МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА

имени МИРЗО УЛУГБЕКА

На правах рукописи

УДК 517.98

ЗАКИРОВ БОТИР САБИТОВИЧ

НЕКОММУТАТИВНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДЛЯ СЛЕДОВ МАГАРАМ И ПРОСТРАНСТВА ОРЛИЧА-КАНТОРОВИЧА

01.01.01 – Математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Ташкент – 2011

Работа выполнена в отделе «Алгебра и анализ» института Математики и информационных технологий Академии Наук Республики Узбекистан

Научный консультант: доктор физико-математических наук, профессор Чилин Владимир Иванович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Кусраев Анатолий Георгиевич,
доктор физико-математических наук, доцент Абдуллаев Рустам Зайирович,
доктор физико-математических наук, доцент Кудайбергенов Каримберген Кадирбергенович

Ведущая организация: Институт математики имени С.Л. Соболева Сибирского Отделения Российской Академии Наук

Защита состоится «___»___________ 2011 года в _____ часов на заседании объединенного специализированного совета Д 067.02.03 при Национальном Университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека по адресу: 700174, г. Ташкент, ВУЗ городок, Национальный Университет Узбекистана, механико-математический факультет, ауд. Г-303.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Национального Университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека.

Автореферат разослан «___» ___________ 2011 г.

Ученый секретарь
специализированного совета
кандидат физико-математических
наук, доцент Ю.Х. Эшкабилов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИИ

Актуальность работы. Понятие векторного пространства, нормированного элементами векторной решетки, впервые появилось в работах Л.В. Канторовича в середине 30-х годов прошлого столетия. В последующем теория реше-точно нормированных пространств интенсивно развивалась и получила широкие приложения в различных областях математики. Новейшие достижения в теории решеточно нормированных пространств, в основном, связаны с работами С.С. Кутателадзе, А.Г. Кусраева и их учеников. Подробная информация о современном состоянии этой теории имеется в монографиях А.Г. Кусраева ([1] Мажорируемые операторы. – М.: Наука, 2003. – 619 с.) и А.Г. Кусраева, С.С. Кутателадзе ([2] Введение в булевозначный анализ. – М.: Наука, 2005. – 525 с.).

Важнейшим классом решеточно нормированных пространств являются пространства Банаха-Канторовича, т.е. (bo)-полные разложимые решеточно нормированные пространства. Впервые необычная аксиома разложимости для векторной нормы появилась, именно, в работе Л.В.Канторовича. В последующих исследованиях других авторов эта аксиома часто опускалась как несущественная. Глубокий смысл аксиомы разложимости обнаружил А.Г. Кусраев в связи с булевозначным анализом. Была получена булевозначная реализация пространств и решеток Банаха-Канторовича. В частности, было установлено, что всякое пространство Банаха-Канторовича над расширенным K-пространством является модулем над K-пространством и модульные операции согласованы с векторной нормой пространства.

В 60-х годах прошлого века в работах М.Я. Антоновского, В.Г. Болтянского и Т.А.Сарымсакова были заложены основы теории топологических полуполей – специального класса K-пространств, которая нашла многие приложения в топологии, функциональном анализе и теории вероятностей. В частности, была построена основа для теории банаховых модулей над алгеброй L^0 всех измеримых действительных функций. Поэтому не случайно, что дальнейшее развитие теории банаховых L^0-модулей и теории пространств Банаха-Канторовича над L^0 нашло свое отражения в работах узбекских математиков Ш.А. Аюпова, В.И. Чилина, И.Г. Ганиева, К.К. Кудайбергенова и других.

Содержательные примеры пространств Банаха-Канторовича, как правило, строятся с помощью теории интегрирования для векторных мер со значениями в K-пространствах, в частности, в алгебрах L^0. Важными примерами таких пространств являются "векторнозначные" аналоги L^p-пространств, теория которых изложена в монографиях А.Г. Кусраева и Т.А.Сарымсакова.

Развитие теории алгебр фон Неймана и теории интегрирования для следов и весов, заданных на них, дало возможность строить некоммутативные

L^p-пространства, которые стали центральным объектом для многочисленных исследований, как в самой теории некоммутативного интегрирования, так и в разнообразных ее приложениях. Здесь можно отметить работы Е. Нельсона, Ф. Едена, Т. Фака и Х. Косаки, а также обзор Г. Пизье, К. Шу.

Наличие центрозначных следов на конечных алгебрах фон Неймана делает естественным распространение теории интегрирования для следов, принимающих значения в комплексной порядково полной векторной решетке $F_{\mathbb{C}}$. Если исходная алгебра фон Неймана – коммутативная, то построение $F_{\mathbb{C}}$-значного интегрирования для нее является составной частью исследований свойств порядково непрерывных положительных отображений векторных решеток. Теория таких отображений довольно подробно описана в монографии А.Г. Кусраева [1]. Важное место среди этих отображений занимают операторы, обладающие свойством Магарам. L^p-пространства, ассоциированные с такими операторами, являются содержательными примерами векторных решеток Банаха-Канторовича.

В настоящей диссертационой работе впервые изучаются точные нормальные следы Φ на алгебре фон Неймана со значениями в произвольной комплексной порядково полной векторной решетке. Дается полное описания таких следов, в случае, когда Φ есть след Магарам. Впервые строится теория некоммутативного интегрирования для $F_{\mathbb{C}}$-значных следов Магарам. С помощью этой теории описывается новый класс пространств Банаха-Канторовича – некоммутативные L^p-пространства, ассоциированные с Φ, и дается описание сопряженных пространств к ним.

В связи с развитием теории интегрирования для L^0-значных мер, наряду с L^p-пространствами, естественно рассматривать "L^0-вариант" классических пространств Орлича. В настоящей диссертационной работе рассматриваются пространства Орлича-Канторовича $L_{\mathrm{M}}(m)$, ассоциированные с произвольной L^0-значной мерой m и N-функцией M. Эти пространства $L_{\mathrm{M}}(m)$ являются новыми примерами решеток Банаха-Канторовича. Кроме того, в диссертации описывается сопряженное пространство Банаха-Канторовича для $L_{\mathrm{M}}(m)$ и дается критерий рефлексивности $L_{\mathrm{M}}(m)$.

При построении примеров пространств Банаха-Канторовича с помощью теории интегрирования для мер со значениями в K-пространствах F центральную роль играет свойство модулярности F-значной меры. Впервые такие меры, заданные на полной булевой алгебре B, рассматривались в работах Д. Магарам. Подробное изложение теории мер со свойством модулярности дано в монографиях А.Г. Кусраева и А.Г. Кусраева, С.А. Малюгина.

В случае, когда F есть алгебра $L^0(\Omega)$ всех измеримых действительных функций на пространстве с мерой (Ω,Σ,μ), наличие свойства модулярности у меры m дала возможность И.Г. Ганиеву представить булеву алгебру B в виде измеримого расслоения булевых алгебр с числовыми мерами над Ω. Естественно возникает вопрос о внутренней характеризации тех булевых алгебр B, у которых почти все слои их измеримого расслоения являются непрерывными (соответственно, атомическими) булевыми алгебрами.

В настоящей диссертации впервые вводятся понятия $\mathrm{B}(\Omega)$-атомических и $\mathrm{B}(\Omega)$-непрерывных булевых алгебр и дается представление таких алгебр в виде измеримого расслоения соответственно атомических и непрерывных булевых алгебр с числовыми мерами.

В построении теории пространств Банаха-Канторовича важное место занимают методы булевозначного анализа, позволяющие в соответствующей булевозначной модели теории множеств интерпретировать решетки Банаха-Канторовича и их ограниченные гомоморфизмы как соответственно, банаховы решетки и ограниченные линейные отображения ([2], XI). Такой подход к теории решеток Банаха-Канторовича дает возможность с помощью принципа переноса ([2], 4.4) получать различные свойства этих решеток, аналогичные соответствующим свойствам классических банаховых решеток. Естественно, что использование этого метода требует дополнительных исследований в установлении "нужных" взаимосвязей между объектами $\mathbf{2}$-значной и булевозначной моделей теории множеств.

Другим важным подходом к изучению пространств Банаха-Канторовича является теория непрерывных и измеримых банаховых расслоений. Представление пространство Банаха-Канторовича в виде пространства измеримых сечений измеримых банаховых расслоений позволяет получить нужные свойства этих пространств с помощью соответствующей послойной их проверки. Этот способ активно использовался в исследованиях А.Е. Гутмана, В.И. Чилина, И.Г. Ганиева, К.К. Кудайбергенова, решивших целый ряд задач, связанных с пространствами Банаха-Канторовича.

В настоящей диссертации также используется указанный метод измеримых банаховых расслоений, с помощью которого, в частности, устанавливаются различные варианты эргодических теорем для сжатий решеток Орлича-Канторовича.

Степень изученности проблемы. В работах В.И. Чилина, И.Г. Ганиева и В.И. Чилина, А.А. Каца рассматривались элементы теории интегрирования для некоммутативных алгебр фон Неймана M относительно следов, принимающих значения в центре алгебры M.

В 1998 году в работе И.Г. Ганиева было установлено, что любую булеву алгебру B с модулярной L^0-значной мерой m можно представить в виде пространства измеримых сечений измеримого расслоения булевых алгебр с числовыми мерами. В частности, было показано, что решетку Банаха-Канторовича $L^p(\mathrm{B},m)$, построенную по мере m, можно представить в виде пространства измеримых сечений измеримого расслоения L^p-пространств, ассоциированных с числовыми мерами. Этот результат позволил В.И. Чилину и И.Г. Ганиеву получить варианты эргодических теорем для сжатий в решетке $L^p(\mathrm{B},m)$.

Первый шаг в направлении построение "векторнозначного" аналога пространства Орлича был сделан в работе А.Х. Батура и О.Я. Бендерского, где определены пространства Орлича для меры со значениями в кольце измеримых функций на отрезке [0,1].

Связь диссертационной работы с тематическими планами НИР. Исследования проводились по госбюджетной теме «Исследования функциональных пространств и некоторые вопросы математики и их приложения» в рамках НИР Ташкентского института инженеров железнодорожного транспорта.

Цель исследования. Построение теории некоммутативного интегрирования для следов Магарам со значениями в произвольной комплексной порядково полной векторной решетке. Описание некоммутативных L^p- пространств, ассоцированных со следом Магарам.

Построение теории решеток Орлича-Канторовича, ассоциированных с мерой, принимающей значения в алгебре измеримых функций.

Задачи исследования. Развитие теории пространств Банаха-Канторовича и установление ее связи с теорией некоммутативного интегрирования относительно следов Магарам.

Объекты и предмет исследования. Пространство Банаха-Канторовича, векторнозначная мера, алгебра измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана, след Магарам.

Методы исследования. Применены общие методы функционального анализа, теории операторных алгебр и теории измеримых банаховых расслоений.

Основные положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся

1. Построение теории некоммутативного интегрирования для следов со значениями в пространствах Канторовича-Пинскера.

