cases}$ 13. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 8 \\ 3x_1 - x_2 + 11x_3 = 12 \end{cases}$ 14. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 6x_2 - 4x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$ 16. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 + 2x_6 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 + 3x_6 = 2 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 22 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 14 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$ 18. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 7 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 - x_5 = 2 \\ -x_1 + 8x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$

19. $\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2 \\ x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 1 \\ -2x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 3 \\ -2x_2 + 5x_3 + 4x_4 - x_5 = 3 \end{cases}$ 20. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 + 4x_6 = 8 \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 - 4x_5 + 7x_6 = 15 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 - 4x_5 + 6x_6 = 13 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 4x_5 + 4x_6 = 10 \end{cases}$

Чизикли тенгсизликлар системасини график усулда ечиш.

Математик дастурлаш масалаларини ечишда, чизиқли тенгсизликлар системасининг ечимлар тўпламини чизмада (график усулда) кўрсатишга (ифодалашга) тўцри келади. Шунинг учун қуйида чизиқли тенгсизлик ва тенгсизликлар системасини график усулда ечишни кўриб ўтайлик.

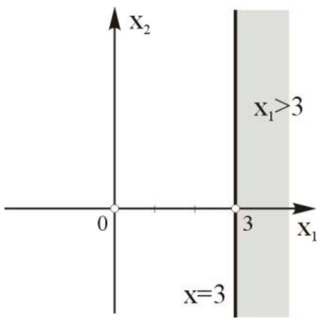
$$a_1x_1 + a_2x_2 \le b \qquad (1)$$

(1) кўринишдаги ҳар қандай чизиқли тенгсизликнинг ечимлар тўплами чегараси $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ тўцри чизиқ бўлган ярим текислик нуқталаридан иборат бўлади. Бу текислик $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ тўцри чизиқнинг қайси томонида эканлигини билиш учун (1) тенгсизликка тўцри чизиқнинг аниқ бирор томонида ётган ихтиёрий бирор нуқта координатаси қўйилади. Агар бу нуқта координатаси (1) тенгсизликни қаноатлантирса, у ҳолда биз излаётган текислик тўцри чизиқнинг шу нуқта ётган томонида бўлади. Агар бу нуқта координатаси (1) тенгсизликни қаноатлантирмаса, у ҳолда биз излаётган текислик тўцри чизиқнинг иккинчи томонида ётган бўлади.

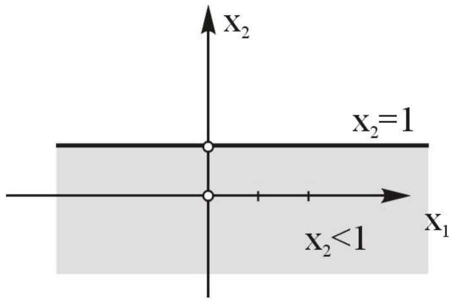
Қуйидаги тенгсизликларни қаноатлантирувчи нуқталар тўпламини топинг.

1-мисол.

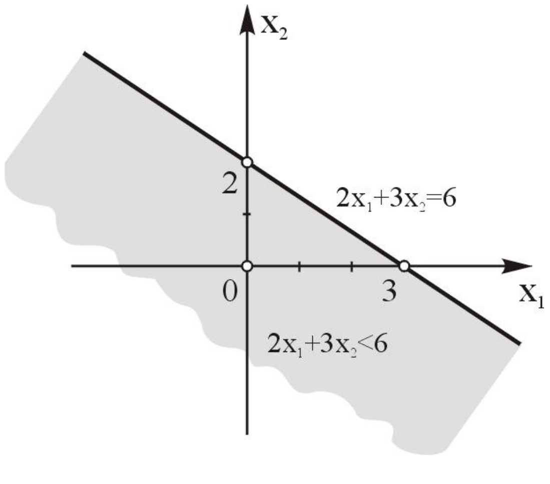
а) $x_1>3$



б) $x_2 \le 1$



в) $2x_1 + 3x_2 \le 6$



2-мисол.

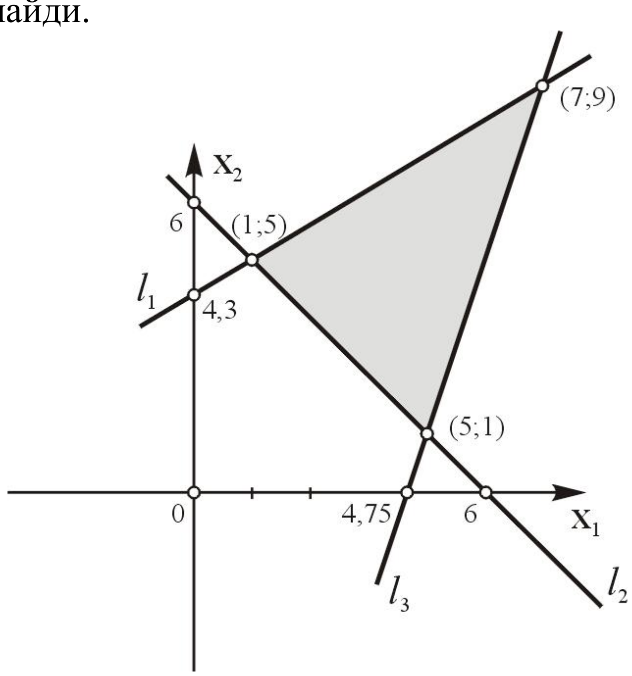
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 13 \ge 0 \\ x_1 + x_2 - 6 \ge 0 \\ 4x_1 - x_2 - 19 \le 0 \end{cases}$$

Тенгсизликлар системасининг ечимлар тўпламини топинг.

Ечиш. Тенгсизликлар белгисини тенгликлар билан алмаштириб, қуйидаги тенгламалар системасини ҳосил қиламиз.

$$l_1 : 2x_1 - 3x_2 = -13$$
$$l_2 : x_1 + x_2 = 6$$
$$l_2 : 4x_1 - x_2 = 19$$

Бу тенгламалар системасининг ҳар бири чизмадаги l_1, l_2, l_3 тўцри чизиқларни ифодалайди.



Демак, берилган системанинг ечимлар тўплами чизмадаги учбурчакнинг ички нуқталаридан иборат бўлади. Учбурчак учидаги нуқталарнинг координаталари эса кесишган тўцри чизиқ тенгламаларини биргаликда система қилиб ечиб топилади.

Қуйидаги тенгсизликлар системасининг ечимлар тўпламини топинг ва чизинг.

21. $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 \ge -10 \\ x_1 \le 3 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \ge -2 \end{cases}$
22. $\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 6 \\ 3x_1 + 5x_2 \ge 15 \\ x_2 \ge 1 \end{cases}$
23. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le -6 \\ -x_1 + 5x_2 \le 5 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x_2 \ge 5 \\ 8x_1 + 2x_2 \le 89 \\ 8x_1 - 6x_2 \ge 69 \end{cases}$
25. $\begin{cases} 11x_1 - 17x_2 \le 66 \\ -x_1 + 11x_2 \le 14 \\ 5x_1 - 3x_2 \ge 14 \end{cases}$
26. $\begin{cases} 5x_1 - x_2 \le 51 \\ 2x_2 \le 1 \\ 10x_1 + 4x_2 \ge 69 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1 - 9x_2 \le 18 \\ 2x_1 + 4x_2 \le 3 \\ 7x_1 + 3x_2 \ge 27 \end{cases}$ 28. $\begin{cases} 9x_1 + 11x_2 \ge 48 \\ 5x_1 - x_2 \le 44 \\ -x_1 + 13x_2 \le 6 \end{cases}$ 29. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \ge 5 \\ 5x_1 - x_2 \le 46 \\ 3x_1 - 5x_2 \ge 15 \end{cases}$

30. $\begin{cases} 8x_1 + 14x_2 \ge 14 \\ 13x_1 + 5x_2 \le 100 \\ 5x_1 - 9x_2 \ge 5 \end{cases}$ 31. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \ge 2 \\ 17x_1 + x_2 \le 153 \\ 8x_1 - 14x_2 \ge 14 \end{cases}$ 32. $\begin{cases} x_1 + 11x_2 \ge 11 \\ 3x_1 - x_2 \le 28 \\ 5x_1 - 13x_2 \ge 11 \end{cases}$

Чизикли дастурлаш масалаларини график усулида ечиш.

График усулига кўра чизиқли дастурлаш масалаларни асосан икки ўлчовли фазода, яъни текисликда кўрилади. Уч ўлчовли фазода эса жуда кам кўрилади, чунки қўйилган масала ечимларини ифодаловчи кўпбурчакларни чизиш анча мураккаб бўлади. Учдан юқори ўлчовли фазони тасаввур қилиш эса мумкин эмас.