2. Описание некоммутативных L^p-пространств, ассоциированных с векторнозначным следом и построение теории двойственности для них.

3. Построение теории пространств Орлича-Канторовича, ассоциированных с дизъюнктно разложимой L^0-значной мерой m.

Научная новизна. В работе получены следующие новые результаты:
– дано полное описания следов Магарам на алгебре фон Неймана со значениями в произвольной комплексной порядково полной векторной решетке;

– построено некоммутативное L^1-пространство, ассоциированное со следом Магарам, являющееся пространством Банаха-Канторовича;
– дано полное описание сопряженного пространства к некоммутативному L^1-пространству, ассоциированному со следом Магарам;
– доказан вариант теоремы Радона-Никодима для следов Магарам;
– введен новый класс пространств Банаха-Канторовича – некоммутативные L^p-пространства, ассоциированные со следом Магарам, $p > 1$, и дано полное описание сопряженных пространств к этим пространствам;
– построен класс решеток Орлича-Канторовича, ассоциированных с дизъюнктно разложимой L^0-значной мерой и описаны свойства этих решеток;
– дано описание сопряженных пространств для решеток Орлича-Канторовича и выяснены условия, при которых эти решетки рефлексивны;
– доказаны различные варианты эргодических теорем для положительных сжатий решеток Орлича-Канторовича;
– выделен класс полных булевых алгебр с дизъюнктно разложимой L^0-значной мерой, допускающих представления в виде измеримого расслоения непрерывных (соответственно, атомических) булевых алгебр.

Научная и практическая значимость результатов исследования. В работе решена задача построения теории интегрирования для следов Магарам и даны её приложения к теории пространств Банаха-Канторовича. Результаты и методы, представленные в работе, могут быть использованы при исследованиях, связанных с теорией пространств Банаха-Канторовича, теорией операторных алгебр, а также теорией векторных мер.

Реализация результатов. Диссертационная работа носит теоретический характер.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на семинаре "Операторные алгебры и их приложения" (Институт математики и информационных технологии АН РУз, руководитель академик АН РУз Ш.А. Аюпов, 2006-2010), на городском семинаре по функциональному анализу (Национальный Университет Узбекистана, руководитель профессор В.И. Чилин, 2006-2010), на семинаре при специализированном совете Д 067.02.03 (Национальный Университет Узбекистана, руководитель академик АН РУз А.С. Садуллаев, 2010), на международной конференции по функциональному анализу (Киев, Украина, 2001), на международной конференции "Теория операторов. Комплексный анализ, Математическое моделирование", (Волгодонск, Россия, 2007, 2009), на международной конференции "Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования" (Владикавказ, Россия, 2008), на республиканской научной конференции "Современные проблемы и актуальные вопросы функционального анализа" (Нукус, 2006), на республиканской научной конференции "Современные проблемы математики, механики и информационных технологий" (Ташкент, 2008).

Опубликованность результатов. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-25]. Из этих 25 работ 12 написаны в соавторстве; во всех случаях вклад каждого из соавторов в работу равноценен.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы из 97 наименований. В диссертации теоремы, леммы, предложения каждой главы нумеруются тремя цифрами, из которых первая означает номер главы, вторая номер параграфа, третий – порядковый номер внутри параграфа.

Общее число страниц диссертационной работы – 247.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении дается краткий обзор работ, относящихся к тематике диссертациионной работы, а также приводятся обозначения, определения и некоторые известные результаты, необходимые для изложения основного текста диссертации.

В первой главе строится теория некоммутативного интегрирования для следов, заданных на алгебрах фон Неймана и принимающих значения в комплексной порядково полной векторной решетке.

В §1.1 изучаются следы на алгебре фон Неймана M со значениями в комплексных пространствах Канторовича-Пинскера $F_{\mathbb{C}}$. С помощью точного нормального $F_{\mathbb{C}}$-значного следа определяется сходимость на алгебре $S(\mathrm{M})$ измеримых операторов, присоединенных к M, и устанавливается, что эта сходимость совпадает со сходимостью локально по мере.

Пусть $\mathrm{M}-$ произвольная алгебра фон Неймана, $F-$ порядково полная векторная решетка, $F_{\mathbb{C}}=F\oplus iF$ комплексификация F. Линейное отображение $\Phi:\mathrm{M}\to F_{\mathbb{C}}$ называется $F_{\mathbb{C}}$-*значным следом*, если $\Phi(x^*x)=\Phi(xx^*)\geq 0$ для всех $x\in\mathrm{M}$. След Φ называется *точным*, если равенство $\Phi(x^*x)=0$ влечет $x=0$; *нормальным*, если из x_α, $x\in\mathrm{M}_h$, $x_\alpha\uparrow x$ следует, что $\Phi(x_\alpha)\uparrow\Phi(x)$.

В дальнейшем будем считать, что F есть пространство Канторовича-Пинскера. В этом случае F линейно и порядково изоморфно фундаменту в K-пространстве $L^0(\Omega)=L^0(\Omega,\Sigma,\mu)$ всех классов измеримых действительных функций, заданных на некотором измеримом пространстве (Ω,Σ,μ) с мерой μ, обладающей свойством прямой суммы. Пусть $\mathrm{B}=\mathrm{B}(\Omega)-$ полная булева алгебра всех идемпотентов в $L^0(\Omega)$ и $\mathbf{1}_\mathrm{B}-$ единица в B. Обозначим через

$L^{\infty}(\Omega)=L^{\infty}(\Omega,\Sigma,\mu)$ K-пространство всех классов существенно ограниченных действительных измеримых функций, заданных на (Ω,Σ,μ).

Пусть $S(\mathrm{M})-*$-алгебра всех измеримых операторов присоединенных к M, $t(\mathrm{M})-$ топология сходимости локально по мере в $S(\mathrm{M})$. Для каждого подмножества $\mathrm{E}\subset S(\mathrm{M})$ положим $\mathrm{E}_h=\{x\in \mathrm{E}: x=x^*\}$, $\mathrm{E}_+=\{x\in \mathrm{E}: x\geq 0\}$.

С каждым точным нормальным следом $\Phi:\mathrm{M}\to F_{\mathbb{C}}$ свяжем отображение $\rho_\Phi: S(\mathrm{M})\times S(\mathrm{M})\to F$, определяемое по правилу $\rho_\Phi(x,y)=\Phi\left(|x-y|(\mathbf{1}+|x-y|)^{-1}\right)$, $x,y\in S(\mathrm{M})$. Отображение $\rho_\Phi(x,y)$ является F-значной метрикой на $S(\mathrm{M})$.

Пусть $t(\mathrm{B})-$ топология сходимости локально по мере в $L^0_{\mathbb{C}}(\Omega)$, $t_\Phi-$ топология в $S(\mathrm{M})$, порожденная метрикой ρ_Φ. Через $\{\mathrm{E}_\lambda(x)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ будем обозначать спектральное семейство проекторов для $x\in S_h(\mathrm{M})$. Основным результатом §1.1 является следующая

Теорема 1.1.5. *Пусть* $x_\alpha, x\in S(\mathrm{M})$. *Следующие условия эквивалентны*:

(i) $x_\alpha \xrightarrow{t_\Phi} x$;

(ii) $x_\alpha \xrightarrow{t(\mathrm{M})} x$;

(iii) $\Phi\left(\mathrm{E}^{\perp}_\lambda(|x_\alpha-x|)\right)\xrightarrow{t(\mathrm{B})} 0$ *для всех* $\lambda>0$.

В §1.2 для следа Φ, заданного на алгебре фон Неймана M строится пространство $L^1(\mathrm{M},\Phi)$ интегрируемых операторов. Получены варианты теорем о монотонной сходимости, о мажорируемой сходимости и Фату для таких пространств.

Так как F есть фундамент в $L^0(\Omega,\Sigma,\mu)$ и $\mathcal{A}=L^{\infty}_{\mathbb{C}}(\Omega,\Sigma,\mu)$ является коммутативной алгеброй фон Неймана, то $S(\mathcal{A})=L^0_{\mathbb{C}}(\Omega,\Sigma,\mu)$ и можно считать, что Φ есть точный нормальный $S(\mathcal{A})$-значный след на M. Оператор $x\in S(\mathrm{M})$ называется Φ-*интегрируемым*, если существует такая последовательность $\{x_n\}\subset \mathrm{M}$, что $x_n\xrightarrow{t(\mathrm{M})} x$ и $\Phi(|x_n-x_m|)\xrightarrow{t(\mathcal{A})} 0$ при $n,m\to\infty$. В этом случае, существует элемент $\widehat{\Phi}(x)\in S(\mathcal{A})$, такой, что $\Phi(x_n)\xrightarrow{t(\mathcal{A})}\widehat{\Phi}(x)$. Пусть $L^1(\mathrm{M},\Phi)$ множество всех Φ-интегрируемых операторов из $S(\mathrm{M})$. Для каждого $x\in L^1(\mathrm{M},\Phi)$ положим $\|x\|_{1,\Phi}=\widehat{\Phi}(|x|)$.

Теорема 1.2.5. $\left(L^1(\mathrm{M},\Phi),\|\cdot\|_{1,\Phi}\right)-(bo)$*-полное решеточно нормированное пространство.*

Теорема 1.2.6. (i) (Вариант теоремы о монотонной сходимости). *Если* $\{x_\alpha\}$ *– возрастающая сеть из* $L^1_h(\mathrm{M},\Phi)$*, а сеть* $\{\widehat{\Phi}(x_\alpha)\}$ *– ограничена в* $S_h(\mathbf{A})$*, то существует такое* $x \in L^1_h(\mathrm{M},\Phi)$*, что* $x_\alpha \uparrow x$ *и* $\widehat{\Phi}(x_\alpha) \uparrow \widehat{\Phi}(x)$.

(ii) (Вариант теоремы о мажорируемой сходимости). *Если* $x_\alpha \in S(\mathrm{M})$, $x_\alpha \xrightarrow{t(\mathrm{M})} x$, $|x_\alpha| \le y \in L^1_+(\mathrm{M},\Phi)$ *для всех* α*, то* $x \in L^1(\mathrm{M},\Phi)$ *и* $\| x_\alpha - x \|_{1,\Phi} \xrightarrow{t(\mathbf{A})} 0$*, в частности,* $\widehat{\Phi}(x_\alpha) \xrightarrow{t(\mathbf{A})} \widehat{\Phi}(x)$.

(iii) *Для оператора* $x \in S_+(\mathrm{M})$ *следующие условия эквивалентны*:

1) $x \in L^1_+(\mathrm{M},\Phi)$;

2) *множество* $\{\Phi(y) : 0 \le y \le x,\ y \in \mathrm{M}\}$ *ограничено в* $S_h(\mathbf{A})$*;*

3) *последовательность* $\{\Phi(x\mathrm{E}_n(x))\}$ *ограничена в* $S_h(\mathbf{A})$.

В этом случае, $\widehat{\Phi}(x) = sup\{\Phi(y) : 0 \le y \le x,\ y \in \mathrm{M}\} = \sup\limits_{n \ge 1} \Phi(x\mathrm{E}_n(x))$.

(iv) (Вариант теоремы Фату). *Если* $\{x_\alpha\} \subset L^1(\mathrm{M},\Phi)$*,* $x_\alpha \xrightarrow{t(\mathrm{M})} x$ *и* $\{\widehat{\Phi}(|x_\alpha|)\}$ *– ограниченная сеть в* $S_h(\mathbf{A})$, *то* $x \in L^1(\mathrm{M},\Phi)$ *и* $\widehat{\Phi}(|x|) \le \sup\limits_{\alpha} \widehat{\Phi}(|x_\alpha|)$.

В §1.3 рассматриваются точные нормальные следы Φ на алгебре фон Неймана M со значениями в произвольной комплексной порядково полной векторной решетке $F_{\mathbb{C}}$. Дается полное описание таких следов, в случае, когда Φ есть след Магарам. Устанавливается, что $L^1(\mathrm{M},\Phi)$ – является пространством Банаха-Канторовича в том и только в том случае, когда след Φ обладает свойством Магарам. Кроме того, доказывается вариант теоремы Радона-Никодима для следов Магарам.

Будем говорить, что след $\Phi : \mathrm{M} \to F_{\mathbb{C}}$ обладает *свойством Магарам*, если для любых $x \in \mathrm{M}_+$, $0 \le f \le \Phi(x)$, $f \in F$, существует такое $y \in \mathrm{M}_+$, что $y \le x$ и $\Phi(y) = f$. Точный нормальный $F_{\mathbb{C}}$-значный след Φ, обладаюший свойством Магарам, будем называть *следом Магарам* (ср.[1], 3.4.1).

В дальнейшем будем считать, что F имеет порядковую единицу $\mathbf{1}_F$. Пусть Q – стоуновский компакт полной булевой алгебры $\mathrm{B}(F)$ всех единичных элементов из F, $C_\infty(Q)$ – расширенное K-пространство всех непрерывных функций $x : Q \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty,+\infty]$, принимающих значения $\pm\infty$ лишь на нигде не плотных множествах. Отождествим F с фундаментом в

$C_\infty(Q)$, содержащим алгебру $C(Q)$ всех непрерывных числовых функций на Q, при этом, $\mathbf{1}_F$ отождествляется с функцией, тождественно равной единице.

Следующая теорема дает описание следов Магарам на алгебрах фон Неймана.

Теорема 1.3.1. *Пусть* $\Phi -$ $F_{\square}$*-значный след Магарам на алгебре фон Неймана* M*,* $\Phi_{\mathrm{M}} -$ *центрозначный след на* M. *Тогда существуют такие подалгебра фон Неймана* $\mathbf{A}$ *в центре* $\mathrm{Z}(\mathrm{M})$ *алгебры* M*,* $*$*-изоморфизм* ψ *из* $\mathbf{A}$ *на* $*$*-алгебру* $C(Q)_{\square}$*, идемпотентный линейный положительный нормальный оператор* $\mathbf{E}$ *из* $\mathrm{Z}(\mathrm{M})$ *на* $\mathbf{A}$ *с* $\mathbf{E}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$*, что*

1) $\Phi(x) = \Phi(\mathbf{1})\psi\left(\mathbf{E}(\Phi_{\mathrm{M}}(x))\right)$ *для всех* $x \in \mathrm{M}$*;*

2) $\Phi(zy) = \Phi\left(z\mathbf{E}(y)\right)$ *для всех* $z, y \in \mathrm{Z}(\mathrm{M})$*;*

3) $\Phi(zy) = \psi(z)\Phi(y)$ *для всех* $z \in \mathbf{A}$ *,* $y \in \mathrm{M}$.

Из теоремы 1.3.1. следует, что $*$-алгебра $\mathbf{B} = C(Q)_{\square}$ $-$ $*$-изоморфна подалгебре фон Неймана в $\mathrm{Z}(\mathrm{M})$. Поэтому $\mathbf{B}$ есть коммутативная алгебра фон Неймана и $*$-алгебра $C_\infty(Q)_{\square}$ отождествляется с $*$-алгеброй $S(\mathbf{B})$. В частности на $\mathrm{B}(F)$ существует разделяющее семейство вполне аддитивных числовых мер и поэтому $F -$ является пространством Канторовича-Пинскера ([1], 1.4.10).

Теорема 1.3.2. *Пусть* $\Phi -$*точный нормальный* $F_{\square}$*-значный след, заданный на алгебре фон Неймана* M. *Следующие условия эквивалентны:*

(i) Φ *обладает свойством Магарам;*

(ii) $L^1(\mathrm{M},\Phi)$ *является пространством Банаха-Канторовича*.

Будем говорить, что нормальный $F_{\square}$-значный след Ψ, заданный на M, *абсолютно непрерывен относительно* $F_{\square}$ *-значного следа Магарам* Φ, если $s(\Psi(p)) \le s(\Phi(p))$ для всех проекторов p из M, где $s(f)-$ носитель элемента $f \in F$.

Следующая теорема является вариантом теоремы Радона-Никодима для следов Магарам.

Теорема 1.3.5. *Пусть* $\Psi -$ *нормальный* $F_{\square}$*-значный след на* M*, абсолютно непрерывный относительно следа Магарам* Φ. *Тогда существует такой оператор* $y \in L^1_+(\mathrm{M},\Phi) \cap S(\mathrm{Z}(\mathrm{M}))$*, что*

$$\Psi(x) = \overset{\square}{\Phi}(yx) \text{ для всех } x \in \mathrm{M}.$$

В §1.4 дается полное описание сопряженного пространства $L^1(\mathrm{M},\Phi)^*$ к пространству Банаха-Канторовича $L^1(\mathrm{M},\Phi)$, построенному по следу Магарам Ф. Для этого используется конструкция центрального расширения алгебры фон Неймана M.

Пусть $\mathcal{A}$ произвольная подалгебра фон Неймана в центре $\mathrm{Z}(\mathrm{M})$ алгебры фон Неймана M, и $\mathrm{P}(\mathcal{A})$ – решетка всех проекторов в $\mathcal{A}$. Обозначим через $\mathrm{E}(\mathrm{M},\mathcal{A})$ множество всех тех операторов $x \in S(\mathrm{M})$, для которых существует разбиение единицы $\{z_j\}_{j\in J} \subset \mathrm{P}(\mathcal{A})$ и набор операторов $\{x_j\}_{j\in J} \subset \mathrm{M}$, такие, что $xz_j = x_j z_j$ для всех $j \in J$. Ясно, что $\mathrm{E}(\mathrm{M},\mathcal{A})$ есть $*$-подалгебра в $S(\mathrm{M})$, содержащая M. $*$-Алгебра $\mathrm{E}(\mathrm{M},\mathcal{A})$ называется *центральным расширением алгебры* M *относительно подалгебры* $\mathcal{A} \subset \mathrm{Z}(\mathrm{M})$.

Для каждого $x \in \mathrm{E}(\mathrm{M},\mathcal{A})$ определен элемент

$$\|x\|_{\mathcal{A}} = inf\{a \in S_+(\mathcal{A}) : |x| \le a\}$$

из $S_+(\mathcal{A})$. Отображение $\|\cdot\|_{\mathcal{A}} : \mathrm{E}(\mathrm{M},\mathcal{A}) \to S_+(\mathcal{A})$ является разложимой $S_h(\mathcal{A})$-значной нормой на $\mathrm{E}(\mathrm{M},\mathcal{A})$.

Пусть $\Phi -$ F-значный след Магарам на алгебре фон Неймана M. Согласно теоремы 1.3.1, можно считать, что $\Phi -$ $S(\mathcal{B})$-значный след, где $\mathcal{B} = C_\infty(Q)$ – коммутативная алгебра фон Неймана, изоморфная подалгебре фон Неймана $\mathcal{A}$ в центре $\mathrm{Z}(\mathrm{M})$. Для каждого $y \in \mathrm{E}(\mathrm{M},\mathcal{A})$ определим линейное отображение $\mathrm{T}_y : L^1(\mathrm{M},\Phi) \to S(\mathcal{B})$, полагая $\mathrm{T}_y(x) = \Phi(xy)$, $x \in L^1(\mathrm{M},\Phi)$. Это отображение $S(\mathcal{B})$-ограничено, т.е. существует такое $c \in S_+(\mathcal{B})$, что $|\mathrm{T}_y(x)| \le c\|x\|_{1,\Phi}$, в частности, $\mathrm{T}_y \in L^1(\mathrm{M},\Phi)^*$.

В следующей теореме дается полное описание сопряженного пространства $L^1(\mathrm{M},\Phi)^*$.

Теорема 1.4.11. *Для каждого* $\mathrm{T} \in L^1(\mathrm{M},\Phi)^*$ *существует единственное* $y \in \mathrm{E}(\mathrm{M},\mathcal{A})$, *такое, что* $\mathrm{T} = \mathrm{T}_y$, *при этом* $\|\mathrm{T}_y\| = \|y\|_{\mathcal{A}}$.

Таким образом, линейное пространство $L^1(\mathrm{M},\Phi)^*$ с $S_h(\mathcal{B})$-значной нормой $\|\mathrm{T}\|, \mathrm{T} \in L^1(\mathrm{M},\Phi)^*$, является пространством Банаха-Канторовича изометричным пространству $(\mathrm{E}(\mathrm{M},\mathcal{A}), \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$.

Линейное $S(\mathcal{B})$-ограниченное отображение $\mathrm{T} : \mathrm{E}(\mathrm{M},\mathcal{A}) \to S(\mathcal{B})$ называется порядково непрерывным, если из $x_\alpha, x \in \mathrm{E}_h(\mathrm{M},\mathcal{A})$, $x_\alpha \uparrow x$, следует, что $\mathrm{T}(x_\alpha) \xrightarrow{t(\mathcal{B})} \mathrm{T}(x)$. Множество всех порядково непрерывных линейных отображений из $E(M,\mathcal{A})$ в $S(\mathcal{B})$ обозначим через $E(M,\mathcal{A})^{\sim}$. Ясно, что $E(M,\mathcal{A})^{\sim}$ есть линейное подпространство в $E(M,\mathcal{A})^{*}$.

Теорема 1.4.16. (i) *Если* $y \in L^1(M,\Phi)$, *то линейное отображение* $T_y(x) = \Phi(xy)$ *из* $E(M,\mathcal{A})$ *в* $S(\mathcal{B})$ *является порядково непрерывным. При этом,* $||T_y|| = ||y||_{1,\Phi}$.

(ii) *Для любого* $T \in E(M,\mathcal{A})^{\sim}$ *существует единственное* $y \in L^1(M,\Phi)$, *для которого* $T = T_y$.