Фараз қилайлик, текисликда

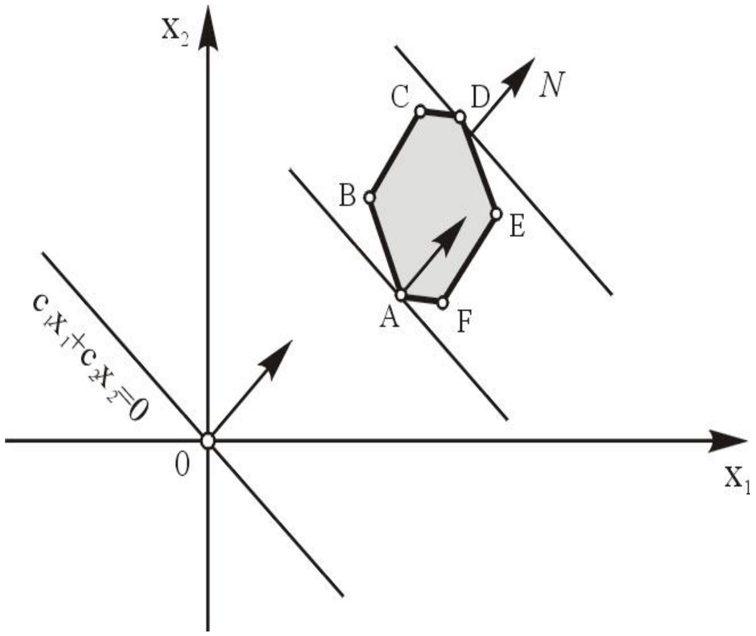
$$f = c_1x_1 + c_2x_2 \qquad (1)$$

мақсад функциянинг, x_1, x_2 лар

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ ========== \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad (2)$$

тенгсизликлар системасини қаноатлантиргандаги энг кичик қийматини топиш талаб қилинсин.

(2) тенгсизликлар системасини биргаликда деб фараз қилсак, у ҳолда бу тенгсизликлар системасини ўринли ечимлар тўплами бўлган бирор кўпбурчакни ташкил этади.



ABCDEF кўпбурчакнинг шундай нуқтасини топишимиз керакки, бу нуқтада $c_1x_1 + c_2x_2 = const$ тўцри чизиқ шу кўпбурчак учун таянч тўцри чизиқ бўлиб, (1) функциямиз энг кичик қийматга эришсин.

Масала. Юқоридаги ёқилци (аралашма) масаласини график усулда ечайлик.

$$F = 100x_1 + 120x_2 \qquad (1)$$

мақсад функциянинг x_1, x_2 лар

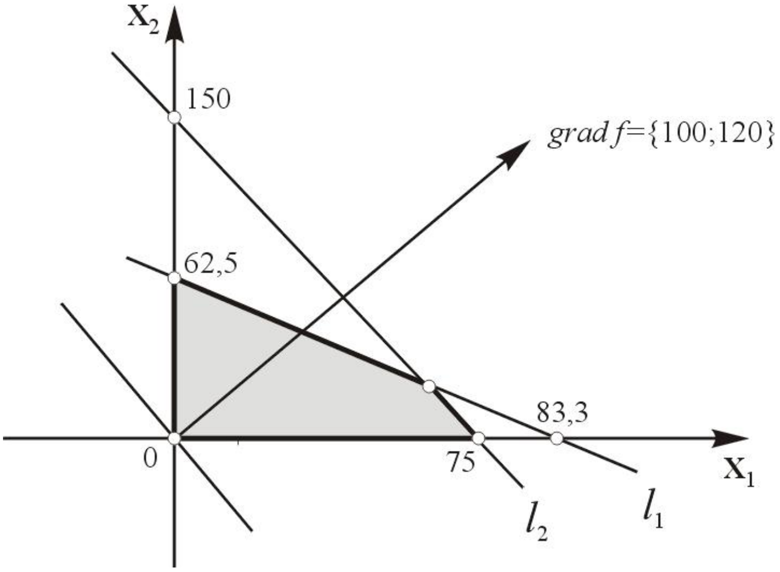
$$\left.\begin{aligned} &0{,}6x_1 + 0{,}8x_2 \le 50 \\ &0{,}4x_1 + 0{,}2x_2 \le 30 \\ &x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(2)}$$

чекланиш тенгсизликлар системасини қаноатлантирадиган қийматларида энг катта қиймати топилсин.

(2) тенгсизликлар системасини тенгламалари системаси кўринишида ёзиб уларга мос келган тўцри чизиқларни чизайлик.

$$\left.\begin{aligned} L_1: &\quad 0{,}6x_1 + 0{,}8x_2 = 50 \\ L_2: &\quad 0{,}4x_1 + 0{,}2x_2 = 30 \\ &\qquad x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}\right\}$$

L_1, L_2 - тўцри чизиқларнинг координата ўқлари билан кесишиш нуқталарининг координаталари (0; 62,5) ва (83,3; 0); (0; 150) ва
(75; 0)



$$\left.\begin{aligned} 0{,}6x_1 + 0{,}8x_2 &= 50 \\ 0{,}4x_1 + 0{,}2x_2 &= 30 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 = 70; \qquad x_2 = 10$$

$$F_{max} = 100\cdot 70 + 120\cdot 10 = 8200 \text{ сўм},$$

$f=F_{max}\cdot 1000=8200000$ сўм бўлган энг кўп фойда олиш учун А аралашмадан 70 тонна В аралашмадан 10 тонна тайёрлаш керак экан.

Қуйидаги чизиқли программалаштириш масалаларини график усулида ечинг.

33. $$\begin{gathered} Z_{\max} = x_1 + 1{,}5x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ x_1 + 4x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{gathered}$$

34. $$\begin{gathered} Z_{\max} = 3x_1 + x_2 + 6 \\ 2x_1 + x_2 \le 11 \\ 3x_1 - 2x_2 \le 10 \\ 3x_1 - 4x_2 \ge 20 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{gathered}$$

35. $$\begin{gathered} Z_{\min} = 3x_1 - 30x_2 \\ 2x_1 - x_2 \ge 0 \\ x_1 - 5x_2 \ge -5 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{gathered}$$

36. $$\begin{gathered} Z_{\max} = 3x_1 - 3x_2 - 5 \\ x_1 - 3x_2 \le 0 \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ 3x_1 + x_2 \ge 10 \\ 7x_1 - x_2 \ge 0 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{gathered}$$

37. $$\begin{gathered} Z_{\min} = 2x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + x_2 \le 3 \\ 3x_1 + x_2 \le 15 \\ 3x_1 + 5x_2 \ge 15 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{gathered}$$

38. $$\begin{gathered} Z_{\min} = x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 - 2x_2 \le 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 2 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 3 \\ x_1 + x_2 \ge \frac{1}{2} \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{gathered}$$

39.
$$Z_{\max} = 3x_1 + \frac{5}{2}x_2 - 4$$
$$2x_1 - x_2 \ge -6$$
$$6x_1 + 5x_2 \le 30$$
$$x_1 + 3x_2 \le -3$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

40.
$$Z_{\min} = -x_1 + 3x_2$$
$$x_1 - x_2 \le 2$$
$$x_1 + x_2 \ge 4$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

41.
$$Z_{\min} = 4 + 6x_1 + 2x_2$$
$$x_1 - x_2 \ge -2$$
$$x_1 + x_2 \ge 2$$
$$x_1 - x_2 \le 2$$
$$x_1 \ge 1,\ 0 \le x_2 \le 4$$

42.
$$Z_{\min} = x_1 - x_2 + x_3$$
$$x_1 - 4x_2 + x_3 = -2$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3$$
$$x_i \ge 0, \left(i = \overline{1,4}\right)$$

43.
$$Z_{\max} = x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4$$
$$-x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 8$$
$$x_i \ge 0, \left(i = \overline{1,4}\right)$$

44.
$$Z_{\max} = 2x_1 + x_2 + 6x_3 - 12x_4 - 9x_5$$
$$x_1 + x_2 + 7x_3 - 3x_4 - 7x_5 = 13$$
$$x_1 + 2x_2 + 13x_3 + 4x_4 - 14x_5 = 20$$
$$x_1 + 3x_2 + 20x_3 + 6x_4 - 23x_5 = 19$$
$$x_i \ge 0, \left(i = \overline{1,5}\right)$$

45.
$$Z_{\min} = x_1 + 2x_3 + x_5$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \le 5$$
$$x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 \le 2$$
$$x_3 - x_4 + x_5 \le 1$$
$$x_i \ge 0, \left(i = \overline{1,5}\right)$$

Чизикли программалаштириш масалаларини симплекс жадваллар усулида ечиш.

Симплекс жадваллар усулига мисоллар кўрайлик.

Мисол. Юқоридаги ёқилци (аралашма) масаласини ечайлик.

$F=100x_1+120x_2$ (1) мақсад функциянинг x_1, x_2 лар

$$\left.\begin{aligned} 0{,}6x_1 + 0{,}8x_2 &\le 50 \\ 0{,}4x_1 + 0{,}2x_2 &\le 30 \\ x_1 \ge 0, x_2 &\ge 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

чекланиш тенгсизликлар системасини қаноатлантирадиган ва манфий бўлмаган қийматларида энг катта қийматини топайлик**.**

(2) нинг чап томонига манфий бўлмаган ва ҳозирча номаълум бўлган x_3, x_4 ўзгарувчиларни қўшиб тенгсизликлар системасидан тенгламалар системасига ўтамиз:

$$\left.\begin{aligned} 0.6x_1 + 0.8x_2 + x_3 &= 50 \\ 0.4x_1 + 0.2x_2 + x_4 &= 30 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Энди (3) ва (1) ларни қуйидаги кўринишларда ёзиб олайлик.