Из теоремы 1.4.16. непосредственно вытекает следующее

Следствие 1.4.17. *Пространства Банаха-Канторовича*
$\left(E(M,\mathcal{A})^{\sim}, ||\cdot||_{E(M,\mathcal{A})^{*}}\right)$ *и* $\left(L^1(M,\Phi), ||\cdot||_{1,\Phi}\right)$ − *изометрически изоморфны.*

Во второй главе изучаются $*$-гомоморфизмы $*$-алгебр локально измеримых операторов и вводится новый класс пространств Банаха-Канторовича − некоммутативные L^p-пространства, ассоциированные со следом Магарам для $p > 1$. Дается полное описание сопряженных пространств к этим пространствам.

В §2.1 устанавливаются связи между свойствами вполне аддитивности, нормальности и непрерывности в топологии сходимости локально по мере для $*$-гомоморфизмов $*$-алгебр локально измеримых операторов.

Пусть $LS(M)$ − $*$-алгебра локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана M, $t(M)$ − топология сходимости локально по мере в $LS(M)$.

$*$-Гомоморфизм $U : LS(M) \to LS(M)$ называется нормальным (соответственно, вполне аддитивным), если $U\left(\sup_{\alpha} x_\alpha\right) = \sup_{\alpha} U(x_\alpha)$ (соответственно, $U(\sup E) = \sup U(E)$) для любой возрастающей ограниченной сверху сети $\{x_\alpha\} \subset LS_h(M)$ (соответственно, для любого семейства E попарно ортогональных проекторов из M).

Основным результатом §2.1 является следующая

Теорема 2.1.6. *Пусть* U − $*$-*гомоморфизм из* $LS(M)$ *в* $LS(N)$. *Тогда*

(a) U − *нормально в том и только в том случае, когда* U − *вполне аддитивно;*

(b) *Если* U − *нормально, то* U − *непрерывно из* $(LS(M), t(M))$ *в* $(LS(N), t(N))$;

(c) *Если* M *либо* $\mathrm{N}-$ *конечная алгебра фон Неймана и* $U:(LS(\mathrm{M}),t(\mathrm{M}))\to(LS(\mathrm{N}),t(\mathrm{N}))-$ *непрерывно, то* $U-$*нормально.*

Следствие 2.1.7. *Если* $U:LS(\mathrm{M})\to LS(\mathrm{N})-$ *вполне аддитивный* $*$*-гомоморфизм, то ядро* $\ker U-$*замкнуто в* $(LS(\mathrm{M}),t(\mathrm{M}))$, *а образ* $Im U-$ *замкнут в* $(LS(\mathrm{N}),t(\mathrm{N}))$.

В случае конечных алгебр фон Неймана M и N, следствие 2.1.7. допускает обращение.

Теорема 2.1.8. *Пусть* M, $\mathrm{N}-$*конечные алгебры фон Неймана,* $U-*$*-гомоморфизм из* $S(\mathrm{M})$ *в* $S(\mathrm{N})$. *Если* $\ker U$ *замкнуто в* $(S(\mathrm{M}),t(\mathrm{M}))$, *а* $Im U-$ *замкнуто в* $(S(\mathrm{N}),t(\mathrm{N}))$, *то* $U-$ *вполне аддитивно.*

Для произвольных алгебр фон Неймана теорема 2.1.8. уже неверна.

Следующая теорема устанавливает сохранение функционального исчисления для операторов из $LS_h(\mathrm{M})$ при действии непрерывного $*$-гомоморфизма.

Теорема 2.1.9. *Если* $U:(LS(\mathrm{M}),t(\mathrm{M}))\to(LS(\mathrm{N}),t(\mathrm{N}))-$ *непрерывный* $*$*-гомоморфизм, то* $U(f(x))=f(U(x))$ *для любой непрерывной функции* f *на* $(-\infty,+\infty)$ *и любого* $x\in LS_h(\mathrm{M})$.

В §2.2 вводится новый класс пространств Банаха-Канторовича – некоммутативные L^p-пространства $L^p(\mathrm{M},\Phi)$, ассоциированные со следом Магарам. Используя подход, связанный с понятием б　следа на C^*-алгебре, доказывается вариант неравенства Гельдера для следов Магарам. С помощью этого неравенства устанавливается, что $L^p(\mathrm{M},\Phi)$ является пространством Банаха-Канторовича.

Пусть $\boldsymbol{B}$ – коммутативная алгебра фон Неймана и $\Phi:\mathrm{M}\to S(\boldsymbol{B})-$ след Магарам на M. Для каждого $p>1$ положим

$$L^p(\mathrm{M},\Phi)=\left\{x\in S(\mathrm{M}):|x|^p\in L^1(\mathrm{M},\Phi)\right\} \text{ и } ||x||_{p,\Phi}=\Phi\left(|x|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Следующая теорема является вариантом неравенства Гельдера для следов Магарам.

Теорема 2.2.3. *Пусть* $p,q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. *Если* $x\in L^p(\mathrm{M},\Phi)$, $y\in L^q(\mathrm{M},\Phi)$, *то* $xy\in L^1(\mathrm{M},\Phi)$ *и* $||xy||_{1,\Phi}\le||x||_{p,\Phi}||y||_{q,\Phi}$.

С помощью теорем 1.2.5 и 2.2.3 устанавливается следующая

Теорема 2.2.6. $\left(L^p(\mathrm{M},\Phi),||\cdot||_{p,\Phi}\right)-$ *пространство Банаха-Канторовича.*

В §2.3 дается полное описание сопряженного пространства к пространству Банаха-Канторовича $L^p(\mathrm{M},\Phi)$ для $p>1$.

Теорема 2.3.4. *Пусть* $\Phi - S(\boldsymbol{B})$*-значный след Магарам на алгебре фон Неймана* M*,* $p, q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$*. Тогда*

(i) *Для каждого* $y \in L^q(\mathrm{M},\Phi)$ *линейное отображение* $\mathrm{T}_y(x)=\Phi(xy)$, $x \in L^p(\mathrm{M},\Phi)$*, является* $S(\boldsymbol{B})$*-ограниченным и* $\|\mathrm{T}_y\|=\|y\|_{q,\Phi}$.

(ii) *Для любого* $\mathrm{T} \in L^p(\mathrm{M},\Phi)^*$ *существует единственное* $y \in L^q(\mathrm{M},\Phi)$*, такое, что* $\mathrm{T}=\mathrm{T}_y$.

Третья глава посвящена построению теории решеток Орлича-Канторовича, ассоциированных с мерой, принимающей значения в алгебре измеримых функций.

В §3.1 рассматриваются векторные решетки, являющиеся одновременно решеточно нормированным пространством над алгеброй всех измеримых функций. Доказаны некоторые порядковые и топологические свойства таких решеток, аналогичные соответствующим свойствам обычных нормированных векторных решеток.

В §3.2 вводится класс решеток Орлича-Канторовича, ассоциированных с L^0-значной мерой, и доказываются некоторые полезные свойства нормы Орлича и нормы Люксембурга в этих решетках.

Пусть $\boldsymbol{B}$ – полная булева алгебра, $m: \boldsymbol{B} \to L^0(\Omega)$ – строго положительная мера на $\boldsymbol{B}$. Мера m называется *дизъюнктно разложимой* (d*-разложимой*), если для любых $e \in \boldsymbol{B}$ и разложения $m(e)=f_1+f_2$, $f_1 \wedge f_2=0$, $f_i \in L^0(\Omega)$ существуют такие $e_i \in \boldsymbol{B}$, что $e=e_1 \vee e_2$, и $m(e_i)=f_i$, $i=1,2$.

Теорема 3.2.1. *Пусть* $m -$ d*-разложимая* L^0*-значная мера на полной булевой алгебре* $\boldsymbol{B}$*. Тогда существует единственный булевый инъективный гомоморфизм* $\varphi: \mathrm{B}(\Omega) \to \boldsymbol{B}$*, такой, что*

(i) $\varphi(\mathrm{B}(\Omega))-$ *правильная булева подалгебра в* $\boldsymbol{B}$*;*

(ii) $m(\varphi(a)e)=am(e)$ *для всех* $a \in \mathrm{B}(\Omega)$*,* $e \in \boldsymbol{B}$.

Следуя ([1], §6.1) меру $m: \boldsymbol{B} \to L^0(\Omega)$ назовем *модулярной* относительно инъективного булевого гомоморфизма $\varphi: \mathrm{B}(\Omega) \to \boldsymbol{B}$ или φ*-модулярной*, если $m(\varphi(a)e)=am(e)$ для всех $a \in \mathrm{B}(\Omega)$, $e \in \boldsymbol{B}$. Ясно, что φ-модулярная мера является d-разложимой мерой. Из теоремы 3.2.1.(ii) следует, что любая d-разложимая L^0-значная мера является φ-модулярной.

Пусть $m - d$-разложимая L^0-значная мера на полной булевой алгебре $\boldsymbol{B}$. Из теоремы 3.2.1.(ii) следует, что $\boldsymbol{A} = \varphi(\mathrm{B}(\Omega))$ есть правильная булева подалгебра в $\boldsymbol{B}$. Тогда $L^0(\boldsymbol{A}) := C_\infty(Q(\boldsymbol{A}))$ можно отождествить с подалгеброй в $L^0(\boldsymbol{B})$, которая является одновременно и правильной векторной подрешеткой в $L^0(\boldsymbol{B})$. Ясно, что булевый изоморфизм φ из $\mathrm{B}(\Omega)$ на $\boldsymbol{A}$ продолжается до изоморфизма из $L^0(\Omega)$ на $L^0(\boldsymbol{A})$. Это продолжение также будем обозначать через φ.

Пусть $L^1(\boldsymbol{B}, m)$ пространство всех функций из $L^0(\boldsymbol{B})$, интегрируемых по L^0-значной мере m. Следуя традиционной схеме вводим классы и пространства Орлича, ассоциированне с d-разложимой L^0-значной мерой m и N-функцией M.

Пусть M – произвольная N-функция, $x \in L^0(\boldsymbol{B})$. Множество

$$L^0_{\mathrm{M}} := L^0_{\mathrm{M}}(\boldsymbol{B}, m) := \left\{x \in L^0(\boldsymbol{B}) : \mathrm{M}(x) \in L^1(\boldsymbol{B}, m)\right\}$$

назовем L^0-классом Орлича, а линейное пространство

$$L_{\mathrm{M}} := L_{\mathrm{M}}(\boldsymbol{B}, m) := \left\{x \in L^0(\boldsymbol{B}) : xy \in L^1(\boldsymbol{B}, m) \text{ для всех } y \in L^0_{\mathrm{M}^*}\right\}$$

назовем L^0-пространством Орлича, где M^* – дополнительная N-функция к M.

На L^0-пространстве Орлича $L_{\mathrm{M}}(\boldsymbol{B}, m)$ определим L^0-значную норму Орлича, полагая $\|x\|_{\mathrm{M}} := sup\left\{\left|\int xy\, dm\right| : y \in L^0_{\mathrm{M}^*}, \int \mathrm{M}^*(y)\, dm \le \mathbf{1}\right\}$, $x \in L_{\mathrm{M}}(\boldsymbol{B}, m)$.