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= 50 - 0.6x_1 - 0.8x_2 \\ x_4 &= 30 - 0.4x_1 - 0.2x_2 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Бу ерда x_3, x_4 лар базислар (базис ўзгарувчилар) бўлиб, x_1, x_2 лар эса озод номаълумлар бўлади. Шунинг учун $x_1=0$, $x_2=0$ десак, (4) нинг манфий бўлмаган $x_3=50$, $x_4=30$ ечимлари келиб чиқади. Демак, биринчи базис ечим $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=50$, $x_4=30$ лар орқали ифодаланар экан.

(1) дан кўриш қийин эмаски, биринчи режага, яъни биринчи базис ечимга кўра олинадиган фойда F=0 бўлар экан. Энди биринчи базис ечимга мос келган биринчи симплекс жадвалини тузамиз. Келажакда бизга қулай бўлиши учун (3) ни қуйидаги кўринишда ёзиб олайлик.

$$\left.\begin{aligned} \frac{3}{5}x_1+\frac{4}{5}x_2+x_3+0\cdot x_4&=50 \\ \frac{2}{5}x_1+\frac{1}{5}x_2+0\cdot x_3+x_4&=30 \end{aligned}\right\}$$

1-симплекс жадвали.

Баъзис ўзгарувчи лар	Озод хадлар	X_1	X_2	X_3	X_4
X_3	50	3/5	4/5	1	0
X_4	30	2/5	1/5	0	1
F	0	-100	-120	0	0

1-жадвал шундай тузилганки, унинг биринчи устунида базис номаълум x_3, x_4 лар ва F жойлашган, иккинчи устунига озод ҳадлар кейинги устунига эса мос равишда x_1, x_2, x_3, x_4 ларнинг коэффициентлари ёзилган. Бизда қўйилган масаланинг энг катта қиймати изланаётгани учун, 1-жадвал охирги йўл элементларининг ичидан энг кичик манфий сон -120 олинади. (Агар қўйилган масаланинг энг кичик қиймати изланаётган бўлса, у ҳолда, охирги йўл элементлари ичидан энг кичик мусбат сон олинган бўлар эди). Бу -120 турган устунга ҳал қилувчи устун дейилади. Энди озод ҳад элементларини мос равишда ҳал қилувчи манфий бўлмаган (манфий элементи бўлса, унга бўлинмайди) устун элементларига бўлиб, уларнинг энг кичиги олинади.

$$\min\left\{50:\frac{4}{5};30:\frac{1}{5}\right\}\Rightarrow\min\left\{\frac{125}{2};150\right\}=\frac{125}{2}$$

$\frac{4}{5}$ турган йўл ҳал қилувчи йўл, $\frac{4}{5}$ нинг ўзи эса ҳал қилувчи элемент дейилади.

Энди ҳал қилувчи элементни 1 га айлантириб олайлик. Бунинг учун ҳал қилувчи йўл элементларини $\frac{5}{4}$ га кўпайтирамиз.

Базис ўзгарувчи лар	Озод хадлар	x_1	x_2	x_3	x_4

x_3	125/2	3/4	1	5/4	0
x_4	30	2/5	1/5	0	1
F	0	-100	-120	0	0

Энди ҳал қилувчи устун элементларини ҳал қилувчи элементдан ташқарисини нолга айлантирамиз. Иккинчи симплекс жадвалини тузиш учун биринчи йўл элементларини $-\frac{1}{5}$ га кўпайтириб, иккинчи йўл элементларига, сўнгра 120 га кўпайтириб, учинчи йўл элементларига қўшамиз.

$$-\frac{1}{5}\cdot\frac{125}{2}+30=\frac{35}{2};-\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4}+\frac{2}{5}=\frac{1}{4};-\frac{1}{5}\cdot 1+\frac{1}{5}=0;$$

$$-\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{4}=-\frac{1}{4};-\frac{1}{5}\cdot 0+1=1;120\cdot\frac{125}{2}+0=7500;120\cdot\frac{3}{4}-100=-10;$$

$$120-120=0; \qquad 120\cdot\frac{5}{4}+0=150$$

Ҳал қилувчи элемент, базис номаълум x_3 турган йўл ва озод номаълум x_2 турган устуннинг кесишиш жойида тургани учун, базис ўзгарувчи x_3 нинг ўрнига x_2 олсак, натижада базис ўзгарувчилар x_2, x_4 бўлади.

2-симплекс жадвали.

Базис ўзгарувчилар	Озод хадлар	x_1	x_2	x_3	x_4
x_2	125/2	3/4	1	5/4	0
x_4	35/2	1/4	0	-1/4	1
F	7500	-10	0	150	0

Иккинчи симплекс жадвалидан кўринадики, иккинчи базис ечим

$$x_1=0,\ x_2=\frac{125}{2},\ x_3=0,\ x_4=\frac{35}{2}$$

бўлиб, мақсад функциямиз эса

$$F=7500+10x_1+0\cdot x_2-150\cdot x_3+0\cdot x_4$$

кўринишда бўлади. Бундан кўринадики, мақсад функциянинг қийматини x_1 ҳисобига ошириш мумкин. Иккинчи жадвалга эътибор берсак, F турган йўлда манфий сон фақат битта -10. Шунинг учун, бу -10 турган устун ҳал қилувчи устун бўлади. Ҳал қилувчи элементни эса аввалгича аниқлаймиз:

$$\min\left\{\frac{125}{2}:\frac{3}{4};\quad \frac{35}{2}:\frac{1}{4}\right\}=\min\left\{\frac{250}{3};\quad 70\right\}=70$$

Демак, $\frac{1}{4}$ турган йўл ҳал қилувчи йўл бўлиб, $\frac{1}{4}$ нинг ўзи эса ҳал қилувчи элемент бўлади.

Базис ўзгарувчи x_4 нинг ўрнига эса x_1 ўтади. Аввалгидек ҳал қилувчи элементни 1 га айлантириб олиб, сўнгра ҳал қилувчи устун элементларини (ҳал қилувчи элементдан ташқари) нолга айлантириб, 3-симплекс жадвалини тузамиз.

Базис ўзгарувчилар	Озод хадлар	x_1	x_2	x_3	x_4
x_2	125/2	3/4	1	5/4	0
x_1	70	1	0	-1	4
F	7500	-10	0	150	0

3- симплекс жадвали.

Базис ўзгарувчилар	Озод хадлар	x_1	x_2	x_3	x_4
x_2	10	0	1	2	3
x_1	70	1	0	-1	4
F	8200	0	0	140	40

3-симплекс жадвалининг охирги йўлида манфий элементлар йўқ, шунинг учун мақсад функциянинг қийматини ошириш мумкин эмас. Демак, қўйилган

масаланинг энг қулай ечими $x_1=70$, $x_2=10$, $x_3=0$, $x_4=0$ бўлиб, $F_{max}=8200+0\cdot x_1+0\cdot x_2-140\cdot 0-40\cdot 0=8200$ бўлади.

Ҳақиқатан, $F_{max}=100\cdot 70+120\cdot 10=8200$ сўм энг кўп фойда бўлиб, А аралашмадан 70 тонна, В аралашмадан 10 тонна тайёрланганда бўлар экан.

Бизда эса $f_{max}=1000\cdot F$ бўлгани учун $f_{max}=1000\cdot 8200=8200000$ сўм фойда бўлади.

Амалий дарсда аниқ мисоллар ечишда қуйидаги нарсаларга эътибор бериш зарур:

1. Манфий коэффициентли x_j ларни базис ўзгарувчилар, яъни базислар сифатида олиш мумкин эмас.
2. Манфий сон ҳал қилувчи элемент сифатида олинмайди.
3. Озод ҳадларни мос равишда ҳал қилувчи устун элементларига бўлганда фақат мусбат сонлар бўлиши керак.

   $$\min\left\{\frac{15}{3};\frac{21}{4};\frac{13}{-7}\right\} \cancel{=\frac{15}{3}}$$

4. Агар f_{max} изланаётган бўлса, f турган охирги йўлда манфий сон қолиши керак эмас.
5. Агар f_{min} изланаётган бўлса, f турган охирги йўлда мусбат сонлар бўлиши керак эмас.
6. Агар мумкин бўлса, мақсад функцияда қатнашмаган номаълумларни номаълум базислар сифатида олиш мақсадга мувофиқ бўлади.
7. Агар f турган охирги йўлда абсолют қиймат жиҳатидан бир хил сонлар бир нечта бўлиб қолса, у ҳолда шу сонлар турган ҳар бир устун учун ҳал қилувчи элемент аниқланиб, сўнгра шу (элементларнинг) сонларнинг ичидаги энг каттаси турган устун ҳал

қилувчи устун деб олинади, мос элемент эса ҳал қилувчи элемент деб олинади.

Қуйидаги чизиқли программалаштириш масалаларини симплекс жадваллар усулида ечинг.

46. $$\begin{gathered} Z_{\min} = -x_1 - x_2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \\ x_i \ge 0, \left(i = \overline{1,4}\right) \end{gathered}$$

47. $$\begin{gathered} Z_{\min} = -2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ x_i \ge 0, \left(i = \overline{1,4}\right) \end{gathered}$$

48. $$\begin{gathered} Z_{\max} = -5x_1 + 10x_2 - 7x_3 + 3x_4 + 4 \\ x_1 + x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 14 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9 \\ 2x_1 - 2x_2 + 8x_3 + x_4 = 16 \\ x_i \ge 0, \left(i = \overline{1,4}\right) \end{gathered}$$

49. $$\begin{gathered} Z_{\min} = x_2 - 3x_3 + 2x_5 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7 \\ -2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12 \\ -4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 10 \\ x_i \ge 0, \left(i = \overline{1,6}\right) \end{gathered}$$

50. $$\begin{gathered} Z_{\max} = 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 10 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5 \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_i \ge 0, \left(i = \overline{1,3}\right) \end{gathered}$$

51. $$\begin{gathered} Z_{\min} = 4 + x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 11x_4 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 4 \\ x_i \ge 0, \left(i = \overline{1,4}\right) \end{gathered}$$

52. $$\begin{gathered} Z_{\max} = -5x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ 2x_1 - x_2 \le 4 \\ 2x_2 - 3x_1 \le 6 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{gathered}$$

53. $$\begin{gathered} Z_{\min} = 2x_1 + 3x_2 + \frac{5}{2}x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 6 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 16 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 12 \\ x_i \ge 0, \left(i = \overline{1,3}\right) \end{gathered}$$

54. $$\begin{gathered} Z_{\max} = x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 24 \\ x_1 + 3x_2 \le 15 \\ 2x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{gathered}$$

55. $$\begin{gathered} Z_{\min} = x_1 + x_2 + x_3 - 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 7 \\ -3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \ge -8 \\ -3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \ge -4 \\ -3x_1 + x_3 \ge 1 \\ x_i \ge 0, \left(i = \overline{1,3}\right) \end{gathered}$$

56. $$\begin{gathered}Z_{\max} = x_1 + 1{,}5x_2 - 2{,}5x_3 + 3x_4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \ge 5 \\ -x_1 + 4x_2 + x_4 \le 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \le 8 \\ x_i \ge 0, \left(i = \overline{1,4}\right)\end{gathered}$$

57. $$\begin{gathered}Z_{\min} = 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 \\ -x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 = 1 \\ x_1 + \frac{3}{2}x_2 + 2x_3 = \frac{1}{2} \\ x_i \ge 0, \left(i = \overline{1,3}\right)\end{gathered}$$

58. $$\begin{gathered}Z_{\max} = 5 + x_1 + x_2 - x_3 + 3{,}5x_4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ -4x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 12 \\ x_i \ge 0, \left(i = \overline{1,4}\right)\end{gathered}$$

59. $$\begin{gathered}Z_{\max} = x_1 - 2x_2 + x_3 \\ -x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 \le 1 \\ -x_1 - x_2 + x_3 \le 4 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 \le 1 \\ x_i \ge 0, \left(i = \overline{1,3}\right)\end{gathered}$$

60. $$\begin{gathered}Z_{\max} = 4 - 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 4x_5 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ x_i \ge 0, \left(i = \overline{1,5}\right)\end{gathered}$$

61. $$\begin{gathered}Z_{\max} = -1 + x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 \\ -x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_i \ge 0, \left(i = \overline{1,4}\right)\end{gathered}$$

62. $$\begin{gathered}Z_{\max} = 6x_1 + 7x_2 + 12x_3 + 13x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 16 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 - 10x_4 \le 10 \\ x_i \ge 0, \left(i = \overline{1,4}\right)\end{gathered}$$

63. $$\begin{gathered}Z_{\max} = 5 + x_1 + x_2 - x_3 + \frac{7}{2}x_4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \\ x_i \ge 0, \left(i = \overline{1,4}\right)\end{gathered}$$

64. $$\begin{gathered}Z_{\max} = x_1 + x_2 + 5x_3 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_i \ge 0, \left(i = \overline{1,4}\right)\end{gathered}$$

65. $$\begin{gathered}Z_{\min} = 3x_1 + 4x_2 \\ 3x_1 - 2x_2 \ge 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 \ge 2 \\ x_i \ge 0, \left(i = \overline{1,3}\right)\end{gathered}$$

66. $$\begin{gathered}Z_{\max} = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \le 14 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \ge 4 \\ x_i \ge 0, \left(i = \overline{1,3}\right)\end{gathered}$$

67. $$\begin{gathered}Z_{\min} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 16 \\ x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 16 \\ x_i \ge 0, \left(i = \overline{1,5}\right)\end{gathered}$$

2 - §. Чизикли дастурлашда иккиланма масалалар.

Чизиқли дастурлашнинг нормал (стандарт) масаласи, яъни

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \qquad (1)$$

мақсад функциянинг, x_1, x_2, . . . , x_n, номаълумлар

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0 \qquad \mathbf{(3)}$$

чекланиш тенгсизликлар системасини қаноатлантирадиган қийматларида, максимум қийматини топиш масаласи қаралаётган бўлсин.

Бу масалага иккиланма масала деб, ушбу

$$F = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \qquad (4)$$

мақсад функциянинг, $y_1,\ y_2,\ \cdots\ , y_n$ номаълумлар

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \ge c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \ge c_n \end{cases} \qquad \mathbf{(5)}$$

$$y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0, \ldots, y_m \ge 0 \qquad \mathbf{(6)}$$

чекланиш тенгсизликлар системасини қаноатлантирадиган қийматларида, минимум қийматини топиш масаласига айтилади.

Мисол.

$$x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = f_{\max}$$

мақсад функциянинг, $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ лар

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 \le 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \le 2 \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4} \end{cases}$$

чекланиш тенгсизликлар системасини қаноатлантирадиган қийматларида, максимум қиймати топилсин.

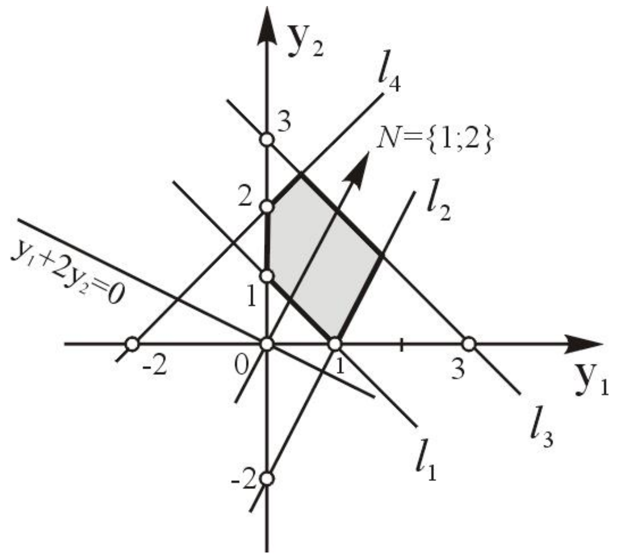
Бу масалани бевосита, масалан, график усулда ечиш мушкул. Бироқ, унга иккиланма бўлган:

$$y_1 + 2y_2 = F_{\min}$$

мақсад функциянинг $y_1,\ y_2$ лар

$$\begin{cases} y_1 + y_2 \ge 1 & l_1 \\ -2y_1 + y_2 \ge -2 & l_2 \\ -y_1 - y_2 \ge -3 & l_3 \\ y_1 - y_2 \ge -2 & l_4 \end{cases}$$ ц

чекланиш тенгсизликлар системасини қаноатлантирадиган қийматларида, минимум қийматини топиш масаласини график усулда ечиш қийинчилик туцдирмайди. Чизмадан кўринадики, иккиланма масаланинг мақсад функцияси (1;0) нуқтада минимумга эришади. $F_{\min} = 1$. У ҳолда дастлабки масаланинг жавоби $f_{\max} = 1$ бўлади.



Қўйидаги масалаларни иккиланма масаласини ва оптимал режасини тузинг.

68. $$\begin{gathered} Z_{\max} = 9x_1 + 7x_2 + 12x_3 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 8 \\ x_i \ge 0, \left(i = \overline{1,3}\right) \end{gathered}$$

69. $$\begin{gathered} Z_{\min} = 3x_1 + 2x_2 \\ 7x_1 + 2x_2 \ge 14 \\ 4x_1 + 5x_2 \ge 20 \\ x_i \ge 0, \left(i = \overline{1,2}\right) \end{gathered}$$

70. $$\begin{gathered} Z_{\max} = 2x_1 + 3x_2 \\ 8x_1 - 5x_2 \le 11 \\ -x_1 + 3x_2 \le 1 \\ 2x_1 + 7x_2 \ge 7 \\ x_i \ge 0, \left(i = \overline{1,2}\right) \end{gathered}$$

71. $$\begin{gathered} Z_{\max} = 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 \le 12 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 \le 7 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 10 \\ x_i \ge 0, \left(i = \overline{1,4}\right) \end{gathered}$$

72. $$\begin{gathered} Z_{\min} = 4x_1 + 9x_2 + 3x_3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 \ge 16 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 \ge 4 \\ x_i \ge 0, \left(i = \overline{1,3}\right) \end{gathered}$$

73. $$\begin{gathered} Z_{\max} = x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 24 \\ x_1 + 3x_2 \le 15 \\ 2x_2 \le 8 \\ x_i \ge 0, \left(i = \overline{1,2}\right) \end{gathered}$$

74. $$\begin{gathered} Z_{\min} = -3x_1 - 4x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 \ge 50 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 \le 5 \\ x_i \ge 0, \left(i = \overline{1,3}\right) \end{gathered}$$

75. $$\begin{gathered} Z_{\max} = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \le 14 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \ge 4 \\ x_i \ge 0, \left(i = \overline{1,3}\right) \end{gathered}$$

76. $$\begin{gathered} Z_{\max} = -3x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 \le 40 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 30 \\ x_i \ge 0, \left(i = \overline{1,3}\right) \end{gathered}$$

Ўзаро икки ёқлама симплекс усули билан қуйидаги масалаларни ечинг.