Основным результатом §3.2 является следующая

Теорема 3.2.6. *Пара* $\left(L_{\mathrm{M}}(\boldsymbol{B}, m), \|\cdot\|_{\mathrm{M}}\right)$ *является решеткой Банаха-Канторовича.*

Решетку Банаха-Канторовича $\left(L_{\mathrm{M}}(\boldsymbol{B}, m), \|\cdot\|_{\mathrm{M}}\right)$ естественно называть *решеткой Орлича-Канторовича, ассоциированной с* d*-разложимой* L^0*-значной мерой* m.

Обозначим через $\boldsymbol{P}\left(L^0\right)$ множество всех положительных элементов λ из $L^0 = L^0(\Omega)$, для которых $s(\lambda) = \mathbf{1}$. Очевидно, что для каждого $\lambda \in \boldsymbol{P}\left(L^0\right)$ в L^0 существует обратный элемент λ^{-1}, при этом $\lambda^{-1} \in \boldsymbol{P}\left(L^0\right)$.

Определим на $L_{\mathrm{M}}(\boldsymbol{B}, m)$ следующую L^0-значную норму Люксембурга

$$\|x\|_{(\mathrm{M})} := inf\left\{\lambda \in \boldsymbol{P}\left(L^0\right) : \int \mathrm{M}\left(\varphi\left(\lambda^{-1}\right)x\right) dm \le \mathbf{1}\right\}.$$

Теорема 3.2.20. *Пара* $\left(L_{\mathrm{M}}(\boldsymbol{B},m),\|\cdot\|_{(\mathrm{M})}\right)$ *является решеткой Банаха-Канторовича.*

В §3.3 рассматриваются банаховы L^0-модули и указывается их связь с пространствами Банаха-Канторовича. Описываются свойства L^0-линейных и L^0-ограниченных отображений таких модулей.

Пусть E – точный L^0-модуль (операцию умножения элементов $x\in\mathrm{E}$ на функцию $\lambda\in L^0(\Omega)$ будем обозначать через $\lambda\cdot x$). L^0-значная норма $\|\cdot\|:\mathrm{E}\to L^0(\Omega)$ называется L^0-нормой, согласованной со структурой L^0-модуля E (коротко L^0-норма), если $\|\lambda\cdot x\|=|\lambda|\|x\|$ для любых $x\in\mathrm{E}$ и $\lambda\in L^0(\Omega)$. Пара $(\mathrm{E},\|\cdot\|)$, где E – точный L^0-модуль, $\|\cdot\|$ – L^0-норма на E, называется *нормированным* L^0*-модулем.* Нормированный L^0-модуль $(\mathrm{E},\|\cdot\|)$ называется банаховым, если всякая (bo)-фундаментальная последовательность в нем (bo)-сходится к элементу этого L^0-модуля. Ясно, что любой банахов L^0-модуль $(\mathrm{E},\|\cdot\|)$ является пространством Банаха-Канторовича над L^0.

Пусть теперь, $L_{\mathrm{M}}=L_{\mathrm{M}}(\boldsymbol{B},m)$ – решетка Орлича-Канторовича, ассоциированная с N-функцией M и d-разложимой L^0-значной мерой m. Определим структуру L^0-модуля на L_{M} следующим образом: $\lambda\cdot x=\varphi(x)x$, $x\in L_{\mathrm{M}}$, $\lambda\in L^0$, где φ – изоморфизм из $L^0(\Omega)$ на $L^0(\boldsymbol{A})\subset L^0(\boldsymbol{B})$. Тогда $\left(L_{\mathrm{M}}(\boldsymbol{B},m),\|\cdot\|_{\mathrm{M}}\right)$ является банаховым L^0-модулем.

Пусть $(E,\|\cdot\|)$ и $(F,\|\cdot\|)$ – нормированные L^0-модули. Через τ_E и τ_F обозначим топологии в E и F, соответственно, порожденные L^0-нормой и топологией t сходимости локально по мере в L^0. Линейный оператор $\mathrm{T}:E\to F$ называется L^0-ограниченным, если существует элемент $0\le c\in L^0$ такой, что $\|\mathrm{T}(x)\|\le c\|x\|$ для всех $x\in E$. Ясно, что любой L^0-ограниченный линейный оператор является непрерывным отображением из (E,τ_E) в (F,τ_F).

Теорема 3.3.3. *Любой* L^0*-ограниченный линейный оператор* $\mathrm{T}:E\to F$ *является* L^0*-линейным, т.е.* $\mathrm{T}(\alpha\cdot x+\beta\cdot y)=\alpha\cdot\mathrm{T}(x)+\beta\cdot\mathrm{T}(y)$ *для всех* $\alpha,\beta\in L^0$, $x,y\in E$.

Следующая теорема является "L^0-вариантом" известной связи между понятием ограниченности и непрерывности для линейных отображений нормированных пространств.

Теорема 3.3.4. *Пусть E и F – банаховы L^0-модули. Для L^0-линейного отображения $\mathrm{T}: E \to F$ следующие условия эквивалентны:*

1) T – *L^0-ограничено;*
2) T – *непрерывно;*
3) T – *непрерывно в нуле.*

В §3.4 дается описание сопряженных пространств для решеток Орлича - Канторовича и выясняются условия, при которых эти решетки рефлексивны.

Пусть $L_{\mathrm{M}} = L_{\mathrm{M}}(\boldsymbol{B}, m)$ – решетка Орлича-Канторовича, ассоциированная с N-функцией M и d-разложимой L^0-значной мерой m, заданной на полной булевой алгебре $\boldsymbol{B}$.

Предложение 3.4.5. *Для каждого $y \in L_{\mathrm{M}^*}$ L^0-значное линейное отображение f_y, определенное равенством*

$$f_y(x) := \int xy\, dm, \quad x \in L_{\mathrm{M}}, \tag{1}$$

является L^0-ограниченным на L_{M}, причем $\| f_y \| = \| y \|_{(\mathrm{M}^*)}$.

Теорема 3.4.7. *Если N-функция M удовлетворяет Δ_2-условию при $t_0 = 0$, то формула (1), где $y \in L_{\mathrm{M}^*}$, дает общий вид L^0-значного L^0-ограниченного линейного отображения на L_{M}, т.е. если f – L^0-значное L^0-ограниченное линейное отображение на L_{M}, то существует единственный элемент $y \in L_{\mathrm{M}^*}$ такой, что $f(x) = \int xy\, dm$ для всех $x \in L_{\mathrm{M}}$.*

Из теоремы 3.4.7. вытекает следующее

Следствие 3.4.8. (i) *Если N-функция M удовлетворяет Δ_2-условию при $t_0 = 0$, то сопряженное пространство к пространству $\left(L_{\mathrm{M}}, \|\cdot\|_{\mathrm{M}}\right)$ изометрично пространству Банаха-Канторовича $\left(L_{\mathrm{M}^*}, \|\cdot\|_{(\mathrm{M}^*)}\right)$, т.е.*

$$\left(L_{\mathrm{M}}, \|\cdot\|_{\mathrm{M}}\right)^* = \left(L_{\mathrm{M}^*}, \|\cdot\|_{(\mathrm{M}^*)}\right).$$

(ii) *Если N-функции M и M^* удовлетворяют Δ_2-условию при $t_0 = 0$, то решетка Орлича-Канторовича $\left(L_{\mathrm{M}}, \|\cdot\|_{\mathrm{M}}\right)$ рефлексивна, т.е.*

$$\left(L_{\mathrm{M}}, \|\cdot\|_{\mathrm{M}}\right)^{**} = \left(L_{\mathrm{M}}, \|\cdot\|_{\mathrm{M}}\right).$$

В четвертой главе рассматриваются разложимые L^0-значные меры m, заданные на полной булевой алгебре B и выясняются условия, при которых пара (B, m) представима в виде измеримого расслоения непрерывных (соответственно, атомических) булевых алгебр с числовыми мерами. Дается представление решеток Орлича-Канторовича в виде измеримых расслоений классических функциональных пространств Орлича, с помощью которого устанавливаются различные варианты эргодических теорем для сжатий решеток Орлича-Канторовича.

В §4.1 даются критерии разложимости и дизъюнктной разложимости мер, принимающих значения в порядково полных векторных решетках.

Пусть $F -$ K-пространство с единицей $\mathbf{1}$, $\nabla := \nabla(F) -$ полная булева алгебра всех единичных элементов из F, $m -$ строго положительная d-разложимая F-значная мера на полной булевой алгебре B (определение d-разложимости меры m такое же, как в §3.2). Заметим, что мера $m -$ d-разложима тогда и только тогда, когда для любых $e \in \mathrm{B}$, $a \in s(m(e))\nabla$ существует такое $g \in e\mathrm{B}$, что $m(g) = am(e)$.

Предложение 4.1.2. *Существуют правильная булева подалгебра $\mathcal{A}$ в B и булевый изоморфизм φ из ∇ на $\mathcal{A}$ такие, что $m(\varphi(a)e) = am(e)$ для всех $a \in \nabla$, $e \in \mathrm{B}$, т.е. $m -$ φ-модулярная мера на B.*

Рассмотрим следующее усиление свойства d-разложимости. Строго положительную F-значную меру m, заданную на полной булевой алгебре B, назовем *разложимой*, если для любых $e \in \mathrm{B}$ и разложения $\alpha_1 + \alpha_2 = m(e)$, $\alpha_i \in F$, $\alpha_i \geq 0$, существуют такие $e_i \in \mathrm{B}$, что $e = e_1 \vee e_2$ и $m(e_i) = \alpha_i$, $i = 1,2$. Ясно, что мера $m -$ разложима в том и только в том случае, когда для любых $e \in \mathrm{B}$, $0 \leq \alpha \leq m(e)$, $\alpha \in F$ существует такое $g \in e\mathrm{B}$, что $m(g) = \alpha$.

Отметим, что в случае $F = \mathbb{R}$ свойство разложимости меры m равносильно непрерывности булевой алгебры B. Естественно ожидать, что и, в общем случае, разложимость F-значной меры должна отражаться на внутренней структуре булевой алгебре B. Приведем характеризацию таких булевых алгебр с помощью понятия непрерывности булевой алгебры относительно подалгебры.

Пусть $\mathcal{A}$ – правильная подалгебра в B. Ненулевой элемент $e \in \mathrm{B}$ называется $\mathcal{A}$-атомом, если $e\mathrm{B} = e\mathcal{A}$. Очевидно, что любой атом является $\mathcal{A}$-атомом, и, в случае $\mathcal{A} = \{0, \mathbf{1}_\mathrm{B}\}$, эти понятия совпадают. Если $\mathcal{A} = \mathrm{B}$, то любой ненулевой элемент из B является $\mathcal{A}$-атомом.

Обозначим через $\mathrm{A}(\mathcal{A})$ множество всех $\mathcal{A}$-атомов в B. Булеву алгебру B назовем $\mathcal{A}$-атомической (соответственно, $\mathcal{A}$-непрерывной), если $sup\, \mathrm{A}(\mathcal{A}) = \mathbf{1}_\mathrm{B}$ (соответственно, $\mathrm{A}(\mathcal{A}) = \varnothing$).