77. $$\begin{gathered} Z_{\min} = 3x_1 + 4x_2 \\ 3x_1 - 2x_2 \ge 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 \ge 2 \\ x_i \ge 0, \left(i = \overline{1,3}\right) \end{gathered}$$

78. $$\begin{gathered} Z_{\min} = 2x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 4x_1 + x_2 - 4x_3 \ge 2 \\ -x_1 + x_3 \ge 1 \\ -3x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 1 \\ x_i \ge 0, \left(i = \overline{1,3}\right) \end{gathered}$$

79. $$\begin{gathered} Z_{\max} = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \le 14 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \ge 4 \\ x_i \ge 0, \left(i = \overline{1,3}\right) \end{gathered}$$

80. $$\begin{gathered} Z_{\max} = 2x_1 + 3x_2 \\ 8x_1 - 5x_2 \le 11 \\ -x_1 + 3x_2 \le 1 \\ 2x_1 + 7x_2 \ge 7 \\ x_i \ge 0, \left(i = \overline{1,2}\right) \end{gathered}$$

81. $$\begin{gathered} Z_{\min} = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 \\ \mathrm{x}_1 + x_2 - 2x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ x_i \ge 0, \left(i = \overline{1,3}\right) \end{gathered}$$

82. $$\begin{gathered} Z_{\max} = -3x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ 2\mathrm{x}_1 - 4x_2 + x_3 \le 40 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 30 \\ x_i \ge 0, \left(i = \overline{1,3}\right) \end{gathered}$$

83. $$\begin{gathered} Z_{\min} = 2x_1 + 4x_2 + 12x_4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \ge 10 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 \ge 4 \\ x_i \ge 0, \left(i = \overline{1,4}\right) \end{gathered}$$

84. $$\begin{gathered} Z_{\max} = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \le 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \ge 3 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 \le 4 \\ x_i \ge 0, \left(i = \overline{1,4}\right) \end{gathered}$$

85. $$\begin{gathered} Z_{\max} = -3x_1 - 4x_2 + x_3 \\ 2\mathrm{x}_1 + 5x_2 + x_3 \ge 50 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 \le 5 \\ x_i \ge 0, \left(i = \overline{1,3}\right) \end{gathered}$$

86. $$\begin{gathered} Z_{\max} = 5x_1 - x_2 - 4x_3 \\ -x_1 + 2x_3 \ge 9 \\ -x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \ge 8 \\ x_1 - x_3 \le 4 \\ x_i \ge 0, \left(i = \overline{1,3}\right) \end{gathered}$$

87. $$\begin{gathered} Z_{\min} = 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 9 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \ge 8 \\ x_1 + 6x_2 \ge 12 \\ x_i \ge 0, \left(i = \overline{1,3}\right) \end{gathered}$$

88. $$\begin{gathered} Z_{\min} = 8x_1 + 5x_2 + 6x_3 \\ 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 \ge 62 \\ 6x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 30 \\ 4x_1 + 6x_2 + 4x_3 \ge 44 \\ x_i \ge 0, \left(i = \overline{1,3}\right) \end{gathered}$$

3 - §. Транспорт масаласи.

«Шимолий-ғарбий бурчак» қоидаси (усули).

Транспорт масаласининг дастлабки режасини топиш усулларидан бири «Шимолий-ғарбий бурчак» қоидасидир. Бу қоида қуйидагича ифодаланади. Айтайлик, транспорт масаласи жадвал кўринишда берилган бўлсин.

Таъминот чи	Истеъмолчи				Ишлаб чиқариш қуввати
	B_1	B_2		B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{1n} x_{1n}	a_2
...	...	...	...	...	...
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{nm}	a_m
Талаб ҳажми	b_1	b_2	...	b_n	

Мақсад A_i ва B_j лар $\left(i=\overline{1,m};\quad j=\overline{1,n}\right)$ кесишувидаги катаклардаги маҳсулот миқдорини аниқлашдан иборат. Катакларни тўлдиришни жадвалнинг шимолий-ғарбий бурчагидан, яъни A_1 ва B_1 кесишган катакдан бошлаймиз. Бу катакка a_1 ва b_1 дан қайси бири кичик бўлса, шуни жойлаштирамиз, яъни $x_{11}=\min\{a_1;b_1\}$

Агар $a_1 < b_1$ бўлса, демак, катакка a_1 , агар $b_1 < a_1$ бўлса эса катакка b_1 ни ёзамиз. Равшанки, $a_1 < b_1$ бўлган ҳолда, 1- сатрдаги бошқа барча катакларга 0 миқдоридаги юк мос келади. Агар $b_1 < a_1$ бўлса, 1- устундаги барча катакларга 0 миқдор мос келади.

Иккинчи қадам сифатида 2-катакни тўлдиришга ўтамиз. Равшанки, агар $a_1 < b_1$ бўлса, бу катак A_2 ва B_1 кесишган катак бўлади. Агар $b_1 < a_1$ бўлса, бу катак A_1 ва B_2 кесишган катак бўлади. Бу катакни ҳам аввалги катак сингари тўлдирамиз. Бироқ, бу катакни тўлдиришда 1-катакка туширилган юкни инобатга оламиз.

Мисол.

b_i / a_i	**30**	**10**	**90**	**10**
80	**4** **30**	**3** **10**	**4** **40**	**0** **0**
25	**5** **0**	**1** **0**	**2** **25**	**0** **0**
35	**3** **0**	**4** **0**	**7** **25**	**0** **10**

1-катакка x_{11}=min{80; 30}=30 ни ёзамиз. Шундан сўнг, биринчи устундаги барча катакларга 0 ёзамиз. Сўнг A_1 пунктда 80-30=50 бирлик маҳсулот қолганини инобатга олиб, кейинги катакни, яъни 1-йўл, 2-устундаги катакни тўлдирамиз:

X_{12}=min { 50; 10 } =10

Иккинчи устуннинг ҳам қолган катакларига 0 лар ёзамиз, катакларни шу усулда тўлдирамиз.

X_{13}=min{40; 90}=40

X_{23}=min{25; 50}=25

X_{33}=min{35; 25}=25

Шундай қилиб, қуйидаги таянч режага эга бўлдик:

X={30; 10; 40; 0; 0; 0; 25; 0; 0; 0; 25; 10}.

Аниқланган таянч режага мос келувчи харажат

f=30·4+10·3+40·4+25·2+25·7=535 сўм бўлар экан.

Энг кам (минимал) харажатлар усули

Шимолий-ғарбий усул билан таянч режани топиш жараёнида ташиш харажатлари c_{ij} ларни эътиборга олмадик. Агар таянч режани қуриш жараёнида c_{ij} ларни ҳисобга олсак, оптимал режага анча яқин бўлган режага эга бўламиз. Шу мақсадда x_{ij} ларни топишни энг кичик c_{ij} жойлашган катакдан бошлаймиз. Дейлик, $c_{i_0 j_0}$ энг кичик тариф бўлсин. У холда, агар $a_{i_0} < b_{j_0}$ бўлса, $x_{i_0 j_0} = a_{i_0}$ бўлади, агар $a_{i_0} > b_{j_0}$ бўлса, $x_{i_0 j_0} = b_{j_0}$ бўлади.

Шу катакка мос бўлган устун ёки сатрнинг бошқа катакларига 0 лар ёзилади. Сўнгра, навбатдаги кичик c_{ij} га ўтамиз. Бу ҳолда ҳам a_i, b_j ларнинг миқдори ўзгарганлигини эътиборга оламиз. Барча катакларни шу усулда тўлдирсак, ҳосил бўлган нуқта таянч режа бўлади**.**

Мисол.

a_i \ b_i	**30**	**10**	**90**	**10**
80	**4** **0**	**3** **0**	**4** **75**	**0** **5**
25	**5** **0**	**1** **10**	**2** **15**	**0** **0**
35	**3** **30**	**4** **0**	**7** **0**	**0** **5**

Энг кичик c_{ij} =c_{22}=1 демак, мос катакка x_{22}=10 жойлаштирамиз. Демак, 2-устуннинг бошқа катакларига 0 ёзамиз. Навбатдаги кичик тариф c_{23}=2 дан иборат. Бу катакка 15 ёзамиз. Иккинчи йўлнинг қолган катакларига 0 ёзамиз, чунки иккинчи омборда шакар қолмади. Навбатдаги кичик тариф, c_{31}=3, бу катакка 30 ёзамиз ва биринчи устуннинг қолган катакларига 0 ёзамиз.

Навбатдаги кичик тариф c_{13}=4, бу катакка 75 ёзамиз ва шу устуннинг қолган катакларига 0 ёзамиз ва ниҳоят, c_{14}=5, c_{34}=5 бўлади. Шундай қилиб, оптимал режа

$$x=(0; 0; 75; 5; 0; 10; 15; 0; 30; 0; 0; 5.)$$

бўлиб, энг кам кетган харажат

$f = 4\cdot 75+10\cdot 1+15\cdot 2+30\cdot 3=430$ сўм бўлади.

Потенциаллар усули.

Бирор усул билан дастлабки режа аниқлаб олингандан сўнг, оптимал режани топиш масаласи вужудга келади. Уни аниқлаш учун жадвалдаги ҳар бир таъминотчига u_i $(i=\overline{1,m})$ потенциални, ҳар бир истеъмолчига v_j, $(j=\overline{1,n})$ потенциални мос қўямиз. Бу катталикларни аниқлаш учун банд катаклардан фойдаланамиз. Ҳар бир банд катак учун u_i ва v_j ларни шундай аниқлаймизки,

$u_i+v_j=c_{ij}$ (1) бўлсин.

Барча номаълумларни аниқлаш учун номаълумларнинг ихтиёрий биттасини 0 деб олиб сўнгра қолганларини топамиз. Сўнгра, барча бўш катаклар учун ёрдамчи тарифни, яъни

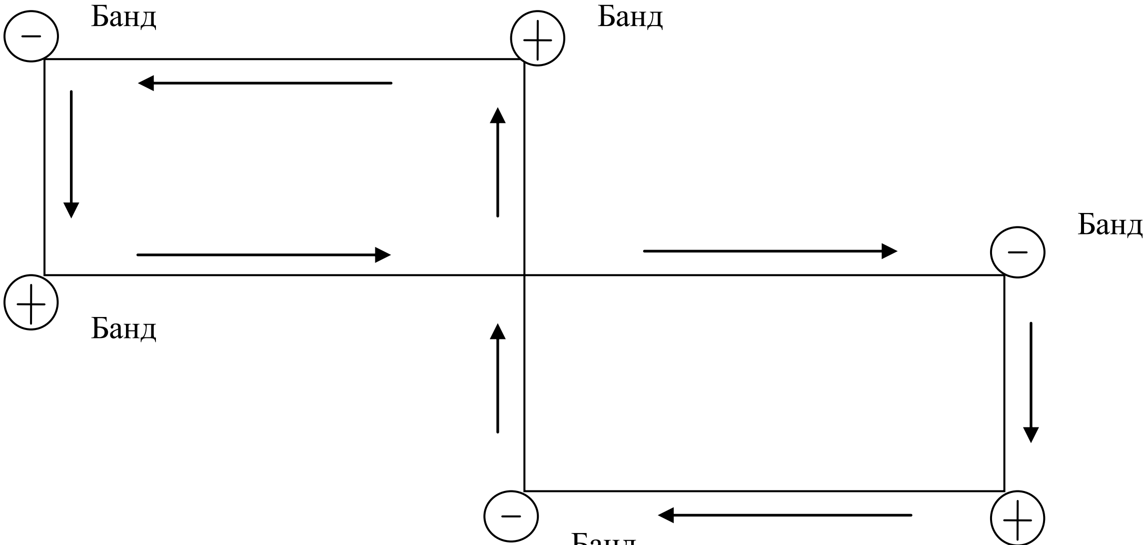
$c_{ke}^1 = u_k + v_e$ (сохта тариф)

ни аниқлаймиз. Бу ерда k, е-бўш катак индекслари. Ундан кейин, ҳар бир бўш катак учун тарифлар фарқини қараймиз:

$$s_{ke} = c_{ke} - c_{ke}^1 = c_{ke} - (u_k + v_e)$$

Агар барча S_{ke} лар манфий бўлмаса, қаралаётган режа оптимал бўлади.

Агар бирор S_{ke} манфий бўлса, у режанинг оптимал эмаслигини англатади, у ҳолда дастлабки режани «яхшилаш» учун барча манфий S_{ke} лар ичидан энг кичигини танлаймиз ва унга мос катакни белгилаб (масалан * белгиси қўйиб), уни қутб деб атаймиз ва учлари банд катакларда ётувчи цикл (ёпиқ синиқ чизиқ) қурамиз (чизмага қаранг)



Қутбга «+» ишорасини қўйиб, бошқа бурчаклардаги катакларга навбат билан «+» ва «-» ишорасини қўйиб чиқамиз. Сўнгра барча «-» ишорали катаклар ичидаги юклардан энг кичик миқдорни аниқлаб, ўша миқдордаги юкни барча «-» катакларда олиб, «+» ишорали катаклардаги юкларга қўшамиз.

Натижада янги режа пайдо бўлади. Ҳосил бўлган режани дастлабки режа сифатида қараб, барча тадбирларни такрорлаймиз ва янги режани ҳам оптималликка текширамиз. Агар оптималлик шарти бажарилмаса, бу жараённи яна такрорлаймиз. Натижада, чекли сондаги қадамдан (интерациядан) сўнг оптимал ечим топилади.

<u>Мисол</u>. Шимолий-ғарбий бурчак усули билан ечилган масаласининг ечимини оптималликка потенциаллар усули билан текширайлик.

		v_1	**v_2**	**v_3**
	b_j / a_i	20	35	15
u_1	40	5 20	6 − 20	8 +
u_2	30	7 0	3 Десак,	11 − 15

$u_2 + v_3 = 11$

$v_2 = 6$

$v_3 = 14$

Энди барча бўш катаклар учун ёрдамчи тарифни (сохта тарифни) $c_{ke}^1 = u_k + v_e$ тенглик орқали аниқлаймиз:

$$c_{13}^1 = u_1 + v_3 = 0 + 14 = 14$$

$$c_{21} = u_2 + v_1 = -3 + 5 = 2$$

Энди ҳар бир бўш катаклар учун тарифлар фарқини аниқлайлик

$$\begin{cases} S_{13} = C_{13} - C_{13}^1 = 8 - 14 = -6 \\ S_{21} = C_{21} - C_{21}^1 = 7 - 2 = 5 \end{cases}$$

буларнинг ичида манфий бор, демак ечим оптимал эмас. Бу ечимни оптималлаштириш учун қуйидагича иш қиламиз:

Энди барча манфий S_{ke} ларнинг ичида энг кичигини белгилаб, уни қутб деб, атаймиз ва қутбни «+» деб, кейинги учини «-» деб, уларни навбат билан алмаштириб, учлари банд катакларда ётувчи цикл ёпиқ синиқ чизиқ қурамиз (чизмадаги каби).

Энди барча «-» ишорали катаклар ичидаги юклардан энг кичик миқдорини аниқлаб, ўша миқдордаги юкни барчак «-» катаклардан олиб, «+» ишорали катаклардаги юкларга қўшамиз.

Натижада янги режа пайдо бўлади $\begin{pmatrix} 20; & 5; & 15 \\ 0; & 30; & 0 \end{pmatrix}$. Ҳосил бўлган режани дастлабки режа сифатида қараб, барча юқоридаги тадбирларни такрорлаймиз ва оптималликка текширамиз. Агар оптималлик шарти бажарилмаса, бу жараённи яна такрорлаймиз ва ҳоказо.

		v_1	v_2	v_3
	a_i \ b_j	20	35	15
u_1	**40**	**5** **20**	**6** **5**	**8** **15**
u_2	30	**7** **0**	**3** **30**	**11** **0**

Банд катаклар учун потенциалларни аниқлаймиз.

$$\left.\begin{aligned} u_1 + v_1 &= 5 \\ u_1 + v_2 &= 6 \\ u_1 + v_3 &= 8 \\ u_2 + v_2 &= 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad u_1 = 0 \quad \text{десак,} \quad \begin{aligned} u_1 &= 0 \\ v_1 &= 5 \\ v_2 &= 6 \\ v_3 &= 8 \\ u_2 &= -6 + 3 = -3 \end{aligned}$$

Шундай қилиб, банд катакларнинг потенциаллари:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0; \; v_1 = 5 \\ u_2 &= -3; \; v_2 = 6 \\ & \qquad v_3 = 8 \end{aligned}$$

Энди барча бўш катаклар учун ёрдамчи тарифни (сохта тарифни) $C_{ke}^1 = U_k + V_e$ тенглик орқали аниқлаймиз.

$$c_{21}^1 = u_2 + v_1 = -3 + 5 = 2$$

$$c_{23}^1 = u_2 + v_3 = -3 + 8 = 5$$

Энди ҳар бир бўш катак учун тарифлар фарқини аниқлаймиз.

$$s_{ke} = c_{ke} - c_{ke}^{1} = c_{ke} - (u_k + v_e)$$

$$\left.\begin{array}{l} S_{21} = 7 - 2 = 5 \\ S_{23} = 11 - 5 = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

буларнинг ичида манфий йўқ, демак ечим оптимал.