Основным результатом §4.1 является следующая

Теорема 4.1.9. *Пусть $m : \mathrm{B} \to F -$ строго положительная d-разложимая мера, $\varphi -$ булевый изоморфизм из ∇ на правильную подалгебру $\mathcal{A}$ из B, для которого $m(\varphi(a)e) = am(e)$, $a \in \nabla$, $e \in \mathrm{B}$. Тогда мера $m -$ разложима в том и только в том случае, когда B является $\mathcal{A}$-непрерывной булевой алгеброй.*

В §4.2 рассматриваются разложимые L^0-значные меры, заданные на полной булевой алгебре B. Даются необходимые и достаточные условия для представления B в виде измеримого расслоения непрерывных (соответственно, атомических) булевых алгебр.

Пусть (Ω,Σ,μ) – измеримое пространство с конечной мерой. *Расслоеним булевых алгебр над* Ω называется отображение $\mathcal{B}$, ставящее в соответствие каждой точке $\omega\in\Omega$ полную булеву алгебру $\mathcal{B}(\omega)$ со строго положительной числовой мерой m_ω.

Функция u, определенная почти всюду в Ω, называется *сечением расслоения* $\mathcal{B}$ над Ω, если $u(\omega)\in\mathcal{B}(\omega)$ для почти всех $\omega\in\Omega$. Множество всех сечений расслоения $\mathcal{B}$ обозначается через $S_{□}(\Omega,\mathcal{B})$.

Пусть $\mathcal{C}\subset S_{□}(\Omega,\mathcal{B})$, $\mathrm{B}_\omega=\mathcal{B}(\omega)$, $\mathbf{1}_\omega$ – единица в B_ω, $\mathbf{0}_\omega$ – нуль в B_ω, $\omega\in\Omega$. Пара $(\mathcal{B},\mathcal{C})$ называется *измеримым расслоением булевых алгебр* над Ω, порожденным семейством $(\mathrm{B}_\omega,m_\omega)_{\omega\in\Omega}$, если:

(1) функция $\omega\mapsto m_\omega(u(\omega))$ измерима для любого элемента $u\in\mathcal{C}$;

(2) множество $\mathcal{C}$ *послойно плотно* в $\mathcal{B}$, т.е. множество $\{c(\omega): c\in\mathcal{C}\}$ плотно в пространстве $(\mathrm{B}_\omega,m_\omega)$ для каждого $\omega\in\Omega$;

(3) $\mathbf{1}-e\in\mathcal{C}$ для всех $e\in\mathcal{C}$, где $\mathbf{1}-e:\omega\in dom(e)\mapsto\mathbf{1}_\omega-e(\omega)$;

(4) $e_1\vee e_2\in\mathcal{C}$ для всех $e_1,e_2\in\mathcal{C}$, где $e_1\vee e_2:\omega\in dom(e_1)\bigcap dom(e_2)\mapsto e_1(\omega)\vee e_2(\omega)$.

Обозначим через $\Gamma(\Omega,\mathcal{B})$ множество всех ступенчатых сечений вида $u(\omega)=x_i(\omega),\ \omega\in\mathrm{A}_i,$ где $x_i\in\mathcal{C},\ \mathrm{A}_i\in\Sigma,\ \mathrm{A}_i\bigcap\mathrm{A}_j=\varnothing,\ i\neq j,\ \bigcup_{i=1}^{n}\mathrm{A}_i=\Omega,$ $i,j=1,2,\ldots,n,\ n\in□$. Для любого $u\in\Gamma(\Omega,\mathcal{B})$ функция $m_\omega(u(\omega))$ измерима на (Ω,Σ,μ). Сечение u называется измеримым, если существует такая последовательность $u_n\in\Gamma(\Omega,\mathcal{B})$, что $m_\omega(u(\omega)\,\Delta\,u_n(\omega))\to 0$ при $n\to\infty$ для п.в. $\omega\in\Omega$. Обозначим через $\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{B})$ множество всех измеримых сечений расслоения $\mathcal{B}$. Ясно, что, если $u\in\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{B})$, то функция $m_\omega(u(\omega))$ также измерима на (Ω,Σ,μ).

Пусть $L^0(\Omega,\mathcal{B})$ – факторизация $\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{B})$ по отношению равенства почти всюду. Класс, содержащий $u\in\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{B})$, обозначим через $\tilde{u}$. В пространстве $L^0(\Omega,\mathcal{B})$ введем отношение частичного порядка, полагая $\tilde{u}\leq\tilde{v}$, если $u(\omega)\leq v(\omega)$ для п.в. $\omega\in\Omega$ и определим отображение

$\hat{m} : L^0(\Omega, \mathcal{B}) \mapsto L^0(\Omega)$ по формуле $\hat{m}(\tilde{e}) := [m_\omega(e(\omega))]^\sim$. Относительно введенного отношения частичного порядка $L^0(\Omega, \mathcal{B})$ является полной булевой алгеброй, при этом $\mathcal{A} = \{\tilde{e} : e = \chi_A,\ A \in \Sigma\}$ есть правильная подалгебра в $L^0(\Omega, \mathcal{B})$ изоморфная $B(\Omega)$, где $\chi_A(\omega) = \mathbf{1}_\omega$, если $\omega \in A$ и $\chi_A(\omega) = \mathbf{0}_\omega$, если $\omega \notin A$. Кроме того, отображение $\hat{m}$ есть $L^0(\Omega)$-значная строго положительная мера на $L^0(\Omega, \mathcal{B})$, обладающая свойством модулярности: $\hat{m}(\tilde{a}\tilde{e}) = \tilde{a}\hat{m}(\tilde{e})$ для любых $\tilde{e} \in L^0(\Omega, \mathcal{B})$, $\tilde{a} = \tilde{\chi}_A \in B(\Omega)$ (булевы алгебры $B(\Omega)$ и $\mathcal{A}$ отождествляются).

Пусть $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ – произвольное измеримое расслоение булевых алгебр над Ω, порожденное семейством (B_ω, m_ω), $m_\omega(\mathbf{1}_\omega) = 1$, $\omega \in \Omega$, $p : L^\infty(\Omega) \to \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ – фиксированный лифтинг. Отображение $l : L^0(\Omega, \mathcal{B}) \to \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{B})$ называется *булевозначным лифтингом, ассоциированным с* p, если оно обладает следующими свойствами:

1) $l(\tilde{e}) \in \tilde{e}$, $dom\, l(\tilde{e}) = \Omega$;

2) $m_\omega\big((l(\tilde{e}))(\omega)\big) = p(\hat{m}(\tilde{e}))(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$;

3) $l(\tilde{e} \vee \tilde{g}) = l(\tilde{e}) \vee l(\tilde{g})$, $l(\mathbf{1} - \tilde{e}) = \mathbf{1} - l(\tilde{e})$;

4) $l(a\tilde{e}) = p(a)l(\tilde{e})$ для всех $a \in B(\Omega)$, $\tilde{e} \in L^0(\Omega, \mathcal{B})$;

5) $\{l(\tilde{e})(\omega) : \tilde{e} \in L^0(\Omega, \mathcal{B})\}$ плотно в $\mathcal{B}(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$.

Теорема 4.2.6. *Пусть* m – L^0*-значная* d*-разложимая мера на полной булевой алгебре* B, φ – *булевый изоморфизм из* $B(\Omega)$ *на правильную подалгебру из* B, *ассоциированный с* m *(см. теорему 4.1.9). Тогда существует единственное с точностью до изометрического изомофизма измеримое расслоение булевых алгебр* $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ *над* Ω *с булевозначным лифтингом, ассоциированным с* p, *для которого имеется булевый изоморфизм* ψ *из* B *на* $L^0(\Omega, \mathcal{B})$ *такой, что* $\psi(\varphi(\hat{A})) = \tilde{\chi}_A$ *и* $\hat{m}(\psi(e)) = m(e)$ *для всех* $A \in \Sigma$, $e \in B$, *где* $\hat{m}$ – L^0*-значная мера на* $L^0(\Omega, \mathcal{B})$, *порожденная расслоением* $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$.

Укажем теперь как свойства $B(\Omega)$-атомичности и $B(\Omega)$-непрерывности влияют на свойства слоев (B_ω, m_ω), $\omega \in \Omega$, измеримого расслоения $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$.

Теорема 4.2.8. *Для булевой алгебры* $L^0(\Omega,\mathcal{B})$ *следующие условия эквивалентны:*

(i) $L^0(\Omega,\mathcal{B})-$ $\mathrm{B}(\Omega)$*-непрерывная булева алгебра;*

(ii) $(\mathrm{B}_\omega,m_\omega)-$ *непрерывная булева алгебра для п.в.* $\omega\in\Omega$.

Теорема 4.2.9. *Для булевой алгебры* $L^0(\Omega,\mathcal{B})$ *следующие условия эквивалентны:*

(i) $L^0(\Omega,\mathcal{B})-$ $\mathrm{B}(\Omega)$*-атомическая булева алгебра;*

(ii) $(\mathrm{B}_\omega,m_\omega)-$ *атомическая булева алгебра для п.в.* $\omega\in\Omega$.

В §4.3 дается представление пространства Орлича-Канторовича в виде измеримых расслоений классических функциональных пространств Орлича. С помощью этого представления устанавливаются различные варианты эргодических теорем для сжатий решеток Орлича-Канторовича.

Пусть $m-L^0$-значная d-разложимая мера на полной булевой алгебре В, $m(\mathbf{1})=\mathbf{1}$, $p:L^\infty(\Omega)\to\mathcal{L}^\infty(\Omega)-$фиксированный лифтинг. Согласно теореме 4.2.6, мы можем отождествить В с $L^0(\Omega,\mathcal{B})$, для некоторого измеримого расслоения булевых алгебр $(\mathcal{B},\mathcal{C})$ над Ω, порожденного семейством $(\mathrm{B}_\omega,m_\omega)_{\omega\in\Omega}$. При этом, $\mathrm{B}(\Omega)$ отождествляется с правильной подалгеброй в $L^0(\Omega,\mathcal{B})$.

Рассмотрим банахову решетку $L^1(\mathrm{B}_\omega,m_\omega)$, и решетку Банаха-Канторовича $L^1(\mathrm{B},m)$. Пусть $(\mathcal{Y},\mathcal{E})-$измеримое банахово расслоение над Ω, такое, что $\mathcal{Y}(\omega)=L^1(\mathrm{B}_\omega,m_\omega)$ для всех $\omega\in\Omega$ и

$$\mathcal{E}=\left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i:\lambda_i\in\mathbb{R},\ e_i\in\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{B}),\ i=\overline{1,n},\ n\in\mathbb{N}\right\} \tag{2}$$

Обозначим через $\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{Y})$ множество всех измеримых сечений банахова расслоения $(\mathcal{Y},\mathcal{E})$, а через $L^0(\Omega,\mathcal{Y})-$факторизацию $\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{Y})$ по отношению равенства почти всюду. Известно, что $L^0(\Omega,\mathcal{Y})$ есть пространство Банаха-Канторовича над L^0, при этом $L^0(\Omega,\mathcal{Y})$ изометрично пространству Банаха-Канторовича $L^1(\mathrm{B},m)$.