Демак, оптимал режа

$$\mathrm{X} = \{20;5;15;0;30;0\} \qquad \text{ёки} \qquad X = \begin{bmatrix} 20 & 5 & 15 \\ 0 & 30 & 0 \end{bmatrix}$$

$f = 5\cdot 20 + 5\cdot 6 + 30\cdot 3 = 100 + 30 + 90 + 120 = 340$ сўм кетган ҳаражат.

Махсулотларни A_i жунатиш пунктларидан B_j кабул килиш пунктларига олиб боришнинг шимолий-царбий бурчак ва энг кам ҳаражатлар усуллари билан дастлабки режасини ва потенциаллар усули билан юк ташувчи машиналарга энг кам харажат килинадиган оптимал режасини тузинг. $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_i$ жунатиш пунктларида мос равишда $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_i$ тонна бир хил махсулотлар булсин. Бу омборлардан $B_1, B_2, B_3, \cdots, B_j$ кабул килиш пункларига $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_j$ тонна махсулотларини олиб бориш керак. Бир тонна махсулотни етказиб бериш учун килинган транспорт харажати куйидаги жадвалда берилган:

жунатиш пунктлари	маҳсулот миқдори	қабул килиш пунктлари				
		B_1	B_2	B_3	……	B_j
A_1	a_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	…	a_{1j}
A_2	a_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	…	a_{2j}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_i	a_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	…	a_{ij}
эҳтиёжлар		b_1	b_2	b_3	……	b_j

89.

b_j / a_i	40	30	20
20	1	2	5
30	4	3	4
40	8	5	1

90.

b_j / a_i	70	40	50
90	9	6	7
20	8	8	4
50	10	7	4

91.

b_j / a_i	30	20	40

92.

b_j / a_i	20	40	30

20	3	5	2
20	4	4	1
50	4	4	6

30	2	3	4
10	1	1	1
50	2	4	2

93.

b_j / a_i	30	60	30
40	4	8	11
60	6	6	7
20	3	10	15

94.

b_j / a_i	90	90	40
60	4	4	4
80	5	8	6
80	3	8	5

95.

b_j / a_i	70	60	60
70	3	2	3
20	1	4	3
100	10	5	4

96.

b_j / a_i	15	30	35
20	10	18	4
40	9	5	8
20	6	4	10

97.

b_j / a_i	80	50	50
50	1	3	6
30	2	8	7
100	5	4	3

98.

b_j / a_i	100	30	50
70	10	10	12
30	10	12	8
80	8	10	10

99.

b_j / a_i	40	60	70
90	5	4	5
30	6	2	3
50	4	5	8

100.

b_j / a_i	80	80	70
60	2	2	1
70	2	5	4
100	4	3	8

101.

b_j / a_i	35	35	60
80	5	5	6
30	8	5	4
20	10	6	6

102.

b_j / a_i	50	35	35
70	1	2	3
10	3	2	1
40	4	4	5

103.

b_j / a_i	100	10	70
60	10	7	5

104.

b_j / a_i	20	20	70
50	10	11	10

60	8	2	4
60	10	1	6

10	5	14	8
50	6	10	12

105.

b_j / a_i	40	40	40
80	5	3	2
20	1	2	4
20	3	1	5

106.

b_j / a_i	250	180	270
277	14	8	17
251	21	10	7
172	3	5	8

107.

b_j / a_i	15	20	30	15
40	8	3	5	3
15	2	4	9	7
25	6	9	4	3

108.

b_j / a_i	68	28	56	32
63	1	4	1	3
45	3	2	2	1
76	5	3	6	2

109.

b_j / a_i	30	40	30
40	6	4	5
20	7	5	3
30	6	1	4
10	5	3	3

Ж А В О Б Л А Р

I. Интеграллар

1. $\frac{2}{3}$. **2.** $\frac{1}{2}$. **3.** $\frac{4}{5}$. **4.** $4\frac{2}{3}$. **5.** $\frac{25}{24}$. **6.** $\frac{2}{3}\sqrt{a^3}$. **7.** 9. **8.** 0. **9.** 1. **10.** $(e-1)^2$. **11.** $\int_0^3 dy \int_{\frac{y}{3}}^{y} f(x,y)dx + \int_3^9 dy \int_{\frac{y}{3}}^{3} f(x,y)dx$. **12.** $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} f(x,y)dy$.

13. $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{\frac{y}{2}}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_{\sqrt{\frac{y}{2}}}^{1} f(x,y)dx$. **14.** $\int_1^2 dy \int_1^y f(x,y)dx + \int_2^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)dx$.

15. $\int_0^4 dy \int_0^{\frac{y}{2}} f(x,y)dx + \int_4^6 dy \int_0^{6-y} f(x,y)dx$.

16. $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_1^3 dy \int_{-1}^{1} f(x,y)dx + \int_3^4 dy \int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} f(x,y)dx$.

17. $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$. **18.** $\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)dx$.

19. $\int_0^1 dy \int_{10-y}^{10} f(x,y)dx + \int_0^1 dy \int_{10y}^{10} f(x,y)dx$. **20.** $\int_{-2}^{2} dx \int_{x-2}^{4-x^2} f(x,y)dy$. **21.** $\frac{3}{4}$.

22. $\frac{1}{8}\left[9+\sqrt{33}-4\sqrt{3}+8\ln\frac{8^4}{(\sqrt{33}-1)^4(\sqrt{3}+1)}\right]$.

23. $\frac{1}{4}\left[252-8\sqrt{3}-11\sqrt{33}\right]$. **24.** $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R f(p\cos\varphi, p\sin\varphi)pdp$. **25.** $\frac{3}{2}\pi a^4$. **26.** $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. **27.** $\frac{\pi a^3}{6}$. **28.** 0. **29.** $\frac{21}{2^9}\pi a^4$. **30.** $\frac{1}{6}(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))$.

31. $a^2\ln 2$. **32.** e^2-1. **33.** $0{,}5\pi$. **34.** $\frac{32}{5}$. **35.** $20\frac{5}{6}$. **36.** $\frac{4}{3}(4\pi-\sqrt{3})$. **37.** $\ln 3$. **38.** $\frac{16}{3}\sqrt{15}$. **39.** $3(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2})$. **40.** $\frac{\pi}{2}ab(a^2+b^2)$. **41.** $V=45$. **42.** $V=\frac{1}{3}abc$. **43.** $V=\frac{25}{4}$. **44.** $V=96\pi$. **45.** $V=186\frac{2}{3}$.

46. $V=\frac{16}{3}\sqrt{2}$. **47.** $V=\frac{48}{5}\sqrt{6}$. **48.** $V=\frac{4\pi}{3}$. **49.** $V=\frac{2187\pi}{32}$.

50. $V=20\frac{1}{4}$. **51.** $\ln\frac{3\sqrt{5}+7}{\sqrt{5}+3}$. **52.** 0. **53.** $\frac{4}{3}(5\sqrt{5}-1)$.

54. $\frac{31}{16}\sqrt{73}+\frac{128}{3}\sqrt{2}+\frac{7}{3}\sqrt{65}$. **55.** $4\pi a\sqrt{a}$. **56.** $\frac{1}{12}$. **57.** $\frac{17}{30}$. **58.** πa^2.

59. $\frac{4}{3}ab^2$. **60.** 62. **61.** $-\frac{1}{4}$. **62.** $\frac{a^2}{6}$. **63.** $\frac{\pi R^2}{4}(4+R^2)$. **64.** 0.

65. $\frac{\pi R^4}{2}$. **66.** $S=4\pi R^2$. **67.** $S=\frac{a^2}{9}(20-3\pi)$. **68.** $S=\sqrt{2}\pi$. **69.** $S=\pi R^3$. **70.** $S=4\pi a^4$.

II-боб. Қаторлар

1. $\frac{1}{2n-1}$. **2.** $\frac{1}{2n}$. **3.** $\frac{n}{2^{n-1}}$. **4.** $\frac{1}{n^2}$. **5.** $\frac{n+2}{(n+1)^2}$. **6.** $\frac{2n}{3n+2}$. **7.** $\frac{n}{n(n+1)}$.

8. $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}$. **9.** $(-1)^{n+1}$. **15.** узоқлашувчи.

16. яқинлашувчи. **17.** яқинлашувчи. **18.** яқинлашувчи. **19.** узоқлашувчи. **20.** узоқлашувчи. **21.** узоқлашувчи. **22.**яқинлашувчи. **23.** узоқлашувчи. **24.** узоқлашувчи. **25**. яқинлашувчи. **26.**узоқлашувчи. **27.** яқинлашувчи. **28.** яқинлашувчи. **29.** абсолют яқинлашувчи. **30.**яқинлашувчи.

31. яқинлашувчи. **32.** яқинлашувчи. **33.** яқинлашувчи. **34.**яқинлашувчи. **35.** абсолют яқинлашувчи. **36.** яқинлашувчи. **37.** яқинлашувчи.

38. яқинлашувчи. **39.** яқинлашувчи. **40.** яқинлашувчи. **41.** узоқлашувчи.

42. узоқлашувчи. **43.** яқинлашувчи. **44.** узоқлашувчи. **45**. яқинлашувчи.

46. узоқлашувчи. **47.** яқинлашувчи. **48.** шартли яқинлашувчи.