Рассмотрим решетку Орлича-Канторовича $L_\mathrm{M}(\mathrm{B},m)$ и классические пространства Орлича $L_\mathrm{M}(\mathrm{B}_\omega,m_\omega)$, построенные по числовой мере m_ω на B_ω. Через $\|\cdot\|_\mathrm{M}$ и $\|\cdot\|_\mathrm{M}^\omega$ обозначим нормы Орлича соответственно в $L_\mathrm{M}(\mathrm{B},m)$ и $L_\mathrm{M}(\mathrm{B}_\omega,m_\omega)$.

Предложение 4.3.3. *Если* $x \in L^1(\mathrm{B}, m)$, *то* $x \in L_{\mathrm{M}}(\mathrm{B}, m)$ *в том и только в том случае, когда* $x(\omega) \in L_{\mathrm{M}}(\mathrm{B}_\omega, m_\omega)$ *для п.в.* $\omega \in \Omega$, *при этом*

$$\|x\|_{\mathrm{M}}(\omega) = \|x(\omega)\|_{\mathrm{M}}^{\omega} \text{ п.в. на } \Omega.$$

В случае, когда N-функция M удовлетворяет Δ_2-условию, при $t_0 = 0$, предложение 4.3.3. допускает следующее уточнение.

Теорема 4.3.4. *Если* N*-функция* M *удовлетворяет* Δ_2*-условию, при* $t_0 = 0$, *то решетка Орлича-Канторовича* $L_{\mathrm{M}}(\mathrm{B}, m)$ *изометрически и порядково изоморфна* $L^0(\Omega, \mathcal{X})$, *где* $(\mathcal{X}, \mathcal{E})$ – *измеримое банахово расслоение над* Ω, *для которого* $\mathcal{X}(\omega) = L_{\mathrm{M}}(\mathrm{B}_\omega, m_\omega)$, *а* $\mathcal{E}$ – *определяется равенством (2).*

Пусть теперь T – положительное L^0-ограниченное линейное отображение из $L^1(\mathrm{B}, m)$ в $L^1(\mathrm{B}, m)$. Отображение T назовем $L^1 - L^\infty$*-сжатием*, если $\mathrm{T}\mathbf{1} \le \mathbf{1}$ и $\|\mathrm{T}\|_{L^1(\mathrm{B},m)\to L^1(\mathrm{B},m)} \le \mathbf{1}$. Множество всех $L^1 - L^\infty$-сжатий обозначим через $PC(\mathrm{B}, m)$.

Положим $\log^+ s := \max\{0, \ln s\}$, $s \ge 0$, и

$$L^1 \ln L^1(\mathrm{B}, m) := \left\{ x \in L^0(\mathrm{B}) : |x| \log^+(|x|) \in L^1(\mathrm{B}, m) \right\}.$$

Теорема 4.3.6. *Пусть* $\mathrm{T} \in PC(\mathrm{B}, m)$, $S_n(\mathrm{T}) = n^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{T}^i$. *Тогда*

(i) *для каждого* $x \in L^1(\mathrm{B}, m)$ *последовательность* $S_n(\mathrm{T})(x)$ – (bo)*-сходится в* $L^1(\mathrm{B}, m)$ *и* (o)*-сходится в* $L^0(\mathrm{B})$, *в частности, в* $L^0(\mathrm{B})$ *существует* $\mathcal{D}(\mathrm{T})(x) := \sup_{n \ge 1} S_n(\mathrm{T})(|x|)$.

(ii) *Если* $x \in L^1 \ln L^1(\mathrm{B}, m)$, *то* $\mathcal{D}(\mathrm{T})(x) \in L^1(\mathrm{B}, m)$ *и* $S_n(\mathrm{T})(x) - (o)$*-сходится в* $L^1(\mathrm{B}, m)$.

(iii) *Если* N*-функция* M *удовлетворяет* Δ_2*-условию, то последовательность* $S_n(\mathrm{T})(x) - (bo)$*-сходится в* $L_{\mathrm{M}}(\mathrm{B}, m)$ *для каждого* $x \in L_{\mathrm{M}}(\mathrm{B}, m)$.

Следующая теорема является " L^0-вариантом " доминантной эргодической теоремы для $L^1 - L^\infty$-сжатий в пространствах Орлича.

Теорема 4.3.7. *Пусть* $L_{\mathrm{M}}(\mathrm{B}, m)$ – *решетка Орлича-Канторовича, ассоциированная с* N*-функцией* M, *обладающей следующим свойством*

$$\sup_{s \ge 1} \frac{\int_1^s \mathrm{M}\left(t^{-1} s\right) dt}{\mathrm{M}(s)} < \infty.$$

Тогда последовательность $S_n(\mathrm{T})(x)$ *ограничена сверху в* $L_{\mathrm{M}}(\mathrm{B},m)$ *для любых* $\mathrm{T} \in PC(\mathrm{B},m)$, $x \in L_{\mathrm{M}}(\mathrm{B},m)$ *и* $S_n(\mathrm{T})(x) -$ (o)*-сходится в* $L_{\mathrm{M}}(\mathrm{B},m)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена построению теории некоммутативного интегрирования для следов Магарам со значениями в произвольной комплексной порядково полной векторной решетке, а также описанию пространств Орлича-Канторовича, ассоциированных с мерами, принимающими значения в алгебре измеримых функций.

Основные результаты исследований состоят в следующем:

1. Строится теория некоммутативного интегрирования для следов, заданных на алгебрах фон Неймана и принимающих значения в комплексной порядково полной векторной решетке. Такой подход, являясь естественным развитием уже ставшей классической теории некоммутативного интегрирования относительно обычных числовых следов на алгебрах фон Неймана, в ряда случаев, позволяет по новому взглянуть на саму эту теорию. Рассматривается важный нетривиальный случай следов со значениями в пространствах измеримых функций и для таких следов строится соответствующая теория пространств интегрируемых операторов. Получены варианты теорем о монотонной сходимости, мажорируемой сходимости и теоремы Фату для таких пространств.

2. Дано полное описание следов Магарам, заданных на алгебре фон Неймана со значениями в произвольной комплексной порядково полной векторной решетке. Доказано, что пространство интегрируемых операторов является (bo)-полным решеточно нормированным пространством, при этом оно становится пространством Банаха-Канторовича в том и только в том случае, когда соответствующий след обладает свойством Магарам. Кроме того, установлен вариант теоремы Радона-Никодима для следов Магарам.

3. Получено полное описание сопряженного пространства к пространству интегрируемых операторов, построенному по следу Магарам.

4. Введены некоммутативные L^p-пространства, ассоциированные со следом Магарам. Используя подход, связанный с понятием биследа на C^*-алгебре, доказан вариант неравенства Гельдера для следов Магарам. С помощью этого неравенства и с использованием (bo)-полноты пространства интегрируемых операторов, доказана теорема о том, что L^p-пространство, ассоциированное со следом Магарам, является пространством Банаха-Канторовича.

5. Получено полное описание сопряженных пространств к некоммутативным L^p-пространствам, построенным по следу Магарам.

6. Описаны связи между свойствами вполне аддитивности, нормальности и непрерывности для $*$-гомоморфизмов $*$-алгебр локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана. Доказано, что свойства нормальности и вполне аддитивности для таких $*$-гомоморфизмов – равносильны. Каждое из этих свойств обеспечивает непрерывность $*$-гомоморфизма в топологии сходимости локально по мере, однако они не являются необходимыми условиями для его непрерывности.

7. Введен класс решеток Орлича-Канторовича, ассоциированных с d-разложимой L^0-значной мерой, и описаны свойства нормы Орлича и нормы Люксембурга в этих решетках. Установлены различные варианты эргодических теорем для положительных сжатий таких решеток Орлича-Канторовича.

8. Введен класс банаховых L^0-модулей, алгебраическая и банахова структура которых тесно связана с пространствами Банаха-Канторовича. Описаны свойства L^0-линейных и L^0-ограниченных отображений таких модулей.

9. Дано описание сопряженных пространств для пространств Орлича-Канторовича и выяснены условия, при которых эти пространства рефлексивны.

10. Исследованы меры со значениями в порядково полных векторных решетках. Даны критерии разложимости и дизъюнктной разложимости множества значений таких мер.

11. Для полной булевой алгебры B с разложимой L^0-значной мерой даны необходимые и достаточные условия представления B в виде измеримого расслоения непрерывных (соответственно, атомических) булевых алгебр.

Благодарности

Автор выражает глубокую признательность своему научному консультанту доктору физико-математических наук, профессору Чилину Владимиру Ивановичу за постоянное внимание и поддержку при работе над диссертацией.

На всех этапах работы над диссертацией существенным подспорьем для автора также была моральная и материальная поддержка коллег, друзей и родных. Нет возможности их перечислить, поэтому всем им автор адресует одно общее слово искренней благодарности. Приятный долг автора – отметить значительную помощь, оказанную Ташкентским институтом инженеров железнодорожного транспорта. Особая признательность Национальному Университету Узбекистана и Институту математики и информационных технологий, в стенах которых вызревали основные идеи настоящей работы.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

I. Статьи, опубликованные в научных журналах:

1. Закиров Б.С. Критерий непрерывности гомоморфизмов колец измеримых операторов // Узбекский мат. журн. – Ташкент, 2000. – №5-6. – С.25-30.

2. Закиров Б.С. Норма Люксембурга в решетке Орлича-Канторовича. // Узбекский мат. журн. – Ташкент, 2007. – №2. – С. 32-44.

3. Закиров Б.С. Решетки Орлича-Канторовича, ассоциированные с L^0-значной мерой // Узбекский мат. журн. – Ташкент, 2007. – №4. – С.18-34.

4. Закиров Б.С., Чилин В.И. Банаховы модули ограниченных функций и их предсопряженные модули // Таврический вестник информатики и математики. – Крым, Украина, 2007. – №1. – С. 58-69.

5. Закиров Б.С. Аналитическое представление L^0-значных гомоморфизмов в модулях Орлича-Канторовича // Математические Труды. – Новосибирск, 2007. – №2(10). – С. 112-141. Английский перевод: An Analytic Representation of the L^0-valued Homomorphisms in the Orlicz-Kantorovich Modules // Siberian Advances in Mathematics, 2009. – №2(19). – P. 128-149.

6. Закиров Б.С. Теорема Амемия для L^0-нормированных векторных решеток // Узбекский мат. журн. – Ташкент, 2008. – №3. – С. 23-33.

7. Закиров Б.С., Чилин В.И. Разложимые меры со значениями в условно полных векторных решетках // Владикавк. мат. журн. – Владикавказ, 2008. – №4(10). – С. 31-38.

8. Закиров Б.С., Чилин В.И. Эргодические теоремы для сжатий в решетках Орлича-Канторовича // Сиб. мат. журн. – Новосибирск, 2009. – №6(50). – С. 1305-1318. Английский перевод: Ergodic theorems for contractions in Orlicz-Kantorovich lattices // Siberian Mathematical Journal, 2009. – №6(50). – P. 1027-1037.