49. абсолют яқинлашувчи. **50.** узоқлашувчи. **51.** абсолют яқинлашувчи. **52.** шартли яқинлашувчи. **53.** шартли яқинлашувчи. **54.** шартли яқинлашувчи. **55.**абсолют яқинлашувчи. **56.**узоқлашувчи. **57.** $x>1$ абсолют яқинлашувчи, $x\le 1$ узоқлашувчи.

58. $x>1$ абсолют яқинлашувчи, $0<x\le 1$ абсолют яқинлашувчи эмас, $x\le 0$ узоқлашувчи. **59.** $x>e$ абсалют яқинлашувчи, $1<x\le e$ абсолют яқинлашувчи эмас, $x\le 1$ узоқлашувчи. **60.** $-\infty<x<\infty$. **61.** $-\infty<x<\infty$.

62. $2k\pi<x<(2k+1)\pi \quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$ абсолют яқинлашувчи, қолган нуқталарда узоқлашувчи. . **63.** узоқлашувчи. **64.** $x\ne 0$ абсолют яқинлашувчи. **65.** $x>1,\ x\le -1$. **66.** $x>3,\ x<1$. **67.** $-1<x<1$.

68. $-2\le x<2$. **69.** $-1<x<1$. **70.** $-\frac{1}{\sqrt{2}}\le x\le\frac{1}{\sqrt{2}}$. **71.** $-1<x\le 1$.

72. $-1<x<1$. **73.** $-1<x<1$. **74.** $-\infty<x<\infty$. **75.** $x=0$.

76. $-\infty<x<\infty$. **77.** $a^x=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\ln^n a}{n!} \quad (-\infty<x<\infty)$.

78. $\sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}[1+x-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{\frac{n^2-n}{2}}\frac{x^n}{n!}+\ldots]$. **79.**

$$\cos(x+a)=\cos a-x\sin a-\frac{x^2}{2!}\cos a+\frac{x^3}{3!}\sin a+\frac{x^4}{4!}\cos a+\ldots+$$

$$+\frac{x^n}{n!}\sin[a+\frac{(n+1)\pi}{2}]+\ldots\quad(-\infty<x<\infty).$$

80. $\sin^2 x=\frac{2x^2}{2!}-\frac{2^3x^4}{4!}+\frac{2^5x^6}{6!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\quad(-\infty<x<\infty)$.

81. $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\quad(-\infty<x<\infty)$.

82. $\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots\quad(-\infty<x<\infty)$.

83. $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\quad(-\infty<x<\infty)$.

84. $(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots$.
$(-1<x<1)$

85. $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots\quad(-1<x\le 1)$.

III-боб. Комплекс сонлар ва комплекс аргументли функциялар

1. 8, -1. **2.** $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$, $\frac{2ab}{a^2+b^2}$. **3.** $-\frac{37}{25}$, $\frac{16}{25}$. **4.** 2, 0. **5.** -1, $2\sqrt{6}$. **6.** 1, 0.

7. -2, 4. **8.** $x=-\frac{4}{11}$, $y=\frac{1}{11}$. **9.** $x=6$, $y=-5$.

10. $x=\frac{18+46i}{61}$, $y=\frac{21+13i}{61}$. **11.** $x=\frac{6+13i}{41}$, $y=-\frac{6+13i}{41}$.

12. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i, \quad -i$. **13.** $3+2i, \quad 1+i$. **14.** $\cos\pi + i\sin\pi$. **15.** $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$. **16.** $\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4})$. **17.** $2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$. **18.** $\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$. **19.** $\cos(\pi+\varphi)+i\sin(\pi+\varphi)$. **20.** $2\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2})$. **21.** -64.

22. $2^9(1+\sqrt{3}i)$. **23.** $2^9(1-\sqrt{3}i)$. **24.** $-\frac{1}{16\sqrt{2}}$. **25.** $2+2(1+\sqrt{3})i$. **26.** $2^{10}i$. **36.** $\ln 10+2\pi ki$. **37.** $\ln 15+(2k+\frac{1}{2})\pi i$. **38.** $(2k-\frac{1}{2})\pi i$. **39.** $(2k+\frac{1}{4})\pi i$. **40.** $\ln 5+(2\pi k+arctg\frac{4}{3})i$. **41.** $\ln 2+(2k-\frac{4}{3})\pi i$.

42. $\ln\sqrt{170}+(2\pi k-arctg\frac{11}{7})i$. **43.** $e^{-(2k+1)\pi}$. **44.** $e^{-(2k+\frac{3}{2})\pi}$. **45.** $e^{2k\pi}$.

46. $-e^{(2k+\frac{3}{2})\pi}i$. **47.** $e^{-(2k+\frac{1}{4})\pi}(\cos\ln\sqrt{2}+i\sin\ln\sqrt{2})$.

48. $\sqrt{2}e^{(2k-\frac{1}{4})\pi}\left[\cos(2k\pi-\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2})+i\sin(2k\pi-\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2})\right]$.

49. $e^{(2k-\frac{1}{3})\pi}(\cos\ln 2-i\sin\ln 2)$. **50.** $e^{(2k-\frac{1}{3})\pi}(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$.

51. $3i, \quad 2i+(1-2\sqrt{3})i, \quad -1+i$. **52.** $1, \quad -1-i, \quad \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.

53. $u=x^2-y^2+x, \quad \vartheta=2xy-y$. **54.** $u=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \quad \vartheta=\frac{2xy}{x^2+y^2}$.

55. $u=\frac{-x-y}{2}, \quad \vartheta=\frac{x-y}{2}$. **56.** $u=0, \quad \vartheta=-\frac{x}{y}$.

57. $u=e^x\cos y, \quad \vartheta=e^x\sin y$.

74. $a)\,\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad b)\,-e, \quad c)\,e^{\sqrt{3}}(\cos 1+i\sin 1), \quad d)\,e^2(\cos 5-i\sin 5)$.

75. $ch1\cos 1+ish1\sin 1$. **76.** $-sh1$. **77.** $u=chx\cos y, \quad \vartheta=shx\sin y$.

78. $u=-shy\cos x, \quad \vartheta=chy\sin x$.

79. $u = e^{-2xy}\cos(x^2 - y^2), \quad \vartheta = e^{-2xy}\sin(x^2 - y^2)$. **80.** $u = ch2y, \quad \vartheta = 0$.

81. $z = 0$. **82.** $z = (2k + \frac{1}{2})\pi + [1 - \ln(2 \pm \sqrt{3})]i$.

83. $z = \ln(2\sqrt{2} - 3) + (2k + \frac{1}{2})\pi i, \quad z = \ln(2\sqrt{2} - 3) + (2k + \frac{3}{2})\pi i$.

84. $ch2\cos 2 + sh2\sin 2i$. **85.** $ch\sqrt{3}\sin 1 + sh\sqrt{3}\cos 1i$. **86.** -1. **87.** $-i$.

88. $\frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{5}{8}i$. **89.** $\frac{17}{16} - \frac{15\sqrt{3}}{16}i$. **90.** $-2ze^{-z^2}$. **91.** $-\frac{z+1}{z^2 e^z}$.

92. $-9e^{3z}\sin 3e^{3z}$. **93.** $\cos z e^{\sin z}$. **94.** $-\frac{e^z + e^{-z}}{(e^z - e^{-z})^3}$. **95.** $\cos 2z$.

96. $z_0 = \frac{1}{2}i, \quad w'(z_0) = i$. **97.** $z_0 = 1 - i, \quad w'(z_0) = -1 - 2i$.

98. $z_0 = 0, \quad f'(z_0) = 0$. **99.** $z_0 = 0, \quad f'(z_0) = 1$. **100.** $f(z) = -iz^2$.

101. $\vartheta = -\sin x$. **102.** $\vartheta = \frac{2e^x}{y^3} + 2$. **103.** $u = \ln\frac{2}{x+y}$. **104.** $f(z) = 2shz - z^2$.

105. $f(z) = 2\cos 2z + z$. **106.** $-\frac{2}{3} - \frac{2}{3}i$. **107.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **108.** $i(1 - \frac{1}{e})$. **109.** -2. **110.** 0. **111.** $2\pi i$. **112.** $-2(1+i)$. **113.** 0.

Мундарижа

Адабиётлар

1. Соатов Я.У. Олий математика. II-жилд. 1992 й.
2. Шнейдер В. ва бошқалар Олий математика қисқа курси. II жилд.1987 й.
3. Берман Г.Н. Сборник задач по математическому анализу. 1985 г.

4. Под редакцей Демедовича Б.П. Задачи и упражнения по математическому анализу
5. Кузнецов Ю. Н. и др. Математическое программирование Москва 1980 г.
6. Замков О. О. и др. Математические методх в экономике Москва 2000 г.
7. Федосеев В. В. и др. Экономика-математические методх Москва 2000 г.

Қўшимча адабиёт

1. Азларов Т.А. Мансуров Х. Математик анализ. II жилд. 1998 й.
2. Бермент А.Ф. Краткий курс математического анализа для ВТУЗОВ. 1971 г.
3. Пискунов Н. Дифференциал ва интеграл ҳисоб. I, II жилд 1977 й.
4. Шипачев В.С. Основх вхсшего математики. 1989 г.