9. Чилин В.И., Закиров Б.С. Эргодические теоремы для сжатий решеток Банаха-Канторовича $L^1(\mathrm{B},m)$ // Вестник НУУз. – Ташкент, 2009. – №1. – С. 22-25.

10. Закиров Б.С., Чилин В.И. Некоммутативное интегрирование для следов со значениями в пространствах Канторовича-Пинскера // Известия ВУЗов. Математика. – Казань, 2010. – №10. – С. 18-30.

11. Закиров Б.С. Гомоморфизмы $*$-алгебр локально измеримых операторов // Владикавк. мат. журн. $-$Владикавказ, $-$2010. $-$№2(12). $-$С. 15-23.

12. Закиров Б.С. Об одном обобщении понятия следа на алгебрах фон Неймана // Математические Труды. $-$Новосибирск, 2010. $-$№1(13). $-$С. 146-155.

13. Chilin V.I., Zakirov B.S. Decomposable L^0-valued measures as measurable bundles // Positivity, $-$Basel, 2010. $-$№3(14). $-$P.395-405, DOI: 10.1007/s11117-009-0025-4.

14. Chilin V., Zakirov B. Maharam traces on von Neumann algebras // Methods of functional analysis and topology, Kiev, 2010. $-$№2(16). $-$P.101-111.

II. Работы, опубликованные в материалах и сборниках тезисов конференции:

15. Закиров Б.С. Пространства Орлича, ассоциированные с мерой со значениями в кольце измеримых функций // Украинский Математический Конгресс-2001. Киев, 21-23 август, 2001. Тезисы докладов международной конференции по функциональному анализу. $-$Киев, Украина, 2001. $-$С.157.

16. Закиров Б.С. Некоммутативные пространства Орлича, ассоциированные с центрозначным следом // Современные проблемы и актуальные вопросы функционального анализа. Материалы Республиканской научной конференции. $-$Нукус, 2006. $-$С. 21-24.

17. Zakirov B. L^0-duality for the Orlich-Kantorovich module // book of abstracts International Conference Modern Analysis and Applications. $-$Odessa, Ukraine, 2007. $-$P. 144-145.

18. Закиров Б.С. Измеримые расслоения решеток Орлича-Канторовича // Исследования по современному анализу и математическому моделированию. $-$Владикавказ: ВНЦ РАН и РСО-А, 2008. $-$С. 113-130.

19. Закиров Б.С. Измеримые расслоения непрерывных булевых алгебр с мерами // Исследования по математическому анализу. Сер. мат. форум. Т.1. $-$Владикавказ: ВНЦ РАН, 2008. $-$С. 70-79.

20. Закиров Б.С., Чилин В.И. Доминантная эргодическая теорема для сжатий в решетках Орлича-Канторовича // Современные проблемы математики, механики и информационных технологий. Материалы Республиканской научной конференции. $-$Ташкент, 2008. $-$С. 100-101.

21. Закиров Б.С., Чилин В.И. Двойственность для некоммутативных L^p-пространств, ассоциированных со следом Магарам // Международная конференция "Современные проблемы анализа и геометрии". Тезисы докладов. – Новосибирск: ИМ СО РАН, 2009. – С. 46.

22. Закиров Б.С. Предсопряженные пространства к центральным расширениям алгебр фон Неймана // Дифференциальные уравнения и их приложения. Материалы Республиканской научной конференции. – Нукус, 2009. – С. 87-89.

23. Закиров Б.С., Чилин В.И. Двойственность для некоммутативных L^1-пространств, ассоциированных со следом Магарам // Исследования по математическому анализу. Сер. мат. форум. Т.3. – Владикавказ: ВНЦ РАН и РСО-А, 2009. – С.67-91.

24. Chilin V.I., Zakirov B.S. The Radon-Nikodym-type theorem for Maharam traces // Ukrainian Mathematical Congress. – Kiev, 2009. – Abstracts: http:// imath.kiev.ua/~congress2009/ Abstracts

25. Закиров Б.С., Чилин В.И. Некоммутативные L^p-пространства, ассоциированные со следом Магарам // Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. VIII международной научной конференции. – Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2010. – С. 88-89

Физика-математика фанлари доктори илмий даражасига талабгор Закиров Ботир Сабитовичнинг 01.01.01 – математик анализ ихтисослиги бўйича «Магарам излари учун нокоммутатив интеграллаш ва Орлич-Канторович фазолари » мавзусидаги диссертациясининг

РЕЗЮМЕСИ

Таянч сўзлар: Фон Неймана алгебраси, ўлчовли оператор, векторқийматли из, Банах-Канторович фазоси, ўлчовли банах тахламаси, векторқийматли ўлчов.

Тадқиқот объектлари: Магарам изи билан ассоциирланган ўлчовли операторларнинг нокоммутатив L^p-фазолари, Орлич-Канторович фазолари.

Ишнинг мақсади: Қийматлари ихтиерий комплекс K-фазода бўлган Магарам излари учун нокоммутатив интеграллаш назариясини қуриш. Магарам излари билан ассоциирланган нокоммутатив L^p-фазоларини тавсифлаш. Орлич-Канторович панжаралари назариясини қуриш.

Тадқиқот усуллари: Функционал анализ, операторлар алгебралари ва ўлчовли банах тахламалари назарияларининг умумий усулларидан фойдаланилди.

Олинган натижалар ва уларнинг янгилиги: Фон Нейман алгебрасида аниқланган, қиматлари ихтиёрий комплекс K-фазода бўлган Магарам изларининг тўла тавсифи берилган; Магарам излари учун нокоммутатив интеграллаш назарияси қурилган; Банах-Канторович фазоларининг янги синфи – Магарам излари билан ассоциирланган нокоммутатив L^p-фазолари киритилган ва уларнинг қўшма фазолари тўла тавсифланган; дизъюнкт ёйиладиган L^0-қийматли ўлчов билан ассоциирланган Орлич-Канторович панжараларининг янги синфи қурилган; ушбу панжараларнинг рефлексив бўлиш шартлари аниқланган; Орлич-Канторович панжараларини мусбат қисқартиришлари учун эргодик теоремаларнинг турли вариантлари исботланган; дизъюнкт ёйиладиган L^0-қийматли ўлчов билан берилган тўла Буль алгебраларининг шундай синфи ажратилганки, уларни узлуксиз (мос равишда, атомли) Буль алгебраларининг ўлчовли тахламаси кўринишида ифодалаш мумкин эканлиги кўрсатилган.

Амалий ахамияти: Иш назарий характерга эга.

Татбиқ этиш даражаси ва иқтисодий самарадорлиги: Диссертацияда келтирилган натижалар ва усуллардан функционал анализ ва операторлар алгебралари назарияларидан ўқитиладиган махсус курсларда фойдаланиш мумкин.

Қўлланиш сохаси: Операторлар алгебралари назарияси, вектор қийматли ўлчовлар назарияси, эргодик назария ва Банах-Канторович фазолари назарияси.

РЕЗЮМЕ

диссертации Закирова Ботира Сабитовича на тему «Некоммутативное интегрирование для следов Магарам и пространства Орлича-Канторовича» на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 – математический анализ.

Ключевые слова: Алгебра фон Неймана, измеримый оператор, векторнозначный след, пространство Банаха-Канторовича, измеримое банахово расслоение, векторная мера.

Объекты исследования: Некоммутативные L^p-пространства измеримых операторов, ассоциированные со следом Магарам, пространства Орлича-Канторовича.

Цель работы: Построение теории некоммутативного интегрирования для следов Магарам со значениями в произвольной комплексной порядково полной векторной решетке. Описание некоммутативных L^p-пространств, ассоциированных со следом Магарам. Построение теории решеток Орлича-Канторовича.

Методы исследования: Применены общие методы функционального анализа, теории операторных алгебр и теории измеримых банаховых расслоений.

Полученные результаты и их новизна: Дано полное описания следов Магарам на алгебре фон Неймана со значениями в произвольной комплексной порядково полной векторной решетке; построена теория некоммутативного интегрирования для следов Магарам; введен новый класс пространств Банаха-Канторовича – некоммутативные L^p-пространства, ассоциированные со следом Магарам и дано полное описание сопряженных пространств к этим пространствам; построен новый класс решеток Орлича-Канторовича, ассоциированных с дизъюнктно разложимой L^0-значной мерой; выяснены условия, при которых эти решетки рефлексивны; установлены различные варианты эргодических теорем для положительных сжатий решеток Орлича-Канторовича; выделен класс полных булевых алгебр с дизъюнктно разложимой L^0-значной мерой, допускающих представления в виде измеримого расслоения непрерывных (соответственно, атомических) булевых алгебр.

Практическая значимость: Работа носит теоретический характер.

Степень внедрения и экономическая эффективность: Результаты и методы, представленные в диссертации могут быть использованы при чтении специальных курсов по функциональному анализу и теории операторных алгебр.

Область применения: Теория операторных алгебр, теория векторнозначных мер, эргодическая теория и теория пространств Банаха-Канторовича.

RESUME

Thesis of Zakirov Botir Sabitovich on the scientific degree competition of the doctor of physical and mathematical sciences, speciality 01.01.01 − mathematical analysis

subject:

«Non-commutative integration with respect to traces Maharam and Orlicz-Kantorovich space »

Key words: Von Neumann algebra, measurable operator, vector-valued trace, Banach-Kantorovich space, measurable Banach bundle, vector-valued measure.

Subject of the inquiry: Non-commutative L^p-spaces of measurable operators associated with a Maharam trace, Orlicz-Kantorovich space.

Aim of the inquire: Construction theory non-commutative integration for Maharam trace with the values in a complex Dedekind complete Riesz spaces. Description non-commutative L^p-spaces associated with a Maharam trace. Construction theory of Orlicz-Kantorovich lattices.

Method of inquire: Methods of functional analysis, theory of operator algebras and theory of measurable Banach bundles are used.

The results achieved and their novelty: A complete description of Maharam trace on von Neumann algebra with the values in a complex Dedekind complete Riesz spaces is given; non-commutative integration for Maharam trace is constructed; new class Banach-Kantorovich space − non-commutative L^p-spaces associated with a Maharam trace − is defined and their dual spaces is described; new class Orlicz-Kantorovich lattices associated with a disjointly decomposable L^0-valued measure is constructed; explained condition, in which they reflexed; some version of ergodic theorems for positive contractions in Orlicz-Kantorovich lattices is established; the class a complete Boolean algebras with disjointly decomposable L^0-valued measure, representable as a measurable bundle of continuous (respectively, atomic) Boolean algebras is divided.

Practical value: The work has a theoretical character.

Degree of embed and economic effectivity: Results and methods introduced in the thesis can be used in reading special courses on functional analysis and theory of operator algebras.

Sphere of usage: Theory of operator algebras, the vector-valued measure theory, the ergodic theory, and theory of Banach-Kantorovich space.